Arch. Math., Vol. 41, 121–130 (1983)

0003-889X/83/4102-0121 $ 3.50/0

Linear-kompakte Moduln über noetherschen Ringen

Von

Helmut Zöschinger

Einleitung. Ein Modul M heißt *linear-kompakt*, wenn für jede nach unten gefilterte Familie von nichtleeren affinen Teilmengen $(x_\lambda + U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ gilt, daß $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (x_\lambda + U_\lambda) \neq \emptyset$ ist. Jeder artinsche Modul ist linear-kompakt, und über einem vollständigen lokalen Ring R ist auch jeder endlich erzeugte R-Modul linear-kompakt. Das Hauptergebnis unserer Arbeit ist, daß über solchen Ringen umgekehrt jeder linear-kompakte Modul M einen endlich erzeugten Untermodul B besitzt, so daß M/B artinsch ist. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß für diese Umkehrung weder „vollständig" noch „lokal" nötig ist, und so erhalten wir das

Theorem. *Über einem kommutativen noetherschen Ring ist jeder linear-kompakte Modul Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen artinschen Modul.*

Daraus folgt sofort eine Reihe von interessanten Endlichkeitsbedingungen, die — wie einfache Beispiele zeigen — im nicht noetherschen Fall nicht mehr erfüllt sein müssen.

Korollar 1. *Ist R ein kommutativer noetherscher Ring und M ein linear-kompakter R-Modul, so gilt:*

(a) *M erfüllt die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln.*

(b) *Für jeden injektiven Endomorphismus $f\colon M \to M$ ist* $\operatorname{Kok} f$ *endlich erzeugt.*

(a^0) *M erfüllt die Maximalbedingung für Untermoduln U mit* $\operatorname{So}(M/U) = 0$.

(b^0) *Für jeden surjektiven Endomorphismus $f\colon M \to M$ ist* $\operatorname{Ke} f$ *artinsch.*

Das Studium der linear-kompakten Moduln hängt eng mit Fragen der Matlis- bzw. Morita-Dualität zusammen. Ist R wieder ein vollständiger lokaler Ring und E die injektive Hülle seines Restklassenkörpers, so wurde 1958 von Matlis in [4] gezeigt, daß jeder endlich erzeugte und ebenso jeder artinsche R-Modul M E-reflexiv ist, d.h. die kanonische Abb. $M \to \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(M, E), E)$ bijektiv ist. Die Untersuchung der Ringe, welche eine Morita-Dualität besitzen, führte Müller 1970 zur Bestimmung aller E-reflexiven R-Moduln: Sie stimmen nach [6] genau mit den linear-kompakten R-Moduln überein.

Korollar 2. *Über einem vollständigen lokalen Ring R ist ein R-Modul M genau dann E-reflexiv, wenn er Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen artinschen Modul ist.*

Die beiden von Matlis angegebenen Fälle erfaßten also im wesentlichen schon alle E-reflexiven Moduln über R.

1. Die Struktur der linear-kompakten Moduln. Stets sei R ein kommutativer noetherscher Ring, Ω die Menge seiner maximalen Ideale. Ein R-Modul M heißt radikalvoll (sockelfrei), wenn er keine maximalen (einfachen) Untermoduln besitzt. Der größte radikalvolle Untermodul von M wird mit $P(M)$ bezeichnet, und $M/P(M)$ heißt der reduzierte Anteil von M. Die Summe aller artinschen Untermoduln von M ist $L(M)$, und $M/L(M)$ der sockelfreie Anteil von M. Ein Modul M heißt unzerlegbar, wenn $M \neq 0$ und jeder von M verschiedene Untermodul klein in M ist, d.h. aus $X + Y = M$ stets folgt $X = M$ oder $Y = M$. In diesem Fall ist die Menge $\{x \in R \mid xM \neq M\}$ ein Primideal, das wir mit $I(M)$ bezeichnen. Sei nun M wieder beliebig: Ein Primideal $\mathfrak{p}$ heißt nach ([3], p. 1134) koassoziiert zu M, wenn es einen unzerlegbaren Faktormodul M' von M gibt mit $\mathfrak{p} = I(M')$. Das ist — was wir im folgenden nicht benötigen — äquivalent damit, daß es einen artinschen Faktormodul A von M gibt mit $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(A)$. Die hier benützten Tatsachen über die Menge $\mathrm{Koass}(M)$ der zu M koassoziierten Primideale sollen erst im 2. Abschnitt bewiesen werden.

