Math. Ann. 255, 199–206 (1981)

Mathematische Annalen

Projektive Moduln mit endlich erzeugtem Radikalfaktormodul

Helmut Zöschinger

Mathematisches Institut der Universität, D-8000 München 2, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung. Betrachtet man für einen Ring R die folgende Eigenschaft

(a) Ist P ein projektiver R-Rechtsmodul und $P/\mathrm{Ra}(P)$ endlich erzeugt, so ist bereits P endlich erzeugt,

so wird von Lazard in [6, Proposition 5] gezeigt, daß sie jeder kommutative Ring besitzt. Gleichzeitig beklagt er, sie im nicht-kommutativen Fall nicht nachweisen zu können. Einen Ring mit der Eigenschaft (a) nennen wir daher *Rechts-L-Ring*. Valette beweist in [8] allgemeiner, daß jeder Ring R ein Rechts-L-Ring ist, in dem für jedes Primideal Q der Faktorring R/Q ein Rechts-Goldie-Ring ist. – In Zusammenhang damit steht folgende Eigenschaft

(b) Ist C ein endlich erzeugter flacher R-Rechtsmodul und C/CJ als R/J-Modul projektiv [$J=\mathrm{Ra}(R)$], so ist bereits C projektiv.

Sie gilt nach Vasconcelos [9, Theorem 2.1] für jeden kommutativen Ring. Jondrup zeigt nun in [4], daß (b) immer aus (a) folgt, daß (a) für P.I.-Ringe gilt, und daß (a) äquivalent ist mit

(c) Ist P ein projektiver R-Rechtsmodul und $X \subsetneqq P$ endlich erzeugt, so liegt X in einem maximalen Untermodul von P.

Das Hauptergebnis der vorliegenden Note ist, daß jede der drei Eigenschaften (a), (b), (c) äquivalent ist mit

(d) Ist M ein endlich erzeugter projektiver R-Rechtsmodul, so ist in M jedes Komplement direkter Summand.

Als Folgerung ergibt sich, daß jeder Rechts-L-Ring auch Links-L-Ring ist, und im Hinblick auf (d) zeigen wir im letzten Abschnitt spezieller: Ist R ein kommutativer Integritätsring, so spalten sogar in jedem projektiven R-Modul die Komplemente ab.

0025-5831/81/0255/0199/$01.60

1. Wann ist in R_R jedes Komplement direkter Summand?

Sei M ein projektiver Modul und V ein Komplement von U in M, d.h. V minimal bezüglich der Eigenschaft $V+U=M$ (siehe [5, p. 104]). Hat auch V ein Komplement in M, sagen wir W, so ist bekanntlich $W\cap V=0$, also V direkter Summand in M. Ohne ein solches W is aber unbekannt, ob V abspaltet. – Zur Untersuchung dieser Frage brauchen wir noch folgende Varianten des Begriffes „Komplement“: V heißt schwaches Komplement von U in M, wenn $V+U=M$ ist und $V\cap U$ klein in M; V heißt starkes Komplement von U in M (siehe [11]), wenn es Komplement von U in M ist und zusätzlich $V\cap U$ direkter Summand in U. Man hat also die Implikationen: starkes Komplement$\to$Komplement$\to$schwaches Komplement, und Beispiele zeigen, daß keiner der beiden Pfeile umkehrbar ist. Bei $M=R_R$ und zyklischem U gibt es einfache Kriterien für die Existenz eines schwachen (starken) Komplementes:

Lemma 1.1. *Ist $x\in R$, so gilt: Genau dann hat xR ein schwaches (starkes) Komplement in R_R, wenn es ein $r\in R$ gibt mit $x-xrx\in J$ (und $(xr)^2=xr$).*

Beweis. Ist V ein schwaches Komplement von xR in R_R und $1-xr\in V$, so folgt $x-xrx\in V\cap xR\subset J$; umgekehrt folgt aus $x-xrx\in J$ sofort, daß $(1-xr)R$ ein schwaches Komplement von xR in R_R ist. – Ist im zweiten Fall V ein starkes Komplement von xR in R_R, $e\in xR$ idempotent mit $1-e\in V$, so folgt mit $e=xr$ wieder das Gewünschte, und umgekehrt ist bei $x-xrx\in J$, xr idempotent, auch $(1-xr)R$ ein starkes Komplement von xR in R_R.

