Math. Z. 170, 221–232 (1980)

Mathematische Zeitschrift

Koatomare Moduln

Helmut Zöschinger

Mathematisches Institut der Universität, Theresienstraße 39, D-8000 München 2, Bundesrepublik Deutschland

Für Alex Rosenberg

Einleitung

Ein Modul M heißt *koatomar*, wenn jeder von M verschiedene Untermodul in einem maximalen Untermodul enthalten ist. Zwei Klassen von koatomaren Moduln sind wohlbekannt: Alle endlich erzeugten, und alle halbeinfachen Moduln. Allgemeiner ist jeder Modul M koatomar, der eine Kette $0=M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$ besitzt, in der jedes M_i/M_{i-1} endlich erzeugt oder halbeinfach ist. Das Hauptergebnis unserer Arbeit ist, daß über einem kommutativen noetherschen lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ davon die Umkehrung gilt, d.h.

Satz A. *Für einen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *M ist koatomar.*
(ii) *Es gibt ein $e \geqq 1$, so daß $M/\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{m}^e)$ endlich erzeugt ist.*
(iii) *Es gibt ein $e \geqq 1$, so daß $\mathfrak{m}^e M$ endlich erzeugt ist.*

Weil im nicht-lokalen Fall ein R-Modul M genau dann koatomar ist, wenn es alle $R_\mathfrak{m}$-Moduln $M_\mathfrak{m}$ sind, haben wir so eine Strukturaussage für die koatomaren Moduln über kommutativen noetherschen Ringen.

Koatomare Moduln erscheinen in der Theorie der komplementierten, der semiperfekten und der perfekten Moduln ([1], p. 96; [4], p. 253, [8], p. 47). Über Dedekindringen sind alle Kerne von wesentlichen Überdeckungen koatomar ([9], p. 195). Kommutative noethersche Ringe mit dieser letzten Eigenschaft – über denen also alle kleinen Untermoduln koatomar sind – untersuchen wir im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit. Bezeichnen wir sie als *K-Ringe*, so gilt: Genau dann ist R ein K-Ring, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ der Ring $R_\mathfrak{m}$ ein K-Ring ist, und für einen lokalen Ring R mit Vervollständigung $\hat{R}$ erhalten wir den im Vergleich zu Satz A viel leichter zu beweisenden

Satz B. *Genau dann ist R ein K-Ring, wenn $\dim(R) \leqq 1$ ist und das Nilradikal von $\hat{R}$ endliche Länge hat.*

Ein lokaler 1-dimensionaler Cohen-Macaulay-Ring ist also genau dann K-Ring, wenn er analytisch unverzweigt ist.

0025-5874/80/0170/0221/$02.40

1. Hilfsmittel

Stets sei in dieser Arbeit R ein kommutativer noetherscher Ring. Ein R-Modul M heiße radikalvoll (sockelfrei), wenn er keine maximalen (einfachen) Untermoduln besitzt. M ist also genau dann koatomar, wenn jeder radikalvolle Faktormodul von M gleich Null ist. Die Klasse der koatomaren R-Moduln ist gegenüber Faktormoduln und Gruppenerweiterungen abgeschlossen; daß sie es auch gegenüber Untermoduln ist, liegt daran, daß wir R noethersch vorausgesetzt haben:

Lemma 1.1. *Sei M koatomar und U ein Untermodul von M. Dann gilt:*

(a) *U ist koatomar.*

(b) *Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit $U \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i M$, so ist U $\mathfrak{a}$-teilbar.*

Beweis. (a) Angenommen, U hat einen radikalvollen Faktormodul $\neq 0$, so gibt es sogar ein $f: U \to E$, worin $\operatorname{Bi} f$ radikalvoll $\neq 0$ ist und E injektive Hülle eines einfachen Moduls. Nach ([6], Proposition 3) ist nun E artinsch, also jeder koatomare Untermodul E' von E endlich erzeugt (weil es $E'/\operatorname{Ra}(E')$ ist). Setzt man f zu einem $g: M \to E$ fort, so ist $\operatorname{Bi} f \subset \operatorname{Bi} g$, also mit $\operatorname{Bi} g$ auch $\operatorname{Bi} f$ endlich erzeugt, entgegen der Annahme. (b) Das ergibt sich auch aus der Folgerung 1 zu (1.2), aber der folgende unmittelbare Beweis vermeidet die für (1.2) verwendeten Hilfsmittel: Angenommen, es ist $\mathfrak{a} U \neq U$, so gibt es wie eben ein $f: U \to E$ mit $\mathfrak{a} \operatorname{Bi} f = 0$, aber $\operatorname{Bi} f \neq 0$. Für eine Fortsetzung $g: M \to E$ ist dann wieder $\operatorname{Bi} g$ von endlicher Länge, also $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i \operatorname{Bi} g$ $\mathfrak{a}$-teilbar, also $\operatorname{Bi} f = g(U)$ $\mathfrak{a}$-teilbar, was nicht wahr ist.

Insbesondere erhält man für koatomare Moduln den *Krullschen Durchschnittssatz:* Ist J das Jacobsonradikal von R und M koatomar, so ist $\bigcap_{i=1}^{\infty} J^i M = 0$.

Folgerung. *Genau dann ist M koatomar, wenn $M_{\mathfrak{m}}$ koatomarer $R_{\mathfrak{m}}$-Modul ist für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$.*

Beweis. Sind alle $M_{\mathfrak{m}}$ koatomar und ist X ein radikalvoller Faktormodul von M, so ist $X_{\mathfrak{m}}$ ein radikalvoller Faktormodul von $M_{\mathfrak{m}}$, also null. Weil das für alle $\mathfrak{m}$ gilt, folgt $X = 0$. Sei nun umgekehrt M koatomar: Jeder radikalvolle Faktormodul von $M_{\mathfrak{m}}$ ist von der Form $(M/A)_{\mathfrak{m}}$, wobei dann M/A als R-Modul $\mathfrak{m}$-teilbar ist. Nach (b) ist dann auch jeder Untermodul von M/A $\mathfrak{m}$-teilbar, also $\operatorname{Ann}_R(\bar{x}) \not\subset \mathfrak{m}$ für alle $\bar{x} \in M/A$, d.h. $(M/A)_{\mathfrak{m}} = 0$.

Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal, so heißt ein Modul M bekanntlich $\mathfrak{a}$-primär, wenn $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a}^i) = M$ ist. Falls M endlich erzeugt ist, folgt trivialerweise $\mathfrak{a}^e M = 0$ für ein $e \geqq 1$. Das wichtigste Resultat dieses Abschnittes ist, daß dieselbe Aussage, unter einer gewissen Zusatzbedingung an $\operatorname{Ass}(M)$, auch für koatomare Moduln gilt:

Lemma 1.2. *Sei M koatomar und $\mathfrak{a}$-primär. Außerdem gebe es endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k$, so daß jedes Element von $\operatorname{Ass}(M)$ in einem der $\mathfrak{m}_i$ enthalten ist. Dann gibt es ein $e \geqq 1$ mit $\mathfrak{a}^e M = 0$.*

Beweis. Sei $E(R/\mathfrak{m}_i)$ eine injektive Hülle von $R/\mathfrak{m}_i$ für alle $1 \leqq i \leqq k$. Dann ist $I = \coprod_{i=1}^{k} E(R/\mathfrak{m}_i)$ ein Kogenerator für M, denn zu jedem $0 \neq x \in M$ gibt es ein $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(Rx)$, also $\mathrm{Ann}_R(x) \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_j$ für ein geeignetes j, und der Epimorphismus $Rx \to R/\mathfrak{m}_j$ läßt sich zu einem $g\colon M \to I$ hochheben mit $g(x) \neq 0$. Mit $M^0 = \mathrm{Hom}_R(M, I)$ ist also die kanonische Abb. $M \to M^{00}$ injektiv, und es genügt zu zeigen, daß M^0 durch eine Potenz von $\mathfrak{a}$ annulliert wird. Nun ist M $\mathfrak{a}$-primär, d.h. $M \cong \varinjlim \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^i, M)$, und daraus folgt $M^0 \cong \varprojlim R/\mathfrak{a}^i \otimes_R M^0 \cong \varprojlim M^0/\mathfrak{a}^i M^0$, d.h. M^0 ist in der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie vollständig. Außerdem ist M^0 $\mathfrak{a}$-primär, denn M koatomar und I artinsch impliziert für alle $f \in M^0$, daß $\mathrm{Bi}\, f$ endlich erzeugt ist, also $\mathfrak{a}^n \mathrm{Bi}\, f = 0$ für ein $n \geqq 1$, d.h. $f \in \mathrm{Ann}_{M^0}(\mathfrak{a}^n)$. Damit ist der vollständige metrische Raum M^0 Vereinigung der abgeschlossenen Teilmengen $\mathrm{Ann}_{M^0}(\mathfrak{a}^i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, so daß nach dem Satz von Baire eines der $\mathrm{Ann}_{M^0}(\mathfrak{a}^i)$ einen inneren Punkt hat, d.h. $\mathfrak{a}^{e_2} M^0 \subset \mathrm{Ann}_{M^0}(\mathfrak{a}^{e_1})$ mit natürlichen Zahlen e_1, e_2. Es folgt $\mathfrak{a}^{e_1 + e_2} M^0 = 0$ wie gewünscht.

Bemerkung 1. Ist M nur koatomar und $\mathfrak{a}$-primär, so folgt zwar noch $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i M = 0$ nach (1.1, b), aber die Existenz eines e wie im Lemma läßt sich nicht mehr zeigen: In $R = \mathbb{Z}[[X]]$ gibt es paarweise verschiedene maximale Ideale $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$, für die $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}_i$ ungleich Null ist, aber $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}_i^i = 0$. Es ist leicht zu sehen, daß dann $M = \coprod_{i=1}^{\infty} R/\mathfrak{m}_i^i$ koatomar und $\mathfrak{a}$-primär ist, aber $\mathfrak{a}^n M \neq 0$ für alle n.

Bemerkung 2. Die Idee, die „Beschränktheit" eines Moduls mit Hilfe des Satzes von Baire zu zeigen, haben wir in ([7] Lemma 7.6) gefunden. – Andererseits wird über einem diskreten Bewertungsring die Strukturbestimmung der koatomaren Moduln durch die Existenz eines Basis-Untermoduls außerordentlich erleichtert (s. [8] Lemma 2.1).

Folgerung 1. *Sei M koatomar, U ein endlich erzeugter Untermodul von M und $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Zu jedem $e \geqq 1$ gibt es dann ein $f \geqq 1$ mit $U \cap \mathfrak{a}^f M \subset \mathfrak{a}^e U$.*

Beweis. Wir wollen vorausschicken, daß ein Modul N genau dann $\mathfrak{a}$-primär ist, wenn $\mathrm{Ann}_N(\mathfrak{a})$ ein großer Untermodul von N ist, und daß das äquivalent ist mit $\mathfrak{a} \subset \bigcap \mathrm{Ass}(N)$. Insbesondere ist jede wesentliche Erweiterung eines $\mathfrak{a}$-primären Moduls wieder $\mathfrak{a}$-primär. – Sind nun M, U und e wie angegeben, so gehen wir wie in ([3] Theorem 73) vor: Ist V ein Untermodul von M mit $U \cap V = \mathfrak{a}^e U$ und V maximal bezüglich dieser Eigenschaft, so ist $U/\mathfrak{a}^e U \to M/V$ ein wesentlicher Monomorphismus, also M/V $\mathfrak{a}$-primär und $\mathrm{Ass}(M/V) = \mathrm{Ass}(U/\mathfrak{a}^e U)$ endlich. Nach dem Lemma folgt $\mathfrak{a}^f M/V = 0$ für ein $f \geqq 1$, also $U \cap \mathfrak{a}^f M \subset \mathfrak{a}^e U$. (Falls $R/\mathfrak{a}$ semilokal ist, kann man auf die Bedingung „U endlich erzeugt" verzichten, denn dann ist die Forderung des Lemmas an $\mathrm{Ass}(M/V)$ von selbst erfüllt.)

