Arch. Math., Vol. 38, 324—334 (1982)

0003-889X/82/3804-0011 $ 01.50 + 0.20/0
© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

Komplemente als direkte Summanden II

Von

Helmut Zöschinger

Einleitung. Ist M ein R-Modul und U ein Untermodul von M, so heißt jedes minimale Element V_0 in der Menge $\{V \subset M \mid V + U = M\}$ ein *Komplement* von U in M. Falls zusätzlich $V_0 \cap U$ direkter Summand in U ist, heißt V_0 ein *starkes* Komplement von U in M. Besitzt jeder Untermodul von M ein (starkes) Komplement in M, so heißt M (*stark*) *komplementiert*. J. Hausen zeigt nun in [4], daß es in einer komplementierten abelschen p-Gruppe M zu jeder Untergruppe U sogar eine Zerlegung $V_0 \oplus W = M$ gibt, so daß U und W dieselben Summanden in M haben (d.h. genau dann $X + U = M$ ist, wenn $X + W = M$ ist). Ein solches V_0 bezeichnen wir, in beliebigen Moduln, als H-*Komplement* von U in M, und besitzt jeder Untermodul von M ein H-Komplement, so heiße M H-*komplementiert*. Das Studium solcher H-Komplemente, insbesondere ihr Zusammenhang mit den starken Komplementen in [7], ist Gegenstand dieses Teils II.

Jedes starke Komplement V_0 ist ein H-Komplement, denn in $(V_0 \cap U) \oplus W = U$ hat W die verlangte Eigenschaft, und jedes H-Komplement ist ein Komplement im einfachen Sinne. Die drei Begriffe sind aber verschieden, denn über einem kommutativen lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ ist jeder endlich erzeugte R-Modul M komplementiert, während wir im dritten Paragraphen zeigen:

(3.2) Genau dann ist M H-komplementiert, wenn es Ideale $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_n \subsetneqq R$ gibt mit $M \cong R/\mathfrak{a}_1 \times \cdots \times R/\mathfrak{a}_n$.

(3.3) Genau dann ist M stark komplementiert, wenn M eine „kanonische" Zerlegung wie eben hat und zusätzlich $\mathfrak{m}\,\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_1$ ist.

Über einem diskreten Bewertungsring R wurde die Struktur der stark komplementierten R-Moduln in [7] vollständig bestimmt. Ein komplementierter R-Modul M braucht aber, im Unterschied zu den abelschen p-Gruppen, nicht mehr H-komplementiert zu sein, denn wir zeigen in (2.6): Genau dann hat $U \subset M$ ein H-Komplement in M, wenn U selbst komplementiert ist. Nur bei vollständigem R erhält man also wieder das Ergebnis von J. Hausen. — Zusätzlich bestimmen wir über einem diskreten Bewertungsring R die R-Moduln M, die in jeder Erweiterung $M \subset N$ ein H-Komplement haben. Sie sind nach (2.7) direkte Summe aus einem teilbaren, einem beschränkten, und bei vollständigem R auch noch aus einem endlich erzeugten freien Anteil.

Alle Moduln in dieser Arbeit sind unitäre R-Rechts-Moduln, die Bezeichnungen und Grundtatsachen über Komplemente werden aus [7] übernommen.

1. Elementare Eigenschaften von H-Komplementen. Wir wollen die in der Einleitung angesprochene Verwandtschaft zwischen H-Komplementen und starken Komplementen genauer untersuchen. Ist V ein H-Komplement von U in M, also $V \oplus W = M$, so daß U und W dieselben Summanden in M haben, so ist V sogar ein starkes Komplement von $U_0 = U + W$ in M, und man kann versuchen, bestimmte Eigenschaften, die sich auf U_0 vererben, auch noch auf U herabzuziehen.

Im Spezialfall $\mathrm{Ra}(M) \subset U$ ist sogar $U_0 = U$, denn

$$(V + \mathrm{Ra}(M))/\mathrm{Ra}(M) \oplus U/\mathrm{Ra}(M) = M/\mathrm{Ra}(M)$$

zeigt dann, daß M/U radikalfrei ist, also der kleine Untermodul U_0/U verschwindet.

Lemma 1.1. *Ist $M_0 \subset U \subset M$ und M_0 direkter Summand in M, so gilt:*

(a) *Hat U ein H-Komplement (starkes Komplement) in M und besitzt M_0 die Austauscheigenschaft, so hat auch U/M_0 ein H-Komplement (starkes Komplement) in M/M_0.*

(b) *Hat U/M_0 ein H-Komplement (starkes Komplement) in M/M_0, so auch U in M.*

Beweis. (a) Ein Modul A hat nach [1] die *Austauscheigenschaft*, wenn es zu jeder Zerlegung $X \oplus Y = B = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, mit $X \cong A$, Untermoduln $B'_\lambda \subset B_\lambda$ gibt mit $B = X \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B'_\lambda\right)$. Ist nun V ein H-Komplement von U in M, $V \oplus W = M$, so daß U und W dieselben Summanden in M haben, so folgt nach Voraussetzung

$$V' \oplus W' \oplus M_0 = M, \quad V' + U = M, \quad \text{also} \quad V' = V.$$

Mit $W_1 = W' + M_0$ gilt also wieder $V \oplus W_1 = M$, U hat dieselben Summanden in M wie W_1, aber zusätzlich ist $M_0 \subset W_1$. Damit ist jetzt $(V + M_0)/M_0$ ein H-Komplement von U/M_0 in M/M_0, und falls sogar $W \subset U$ war, folgt auch $W_1 \subset U$, d.h. $W_1/M_0 \subset U/M_0$.