Mit diesen Begriffen lassen sich die folgenden fünf Eigenschaften eines *linear-kompakten* Moduls M aufzählen, die wir ständig verwenden.

(L1) Jeder Unter- und jeder Faktormodul von M ist wieder linear-kompakt ([9] Proposition 2 und Proposition 3).

(L2) Ist Q ein injektiver Kogenerator mit großem Sockel und $S = \mathrm{End}_R(Q)$, so ist auch $M^0 = \mathrm{Hom}_R(M, Q)$ als S-Modul linear-kompakt und die Abb.

$$\mathscr{L}_R(M) \ni U \mapsto \mathrm{Ann}_{M^0}(U) \in \mathscr{L}_S(M^0)$$

ein Verbandsantiisomorphismus ([7] Theorem 6, Corollary 2 und [8] Lemma 3.7).

(L3) M hat endliche Goldie-Dimension und es gibt endlich viele unzerlegbare Untermoduln U_i $(1 \leqq i \leqq n)$ mit $M = U_1 + \cdots + U_n$ ([9] Proposition 6 und der Antiisomorphismus aus L2).

(L4) M hat nur endlich viele assoziierte und nur endlich viele koassoziierte Primideale ([3] Proposition 2).

(L5) $L(M)$ ist artinsch und $M/P(M)$ endlich erzeugt ([10] Lemma 1.1).

Die Hauptlast des Beweises ruht auf der in Korollar 1 behaupteten Minimal- bzw. Maximalbedingung, die wir in (1.4) bzw. (1.5) nachweisen. Sei wieder M beliebig.

Hilfssatz 1.1. *Besitze M die Eigenschaft, daß jeder Untermodul U von M, mit* $\mathrm{So}(M/U) = 0$, *radikalvoll ist. Dann gilt für jedes* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, *daß* $\dim(R/\mathfrak{p}) \leqq 1$ *ist.*

Beweis. Sei im *1. Schritt* R lokal mit dem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Weil sich die Voraussetzung auf Faktormoduln vererbt und

$$\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(L(M)) \cup \mathrm{Ass}(M/L(M))$$

ist, können wir gleich $\mathrm{So}(M) = 0$ annehmen. Zu $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, also $B \subset M$ mit $B \cong R/\mathfrak{p}$, zeigt dann die exakte Folge $0 \to \mathrm{So}(M/B) \to \mathrm{Ext}^1_R(R/\mathfrak{m}, B)$, daß $\mathrm{So}(M/B)$ endlich erzeugt, d.h. $U/B = L(M/B)$ nach ([5] Proposition 3) artinsch ist. Nun ist U radikalvoll, $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Koass}(U/B)$ nach (2.2, c), also nach (L4) sogar

$$\mathfrak{m} \not\subset \bigcup \mathrm{Koass}(U/B) \cup \mathfrak{p}\,.$$

Sei $x \in \mathfrak{m}\setminus\mathfrak{p}$, so daß U/B x-teilbar ist (Folgerung 1 zu 2.2). Dann ist nach Nakayama auch U x-teilbar, also nach dem Schlangenlemma $\mathrm{Ann}_{U/B}(x) \to B/xB \to 0$ exakt, $\dim(B/xB) = 0$, $\dim(B) = 1$ wie behauptet.