Folgerung 2. *Ist M koatomar und S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, so ist auch M_S als R_S-Modul koatomar.*

Beweis. Wie in der Folgerung zu (1.1) können wir gleich M_S radikalvoll annehmen und müssen $M_S = 0$ zeigen. Wäre $M_S \neq 0$, so gäbe es ein $x \in M$ mit

$\mathrm{Ann}_R(x) \cap S = \emptyset$, also ein maximales Ideal $\mathfrak{p} R_S$ in R_S mit $\mathrm{Ann}_R(x) \subset \mathfrak{p}$. Nach Folgerung 1 hat man $Rx \cap \mathfrak{p}^f M \subset \mathfrak{p} Rx$ für ein $f \geqq 1$, und $\frac{x}{1} \in M_S = (\mathfrak{p} R_S)^f M_S$ liefert $sx \in \mathfrak{p}^f M$ für ein $s \in S$, also $s - r \in \mathrm{Ann}_R(x)$ für ein $r \in \mathfrak{p}$, und damit den Widerspruch $s \in \mathfrak{p}$.

Für den Induktionsbeweis in (2.3) brauchen wir neben (1.2) und der damit bewiesenen Folgerung 2 (M_S statt nur $M_{\mathfrak{m}}$) noch ein Kriterium, das von „lokal endlich erzeugt“ auf „endlich erzeugt“ schließen läßt:

Lemma 1.3. *Für einen Modul M sind äquivalent:*

(i) *M ist endlich erzeugt.*

(ii) *Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist $M_{\mathfrak{m}}$ als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul endlich erzeugt, und für jeden Faktormodul X von M ist* $\mathrm{Ass}(X)$ *endlich.*

Beweis. Weil (i→ii) klar ist, bleibt (ii→i) zu zeigen, und wir behaupten zuerst, daß M endliche Goldie-Dimension hat: Ist $U' \subset U \subset M$ mit U/U' halbeinfach, so müssen fast alle Isotypiekomponenten von U/U' gleich Null sein und jede von ihnen endlich erzeugt, so daß insgesamt U/U' endlich erzeugt ist; in $U = \bigoplus U_\lambda$, alle U_λ zyklisch, müssen also fast alle U_λ radikalvoll, d.h. null sein wie behauptet. Nach dem gleichen Schluß hat jeder Faktormodul von M endliche Goldie-Dimension, so daß es nach [2] einen endlich erzeugten Untermodul A von M gibt mit M/A radikalvoll. Nun ist M nach der Folgerung zu (1.1) koatomar, also $A = M$.

2. Der lokale Fall

Hauptziel dieses Abschnittes ist es, den Satz A der Einleitung zu beweisen. Sei also jetzt stets R *lokal* mit dem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{m}$, E die injektive Hülle von $R/\mathfrak{m}$. Ist M ein R-Modul, so sei $M^0 = \mathrm{Hom}_R(M, E)$ und $L(M) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{m}^i)$. Alle topologischen Begriffe beziehen sich auf die $\mathfrak{m}$-adische Topologie.

Lemma 2.1. *Für einen Modul M sind äquivalent:*

(i) *M ist koatomar.*

(ii) *M^0 ist $\mathfrak{m}$-primär.*

(iii) *M^{00} ist separiert.*

Beweis. (i→ii→iii) wurde im Beweis von (1.2) gezeigt, und für die Umkehrungen benützen wir die folgenden, für jeden Modul X geltenden Formeln:

$$\mathrm{Ann}_{X^0}(\mathrm{So}(X)) = \mathrm{Ra}(X^0), \qquad \mathrm{Ann}_{X^0}(\mathrm{Ra}(X)) = \mathrm{So}(X^0).$$

Ist nun bei (ii→i) X ein radikalvoller Faktormodul von M, so ist X^0 ein sockelfreier Untermodul von M^0, also $X^0 = 0$, d.h. $X = 0$. Ebenso zeigt man bei (iii→ii), daß jeder sockelfreie Faktormodul von M^0 gleich Null ist.

Folgerung 1. *Eine direkte Summe $M = \oplus M_\lambda$ ist genau dann koatomar, wenn alle M_λ koatomar sind und wenn es ein $e \geqq 1$ gibt mit $\mathfrak{m}^e M_\lambda = 0$ für fast alle λ.*

Beweis. Es ist nur noch, wenn M koatomar ist, die Existenz eines solchen e zu zeigen. Zunächst sind fast alle M_λ in der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie diskret, denn gäbe es paarweise verschiedene $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ mit M_{λ_n} nicht-diskret, so wären auch die $D_n = (M_{\lambda_n})^0$ nicht-diskret und $\prod_{n=1}^{\infty} D_n$ als Faktormodul von M^0 $\mathfrak{m}$-primär: Wählt man zu jedem $n \geqq 1$ ein $f_n \in D_n \setminus \mathrm{Ann}_{D_n}(\mathfrak{m}^n)$, so wird $f = (f_1, f_2, \ldots)$ durch eine Potenz von $\mathfrak{m}$ annulliert, sagen wir $\mathfrak{m}^k$, und es folgt speziell $f_k \in \mathrm{Ann}_{D_k}(\mathfrak{m}^k)$ entgegen der Wahl. - Fast alle M_λ liegen also in $L(M)$, so daß das e aus (1.2) mit $\mathfrak{m}^e L(M) = 0$ das Gewünschte leistet.

Folgerung 2. *Ist M koatomar, so ist* $\mathrm{Ass}(M)$ *endlich.*

Beweis. Weil $\mathrm{Ass}(L(M))$ aus höchstens einem Element besteht, können wir gleich $L(M) = 0$, d.h. M sockelfrei annehmen. Dann hat aber M nach Folgerung 1 endliche Goldie-Dimension, und ein endlich erzeugter großer Untermodul A von M zeigt, daß $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(A)$ endlich ist.

Für den Beweis des Hauptsatzes brauchen wir von dem folgenden Lemma nur die Aussage, daß sich über einem lokalen Ring der Krull-Dimension $\leqq 1$ die Eigenschaft „endlich-dimensional" (im Sinne von Goldie) auf Faktormoduln vererbt. Wir wollen trotzdem zeigen, daß das charakteristisch für $\dim(R) \leqq 1$ ist:

Lemma 2.2. *Für den Ring R sind äquivalent:*

(i) *Jeder Faktormodul eines endlich-dimensionalen Moduls ist wieder endlich-dimensional.*

(ii) *Jeder endlich-dimensionale Modul ist Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen artinschen Modul.*

(iii) $\dim(R) \leqq 1$.