(b) Sei A/M_0 ein H-Komplement von U/M_0 in M/M_0, also $A/M_0 \oplus W/M_0 = M/M_0$, so daß U/M_0 und W/M_0 dieselben Summanden in M/M_0 haben. Dann folgt mit $M_1 \oplus M_0 = M$, daß $V = M_1 \cap A$ ein H-Komplement von U in M ist. War aber $W/M_0 \subset U/M_0$, so hat man auch das starke Komplement.

Lemma 1.2. *Sei V ein starkes Komplement von U in M, so daß $V \cap U$ die Austauscheigenschaft besitzt. Dann gilt:*

(a) *Ist $M_0 \subset U$ direkter Summand in M, so ist auch $(V + M_0)/M_0$ ein starkes Komplement von U/M_0 in M/M_0.*

(b) *Ist X_0 ein maximales Element in der Menge $\{X \subset U \mid X \text{ direkter Summand in } M\}$, so folgt $V \oplus X_0 = M$.*

Beweis. (a) Zu $M_1 \oplus M_0 = M$, also $(M_1 \cap U) \oplus M_0 = U$, hat man nach Voraussetzung eine Zerlegung $A \oplus B \oplus (V \cap U) = U$ mit $A \subset M_1 \cap U$, $B \subset M_0$.

Addition von M_1 liefert $M_1 + B = M$, also $B = M_0$; Addition von V liefert $V \oplus (A + M_0) = M$, d.h. wir haben einen Zwischenmodul $M_0 \subset W_1 \subset U$ mit $V \oplus W_1 = M$. Daraus folgt die Behauptung. — In (b) hat man wie eben ein $X_0 \subset W_1 \subset U$ mit $V \oplus W_1 = M$, nach Voraussetzung aber $W_1 = X_0$.

Satz 1.3. *Besitze in M jeder kleine Untermodul die Austauscheigenschaft. Dann gilt für jedes H-Komplement V von U in M:*

(a) *V und M/V sind bis auf Isomorphie durch U eindeutig bestimmt.*

(b) *Besitzt U irgendein starkes Komplement in M, so ist bereits V eines.*

(c) *Ist $M_0 \subset U$ direkter Summand in M, so ist auch $(V + M_0)/M_0$ ein H-Komplement von U/M_0 in M/M_0.*

Beweis. Sei $V \oplus W = M$, so daß U und W dieselben Summanden in M haben. Dann ist V ein starkes Komplement von $U_0 = U + W$ in M, und nach Voraussetzung hat $V \cap U_0$ die Austauscheigenschaft.

(c) In $\bar{M} = M/M_0$ ist nach (1.2, a) $\bar{V}$ ein starkes Komplement von $\bar{U}_0$, und weil $\bar{U}_0/\bar{U}$ klein in $\bar{M}/\bar{U}$ ist, folgt die Behauptung. (b) Die Existenz eines starken Komplementes bedeutet, daß es ein $X_0 \subset U$ gibt mit X_0 direkter Summand in M, U/X_0 klein in M/X_0. Nun ist X_0 auch maximaler direkter Summand unter U_0, nach (1.2, b) also $V \oplus X_0 = M$ und daher $V \cap U$ direkter Summand in U. (a) Ist V_1 ein weiteres H-Komplement von U in M, mit entsprechendem W_1, so wird V ein starkes Komplement von $U_1 = U + W + W_1$ in M, W_1 maximaler direkter Summand unter U_1, also wieder nach (1.2, b) $V \oplus W_1 = M$. Damit gilt

$$V \cong M/W_1 \cong V_1, \quad M/V \cong W_1 \cong M/V_1.$$

Die Voraussetzung im Satz ist z.B. über jedem diskreten Bewertungsring R erfüllt: Ist A ein kleiner Untermodul von M, so ist A *koatomar*, d.h. $A/T(A) \cong R^n$ und $T(A)$ beschränkt. R hat die Austauscheigenschaft nach ([5] Proposition 1), $R/(p^t)^{(I)}$ hat sie als selbstinjektiver Modul nach ([2] Theorem 3), und damit hat sie auch A nach ([1] Lemma 3.10). — Offenbar genügt für die Austauscheigenschaft, daß $A/D(A)$ koatomar ist, und das letztere ist bekanntlich damit äquivalent, daß jeder reine Untermodul von A abspaltet, d.h. A *reinzerfallend* ist.

Lemma 1.4. *Ist R ein diskreter Bewertungsring, M ein R-Modul und V ein H-Komplement von U in M, so gilt:*

(a) *$U \cap D(M)$ ist reinzerfallend.*

(b) *Falls $U \subset \mathrm{Ra}(M)$, ist sogar U reinzerfallend und V ein starkes Komplement.*

(c) *Falls $T(M) \subset U$, ist jedes weitere Komplement von U in M bereits ein H-Komplement.*

(d) *Ist X ein reiner Untermodul von M mit $X \subset U$, so folgt $V \cap X = 0$.*

Beweis. Sei wieder $V \oplus W = M$, so daß U und W dieselben Summanden in M haben. Mit $U_0 = U + W$ heißt das, daß U_0/U klein in M/U und U_0/W klein in