Im Fall des starken Komplementes ist dann auch $x-x(rxr)x\in J$ und $(rxr)x$ idempotent, d.h., wir haben die

Folgerung. Genau dann hat xR ein schwaches (starkes) Komplement in R_R, wenn Rx ein schwaches (starkes) Komplement in ${}_RR$ hat.

Für Komplemente ist die entsprechende Aussage nicht klar, ja sie ist sogar äquivalent mit der in der Überschrift formulierten Frage:

Satz 1.2. *Für einen Ring R sind äquivalent:*

(i) *In R_R ist jedes Komplement direkter Summand.*

(i′) *In ${}_RR$ ist jedes Komplement direkter Summand.*

(ii) *Hat xR ein Komplement in R_R, so hat auch Rx ein Komplement in ${}_RR$.*

(ii′) *Hat Rx ein Komplement in ${}_RR$, so hat auch xR ein Komplement in R_R.*

(iii) *Ist $ab=0$ und $1-(a+b)\in J$, so folgt $b\cdot\dfrac{1}{a+b}\cdot a=0$.*

Beweis. Vorbemerkung: Ist V ein Komplement von U in R_R, so folgt mit $v\in V$, $1-v\in U$, daß $v-v^2\in J$ ist und $v^2R=vR=V$, insbesondere $v=v^2t$ für ein $t\in R$. – Wüßten wir, daß V direkter Summand, d.h. v reguläres Element ist, so folgte aus $v-vtv\in V\cap r(v)=0$ [weil V und $r(v)=\{x\in R|vx=0\}$ gegenseitig Komplemente wären] sogar $v=vtv$.

(i'→ii') Ist H ein Komplement von Rx in ${}_RR$, so ist nach Voraussetzung H direkter Summand, also sogar $H \oplus Y = {}_RR$ mit $Y \subset Rx$, d. h. H ein starkes Komplement von Rx in ${}_RR$. Nach der letzten Folgerung hat jetzt xR ein (starkes) Komplement in R_R. (ii'→i) Sei $V = vR$ mit $v = v^2 t$, $v - v^2 \in J$ wie in der Vorbemerkung. Dann ist $vt(1-vt) = vt(1-v)\cdot(1-vt) \in JR(1-vt)$, also $R(1-vt) \cap Rvt$ klein in $R(1-vt)$, d. h. $R(1-vt)$ ein Komplement von Rvt in ${}_RR$. Wegen $vt - v \in J$ hat dann Rv dasselbe Komplement in ${}_RR$, also nach Voraussetzung $V = vR$ ein Komplement in R_R. Damit ist V direkter Summand wie gewünscht. (i→ii→i') Ebenso.

(i→iii) Seien a und b wie angegeben, dazu $v = a$ und $t = \dfrac{1}{a+b}$. Dann ist $b = \dfrac{1}{t} - v$, $v = v^2 t$ und $v - v^2 \in J$, insbesondere $V = vR$ ein Komplement von $(1-v)R$ in R_R. Nun ist V direkter Summand in R_R, also nach der Vorbemerkung $v = vtv$, d. h. $\left(\dfrac{1}{t} - v\right) tv = 0$ oder $bta = 0$ wie verlangt. (iii→i) Sei $v = v^2 t$ mit $v - v^2 \in J$ wie in der Vorbemerkung. Ist t_1 das Inverse von $1 + v - vt$, so folgt $v = v^2 t_1$ und $1 - t_1 \in J$, mit $a = v$ und $b = \dfrac{1}{t_1} - v$ also gerade $ab = 0$, $1 - (a+b) \in J$. Die Voraussetzung liefert $\left(\dfrac{1}{t_1} - v\right) t_1 v = 0$, $v = vt_1 v$ regulär wie gewünscht.

Beispiel 1. *Hat R die Maximalbedingung für Annullatorrechtsideale, so erfüllt R die äquivalenten Bedingungen des Satzes.*

Beweis. Für $V = vR$, $v = v^2 t$ genügt es, daß die Folge $r(v) \subset r(v^2) \subset r(v^3) \subset \ldots$ stationär ist, denn aus $r(v^m) = r(v^{m+1})$ folgt dann $vR \cap r(v) = 0$, insbesondere $v - vtv = 0$.