Beweis. Sagen wir, M besitze die Eigenschaft $(*)$, wenn es Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen artinschen Modul ist. Weil sich $(*)$ auf Faktormoduln vererbt, ist (ii $\rightarrow$ i) klar. Bei (i $\rightarrow$ iii) nehmen wir an, daß es ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\dim(R/\mathfrak{p}) > 1$ gibt, und bezeichnen die injektive Hülle von $R/\mathfrak{p}$ mit M. Dann ist M endlich-dimensional, nicht aber der Faktormodul $\tilde{M} = M/(R/\mathfrak{p})$, denn $\mathrm{Ass}(\tilde{M})$ ist unendlich: Jedes Primideal $\mathfrak{q}$, mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ und Höhe $(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) = 1$ (und davon gibt es nach dem Krullschen Hauptidealsatz unendlich viele) gehört zu $\mathrm{Ass}(\tilde{M})$, denn mit $s \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} = (\mathfrak{p} + (s)) : (r)$ und $x \in M$ mit $\bar{1} = sx$ ist $\widetilde{rx}$ ein Element von $\tilde{M}$ mit $\mathrm{Ann}_R(\widetilde{rx}) = \mathfrak{q}$.

(iii $\rightarrow$ ii) Sei M endlich-dimensional. Weil $(*)$ gegenüber Untermoduln und Gruppenerweiterungen abgeschlossen ist, können wir gleich M als injektive Hülle eines $R/\mathfrak{p}$ annehmen. Falls $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, ist M sogar artinsch. Sei also $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{m}$. Nach Voraussetzung ist Höhe $(\mathfrak{p}) = 0$, d.h. $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^{(n+1)} = \ldots$ für ein $n \geqq 1$, also $\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{p}^n) = M$ nach ([5] Theorem 3.4). Es genügt daher zu zeigen, daß die endlich-dimensionalen Moduln $\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{p})$, $\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{p}^{i+1})/\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{p}^i)\,(i = 1, 2, \ldots)$ alle die Eigenschaft $(*)$ haben. Bezeichnen wir einen von ihnen mit N, so gilt: N ist ein torsionsfreier $R/\mathfrak{p}$-Modul von endlichem Rang, und $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$. Wir können also $\mathfrak{p}=0$ annehmen, und ist jetzt N' ein endlich erzeugter großer Untermodul von N, so gilt für jedes $\mathfrak{q}\in\mathrm{Ass}(N/N')$, daß $\mathfrak{q}\neq 0$, also $\mathfrak{q}=\mathfrak{m}$ sein muß, d.h. N/N' ist $\mathfrak{m}$-primär. Weil schließlich die Folge $0\to\mathrm{So}(N/N')\to\mathrm{Ext}^1_R(R/\mathfrak{m},N')$ exakt, also $\mathrm{So}(N/N')$ endlich erzeugt ist, ist N/N' sogar artinsch wie gewünscht.

Lemma 2.3. *Sei R ein Integritätsring, aber kein Körper, und sei M torsionsfrei und koatomar. Dann ist M endlich erzeugt.*

Beweis. Durch Induktion über $n=\dim(R)$. M ist sockelfrei, also nach Folgerung 1 zu (2.1) endlich-dimensional. Nach eben ist dann bei $\underline{n=1}$ auch $M/Ra(M)$ endlich-dimensional, also M endlich erzeugt.

Bei $\underline{n>1}$ nehme man ein $0\neq x\in\mathfrak{m}$ und $S=\{1,x,x^2,\dots\}$. Dann ist R_S ein noetherscher Integritätsring, der nicht mehr notwendig lokal, aber auf jeden Fall kein Körper ist (wegen $\dim(R)>1$, s. [3] Theorem 145). Als R_S-Modul ist nun M_S lokal endlich erzeugt, denn für jedes maximale Ideal $\mathscr{M}$ von R_S ist $(M_S)_{\mathscr{M}}$ nach Folgerung 2 zu (1.2) ein koatomarer torsionsfreier Modul über dem Ring $(R_S)_{\mathscr{M}}\cong R_{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p}=\mathscr{M}\cap R$, ist also nach Induktionsannahme endlich erzeugt (wegen $1\leqq\dim(R_{\mathfrak{p}})<n$). Weil jeder Faktormodul von M_S von der Form $(M/U)_S$ ist, hat er nach Folgerung 2 zu (2.1) nur endlich viele assoziierte Primideale, so daß M_S nach (1.3) sogar endlich erzeugt ist, also $(M/A)_S=0$ für einen endlich erzeugten Untermodul A von M. Mit dem Ideal $\mathfrak{a}=(x)$ bedeutet das, daß M/A $\mathfrak{a}$-primär ist. Nach (1.2) gibt es ein $e\geqq 1$ mit $\mathfrak{a}^e M/A=0$, so daß auch M endlich erzeugt ist.

Satz 2.4. *Für einen Modul M sind äquivalent:*

(i) *M ist koatomar.*

(ii) *Es gibt ein $e\geqq 1$, so daß $M/\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{m}^e)$ endlich erzeugt ist.*

(iii) *Es gibt ein $e\geqq 1$, so daß $\mathfrak{m}^e M$ endlich erzeugt ist.*

Beweis. Mit (1.2) und (2.3) ist fast nichts mehr zu zeigen. Weil (ii$\to$iii$\to$i) klar ist, bleibt nur noch (i$\to$ii) zu beweisen, und weil $L(M)$ diskret ist, können wir gleich $L(M)=0$, d.h. M sockelfrei annehmen, außerdem $M\neq 0$. Für die injektive Hülle $M\subset I$ gilt dann $I=\bigoplus_{j=1}^{k} I_j$ mit I_j direkt unzerlegbar, und mit den Projektionen $\pi_j\colon I\to I_j$ weiter $M\subset\bigoplus_{j=1}^{k}\pi_j(M)$. Es genügt also zu zeigen, daß alle $\pi_j(M)$ endlich erzeugt sind, d.h. wir nehmen an: M ist koatomar und hat ein $R/\mathfrak{p}$ als großen Untermodul, mit $\mathfrak{p}\subsetneqq\mathfrak{m}$. Wie in (2.2) sind dann $\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{p})$, $\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{p}^{i+1})/\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{p}^i)$ $(i=1,2,\dots)$ torsionsfreie koatomare Moduln über dem Integritätsring $R/\mathfrak{p}$, also nach (2.3) alle endlich erzeugt, d.h. auch die R-Moduln $\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{p}^i)$ $(i=1,2,\dots)$ endlich erzeugt. Weil schließlich M $\mathfrak{p}$-primär ist, gibt es wieder nach (1.2) ein $e\geqq 1$ mit $\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{p}^e)=M$, und es folgt die Behauptung.