Sei nun im *2. Schritt* R beliebig. Für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ erfüllt dann $M_{\mathfrak{m}}$ als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul die entsprechende Bedingung, denn aus $\mathrm{So}(M_{\mathfrak{m}}/U_{\mathfrak{m}}) = 0$ folgt $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}(M/U)$, so daß in $\bar{M} = M/\mathfrak{m}U$ die $\mathfrak{m}$-Komponente $L_{\mathfrak{m}}(\bar{M}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Ann}_{\bar{M}}(\mathfrak{m}^i)$ mit $\bar{U}$ übereinstimmt; nach Voraussetzung ist aber $L(\bar{M})$ radikalvoll, also auch der direkte Summand $L_{\mathfrak{m}}(\bar{M})$ (siehe [5] Theorem 1), d.h. $\bar{U} = 0$, U $\mathfrak{m}$-teilbar, $U_{\mathfrak{m}}$ radikalvoll wie gewünscht. Für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ ist daher $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{m}$ unmöglich (weil nach dem ersten Schritt $\dim(R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{m}}) \leqq 1$ wäre), also $\dim(R/\mathfrak{p}) \leqq 1$.

Wir werden sehen, daß jeder linear-kompakte radikalvolle Modul die Voraussetzung des Hilfssatzes erfüllt. Allgemeiner sei $\mathfrak{C}$ die Klasse aller R-Moduln M, bei denen für jeden Untermodul U die Menge $\mathrm{Koass}(U) \cup \mathrm{Ass}(M/U)$ endlich ist. Nach (L4) und (L1) gehört jeder linear-kompakte Modul zu $\mathfrak{C}$, und über einem 1-dim. lokalen Ring R ist sogar $\mathfrak{C} = R$-Mod.

Ein Großteil der in der Einleitung angekündigten Eigenschaften linear-kompakter Moduln läßt sich nun schon für die Mitglieder von $\mathfrak{C}$ zeigen.

Lemma 1.2. *Für jeden Modul $M \in \mathfrak{C}$ gilt:*

(a) *Ist M/U sockelfrei, so folgt $P(U) = U \cap P(M)$.*

(b) *Ist U ein radikalvoller Untermodul von M, so folgt*

$$L(M/U) = (L(M) + U)/U\,.$$

Beweis. (a) Auch $N = P(M)/U \cap P(M)$ gehört zu $\mathfrak{C}$, ist aber zusätzlich radikalvoll und sockelfrei. Für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ ist daher $\mathfrak{m} \not\subset \bigcup \mathrm{Koass}(N) \cup \bigcup \mathrm{Ass}(N)$, so daß ein $x \in \mathfrak{m}$ existiert, das auf N bijektiv operiert. In der exakten Folge

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/\mathfrak{m}, N) \to R/\mathfrak{m} \underset{R}{\otimes} U \cap P(M) \to R/\mathfrak{m} \underset{R}{\otimes} P(M)$$

ist also das erste Glied Null, so daß mit dem dritten auch das zweite verschwindet, d.h. $U \cap P(M)$ $\mathfrak{m}$-teilbar ist. Das gilt für alle $\mathfrak{m} \in \Omega$, so daß $U \cap P(M)$ radikalvoll ist, also enthalten in $P(U)$.

(b) Allgemeiner zeigen wir: Ist U $\mathfrak{m}$-teilbar, so folgt $L_{\mathfrak{m}}(M/U) = (L_{\mathfrak{m}}(M) + U)/U$. Für $N = U/L_{\mathfrak{m}}(U)$ ist nämlich $\mathfrak{m} \not\subset \bigcup \mathrm{Koass}(N) \cup \bigcup \mathrm{Ass}(N)$, also wie in Punkt (a)

$\operatorname{Ext}^1_R(R/\mathfrak{m}, N) = 0$. In der verbleibenden exakten Folge

$$\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, M/L_\mathfrak{m}(M)) \to \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, M/(L_\mathfrak{m}(M) + U)) \to 0$$

ist also auch das mittlere Glied Null, d.h. die $\mathfrak{m}$-Komponente von $\dfrac{M}{U}\Big/\dfrac{L_\mathfrak{m}(M)+U}{U}$ Null, also $L_\mathfrak{m}(M/U) \subset (L_\mathfrak{m}(M) + U)/U$ wie behauptet.

Lemma 1.3. *Ist $M \in \mathfrak{C}$ radikalvoll, so gilt:*

(a) *Für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ ist $\dim(R/\mathfrak{p}) \leqq 1$.*

(b) *Ist $x \in R$ kein Nullteiler bezüglich M, so folgt $xM = M$.*

Beweis. (a) Die Voraussetzung von (1.1) ist erfüllt, denn aus $\operatorname{So}(M/U) = 0$ folgt nach (1.2, a) sofort, daß U radikalvoll ist.