M/W ist. (a) Weil $U/U \cap W$ und $W/U \cap W$ reduziert sind, gilt $D(U) = D(W)$, so daß $U \cap D(M) = (U \cap D(V)) \oplus D(U)$ in einen koatomaren und einen teilbaren Anteil zerlegt ist. (b) Dann ist auch $W \subset \mathrm{Ra}(M)$, also W teilbar, $U_0/U = 0$, also $W \subset U$, und daher V ein starkes Komplement von U in M. Wegen $D(U) = W$ ist auch U reinzerfallend. (c) Dann ist auch $T(M) \subset W$, also M/W torsionsfrei, so daß für jedes Komplement V_1 von U in M der wesentliche Epimorphismus $V_1 \to M/W$ ein Isomorphismus ist, d.h. $V_1 \oplus W = M$. (d) Sei zunächst X sogar koatomar: Weil dann $T(X)$ beschränkt und direkter Summand in M ist, folgt nach dem Beweis von (1.1, a), daß $V \cap T(X) = 0$, d.h. $V \cap X$ torsionsfrei ist; andererseits ist in $\bar{M} = M/T(M)$ wieder $\bar{V}$ ein H-Komplement von $\bar{U}$, also $\bar{V} \cap \bar{X}$ klein und rein in $\bar{M}$, $\bar{V} \cap \bar{X} = 0$, $V \cap X$ torsionsvoll, zusammen also $V \cap X = 0$. — Ist aber X beliebig, so ist in $\tilde{M} = M/X \cap W$ ebenfalls $\tilde{V}$ ein H-Komplement von $\tilde{U}$, weiter $\tilde{X}$ koatomar und rein in $\tilde{M}$, also nach eben $\tilde{V} \cap \tilde{X} = 0$, $V \cap X \subset W$, $V \cap X = 0$ wie behauptet.

Noch in einem weiteren Spezialfall ist jedes H-Komplement bereits ein starkes Komplement: Wenn M torsionsfrei und koseparabel ist. Dabei heißt M *koseparabel*, wenn zu jedem Untermodul U von M, mit M/U endlich erzeugt, ein $U' \subset U$ existiert, so daß U' direkter Summand in M ist und M/U' immer noch endlich erzeugt. Nach ([9] Satz 2.1) ist das über einem diskreten Bewertungsring R äquivalent damit, daß $T(\mathrm{Ext}^1_R(M, R))$ reduziert ist. Bei vollständigem R ist also jeder R-Modul koseparabel. — In einem koseparablen R-Modul ist jeder endlich erzeugte reine Untermodul bereits direkter Summand, eine Eigenschaft, die wir in [9] als *Quasi-Separabilität* bezeichneten.

Lemma 1.5. *Sei R ein diskreter Bewertungsring, M koseparabel und V ein H-Komplement von U in M. Dann gilt:*

(a) *Auch U ist koseparabel.*

(b) *Falls $T(M) = 0$, ist V bereits ein starkes Komplement von U in M.*

(c) *Falls $\mathrm{So}(M/U)$ endlich erzeugt ist, existiert ein $U' \subset U$, so daß U' direkter Summand in M ist und U/U' endlich erzeugt.*

Beweis. (a) Sind W und U_0 wie stets, so ist in der exakt zerfallenden Folge $0 \to W \subset U_0 \to U_0/W \to 0$ das erste Glied koseparabel und das dritte koatomar, also auch U_0 koseparabel. Nach ([9] Folgerung 2.2) ist dann, weil U_0/U koatomar ist, auch U koseparabel.

(b) $V \cap U$ ist ein endlich erzeugter reiner Untermodul von U, also wegen der Quasi-Separabilität von U schon direkter Summand.

(c) Sei zunächst M beliebig und V sogar ein starkes Komplement von U in M, d.h. $W \subset U$. Dann kann man $U' = W$ wählen, denn in $\bar{M} = M/W$ ist $\bar{U}$ ein kleiner Untermodul, also $\bar{U}$ koatomar und der verbindende Homomorphismus $\mathrm{So}(\bar{M}/\bar{U}) \to \bar{U}/\mathrm{Ra}(\bar{U})$ surjektiv, also wie gewünscht $\bar{U}$ endlich erzeugt. — Sei nun M koseparabel und V ein H-Komplement von U in M. Als koatomarer Untermodul von M/U ist $U_0/U \cong W/U \cap W$ endlich erzeugt, so daß es ein $U' \subset U \cap W$ gibt mit U' direkter Summand in W, W/U' endlich erzeugt. Dieses U' leistet das Gewünschte, denn nach dem Spezialfall ist $V \cap U$ endlich erzeugt, also auch $\mathrm{So}(V) \cong \mathrm{So}(M/W)$, also auch $U_0/W \cong U/U \cap W$, und damit ist U/U' endlich erzeugt.

Folgerung 1.6. *Ist R ein diskreter Bewertungsring, M ein Torsionsmodul und M/U artinsch, so sind äquivalent:*

(i) *U hat ein H-Komplement in M.*

(ii) *Es existiert ein $U' \subset U$, so daß U' direkter Summand in M und M/U' immer noch artinsch ist.*

Beweis. (i $\rightarrow$ ii) M ist koseparabel, so daß man U' wie in (c) wählen kann, und dann ist U/U' von endlicher Länge, also M/U' artinsch. (ii $\rightarrow$ i) Nach ([4] Corollary 5.15) (oder unserem 2.5) hat U/U' ein H-Komplement in M/U', also auch U in M nach (1.1, b).

2. Existenzaussagen für H-Komplemente. Stets sei in diesem Abschnitt R ein diskreter Bewertungsring. Wir wissen dann aus ([6] Lemma 1.4), daß ein beschränkter R-Modul in jeder Erweiterung ein Komplement hat. Wir wollen in (2.2) zeigen, daß er sogar ein H-Komplement hat.