Folgerung 1. *Ist M koatomar, U ein Untermodul von M und $\mathfrak{a}$ ein Ideal, so gibt es ein $r\geqq 1$ mit $U\cap\mathfrak{a}^n M=\mathfrak{a}^{n-r}(U\cap\mathfrak{a}^r M)$ für alle $n>r$ (Artin-Rees).*

Beweis. Falls $\mathfrak{a}=R$, ist das klar. Sei also $\mathfrak{a}\subsetneqq R$, so daß es nach eben ein $e\geqq 1$ gibt mit $\mathfrak{a}^e M$ endlich erzeugt, und dazu nach Folgerung 1 zu (1.2) ein $f\geqq 1$ mit $U\cap\mathfrak{a}^f M\subset\mathfrak{a}^e U$ (nach der Zusatzbemerkung dort braucht U nicht endlich erzeugt zu sein). Zu dem Paar $\mathfrak{a}^e U \subset \mathfrak{a}^e M$ gibt es jetzt nach Artin-Rees ein $r' \geqq 1$ mit $\mathfrak{a}^e U \cap \mathfrak{a}^{i+e} M = \mathfrak{a}^{i-r'}(\mathfrak{a}^e U \cap \mathfrak{a}^{r'+e} M)$ für alle $i > r'$, und man kann r' so groß annehmen, daß $r'+e \geqq f$ ist. Dann leistet $r = r'+e$ das Gewünschte.

Folgerung 2. *Sei M koatomar, und seien $\hat{M}$ bzw. $\hat{R}$ die Vervollständigungen bzgl. der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie. Dann ist auch $\hat{M}$ als $\hat{R}$-Modul koatomar, und die kanonische Abb. $\hat{R} \otimes_R M \to \hat{M}$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach (1.1) sind alle Untermoduln von M abgeschlossen in M (und das ist natürlich charakteristisch für koatomar). Wir zeigen zuerst die Isomorphie: Mit $L = L(M)$ ist im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \hat{R} \otimes_R L & \longrightarrow & \hat{R} \otimes_R M & \longrightarrow & \hat{R} \otimes_R M/L & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \omega_L} & & \downarrow{\scriptstyle \omega_M} & & \downarrow{\scriptstyle \omega_{M/L}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \hat{L} & \xrightarrow{\hat{\imath}} & \hat{M} & \xrightarrow{\hat{v}} & \widehat{M/L} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

die obere Zeile exakt und, weil L diskret bzw. M/L endlich erzeugt ist, sowohl ω_L als auch $\omega_{M/L}$ bijektiv. Weil L abgeschlossen in M ist, ist bekanntlich $\hat{v}$ surjektiv und $\operatorname{Ke} \hat{v} = \overline{\varphi_M(L)}$, wobei φ_M die kanonische Einbettung $M \to \hat{M}$ ist; und weil L nach der Folgerung 1 zu (1.2) die von M induzierte Topologie hat, ist $\hat{\imath}$ injektiv und $\operatorname{Bi} \hat{\imath} = \overline{\varphi_M(L)}$. Damit ist auch die untere Zeile exakt, und daher ω_M bijektiv. Schließlich ist $\hat{L}$ als $\hat{R}$-Modul diskret und $\widehat{M/L}$ als $\hat{R}$-Modul endlich erzeugt, also $\hat{M}$ koatomar wie behauptet.

Folgerung 3. *Sind M und N koatomar, so auch die R-Moduln* $\operatorname{Tor}_i^R(M, N)$ *und* $\operatorname{Ext}_R^i(M, N)$ *für alle $i \geqq 0$.*

Beweis. In der exakten Folge $\operatorname{Tor}_i^R(M/L(M), L(N)) \to \operatorname{Tor}_i^R(M/L(M), N) \to \operatorname{Tor}_i^R(M/L(M), N/L(N))$ ist das erste Glied diskret und das dritte endlich erzeugt, also das mittlere koatomar. Weil aber in der exakten Folge $\operatorname{Tor}_i^R(L(M), N) \to \operatorname{Tor}_i^R(M, N) \to \operatorname{Tor}_i^R(M/L(M), N)$ auch das erste Glied diskret ist, folgt die Behauptung für Tor. Ebenso mit Ext.

3. Zusammenfassung

Sei wieder R beliebig (d.h. noethersch, aber nicht notwendig lokal). Wir wollen die Ergebnisse von § 2 globalisieren und damit die Liste von Eigenschaften koatomarer Moduln aus § 1 fortsetzen. Zunächst bezeichnen wir bei einem beliebigen Modul M die Summe aller artinschen Untermoduln mit $L(M)$. Nach ([6] Theorem 1) ist $L(M) = \oplus L_{\mathfrak{m}}(M)$, wobei $\mathfrak{m}$ alle maximalen Ideale von R durchläuft und $L_{\mathfrak{m}}(M) = \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{m}^i)$ ist. M heißt *halbartinsch*, wenn $L(M) = M$ ist, und das ist äquivalent damit, daß $\operatorname{Ass}(M)$ nur aus maximalen Idealen besteht.

Weil M genau dann koatomar ist, wenn es alle $M_{\mathfrak{m}}$ sind, folgt aus § 2 unmittelbar:

Lemma 3.1. (a) *Genau dann ist M koatomar, wenn jedes $L_{\mathfrak{m}}(M)$ durch eine Potenz von $\mathfrak{m}$ annulliert wird und wenn $M/L(M)$ lokal endlich erzeugt ist.*

(b) *Genau dann ist $M = \oplus M_\lambda$ koatomar, wenn es alle M_λ sind und wenn es zu jedem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ein $e \geqq 1$ gibt mit $\mathfrak{m}^e M_\lambda = \mathfrak{m}^{e+1} M_\lambda$ für fast alle λ.*

(c) *Sind M und N koatomar, so auch $\mathrm{Tor}_i^R(M, N)$ für alle $i \geqq 0$; ist M endlich erzeugt und N koatomar, so ist $\mathrm{Ext}_R^i(M, N)$ koatomar für alle $i \geqq 0$.*

Ein Spezialfall von (b) ist bemerkenswert: *Ist $M^{(\mathbb{N})}$ koatomar, so muß M halbartinsch sein.* Hätte man nämlich $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, so folgte zu $\mathfrak{m}^e M = \mathfrak{m}^{e+1} M$, daß $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}(M/\mathfrak{m}^e M)$, also $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathfrak{m}^e M)$, also $R/\mathfrak{p}$ nach (1.1, b) $\mathfrak{m}$-teilbar wäre, und das ist nicht möglich.