(b) Wäre $M/xM \neq 0$, so gäbe es zu $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M/xM)$ ein $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Ass}(M)$ mit $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}$, und wegen $x \in \mathfrak{p}$, $x \notin \mathfrak{p}_0$ folgte nach (a) $\mathfrak{p} \in \Omega$, sagen wir $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$. Wegen $x \in \mathfrak{m}$ ist aber $L_\mathfrak{m}(M) = 0$, also nach dem Beweis von (1.2, b) auch $L_\mathfrak{m}(M/xM) = 0$, und das ist nicht wahr.

Bemerkung. Für den Spezialfall, daß R lokal und vollständig, M linear-kompakt und $\operatorname{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$ ist, gibt Ballet in ([1], p. 349) eine Beschreibung von M in Abhängigkeit von $h(\mathfrak{p})$ und $\dim(R/\mathfrak{p})$. Punkt (ii) seines Theorems sagt, daß M im Falle $\dim(R/\mathfrak{p}) > 1$ bereits endlich erzeugt ist — was unmittelbar aus Punkt (a) unseres Lemmas folgt, denn dann muß $P(M) = 0$ sein.

Satz 1.4. *Sei $M \in \mathfrak{C}$ von endlicher Goldie-Dimension. Dann erfüllt M die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln.*

Beweis. Sei im *1. Schritt* M zusätzlich radikalvoll und sockelfrei. Mit $S = R \setminus \bigcup \operatorname{Ass}(M)$ gilt dann für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$, daß $\mathfrak{p} R_S$ ein maximales Ideal in R_S ist, denn hätte man ein $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{p}_1$ mit $\mathfrak{p}_1 \cap S = \emptyset$, so folgte $\mathfrak{p}_1 \in \Omega$ nach (1.3, a), mit $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{m}$ also $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}(M)$, und das war ausgeschlossen. Weiter ist M_S als R_S-Modul artinsch, denn bei $M \neq 0$ hat man wegen endlicher Goldie-Dimension einen wesentlichen Monom. $\coprod_{i=1}^{n} R/\mathfrak{p}_i \to M$, der zu einem wesentlichen R_S-Monom. $\coprod_{i=1}^{n} (R_S/\mathfrak{p}_i R_S) \to M_S$ wird, in dem die Quelle artinsch ist, also auch das Ziel. Sind schließlich A und B zwei radikalvolle Untermoduln von M mit $A_S = B_S$, so folgt bereits $A = B$, denn zu jedem $a \in A$ hat man ein $s \in S$ mit $sa \in B$, ein $b \in B$ mit $sa = sb$ nach (1.3, b) also $a = b$. Wir haben $A \subset B$ gezeigt, und ebenso folgt $B \subset A$.

Ergebnis: Eine absteigende Folge von radikalvollen Untermoduln von M ist nicht nur in M_S stationär, sondern in M selbst.

Sei nun im *2. Schritt* M wie angegeben, $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ eine absteigende Folge von radikalvollen Untermoduln. Weil $\operatorname{So}(U_1)$ endlich erzeugt, also $L = L(U_1)$ artinsch ist, hat man $U_m \cap L = U_{m+1} \cap L = \cdots$ für ein $m \geqq 1$. Weil aber U_1/L wieder die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, außerdem radikalvoll und sockelfrei ist, gilt nach dem ersten Schritt $U_n + L = U_{n+1} + L = \cdots$ für ein $n \geqq m$, also zusammen $U_n = U_{n+1} = \cdots$ wie gewünscht.

Folgerung. *Ist $M \in \mathfrak{C}$ von endlicher Goldie-Dimension und radikalvoll, so ist jeder injektive Endomorphismus $f\colon M \to M$ bereits bijektiv.*

Satz 1.5. *Ist M linear-kompakt, so erfüllt M die Maximalbedingung für Untermoduln U mit* $\operatorname{So}(M/U) = 0$.