Hilfssatz 2.1. *Sei M ein R-Modul, $n \geqq 1$, $M[p^n] = \{x \in M \mid xp^n = 0\}$ und U ein Untermodul von M:*

(a) *Ist $M[p^{n-1}] \subset U \subset M[p^n]$, so ist jedes Komplement von U in M bereits ein starkes Komplement.*

(b) *Ist $\mathrm{Ra}(M) \cap M[p^n] \subset U \subset M[p^n]$, so hat U ein starkes Komplement in M.*

Beweis. (a) Für den Spezialfall $U = M[p^n]$ haben wir das in ([8] Lemma 4.1) gezeigt. Der Beweis verläuft jetzt entsprechend: Ist V ein Komplement von U in M, so ist $V \cap U$ rein in U zu zeigen, d.h. $(V \cap U)p^i = V \cap Up^i$ für alle $0 \leqq i < n$. Klar ist $i = 0$, und bei $i > 0$ folgt aus $v = up^i$, daß nach Induktionsannahme $v = xp^{i-1}$ ist mit $x \in V \cap U$, $x = v_1 p$ mit $v_1 \in V$, $(u - v_1)p^i = 0$, $u - v_1 \in M[p^{n-1}]$, also $v_1 \in V \cap U$ mit $v = v_1 p^i$.

(b) Wir zeigen im *1. Schritt* durch Induktion über n: Zu jedem $x \in M[p^n]$ gibt es ein $y \in M[p^n]$, so daß yR direkter Summand in M ist und $x - y \in \mathrm{Ra}(M)$. Bei $n = 1$ unterscheidet man zwei Fälle: Ist $x \in \mathrm{Ra}(M)$, so wähle man $y = 0$; ist $x \notin \mathrm{Ra}(M)$, so ist xR einfach und nicht klein in M, also direkter Summand, und man wähle $y = x$. Bei $n > 1$ unterscheidet man entsprechend: Ist $x \in \mathrm{Ra}(M) + M[p^{n-1}]$, also $x - zp \in M[p^{n-1}]$, so hat man nach Induktionsannahme ein $y \in M[p^{n-1}]$, so daß yR direkter Summand in M ist und $(x - zp) - y \in \mathrm{Ra}(M)$, also auch $x - y \in \mathrm{Ra}(M)$; ist $x \notin \mathrm{Ra}(M) + M[p^{n-1}]$, so folgt $xR \cong R/(p^n)$ und $xR \cap Mp^n = 0$, also xR direkter Summand in M (siehe [3] Proposition 27.1), d.h. man wähle $y = x$.

Sei nun im *2. Schritt* U wie angegeben. Weil beschränkte reine Untermoduln abspalten, hat die Menge $\{X \subset U \mid X$ direkter Summand in $M\}$ nach Zorn ein maximales Element X_0, und mit $V \oplus X_0 = M$ behaupten wir, daß V ein starkes Komplement von U in M ist, d.h. $\bar{U}$ klein in $\bar{M} = M/X_0$: Zu jedem $\bar{x} \in \bar{U} \subset \bar{M}[p^n]$

gibt es nach dem 1. Schritt ein $\bar{y} \in \bar{M}[p^n]$, so daß $\bar{y}R$ direkter Summand in $\bar{M}$ ist und $\bar{x} - \bar{y} \in \mathrm{Ra}(\bar{M}) \cap \bar{M}[p^n] \subset \bar{U}$, also auch $\bar{y} \in \bar{U}$. Weil $\bar{U}$ wegen der Maximalität von X_0 keine direkten Summanden von $\bar{M}$ umfaßt, folgt $\bar{y} = 0$, insbesondere $\bar{x} \in \mathrm{Ra}(\bar{M})$. Aus $\bar{U} \subset \mathrm{Ra}(\bar{M})$ und $\bar{U}$ beschränkt folgt aber die Kleinheit.

Bemerkung zu (b). Der Spezialfall $M[p^n] = M$, d.h. M beschränkt und M/U halbeinfach, wird in ([4] Lemma 5.9) gezeigt. Aber auch dann braucht nicht jedes Komplement stark zu sein: In $M = R/(p^3) \times R/(p)$ hat der maximale Untermodul $U = R/(p^3) \times 0$ unter anderem die drei Komplemente $V_1 = (0, \bar{1})R$, $V_2 = (\dot{\bar{1}}, \bar{1})R$, $V_3 = (\dot{p}, \bar{1})R$, und dabei ist $V_1 \oplus U = M$, V_2 zwar direkter Summand in M, aber kein starkes Komplement, und V_3 nicht einmal direkter Summand. — Außerdem zeigt dieses Beispiel, daß die Eindeutigkeitsaussage in (1.3, a) i.allg. nur für H-Komplemente gilt, denn es ist weder $V_1 \cong V_2$ noch $M/V_1 \cong M/V_2$.

Satz 2.2. *Ein beschränkter R-Modul hat in jeder Erweiterung ein H-Komplement.*

Beweis. Mit dem Hilfssatz ist fast nichts mehr zu zeigen: Ist $B \subset M[p^n] \subset M$, so erfüllt $U = \mathrm{Ra}(M) \cap M[p^n] + B$ die Voraussetzungen von (2.1, b), hat also ein starkes Komplement V in M, sagen wir $V \oplus W = M$ mit $W \subset U$. Weil aber U/B klein in M/B ist, haben B und W dieselben Summanden in M, so daß V ein H-Komplement von B in M ist.