Lemma 3.2. *Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R. Genau dann ist $M_{\mathfrak{m}}$ als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul koatomar, wenn es einen koatomaren Untermodul A von M gibt mit $(M/A)_{\mathfrak{m}} = 0$.*

Beweis. Nur zur Existenz von A ist etwas zu sagen: Nach (2.4) gibt es einen Untermodul U von M und ein $e \geqq 1$, so daß $U_{\mathfrak{m}}$ durch $(\mathfrak{m} R_{\mathfrak{m}})^e$ annulliert wird und $(M/U)_{\mathfrak{m}}$ endlich erzeugt ist. Wählt man einen Untermodul A_1 von U mit $A_1 \cap \mathfrak{m}^e U = 0$, und A_1 maximal bezüglich dieser Eigenschaft, so folgt $\mathfrak{m}^e A_1 = 0$ und $(U/A_1)_{\mathfrak{m}} = 0$; wählt man weiter einen endlich erzeugten Untermodul A_2 von M mit $(M/A_2 + U)_{\mathfrak{m}} = 0$, so leistet $A = A_1 + A_2$ das Gewünschte.

Schließlich läßt sich in Verallgemeinerung der Folgerung 2 zu (1.2) genau angeben, bei welchen Grundringerweiterungen die Eigenschaft „koatomar" erhalten bleibt:

Lemma 3.3. *Ist T ein weiterer kommutativer noetherscher Ring, so sind für einen Ringhomomorphismus $R \to T$ äquivalent:*

(i) *Für jeden koatomaren R-Modul M ist $T \underset{R}{\otimes} M$ ein koatomarer T-Modul.*

(ii) *Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R ist der Ring $T/\mathfrak{m} T$ artinsch.*

Beweis. Bei (i → ii) gilt für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$, daß der halbeinfache R-Modul $R/\mathfrak{m}^{(\mathbb{N})}$ in den koatomaren T-Modul $T/\mathfrak{m} T^{(\mathbb{N})}$ übergeführt wird, so daß nach dem Spezialfall von (3.1, b) der T-Modul $T/\mathfrak{m} T$ halbartinsch ist, d.h. endliche Länge hat.

Bei (ii → i) gilt sogar für jeden halbartinschen R-Modul A, daß $T \underset{R}{\otimes} A$ ein halbartinscher T-Modul ist. Sei nun M koatomar: Mit $M/L(M)$ ist auch $T \underset{R}{\otimes} M/L(M)$ lokal endlich erzeugt, so daß wir gleich $M = \oplus L_{\mathfrak{m}}(M)$ annehmen können. Weil dann $T \underset{R}{\otimes} M$ ein halbartinscher T-Modul ist, müssen wir nur noch zeigen, daß für jedes maximale Ideal $\mathcal{M}$ von T der T-Modul $L_{\mathcal{M}}(T \underset{R}{\otimes} M)$ koatomar ist. *1. Fall: $\mathcal{M} \cap R$* ist kein maximales Ideal in R. Dann ist $\mathfrak{m} T \not\subset \mathcal{M}$, also $\mathcal{M} \notin \mathrm{Ass}_T(T \underset{R}{\otimes} L_{\mathfrak{m}}(M))$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R (weil $T \underset{R}{\otimes} L_{\mathfrak{m}}(M)$ ein $\mathfrak{m} T$-primärer T-Modul ist), also sogar $L_{\mathcal{M}}(T \underset{R}{\otimes} M) = 0$. *2. Fall: $\mathcal{M} \cap R$* ist ein maximales Ideal in R, sagen wir gleich $\mathfrak{m}$. Dann ist $L_{\mathcal{M}}(T \underset{R}{\otimes} M) \cong L_{\mathcal{M}}(T \underset{R}{\otimes} L_{\mathfrak{m}}(M))$, und weil $L_{\mathfrak{m}}(M)$ durch $\mathfrak{m}^e (e \geqq 1)$ annulliert wird, ist $T \underset{R}{\otimes} L_{\mathfrak{m}}(M)$ ein Modul über dem artinschen Ring $T/(\mathfrak{m} T)^e$, also koatomar.

Folgerung. *Sei M koatomar, sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal, so daß R und M in der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie separiert sind, und seien $\hat{R}$ bzw. $\hat{M}$ die dazugehörigen Vervollständigungen. Dann gilt:*

(*a*) *Die kanonische Abb. $\omega_M\colon \hat{R}\bigotimes_R M \to \hat{M}$ ist injektiv.*

(b) *Genau dann ist ω_M surjektiv, wenn $\hat{M}$ als $\hat{R}$-Modul koatomar ist.*

Beweis. (a) Zu $\omega_M(\sum a_i \otimes x_i)=0$ gibt es einen endlich erzeugten Untermodul U von M, der alle x_i enthält. Natürlich ist ω_U: $\hat{R}\bigotimes_R U \to \hat{U}$ injektiv, aber auch $\hat{\imath}$: $\hat{U} \to \hat{M}$, weil U nach der Folgerung 1 zu (1.2) die von M induzierte Topologie hat. Also ist $\sum a_i \otimes x_i$ sogar als Element von $\hat{R}\bigotimes_R U$ gleich Null.

(b) Der Ringhomomorphismus $R \to \hat{R}$ erfüllt die Bedingung (ii) des Lemmas, so daß $\operatorname{Bi}\omega_M$ als $\hat{R}$-Modul koatomar ist. Bekanntlich ist $\operatorname{Bi}\omega_M + \mathfrak{a}\hat{R}\hat{M} = \hat{M}$ und $\mathfrak{a}\hat{R}$ in allen maximalen Idealen von $\hat{R}$ enthalten, also $\operatorname{Bi}\omega_M + \operatorname{Ra}(\hat{M}) = \hat{M}$. Damit folgt die behauptete Äquivalenz. (Bei dem in Bemerkung 1 zu (1.2) angegebenen koatomaren Modul M ist ω_M tatsächlich nicht surjektiv.)