Beispiel 2. *Sei $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ eine Familie von zweiseitigen Idealen, so daß*

1. *jeder Faktorring R/A_λ die äquivalenten Bedingungen des Satzes erfüllt,*
2. *sich Idempotente modulo $D = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ liften lassen und $D \subset J$ ist.*

Dann gelten auch für R die äquivalenten Bedingungen des Satzes.

Beweis. Ist $V = vR$ mit $v = v^2 t$, $v - v^2 \in J$, so gilt auch $\bar{v} = \bar{v}^2 \bar{t}$, $\bar{v} - \bar{v}^2 \in \mathrm{Ra}(R/A_\lambda)$, also nach Voraussetzung $\bar{v} = \bar{v}\bar{t}\bar{v}$, d. h. $v - vtv \in A_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Weil also vt ein Idempotent modulo D ist, gibt es ein Idempotent $e \in R$ mit $vt - e \in D$. Wegen $v - e \in J$ hat also V ein Komplement in R_R [nämlich $W = (1-e)R$] und spaltet ab.

2. L-Ringe

Daß die von Lazard, Vasconcelos und Jondrup an einen Ring gestellten Bedingungen äquivalent und von der Seite des Ringes unabhängig sind, liegt daran, daß sie auf das Abspalten von Komplementen zurückgeführt werden können, diese Eigenschaft in den Endomorphismenring übertragen wird und dann nach (1.2) auch für die andere Seite dieses Ringes gilt. Den Schlüssel für diese Äquivalenzen bildet das nächste Lemma, aus dem folgt, daß in einem projektiven Modul M jeder Untermodul U, der ein Komplement in M hat, durch einen reinen Untermodul U_1 „gestützt" wird in dem Sinne, daß U/U_1 klein in M/U_1 ist. – Wir nennen einen Modul N radikalvoll, wenn er keine maximalen Untermoduln hat, d. h. $\mathrm{Ra}(N) = N$

ist. Hat er umgekehrt genügend viele, d.h., liegt jeder von N verschiedene Untermodul in einem maximalen Untermodul, so nennen wir ihn koatomar. In diesem Fall ist $\mathrm{Ra}(N)$ klein in N, so daß insbesondere jeder endlich erzeugte Modul ein kleines Radikal hat. Schließlich bemerken wir, daß für jeden projektiven Modul M gilt: $\mathrm{Ra}(M)=MJ$.

Lemma 2.1. *Ist M projektiv und V ein Komplement von U in M, so gilt:*

(a) $\mathrm{Ra}(V)=VJ$.

(b) *Es gibt ein $U_1 \subset U$ mit $V+U_1=M$, U_1 rein in M.*

Beweis. Weil $V+U=M$ und M projektiv ist, gibt es ein $\gamma \in \mathrm{End}(M)$ mit $\mathrm{Bi}\gamma \subset V$, $\mathrm{Bi}(1-\gamma) \subset U$, für das wegen der Minimalität von V folgt $\mathrm{Bi}\gamma^2=\mathrm{Bi}\gamma=V$, also auch noch $\gamma=\gamma^2\tau$ für ein $\tau \in \mathrm{End}(M)$. [Das könnte man auch mit dem Beweis von (2.3, d$\leftrightarrow$f) und der Vorbemerkung in (1.2) für den Ring $S=\mathrm{End}(M)$ herleiten.]

Bei (a) sei nun $x \in \mathrm{Ra}(V)$: Mit $x=\gamma(y)$ folgt

$$\gamma\tau(y)-x=\gamma(\tau(y)-y)=(1-\gamma)(\gamma\tau(y)) \in V \cap U \subset \mathrm{Ra}(M),$$

also $\gamma\tau(y) \in \mathrm{Ra}(M)=MJ$, $\gamma\tau(y)=\sum z_i r_i$ mit $z_i \in M$, $r_i \in J$, und damit $x=\sum \gamma(z_i) r_i \in VJ$.