Beweis. Sei im *1. Schritt* R lokal mit dem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{m}$, und sei E die injektive Hülle von $R/\mathfrak{m}$. Nach ([4] Theorem 3.7) ist $\operatorname{End}_R(E) = \hat{R}$, also der $\hat{R}$-Modul $M^0 = \operatorname{Hom}_R(M, E)$ nach (L2) wieder linear-kompakt und die Abb. $\mathscr{L}_R(M) \ni U \mapsto \operatorname{Ann}_{M^0}(U) \in \mathscr{L}_{\hat{R}}(M^0)$ ein Antiisomorphismus. Ist nun $U_1 \subset U_2 \subset \cdots$ eine aufsteigende Folge von R-Untermoduln von M in der alle M/U_i sockelfrei sind, so wird $\operatorname{Ann}_{M^0}(U_1) \supset \operatorname{Ann}_{M^0}(U_2) \supset \cdots$ eine absteigende Folge von radikalvollen $\hat{R}$-Untermoduln von M^0, die nach (1.4) stationär ist, also auch die alte Folge der U_i.

Ist im *2. Schritt* R beliebig, so hat man nach ([12] Satz 2.3) eine kanonische Zerlegung $M = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \Omega} K_{\mathfrak{m}}(M)$, in der $K_{\mathfrak{m}}(M)$ der größte $\mathfrak{m}$-lokale Untermodul von M ist. Nach (L3) sind fast alle $K_{\mathfrak{m}}(M)$ Null, so daß wir gleich M als $\mathfrak{m}$-lokal annehmen können. Durch die Abb. $R_{\mathfrak{m}} \times M \ni (r/s, a) \mapsto ra' \in M$, mit $a = sa'$, wird dann M zu einem $R_{\mathfrak{m}}$-Modul, der dieselben Untermoduln bzw. affinen Teilmengen hat wie ${}_RM$. Über $R_{\mathfrak{m}}$ hat man aber nach dem ersten Schritt die gewünschte Maximalbedingung, also auch über R.

Folgerung. *Ist M linear-kompakt, so gilt für jeden surjektiven Endomorphismus $f\colon M \to M$, daß* $\operatorname{Ke} f$ *artinsch ist.*

Beweis. Ist M zusätzlich sockelfrei, so sind in der aufsteigenden Folge $\operatorname{Ke} f \subset \operatorname{Ke} f^2 \subset \cdots$ auch alle $M/\operatorname{Ke} f^i$ sockelfrei, und aus $\operatorname{Ke} f^n = \operatorname{Ke} f^{n+1} = \cdots$ folgt schon $\operatorname{Ke} f^n = 0$, d.h. die Injektivität von f. Im allgemeinen Fall hat man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L(M) & \to & M & \to & M/L(M) & \to & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow \cong & & \\ 0 & \to & L(M) & \to & M & \to & M/L(M) & \to & 0, \end{array}$$

also $\operatorname{Ke} f' \cong \operatorname{Ke} f$, und weil $L(M)$ nach (L5) artinsch ist, gilt das auch für $\operatorname{Ke} f$.

Lemma 1.6. *Ist M linear-kompakt und sockelfrei, so gilt:*

(a) *Für jedes* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M)$ *ist* $\dim(R/\mathfrak{q}) \leqq 1$.

(b) *Ist $x \in R$ mit $xM = M$, so folgt* $\operatorname{Ann}_M(x) = 0$.

(c) $\bigcap \operatorname{Ass}(M) = \sqrt{\operatorname{Ann}_R(M)}$.

Beweis. (b) ist ein Spezialfall der letzten Folgerung, und bei (c) folgt für $\mathfrak{b} = \bigcap \operatorname{Ass}(M)$, daß M $\mathfrak{b}$-primär, d. h. $M = \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{b}^i)$ ist. Weil auch alle $M/\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{b}^i)$ sockelfrei sind, gilt nach (1.5) $\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{b}^n) = M$ für ein $n \geqq 1$, d.h. $\mathfrak{b} = \sqrt{\operatorname{Ann}_R(M)}$. Sei für (a) nun $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M)$, $\mathfrak{q} \notin \Omega$. Weil $M/P(M)$ nach (L5) endlich erzeugt ist, folgt $\mathfrak{q} \notin \operatorname{Koass}(M/P(M))$, also $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(P(M))$ nach (2.2, d) bzw. (2.1, a). Aber eben haben wir $\bigcap \mathrm{Ass}(P(M)) \subset \mathfrak{q}$ gezeigt, d.h. $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ für ein $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(P(M))$. Nach (1.3, a) gilt $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$, also für $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ die Behauptung.