4. Wann sind kleine Untermoduln koatomar?

Wie in der Einleitung bezeichnen wir R als *K-Ring*, wenn alle kleinen Untermoduln koatomar sind. Daß Dedekindringe diese Eigenschaft haben, sieht man ganz einfach: Ist U klein in M und U/U' radikalvoll, so ist bekanntlich U/U' injektiv, also direkter Summand in M/U'. Weil U/U' auch klein in M/U' ist, muß es null sein. – Zur Charakterisierung der K-Ringe zeigen wir zuerst, daß Kleinheit beim Lokalisieren nach maximalen Idealen erhalten bleibt:

Lemma 4.1. *Sei U ein Untermodul von M. Genau dann ist U klein in M, wenn $U_\mathfrak{m}$ klein in $M_\mathfrak{m}$ ist für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R.*

Beweis. Sind alle $U_\mathfrak{m}$ klein und ist $V+U=M$, so folgt $V_\mathfrak{m}=M_\mathfrak{m}$ für alle $\mathfrak{m}$, also $V=M$. Zur Umkehrung zeigen wir zuerst: Ist U klein in M und $(M/U)_\mathfrak{m}=0$, so folgt $M_\mathfrak{m}=0$. Ist nämlich E die injektive Hülle von $R/\mathfrak{m}$ und $f \in \operatorname{Hom}_R(M, E)$, so ist auch $(f(M)/f(U))_\mathfrak{m}=0$, außerdem $f(M)/f(U)$ $\mathfrak{m}$-primär, also $f(U)=f(M)$, so daß die Kleinheit $f=0$ liefert. Aus $\operatorname{Hom}_R(M,E)=0$ folgt aber $M_\mathfrak{m}=0$ wie verlangt. – Sei nun U klein in M und $H+U_\mathfrak{m}=M_\mathfrak{m}$: Mit $H=V_\mathfrak{m}$ folgt $(M/V+U)_\mathfrak{m}=0$ und $(V+U)/V$ klein in M/V, also nach eben $(M/V)_\mathfrak{m}=0$, d.h. $H=M_\mathfrak{m}$.

Folgerung. *Ist U halbartinsch und klein in M, so gilt für jede multiplikativ abgeschlossene Teilmenge S von R, daß auch U_S klein in M_S ist.*

Beweis. Wie eben können wir $(M/U)_S=0$ annehmen und müssen $M_S=0$ zeigen: Wäre $M_S \neq 0$, so gäbe es ein $x \in U$ mit $\operatorname{Ann}_R(x) \cap S = \varnothing$ und ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\operatorname{Ann}_R(x) \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$. Nach unserer Annahme über U ist dann $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal, so daß aus $(M/U)_\mathfrak{p}=0$ nach eben $M_\mathfrak{p}=0$ folgt im Widerspruch zu $0 \neq \frac{x}{1} \in M_\mathfrak{p}$.

Satz 4.2. (a) *Genau dann ist R ein K-Ring, wenn* $R_{\mathfrak{m}}$ *ein K-Ring ist für alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m}$.

(b) *Ein lokaler Ring R ist genau dann ein K-Ring, wenn es seine Vervollständigung* $\hat{R}$ *ist.*

(c) *Sei R lokal und vollständig: Genau dann ist R ein K-Ring, wenn* $\dim(R) \leqq 1$ *ist und das Nilradikal von R endliche Länge hat.*

Beweis. Um zu prüfen, ob R ein K-Ring ist, muß man nicht alle kleinen Untermoduln testen: Wir sagen, ein Modul M sei *schwachreduziert*, wenn jeder radikalvolle kleine Untermodul von M gleich null ist. Die Klasse der schwachreduzierten R-Moduln ist gegenüber Untermoduln und beliebigen direkten Produkten abgeschlossen. Enthält sie also einen Kogenerator, so sind bereits alle R-Moduln schwachreduziert, d.h. R ist ein K-Ring.

(a) Sind alle $R_{\mathfrak{m}}$ K-Ringe und ist U klein in M, so sind nach (4.1) alle $U_{\mathfrak{m}}$ koatomar, also nach der Folgerung zu (1.1) auch U. Sei nun umgekehrt R ein K-Ring und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal, E die injektive Hülle von $R/\mathfrak{m}$. Durch die Abb. $R_{\mathfrak{m}} \times E \ni \left(\frac{r}{s}, x\right) \mapsto r x' \in E$, mit $x = s x'$, wird E zu einem $R_{\mathfrak{m}}$-Modul mit demselben Untermodulverband (s. [5] Theorem 3.6), ist also auch als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul schwachreduziert. Weil aber E mit dieser Struktur sogar Kogenerator für $R_{\mathfrak{m}}$ ist, folgt die Behauptung.

(b) Sei $(R, \mathfrak{m})$ lokal und E die injektive Hülle von $R/\mathfrak{m}$. Wieder wie in ([5] Theorem 3.6) wird durch die Abb. $\hat{R} \times E \ni (\{r_n\}, x) \mapsto r_e x \in E$, mit $r_{n+1} - r_n \in \mathfrak{m}^n$ für alle $n \geqq 1$ und $x \in \mathrm{Ann}_E(\mathfrak{m}^e)$, der R-Modul E zu einem $\hat{R}$-Modul mit demselben Untermodulverband, der obendrein Kogenerator für $\hat{R}$ ist. Mit der Vorbemerkung folgt alles.

(c) Sei schließlich R lokal und vollständig, E wie eben. Dann ist nach ([5] Theorem 4.2) der Untermodulverband von E antiisomorph zum Idealverband von R, also E genau dann schwachreduziert (d.h. R ein K-Ring), wenn für jedes große Ideal $\mathfrak{a}$ von R, mit $\mathrm{So}(R/\mathfrak{a}) = 0$, folgt $\mathfrak{a} = R$. Das ist offenbar äquivalent damit, daß jedes *große* Primideal mit dem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ übereinstimmt.