Bei (b) leistet $U_1=\sum\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{Ke}\gamma^m$ das Gewünschte, denn aus

$$\mathrm{Bi}(1-\gamma\tau) \subset \mathrm{Ke}\gamma \subset \mathrm{Ke}\gamma^2 \subset \ldots \subset \mathrm{Bi}(1-\gamma)$$

und $V+\mathrm{Bi}(1-\gamma\tau)=M$ folgt zunächst $V+U_1=M$, speziell die Kleinheit von U/U_1 in M/U_1. Für die Reinheit müssen wir zu jedem $x \in U_1$ ein $\alpha \in \mathrm{End}(M)$ angeben mit $\alpha(x)=x$, $\mathrm{Bi}\alpha \subset U_1$: Das leistet, falls $x \in \mathrm{Ke}\gamma^m$, gerade $\alpha_m=1-\tau^m\gamma^m$, denn es ist $\mathrm{Bi}\alpha_m \subset \mathrm{Ke}\gamma^{m+1} \subset U_1$.

Folgerung. In folgenden Fällen ist V bereits direkter Summand in M: 1) V ist projektiv. 2) V ist rein in M. 3) V besitzt keine radikalvollen Untermoduln.

Beweis. Mit U_1 wie im Lemma ist $V/V \cap U_1$ flach, also $V \cap U_1$ rein und klein in V. Nach (a) ist $V \cap U_1$ radikalvoll, also Fall 3 erledigt. Weil aber in einem projektiven Modul jeder reine radikalvolle Untermodul verschwindet (siehe [5, p. 238]), sind auch die ersten beiden Fälle klar.

Bemerkung. Besitzt R keine radikalvollen Rechtsideale, so ist die Bedingung 3 der Folgerung stets erfüllt, d.h. in jedem projektiven R-Rechtsmodul spalten die Komplemente ab.

Lemma 2.2. *Sei M endlich erzeugt und projektiv, U ein reiner Untermodul von M. Dann sind äquivalent:*

(i) *U hat ein (schwaches) Komplement in M.*

(ii) *$U/\mathrm{Ra}(U)$ ist endlich erzeugt.*

(iii) *Für den flachen Faktormodul $C=M/U$ gilt, daß C/CJ als R/J-Modul projektiv ist.*

Beweis. Wir wollen vorausschicken, daß aus $\mathrm{Ra}(M)=MJ$ wegen der Reinheit auch $\mathrm{Ra}(U)=UJ$ folgt.

(i$\rightarrow$iii) Hat man $V+U=M$ mit $V \cap U \subset \mathrm{Ra}(M)$, so folgt aus

$$\frac{V+\mathrm{Ra}(M)}{\mathrm{Ra}(M)} \oplus \frac{U+\mathrm{Ra}(M)}{\mathrm{Ra}(M)}=\frac{M}{\mathrm{Ra}(M)},$$

daß $C/CJ \cong M/(U+MJ)$ bis auf Isomorphie direkter Summand von M/MJ ist, also projektiv über R/J. (iii→ii) Die zerfallende Folge

$$0 \to (U+MJ)/MJ \to M/MJ \to C/CJ \to 0$$

zeigt, daß $U/\mathrm{Ra}(U) \cong (U+MJ)/MJ$ sogar Faktormodul von M ist. (ii→i) Zu $\left(\sum_{i=1}^{n} u_i R\right) + \mathrm{Ra}(U) = U$ gibt es wegen der Reinheit ein $\alpha \in \mathrm{End}(M)$ mit $\alpha(u_i) = u_i$ für alle i, $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset U$. Wir behaupten, daß $\mathrm{Bi}(1-\alpha)$ ein Komplement von U in M ist und müssen dazu nur noch $\mathrm{Bi}(1-\alpha) \cap U \subset \mathrm{Ra}(\mathrm{Bi}(1-\alpha))$ zeigen: $u = (1-\alpha)(x)$ impliziert $x \in U$, $x - \sum_{i=1}^{n} u_i r_i \in \mathrm{Ra}(M)$, also

$$u = (1-\alpha)\left(x - \sum_{i=1}^{n} u_i r_i\right) \in \mathrm{Ra}(\mathrm{Bi}(1-\alpha))$$

wie verlangt.