Auch in (1.3) gibt es eine dem Punkt (c) entsprechende Aussage, nämlich $\bigcap \mathrm{Koass}(M) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$. Wir werden sie erst im zweiten Abschnitt nach einer genaueren Untersuchung der Menge $\mathrm{Koass}(M)$ beweisen (Beispiel 4). Aber schon jetzt folgt aus Punkt (b) der beiden Lemmata, daß $\bigcup \mathrm{Koass}(M) = \bigcup \mathrm{Ass}(M)$ ist, und aus Punkt (a), daß $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$ ist für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M) \cup \mathrm{Ass}(M)$.

Folgerung.. *Ist M linear-kompakt, radikalvoll und sockelfrei, so gilt* $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Ass}(M)$.

(1.7) Beweis des Theorems. Sei $\mathfrak{F}$ die Klasse aller R-Moduln, die Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen artinschen Modul sind. Offenbar ist $\mathfrak{F}$ gegenüber Unter- und Faktormoduln, aber auch gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen. Zum Nachweis, daß jeder linear-kompakte Modul M zu $\mathfrak{F}$ gehört, kann man also wegen (L5) gleich M radikalvoll und sockelfrei annehmen. Nach (1.2) ist dann ein Untermodul U von M genau dann radikalvoll, wenn M/U sockelfrei ist, so daß M nach (1.4) und (1.5) sowohl die Minimal- als auch die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln erfüllt. Mittels einer entsprechenden Kompositionsreihe können wir also zusätzlich annehmen, daß M keine echten radikalvollen Untermoduln besitzt. Für jeden nichttrivialen Untermodul B von M ist dann $P(B) = 0$ und $L(M/B) = M/B$, so daß B endlich erzeugt und M/B artinsch ist wie gewünscht.

Bemerkung. Die im letzten Beweisschritt auftretenden Bausteine — d.h. M linear-kompakt $\neq 0$, radikalvoll und sockelfrei, aber ohne weitere radikalvolle Untermoduln — kann man genauer beschreiben: M ist unzerlegbar und irreduzibel, $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{p}\} = \mathrm{Ass}(M)$ und $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$. Aus $\mathfrak{p}M \neq M$ folgt $\mathfrak{p}M = 0$, ja sogar $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(M)$, und weil für jedes $x \in R \setminus \mathfrak{p}$ die Multiplikation mit x: $M \to M$ bijektiv ist, erhält man: *Als $R/\mathfrak{p}$-Modul ist M gerade der Quotientenkörper von $R/\mathfrak{p}$.*

(1.8) Beweis von Korollar 1. Wegen (a) = (1.4), (a^0) = (1.5) und (b^0) = Folgerung zu (1.5) ist fast nichts mehr zu tun, denn im verbleibenden Punkt (b) induziert f nach der Folgerung zu (1.4) auf $P(M)$ einen Isomorphismus, so daß $\mathrm{Kok}\, f$ ein Faktormodul von $M/P(M)$ wird, also endlich erzeugt ist. (Die betrachteten vier Eigenschaften sind tatsächlich eine Folgerung des Theorems, denn man kann leicht zeigen, daß sie jeder Modul M aus der in (1.7) definierten Klasse $\mathfrak{F}$ besitzt.)

(1.9) Beweis von Korollar 2. Sei R zunächst nur lokal. Ein endlich erzeugter R-Modul ist genau dann linear-kompakt, wenn er in der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie vollständig ist (siehe [2], chap. III, § 2, Ex. 16), und weil die Klasse aller linear-kompakten Moduln gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen ist ([9] Proposition 9), lautet unser Theorem jetzt präziser: *Über einem lokalen Ring R ist ein R-Modul M genau dann linear-kompakt, wenn er Erweiterung eines endlich erzeugten und vollständigen Moduls durch einen artinschen Modul ist.* Ist R zusätzlich vollständig, so kann man nach ([6] Theorem 2) „linear-kompakt" durch „E-reflexiv" ersetzen und erhält das Korollar.