Ist nun diese Bedingung erfüllt, so ist $\mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{p}_2 \subsetneqq \mathfrak{m}$ nicht möglich (weil $\mathfrak{p}_2$ groß in R wäre), also $\dim(R) \leqq 1$, und jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(N)$ ist groß in R, also $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, d.h. das Nilradikal N ist halbartinsch. Zur Umkehrung sei jetzt $\mathfrak{p}$ ein großes Primideal: Angenommen $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, so folgt aus $\dim(R) \leqq 1$, daß $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal ist, $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(x)$ für ein $x \in R$, und wegen der Größe $x \in N$, $R x \cong R/\mathfrak{p}$ artinsch, was nicht wahr ist.

Bemerkung. Daß in einem K-Ring R das Nilradikal N endliche Länge hat, kann man auch so einsehen: In jedem Modul M ist NM ein kleiner Untermodul (weil N nilpotent ist), so daß insbesondere $NR^{(\mathbb{N})} \cong N^{(\mathbb{N})}$ koatomar ist, also N halbartinsch nach dem Spezialfall von (3.1, b).

Folgerung. *Ist R ein K-Ring und S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, so ist auch* R_S *ein K-Ring.*

Beweis. Wir müssen für jedes maximale Ideal $\mathcal{M}$ von R_S zeigen, daß $(R_S)_{\mathcal{M}} \cong R_{\mathfrak{p}}$, mit $\mathfrak{p} = \mathcal{M} \cap R$, ein K-Ring ist. Falls $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal in R ist, gilt das nach (a); falls aber $\mathfrak{p}$ kein maximales Ideal ist, ist es wegen $\dim(R) \leqq 1$ ein minimales Primideal, also $R_{\mathfrak{p}}$ sogar artinsch.

Zum Abschluß soll noch, unter der Voraussetzung $\dim(R)=1$, eine Reihe von äquivalenten Bedingungen dafür angegeben werden, daß das Nilradikal von R endliche Länge hat:

Lemma 4.3. *Sei* $\dim(R)=1$, *sei* $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k\}$ *die Menge aller Primideale, die nicht maximale Ideale sind und sei* $S = R \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{p}_i$. *Dann sind äquivalent:*

(i) *Das Nilradikal* N *von* R *hat endliche Länge.*
(ii) *Jedes große Primideal ist maximales Ideal.*
(iii) R_S *ist als Ring halbeinfach.*
(iv) R_S *ist als* R*-Modul schwachreduziert.*

Beweis. Die Äquivalenz (i$\leftrightarrow$ii) geht wörtlich wie in Punkt (c) von (4.2), und für den Rest führen wir folgende Bezeichnung ein: Ein R-Modul M heiße S-teilbar (S-torsionsfrei), wenn für jedes $s \in S$ die Multiplikation mit $s: M \to M$ surjektiv (injektiv) ist. Nun ist genau dann $M_S = 0$, wenn M halbartinsch ist, und daraus folgt: M ist genau dann S-teilbar (S-torsionsfrei), wenn es radikalvoll (sockelfrei) ist. Insbesondere sind die Ideale von R_S genau die radikalvollen R-Untermoduln von R_S.
(i$\to$iii) Weil der Ring R_S artinsch ist, genügt es zu zeigen, daß er keine nilpotenten Elemente hat. Nach Voraussetzung ist aber N halbartinsch, d.h. $N_S = 0$. (iii$\to$iv) Ist U ein radikalvoller kleiner R-Untermodul von R_S, so folgt $\mathscr{A} \oplus U = R_S$ für ein Ideal $\mathscr{A}$ von R_S, also $U=0$. (iv$\to$i) Um zu zeigen, daß $N_S = 0$ ist, sei $r \in N$: Das Ideal $\left(\frac{r}{1}\right) \subset R_S$ ist als R-Untermodul sogar klein, denn aus $V + \left(\frac{r}{1}\right) = R_S$ folgt $V + \left(\frac{r^2}{1}\right) = R_S$, $V + \left(\frac{r^3}{1}\right) = R_S$, schließlich $V = R_S$. Nach Voraussetzung ist also $\left(\frac{r}{1}\right) = 0$, d.h. $sr = 0$ für ein $s \in S$.

Folgerung 1. *Ist* R *ein* K*-Ring und* U *ein großer Untermodul von* M, *so ist* M/U *halbartinsch.*

Beweis. Nach (4.2) ist $\dim(R) \leqq 1$, und nach eben jedes große Primideal schon maximales Ideal. Ist also $U \subset M$ wie angegeben und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/U)$, $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(\bar{x})$ für ein $x \in M$, so zeigt die Abb. $h: R \ni 1 \mapsto x \in M$, daß $\mathfrak{p} = h^{-1}(U)$ groß in R ist, also ein maximales Ideal wie gewünscht.

Folgerung 2. *Ist* R *ein* K*-Ring und* M *koatomar, so gibt es einen endlich erzeugten Untermodul* U *von* M *mit* M/U *halbartinsch.*

Beweis. Sei V ein maximales Element in der Menge der sockelfreien Untermoduln von M. Als wesentliche Erweiterung von $L(M)$ ist dann auch M/V halbartinsch. Wegen $\dim(R) \leqq 1$ und (3.1, b) hat V endliche Goldie-Dimension, besitzt also einen endlich erzeugten großen Untermodul U. Nach eben ist aber V/U halbartinsch, also auch M/U.

Literatur

1. Azumaya, G.: Characterizations of semi-perfect and perfect modules. Math. Z. **140**, 95–103 (1974)
2. Camillo, V.P.: Modules whose quotients have finite Goldie dimension. Pacific J. Math. **69**, 337–338 (1977)
3. Kaplansky, I.: Commutative rings. Boston: Allyn and Bacon, 1970
4. Kasch, F.: Moduln und Ringe. Stuttgart: Teubner, 1977
5. Matlis, E.: Injective modules over noetherian rings. Pacific J. Math. **8**, 511–528 (1958)
6. Matlis, E.: Modules with descending chain condition. Trans. Amer. Math. Soc. **97**, 495–508 (1960)
7. Nunke, R.J.: Modules of extensions over Dedekind rings. Illinois J. Math. **3**, 222–241 (1959)
8. Zöschinger, H.: Komplementierte Moduln über Dedekindringen. J. Algebra **29**, 42–56 (1974)
9. Zöschinger, H.: Invarianten wesentlicher Überdeckungen. Math. Ann. **237**, 193–202 (1978)

Eingegangen am 24. April 1979