Folgerung 2.3. *Hat U ein H-Komplement in M und ist B ein beschränkter Untermodul von M, so hat auch $B + U$ ein H-Komplement in M.*

Beweis. Sei $V \oplus W = M$, so daß U und W dieselben Summanden in M haben, $U_0 = U + W$. Weil $(B + U_0)/W$ und der beschränkte Modul $(B + W)/W$ dieselben Summanden in M/W haben, besitzt $(B + U_0)/W$ ein H-Komplement in M/W, also auch $B + U_0$ ein H-Komplement in M nach (1.1, b). Das ist aber, weil $(B + U_0)/(B + U)$ klein in $M/(B + U)$ ist, auch ein H-Komplement von $B + U$ in M.

Folgerung 2.4. *Ist $M[p^n] + U = M$, so hat U ein H-Komplement in M.*

Beweis. Sei M_0 ein Komplement von $U[p^n]$ in U. Dann ist M_0 auch ein Komplement von $M[p^n]$ in M, so daß es nach (2.1, a) eine Zerlegung $M_0 \oplus M_1 = M$ gibt mit $M_1 \subset M[p^n]$. Weil U/M_0 ein H-Komplement in M/M_0 hat, gilt das wieder nach (1.1, b) auch für U in M.

Bemerkung. Unser Satz gilt allgemeiner über jedem Dedekindring S: Ist M ein S-Modul und B ein beschränkter Untermodul von M, so kann man (2.2) in jeder Primärkomponente anwenden und erhält so eine Zerlegung $V \oplus W = T(M)$, so daß B und W dieselben Summanden in $T(M)$ haben. Natürlich haben sie dann auch dieselben Summanden in M, und der Epimorphismus $B \to T(M)/V \to W$ zeigt, daß W ein beschränkter reiner Untermodul von M ist, in $V_1 \oplus W = M$ also V_1 ein H-Komplement von B in M ist.

Zum Beweis der nächsten Verallgemeinerung von (2.2) ist folgender Begriff nützlich: Ein Untermodul U von M heiße *anti-rein* in M, wenn jeder reine Untermodul

X von M, mit $X \subset U$, bereits Null ist. Das ist genau dann der Fall, wenn U keine direkten Summanden von M umfaßt und wenn $U \subset \mathrm{Ra}(M) + T(M)$ ist.

Satz 2.5. *Ist M ein quasi-separabler R-Modul, so hat jeder reinzerfallende Untermodul U von M ein H-Komplement in M.*

Beweis. Sei im *1. Schritt* M beliebig, dafür aber U koatomar und enthalten in $\mathrm{Ra}(M) + T(M)$. Zu $U = T(U) \oplus X$, $\sum_{i=1}^{n} x_i R = X$, gibt es dann Torsionselemente y_i $(1 \leqq i \leqq n)$ mit $x_i - y_i \in \mathrm{Ra}(M)$, und $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i R$ ist dann ein endlich erzeugter Torsionsmodul mit $X + \mathrm{Ra}(M) = Y + \mathrm{Ra}(M)$, d.h. X und Y haben dieselben Summanden in M. Das gilt dann auch für U und den beschränkten Untermodul $B = T(U) + Y$, so daß U nach (2.2) ein H-Komplement in M hat.

Sind im *2. Schritt* nun M und U wie angegeben, so hat die Menge $\{X \subset U \mid X$ rein in $M\}$ ein maximales Element X_0, und weil X_0 als direkter Summand von U wieder reinzerfallend ist, spaltet es nach ([9] Lemma 1.2) sogar im quasi-separablen M ab. In $\bar{M} = M/X_0$ ist aber $\bar{U}$ anti-rein, also koatomar (weil reduziert und reinzerfallend) und enthalten in $\mathrm{Ra}(\bar{M}) + T(\bar{M})$. Nach dem 1. Schritt hat $\bar{U}$ ein H-Komplement in $\bar{M}$, also auch U in M.

Folgerung 2.6. (a) *Ist M reinzerfallend und $U \subset M$, so gilt: Genau dann hat U ein H-Komplement in M, wenn U selbst reinzerfallend ist.*

(b) *Genau dann ist M H-komplementiert, wenn M supplementiert ist.*

Beweis. (a) Ist U reinzerfallend, so liefert (2.5) die Behauptung, denn M ist natürlich quasi-separabel. Hat umgekehrt U ein H-Komplement in M, so ist $U \cap D(M)$ nach (1.4, a) reinzerfallend, $U/U \cap D(M)$ sogar koatomar, also auch U reinzerfallend. — Spezialfall: Ist M komplementiert und $U \subset M$, so gilt: Genau dann hat U ein H-Komplement in M, wenn U selbst komplementiert ist. Damit ist auch (b) gezeigt, denn nach ([7] Theorem 2.2) ist M genau dann supplementiert, wenn jeder Untermodul von M komplementiert ist.

Folgerung 2.7. *Für einen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *M hat in jeder Erweiterung ein H-Komplement.*

(ii) *M hat in jeder Erweiterung N ein Komplement V, so daß auch noch V ein Komplement in N hat.*

(iii) *M ist reinzerfallend und kotorsion.*

Beweis. Klar ist (i $\to$ ii), und bei (ii $\to$ iii) ist M kotorsion, d.h. $\mathrm{Ext}_R^1(K, M) = 0$ nach ([6] Lemma 2.1). Wählt man eine Erweiterung $M \subset N$ mit $M = \mathrm{Ra}(N)$ und ein Komplement V wie verlangt, so folgt $V + D(M) = N$, so daß $M/D(M)$ als epimorphes Bild von $V \cap M$ koatomar ist, d.h. M reinzerfallend. (iii $\to$ i) Sei $M \subset N$: Falls R vollständig, ist N quasi-separabel, und (2.5) liefert die Behauptung; falls R unvollständig, ist R nicht kotorsion, also $M/D(M)$ beschränkt, und dann hat $M/D(M)$ ein H-Komplement in $N/D(M)$ nach (2.2), also auch M in N.