Folgerung. Ist R/J rechts-noethersch und M_R endlich erzeugt und projektiv, so hat jeder reine Untermodul von M ein Komplement in M [denn die Bedingung (ii) ist erfüllt].

Im folgenden Hauptsatz verstehen wir unter Moduln immer R-Rechtsmoduln.

Satz 2.3. *Für einen endlich erzeugten projektiven Modul M sind äquivalent:*

(a) *Ist P projektiv und $P/\mathrm{Ra}(P)$ Faktormodul von M, so ist P endlich erzeugt.*

(b) *Ist C ein flacher Faktormodul von M und C/CJ als R/J-Modul projektiv, so ist C projektiv.*

(c) *Ist P projektiv und $X \subsetneqq P$ Faktormodul von M, so liegt X in einem maximalen Untermodul von P.*

(d) *Jedes Komplement in M ist direkter Summand.*

(e) *Jeder reine Untermodul U von M, mit $U/\mathrm{Ra}(U)$ endlich erzeugt, ist direkter Summand.*

(f) *Der Endomorphismenring S von M erfüllt die äquivalenten Bedingungen von Satz* (1.2).

Beweis. (a→d) Sei V ein Komplement von U in M, und seien γ, τ und U_1 wie in (2.1). Mit $\alpha_m = 1 - \tau^m \gamma^m \in \mathrm{End}(M)$ gilt auch $U_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Bi}\,\alpha_m$, so daß U_1 nicht nur rein in M, sondern auch abzählbar erzeugt ist. Nach Jensen [3, Lemma 2] ist daher U_1 projektiv, außerdem $U_1/\mathrm{Ra}(U_1)$ bis auf Isomorphie direkter Summand von $M/\mathrm{Ra}(M)$ [siehe den ersten Schritt in (2.2)], so daß nach Voraussetzung U_1 endlich erzeugt ist, U_1 direkter Summand in M, $V \oplus U_1 = M$. (d→e) Ist U wie angegeben, so hat es nach (2.2) ein Komplement V, das nach Voraussetzung projektiv ist. Als reiner radikalvoller Untermodul von V ist daher $V \cap U = 0$. (e→a) Zum gegebenen Epimorphismus $\beta: M \to \bar{P} = P/\mathrm{Ra}(P)$ gibt es ein $f: P \to M$ mit $\beta f = \mathrm{kan}$. Offenbar ist $\bar{f}: \bar{P} \to \bar{M}$ ein zerfallender Monomorphismus (als Linksinverses kann man die von β induzierte Abbildung nehmen), so daß nach Bergman (siehe den Beweis von Lemma 2.2 in [4]) f selbst ein reiner Monomorphismus ist, insbesondere $U = \mathrm{Bi}\,f$ ein reiner Untermodul von M mit $U/\mathrm{Ra}(U)$ endlich erzeugt. Damit ist U direkter Summand in M, d.h. $U \cong P$ endlich erzeugt.

(b$\leftrightarrow$e) Das folgt unmittelbar aus (2.2).

(a$\to$c) Nehmen wir an, daß P/X radikalvoll ist. Für eine projektive Basis $((p_\lambda, \varphi_\lambda)|\lambda\in\Lambda)$ von P ist die Menge $L=\{\lambda\in\Lambda|\varphi_\lambda(X)\neq 0\}$ endlich, und für alle $\lambda\notin L$ ist $B_\lambda=\{p_\lambda\varphi_\lambda(y)|y\in P\}$ als Faktor von P/X radikalvoll, also auch $B=\sum_{\lambda\notin L} B_\lambda$ radikalvoll. $\left(\sum_{\lambda\in L} p_\lambda R\right)+B=P$ zeigt, daß $P/\mathrm{Ra}(P)$ endlich erzeugt ist, also $P/(X+\mathrm{Ra}(P))=0$, so daß auch $P/\mathrm{Ra}(P)$ ein Faktormodul von M ist. Dann wäre aber nach Voraussetzung P endlich erzeugt, $P/X=0$ im Widerspruch zu $X\subsetneqq P$.
(c$\to$a) Der Epimorphismus $\beta: M\to P/\mathrm{Ra}(P)$ läßt sich zu einem Homomorphismus $g: M\to P$ hochheben, so daß aus $\mathrm{Bi}\,g+\mathrm{Ra}(P)=P$ nach Voraussetzung $\mathrm{Bi}\,g=P$ folgt, insbesondere P endlich erzeugt ist.