Die dritte Folgerung gibt eine Charakterisierung der quasi-separablen (koseparablen) Moduln mit Hilfe von H-Komplementen, welche auf die in ([9] Satz 1.5) gestellte Bedingung „$T(M)$ teilbar" verzichtet:

Folgerung 2.8. *Genau dann ist M quasi-separabel (koseparabel), wenn jeder Untermodul U von M, mit U endlich erzeugt (M/U endlich erzeugt), ein H-Komplement in M hat.*

Beweis. (a) Ist M quasi-separabel, so hat nach (2.5) sogar jeder reinzerfallende Untermodul ein H-Komplement in M; in der umgekehrten Richtung ist jeder endlich erzeugte reine Untermodul nach (1.4, d) direkter Summand, d.h. M quasi-separabel. (b) Ist M koseparabel und M/U endlich erzeugt, so gibt es ein $U' \subset U$, so daß U' direkter Summand in M und M/U' endlich erzeugt ist. Nach (2.5) hat U/U' ein H-Komplement in M/U', also auch U in M. — In der umgekehrten Richtung hat speziell jeder maximale Untermodul von M ein H-Komplement, das ist bereits ein starkes, so daß M nach ([9] Satz 2.1) koseparabel ist.

Wir wollen zum Abschluß dieses Paragraphen prüfen, wie die Voraussetzungen an den Untermodul U in (2.5) abgeschwächt werden können. U heiße *radikal-komplementiert*, wenn $\mathrm{Ra}(U)$ ein Komplement in U hat, und das ist nach ([6] Satz 3.1) äquivalent damit, daß „der" Basis-Untermodul von U koatomar ist. Ist nun zusätzlich M quasi-separabel, so gibt es nach ([9] p. 23) zwar ein Komplement V von U in M, aber wir haben dort ein Beispiel angegeben, in dem V selbst kein Komplement mehr in M hat.

Proposition 2.9. *Sei M ein quasi-separabler R-Modul, sei U ein radikal-komplementierter Untermodul von M und sei $U/U \cap D(M)$ koatomar. Dann hat U ein Komplement in M, das abspaltet.*

Beweis. Im quasi-separablen $M/D(M)$ hat der koatomare Untermodul $(U + D(M))/D(M)$ nach (2.5) ein H-Komplement, sagen wir $C/D(M)$, und in $B \oplus D(M) = C$ ist dann B sowohl direkter Summand in M als auch Komplement von $U + D(M)$ in M. Weil auch $U \cap D(M)$ radikal-komplementiert ist, hat es in $D(M)$ ein Komplement A (siehe [6] p. 277), d.h. A ist ein Komplement von U in $U + D(M)$. Weil $A \cap (B + U)$ koatomar, also A auch ein Komplement von $B + U$ in M ist, leistet endlich $V = A + B$ das Gewünschte:

$$V \cap U \subset A \cap (B + U) + B \cap (A + U)$$

ist klein in V und V/B teilbar, also auch V direkter Summand in M.

Die (2.6) entsprechende Folgerung, in der man „H-Komplement" durch „abspaltendes Komplement" ersetzt, lautet:

Folgerung 2.10. (a) *Ist M reinzerfallend und $U \subset M$, so gilt: Genau dann hat U ein abspaltendes Komplement in M, wenn U selbst radikal-komplementiert ist.*

(b) *Ist M komplementiert, so hat jeder Untermodul von M bereits ein abspaltendes Komplement in M.*

Beweis. (a) Ist U radikal-komplementiert, so liefert (2.9) — weil mit $M/D(M)$ auch $U/U \cap D(M)$ koatomar ist — die Behauptung; in der umgekehrten Richtung genügt sogar eine Darstellung $V + U = M$ mit $V \cap U$ klein in M, denn dann ist $V \cap U$ koatomar und $U/V \cap U$ reinzerfallend, also U radikal-komplementiert. Damit ist auch (b) bewiesen.

3. Endlich erzeugte Moduln über lokalen Ringen. Stets sei in diesem letzten Abschnitt R ein kommutativer lokaler Ring (ohne Kettenbedingungen), $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal und $k = R/\mathfrak{m}$ sein Restklassenkörper. Es ist wohlbekannt, daß jeder endlich erzeugte R-Modul M komplementiert ist. Die Existenz von H-Komplementen erzwingt aber in (3.2) zusätzlich eine „kanonische" Zerlegung von M.

Hilfssatz 3.1. *Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von R verschiedene Ideale, $M = R/\mathfrak{a} \times R/\mathfrak{b}$ und $r, s \in R$.*

(a) *Ist $r \notin \mathfrak{m} \not\ni s$, so gilt: Genau dann ist $(\dot{r}, \bar{s})R$ direkter Summand in M, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ vergleichbar sind (d.h. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$).*

(b) *Ist $r \in \mathfrak{m} \not\ni s$, so gilt: Genau dann ist $(\dot{r}, \bar{s})R$ direkter Summand in M, wenn $r \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ ist.*

Beweis. Der Fall $r \in \mathfrak{m} \ni s$ ist uninteressant, denn dann ist $(\dot{r}, \bar{s})R$ klein in M, also nur dann direkter Summand, wenn es schon Null ist.

Seien zunächst r und s beliebig, $A = R/\mathfrak{a} \times 0$ und $B = 0 \times R/\mathfrak{b}$. Ohne Mühe zeigt man dann: Genau dann ist $(\dot{r}, \bar{s})R \oplus A = M$, wenn $r \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ ist und $s \notin \mathfrak{m}$; genau dann ist $(\dot{r}, \bar{s})R \oplus B = M$, wenn $s \in \mathfrak{b} : \mathfrak{a}$ ist und $r \notin \mathfrak{m}$. Weil andererseits jeder nicht-triviale direkte Summand von M die Austauscheigenschaft hat, also als direktes Komplement nur A oder B haben kann, folgt sowohl (a) als auch (b).

Satz 3.2. *Sei M ein endlich erzeugter, von Null verschiedener R-Modul. Dann sind äquivalent:*

(i) *M ist H-komplementiert.*

(ii) *Jeder maximale Untermodul von M hat ein starkes Komplement in M.*

(iii) *Es gibt Ideale $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_n \subsetneqq R$ mit $M \cong R/\mathfrak{a}_1 \times \cdots \times R/\mathfrak{a}_n$.*

Beweis. (i $\rightarrow$ ii) Ist $\mathrm{Ra}(M) \subset U \subset M$, so ist nach der Bemerkung vor (1.1) jedes H-Komplement von U in M bereits ein starkes Komplement.

(ii $\rightarrow$ iii) Zunächst ist M direkte Summe von zyklischen Moduln. Wählt man zu irgendeinem maximalen Untermodul X von M ein starkes Komplement M_0, so ist M_0 zyklisch $\neq 0$, hat also nach ([5] Proposition 1) die Austauscheigenschaft, und M/M_0 erfüllt nach (1.1, a) wieder die Bedingung (ii). Induktion über $\dim_k(M/M\mathfrak{m})$ liefert die Behauptung.

Für jede Zerlegung $M \cong R/\mathfrak{a}_1 \times \cdots \times R/\mathfrak{a}_n$ ($n \geqq 1$, alle $\mathfrak{a}_i \neq R$) zeigen wir nun, daß die $\mathfrak{a}_i$ paarweise vergleichbar sein müssen. Wieder nach (1.1, a) erfüllen bei $n > 1$ alle $R/\mathfrak{a}_i \times R/\mathfrak{a}_j$ ($i \neq j$) die Bedingung (ii), so daß wir gleich $M = R/\mathfrak{a} \times R/\mathfrak{b}$ annehmen können, mit $\mathfrak{a} \neq R$, $\mathfrak{b} \neq R$. Wählt man irgendeinen maximalen Untermodul U von M mit $(\dot{1}, \bar{1}) \in U$, so gibt es nach Voraussetzung ein starkes Komplement V von U in M, also $V \oplus W = M$ mit $W \subset U$. In $W = (\dot{r}, \bar{s}) R$ folgt dann $r \notin \mathfrak{m} \not\ni s$, so daß nach (3.1, a) $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ vergleichbar sind.

(iii $\rightarrow$ i) Wir zeigen im *1. Schritt* durch Induktion über n: Ist $\mathrm{Ra}(M) \subset U \subset M$ und umfaßt U keine direkten Summanden von M, so folgt bereits $U = \mathrm{Ra}(M)$. Bei $n = 1$, d.h. $M \cong R/\mathfrak{a}_1$, ist das klar. Bei $n > 1$ schreibe man $M = A \oplus B$ mit $A \cong R/\mathfrak{a}_1$, $B \cong R/\mathfrak{a}_2 \times \cdots \times R/\mathfrak{a}_n$. Für $\mathrm{Ra}(B) \subset U \cap B \subset B$ gilt dann, weil $U \cap B$ keine direkten Summanden von B umfaßt, nach Induktion $U \cap B = \mathrm{Ra}(B)$. Falls $U \subset \mathrm{Ra}(A) + B$, folgt $U = \mathrm{Ra}(A) + U \cap B = \mathrm{Ra}(M)$ wie gewünscht. Falls $U \not\subset \mathrm{Ra}(A) + B$ (und diese Annahme wollen wir zum Widerspruch führen), folgt $U + B = M$, also wegen $\mathfrak{a}_1 B = 0$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, dotted, "\mathrm{kan}"] \\ B \arrow[r, dotted, "\mathrm{kan}"'] & M/U \end{tikzcd} .$$

Damit ist $U' = \{a - f(a) \mid a \in A\}$ ein Untermodul von U mit $U' \oplus B = M$, und nach Voraussetzung folgt $U' = 0$, d.h. $A = 0$, was nicht wahr ist.

Sei nun im *2. Schritt* $U \subset M$ beliebig. Wegen $\dim_k(M/M\mathfrak{m}) = n$ hat M die Maximalbedingung für direkte Summanden, insbesondere die Menge

$$\{X \subset \mathrm{Ra}(M) + U \mid X \text{ direkter Summand in } M\}$$

ein maximales Element X_0. Mit $V \oplus X_0 = M$ behaupten wir, daß V ein H-Komplement von U in M ist. Weil $U_1 = \mathrm{Ra}(M) + U$ und U dieselben Summanden in M haben, genügt es $\bar{U}_1$ klein in $\bar{M} = M/X_0$ zu zeigen. Das folgt aber mit dem 1. Schritt, denn $\bar{M}$ ist entweder Null oder wieder von der Form

$$R/\mathfrak{b}_1 \times \cdots \times R/\mathfrak{b}_m \quad \text{mit} \quad \mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{b}_m \subsetneqq R,$$

$\bar{U}_1$ umfaßt keine direkten Summanden von $\bar{M}$, und schließlich ist $\mathrm{Ra}(\bar{M}) \subset \bar{U}_1 \subset \bar{M}$.