Die Äquivalenz (d$\leftrightarrow$f) gilt auch dann, wenn M nur selbstprojektiv ist, d. h. für jeden Epimorphismus $\beta: M\to N$ die induzierte Abb. $\beta_*: \mathrm{Hom}_R(M,M)\to\mathrm{Hom}_R(M,N)$ surjektiv ist.

Für jeden Untermodul V von M sei $s(V)$ das Rechtsideal $\{\alpha\in S|\mathrm{Bi}\,\alpha\subset V\}$, für jedes Rechtsideal B von S sei $d(B)$ der Untermodul $\sum\{\mathrm{Bi}\,\alpha|\alpha\in B\}$, und wegen der Selbstprojektivität von M gilt $s(V_1+V_2)=s(V_1)+s(V_2)$ für alle Untermoduln V_1 und V_2 von M, $sd(B)=B$ für alle endlich erzeugten Rechtsideale B von S.

Erfüllt nun S die Bedingungen von (1.2) und ist V ein Komplement von U in M, so ist $s(V)$ ein Komplement von $s(U)$ in S_S, denn die Summe ist klar, und aus $B+s(U)=S_S$ mit zyklischem $B\subset s(V)$ folgt $d(B)+U=M$, $d(B)=V$, $B=s(V)$. Nach Voraussetzung ist $s(V)=\varepsilon S$ mit $\varepsilon^2=\varepsilon$, also $V=ds(V)=\mathrm{Bi}\,\varepsilon$ direkter Summand in M. – Ähnlich zeigt man in der umgekehrten Richtung: Ist das Rechtsideal B ein Komplement in S_S, so ist $d(B)$ ein Komplement in M, also $d(B)=\mathrm{Bi}\,\varepsilon$ mit $\varepsilon^2=\varepsilon$, und damit $B=sd(B)=\varepsilon S$ direkter Summand in S_S.

Läßt man M die R-Rechtsmoduln R, R^2, R^3, ... durchlaufen, so erhält man jetzt die in der Einleitung behaupteten Äquivalenzen für einen Rechts-L-Ring. Bleibt die Seiten-Unabhängigkeit zu zeigen:

Folgerung. Ist R ein Rechts-L-Ring, so ist R auch ein Links-L-Ring.

Beweis. R ist genau dann ein Rechts(Links)-L-Ring, wenn für alle $n\geqq 1$ im Matrizenring $M_n(R)$ die Rechts(Links)-Ideale, die Komplement sind, abspalten, so daß (1.2) die Behauptung liefert.

Bemerkung. Daß jeder kommutative Ring ein L-Ring ist (was man ja aus [6] oder [9] weiß), folgt jetzt auch mit Punkt (e) und unserem Lemma (3.2): U ist koatomar, also selbst endlich erzeugt und daher direkter Summand.

Aber der wohl kürzeste Beweis geht für Punkt (c): Es gibt ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit $X_\mathfrak{m}\subsetneqq P_\mathfrak{m}$, und weil $P_\mathfrak{m}$ sogar frei ist, kann $P_\mathfrak{m}/X_\mathfrak{m}$ nicht radikalvoll sein, also auch nicht P/X.

3. Die kleinen Untermoduln eines projektiven Moduls

Wir zeigen in diesem letzten Abschnitt, daß über einem Integritätsring R (es genügt, daß das Nullideal Durchschnitt von endlich vielen Primidealen ist) in jedem projektiven R-Modul M die Komplemente abspalten. Der Grund liegt darin, daß jeder kleine Untermodul von M in einem geeigneten endlich erzeugten

Zwischenmodul enthalten ist und daher auch noch in jedem reinen Zwischenmodul klein ist. – Stets ist in diesem Abschnitt R *kommutativ.*

Lemma 3.1. *Sei M projektiv und U klein in M. Dann gibt es zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ von R, das Durchschnitt von endlich vielen Primidealen ist, einen endlich erzeugten Untermodul M' von M mit*

$$U \subset \mathrm{Ra}(M') + M\mathfrak{a}.$$

Beweis. Ist $((x_\lambda, \varphi_\lambda) | \lambda \in \Lambda)$ eine projektive Basis von M, so folgt nach Ware u. Zelmanowitz ([10, Theorem 1], siehe auch [2, Proposition 1]) aus der Kleinheit von U, daß die Familie $\mathfrak{b}_\lambda = \varphi_\lambda(U)$ von Idealen folgende Eigenschaft hat: Zu jeder Folge (c_i, λ_i), $i = 1, 2, 3, \ldots$, mit $c_i \in \mathfrak{b}_{\lambda_i}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, gibt es ein $m \geqq 1$ mit $c_1 c_2 \ldots c_m = 0$. In jedem Primideal $\mathfrak{p}$ liegen also fast alle $\mathfrak{b}_\lambda$. Ist daher $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n$ wie verlangt, so ist die Menge $L = \{\lambda \in \Lambda | \mathfrak{b}_\lambda \not\subset \mathfrak{a}\}$ endlich, also $M' = \sum_{\lambda \in L} x_\lambda R$ ein endlich erzeugter Untermodul von M. Für jedes $y \in U$ hat man dann

$$y = \sum_{\lambda \in L} x_\lambda \varphi_\lambda(y) + \sum_{\lambda \notin L} x_\lambda \varphi_\lambda(y) \in M'J + M\mathfrak{a}$$

wie gewünscht.

Folgerung. Sei M projektiv, R noethersch und N das Nilradikal: Genau dann ist U klein in M, wenn U in $\mathrm{Ra}(M)$ liegt und $U/U \cap MN$ endlich erzeugt ist.

Beweis. Natürlich ist N Durchschnitt von endlich vielen Primidealen: Ist also U klein in M und M' wie im Lemma, so liefert der Monomorphismus $U/U \cap MN \to M'/M' \cap MN$ die eine Behauptung. Weiter ist N nilpotent, also mit MN auch $U \cap MN$ klein in M, so daß in der anderen Richtung nicht nur $U/U \cap MN$ als endlich erzeugter Untermodul des Radikals klein in $M/U \cap MN$ ist, sondern auch U klein in M.

Lemma 3.2. *Ist M endlich erzeugt, so ist jeder reine Untermodul von M koatomar.*

Beweis. Ist U rein in M, so ist zu zeigen, daß jeder radikalvolle Faktormodul von U gleich Null ist. Wir können also gleich U radikalvoll annehmen und müssen $U = 0$ zeigen. Sei C ein injektiver Kogenerator in Mod-R mit großem Sockel. Dann hat auch $M^0 = \mathrm{Hom}_R(M, C)$ einen großen Sockel als Untermodul von C^n für ein geeignetes n. Andererseits ist U^0 sockelfrei, denn $f \in \mathrm{Ann}_{U^0}(\mathfrak{m})$ heißt $f(xr) = 0$ für alle $r \in \mathfrak{m}$, $x \in U$, und weil jedes Element von U die Form $\sum x_i r_i$ mit $r_i \in \mathfrak{m}$, $x_i \in U$ hat, folgt $f = 0$. Der reine Monomorphismus $U \to M$ induziert aber einen zerfallenden Epimorphismus $M^0 \to U^0$, so daß aus $U^0 = 0$ folgt $U = 0$ wie gewünscht.

Die nächste Folgerung wurde, falls R semilokal (d. h. R/J halbeinfach) ist, von Couchot in [1, Theorem 2.3] gezeigt:

Folgerung. Ist M endlich erzeugt und R/J noethersch, so ist jeder reine Untermodul von M wieder endlich erzeugt.

Beweis. Für den reinen Untermodul U ist die kanonische Abbildung $U/UJ \to M/MJ$ injektiv, also auch U/UJ endlich erzeugt. Nach dem Lemma ist U koatomar, insbesondere UJ klein in U, und es folgt die Behauptung.