Bemerkung. Sind in $M \cong R/\mathfrak{a}_1 \times \cdots \times R/\mathfrak{a}_n$ die Ideale $\mathfrak{a}_i$ nicht unbedingt miteinander vergleichbar, so haben die Untermoduln von M immerhin noch ein abspaltendes Komplement in M.

Folgerung 3.3. *Für einen endlich erzeugten, von Null verschiedenen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *M ist stark komplementiert.*

(ii) *Jeder Untermodul U von M, mit M/U zyklisch, hat ein starkes Komplement in M.*

(iii) $M \cong R/\mathfrak{a}_1 \times \cdots \times R/\mathfrak{a}_n$ mit $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_n \subsetneqq R$ *und* $\mathfrak{m}\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_1$.

Beweis. (i $\rightarrow$ ii) ist klar, und bei (ii $\rightarrow$ iii) hat man zunächst eine Zerlegung wie in (3.2). Für $n > 1$ erfüllt auch $N = R/\mathfrak{a}_1 \times R/\mathfrak{a}_n$ die Bedingung (ii), so daß für jedes $r \in R$ der Faktor $N/(\dot{r}, \bar{1}) R$ zyklisch, also $(\dot{r}, \bar{1}) R$ direkter Summand in N ist. Für alle $r \in \mathfrak{m}$ bedeutet das nach (3.1, b) $r \in \mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_n$, d.h. insgesamt $\mathfrak{m}\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_1$.

(iii $\to$ i) Wir zeigen zuerst für jedes $x \in M$, $x \notin \mathrm{Ra}(M)$, daß xR direkter Summand in M ist. Bei $n = 1$ ist das klar, und bei $n > 1$ gibt es zu $x = (\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n)$ ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $r_j \notin \mathfrak{m}$, und dieses j sei gleich minimal. Mit

$$A = R/\mathfrak{a}_1 \times \cdots \times 0 \times \cdots \times R/\mathfrak{a}_n,$$

wobei genau an der j-ten Stelle Null steht, folgt jetzt $xR \oplus A = M$: Aus der Darstellung $x - (\bar{r}_1, \ldots, 0, \ldots, \bar{r}_n) = (0, \ldots, \bar{1}, \ldots, 0)\, r_j$ erhält man die Summe, und ist $xs \in A$, so folgt aus $r_j s \in \mathfrak{a}_j$ schon $s \in \mathfrak{a}_i$ für alle $i \geqq j$; für alle $i < j$ ist aber $r_i \in \mathfrak{m}$, also nach Voraussetzung $r_i s \in \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_i$, so daß insgesamt $\bar{r}_i s = 0$ ist für alle i, d.h. $xs = 0$. Damit ist M stark komplementiert: Nach ([7] Satz 3.1) ist nur noch zu zeigen, daß jeder nicht-kleine Untermodul U einen von Null verschiedenen direkten Summanden umfaßt, und weil $U \not\subset \mathrm{Ra}(M)$ ist, es also ein $x \in U$, $x \notin \mathrm{Ra}(M)$ gibt, leistet xR das Gewünschte.

Zur Vollständigkeit notieren wir noch den Fall, daß sogar alle $\mathfrak{a}_i$ übereinstimmen, überlassen aber dem Leser den Beweis:

Folgerung 3.4. *Für einen endlich erzeugten, von Null verschiedenen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *M ist stark supplementiert* (siehe [7] p. 252).

(ii) *Jeder maximale Untermodul von M hat genügend viele starke Komplemente in M.*

(iii) *Es gibt ein Ideal $\mathfrak{a} \neq R$ und ein $n \geqq 1$ mit $M \cong (R/\mathfrak{a})^n$.*

Literaturverzeichnis

[1] P. Crawley and B. Jonsson, Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems. Pacific J. Math. **14**, 797–855 (1964).

[2] L. Fuchs, On quasi-injective modules. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **23**, 541–546 (1969).

[3] L. Fuchs, Infinite abelian groups, Vol. I. New York-London 1970.

[4] J. Hausen, Groups whose normal subgroups have minimal supplements. Arch. Math. **32**, 213–222 (1979).

[5] R. B. Warfield, Jr., A Krull-Schmidt theorem for infinite sums of modules. Proc. Amer. Math. Soc. **22**, 460–465 (1969).

[6] H. Zöschinger, Moduln, die in jeder Erweiterung ein Komplement haben. Math. Scand. **35**, 267–287 (1974).

[7] H. Zöschinger, Komplemente als direkte Summanden. Arch. Math. **25**, 241–253 (1974).

[8] H. Zöschinger, Über Torsions- und $\varkappa$-Elemente von $\mathrm{Ext}(C, A)$. J. Algebra **50**, 299–336 (1978).

[9] H. Zöschinger, Quasi-separable und koseparable Moduln über diskreten Bewertungsringen. Math. Scand. **44**, 17–36 (1979).

Eingegangen am 29. 4. 1981

Anschrift des Autors:

Helmut Zöschinger
Mathematisches Institut
der Universität München
Theresienstr. 39
D-8000 München 2