Satz 3.3. *Sei M projektiv und das Nullideal von R Durchschnitt von endlich vielen Primidealen. Dann gilt:*

(a) *Ist $X \subset U \subset M$, X klein in M und U rein in M, so ist X auch klein in U.*

(b) *In M ist jedes Komplement direkter Summand.*

Beweis. Bei (a) gibt es nach (3.1) einen endlich erzeugten Untermodul M' von M mit $X \subset \mathrm{Ra}(M')$. Aus $Y+X=U$ folgt dann, daß U/Y rein und klein in $(M'+U)/Y$ ist, insbesondere $(M'+U)/Y$ endlich erzeugt und U/Y radikalvoll. Nach (3.2) ist aber U/Y koatomar, also null wie verlangt. Damit ist auch (b) klar: Ist V ein Komplement von U in M und $U_1 \subset U$ wie in (2.1), so ist nach eben $V \cap U_1$ auch klein in U_1, also $V \oplus U_1 = M$.

In unserer letzten Folgerung wurde die Implikation (i→iii) unter der Zusatzbedingung, daß R keine Idempotente hat, von Snider in [7, Lemma 3] gezeigt:

Folgerung. Sei M projektiv und das Nullideal von R Durchschnitt von endlich vielen Primidealen. Dann sind für $U \subset \mathrm{Ra}(M)$ äquivalent:

(i) U ist klein in M.

(ii) U hat ein schwaches Komplement in M.

(iii) U hat endliche Goldie-Dimension.

Beweis. (i→ii) ist klar, und bei (ii→i) sei $V+U=M$, $V \cap U$ klein in M. Wählt man $\gamma \in \mathrm{End}(M)$ mit $\mathrm{Bi}\gamma \subset V$, $\mathrm{Bi}(1-\gamma) \subset U$, so induziert γ auf $\bar{M} = M/\mathrm{Ra}(M)$ die identische Abbildung. Wie im Beweis von (2.3, e→a) ist deshalb γ selbst ein reiner Monomorphismus, $\mathrm{Bi}\gamma$ nach dem Satz sogar ein Komplement von U in M, $\mathrm{Bi}\gamma$ direkter Summand in M und $M/\mathrm{Bi}\gamma$ radikalvoll, also $\mathrm{Bi}\gamma = M$, $V = M$. – Bei der Äquivalenz (i↔iii) können wir gleich M frei annehmen. Weil nun R_R nach Voraussetzung endliche Goldie-Dimension hat, gilt das auch für jeden endlich erzeugten Untermodul von M, so daß (i→iii) nach (3.1) klar ist. Zur Umkehrung sei U' ein endlich erzeugter, großer Untermodul von U: Wählt man $U' \subset M' \subset M$ mit M' endlich erzeugt, M' direkter Summand in M, so folgt automatisch $U \subset M'$ (weil $M' \cap U$ groß in U ist und der singuläre Untermodul von $U/M' \cap U$ verschwindet), $U \subset \mathrm{Ra}(M) \cap M' = \mathrm{Ra}(M')$, so daß U klein in M' ist, also erst recht klein in M.

Literatur

1. Couchot, F.: Sous-modules purs et modules de type cofini. Sém. Algèbre. Dubreil, P. (ed.). In: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 641, pp. 198–208. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1978
2. Harada, M.: Small submodules in a projective module and semi-T-nilpotent sets. Osaka J. Math. **14**, 355–364 (1977)
3. Jensen, C.U.: On homological dimensions of rings with countably generated ideals. Math. Scand. **18**, 97–105 (1966)
4. Jondrup, S.: Projective modules. Proc. Am. Math. Soc. **59**, 217–221 (1976)
5. Kasch, F.: Moduln und Ringe. Stuttgart: Teubner 1977
6. Lazard, D.: Liberté des gros modules projectifs. J. Algebra **31**, 437–451 (1974)
7. Snider, R.L.: Rings whose ideals have projective covers. Arch. Math. **27**, 378–382 (1976)
8. Valette, J.: Sur les modules projectifs. C.R. Acad. Sci. Paris **282**, 821–823 (1976)
9. Vasconcelos, W.V.: On finitely generated flat modules. Trans. Am. Math. Soc. **138**, 505–512 (1969)
10. Ware, R., Zelmanowitz, J.: The Jacobson radical of the endomorphism ring of a projective module. Proc. Am. Math. Soc. **26**, 15–20 (1970)
11. Zöschinger, H.: Komplemente als direkte Summanden. Arch. Math. **25**, 241–253 (1974)

Eingegangen am 6. Mai 1980