2. Koassoziierte Primideale. In diesem Anhang werden die Tatsachen über koassoziierte Primideale nachgetragen, die wir im ersten Abschnitt ohne Beweis benützten. Dabei zeigt sich, daß vor allem Teilbarkeitseigenschaften des Moduls M (siehe 2.2) durch die Menge $\mathrm{Koass}(M)$ wiedergegeben werden.

Weil R noethersch ist, hat jeder R-Modul $M \neq 0$ einen artinschen, also auch einen unzerlegbaren Faktormodul, so daß $\mathrm{Koass}(M) \neq \emptyset$ ist. Ist M selbst unzerlegbar und $I(M) = \{x \in R \mid xM \neq M\}$ wie oben, so gilt $I(M) = I(M/M_0)$ für jeden Untermodul $M_0 \subsetneqq M$, also $\mathrm{Koass}(M) = \{I(M)\}$. Ist allgemeiner $M = U_1 + \cdots + U_n$, so daß alle U_i unzerlegbar sind und keines von ihnen weggelassen werden kann, so sieht man mit $\mathfrak{p}_i = I(U_i)$ sofort, daß $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ ist. Insbesondere hat jeder linear-kompakte Modul wegen (L3) nur endlich viele koassoziierte Primideale.

Beispiel 1. Ist M artinsch, so folgt $\bigcap \mathrm{Koass}(M) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$.

Beweis. Für jeden Modul M gilt $\bigcap \mathrm{Koass}(M) \supset \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$, denn aus $\mathfrak{p} = I(M/M_0)$, mit M/M_0 unzerlegbar, folgt $\mathfrak{p} \supset \mathrm{Ann}_R(M/M_0) \supset \mathrm{Ann}_R(M)$. Ist aber M artinsch und $M = U_1 + \cdots + U_n$, so daß alle U_i unzerlegbar und keines von ihnen überflüssig ist, so folgt mit $\mathfrak{p}_i = I(U_i)$, daß jedes $x \in \mathfrak{p}_i$ schon nilpotent bezüglich U_i ist, d.h. $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(U_i)}$. Also ist $\bigcap \mathrm{Koass}(M) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$.

Beispiel 2. Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R ist

$$\mathrm{Koass}\left(\coprod_{i=1}^{\infty} R/\mathfrak{a}^i\right) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} + \mathfrak{a} \neq R\}.$$

Beweis. Für jeden $\mathfrak{a}$-primären Modul N folgt aus $\mathfrak{p} + \mathfrak{a} = R$, daß N $\mathfrak{p}$-teilbar ist. Nach (2.2, a) ist dann $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Koass}(N)$, d.h. für den speziellen Modul $N = \coprod_{i=1}^{\infty} R/\mathfrak{a}^i$ haben wir bereits $\mathrm{Koass}(N) \subset \{\ \}$ gezeigt. Zur Umkehrung sei jetzt $\mathfrak{p} \in \{\ \}$, also $\mathfrak{p} + \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ für ein $\mathfrak{m} \in \Omega$. Die injektive Hülle E von $R/\mathfrak{m}$ ist artinsch, also auch der Untermodul $M = \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{p}, E)$, und aus $\mathrm{Ann}_R(M) = \mathfrak{p}$ folgt nach Beispiel 1 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M)$. Weil weiter M $\mathfrak{a}$-primär und abzählbar erzeugt ist, gibt es einen Epim. von $N = \coprod_{i=1}^{\infty} R/\mathfrak{a}^i$ auf M, so daß $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(N)$ ist. (Auch hier gilt $\bigcap \mathrm{Koass}(N) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(N)}$, denn mit $\mathfrak{a}' = \{x \in R \mid x = ax \text{ für ein } a \in \mathfrak{a}\}$ ist nach dem Krullschen Durchschnittssatz $\mathrm{Ann}_R(N) = \mathfrak{a}'$. Ist nun $\mathfrak{p}$ minimal über $\mathrm{Ann}_R(N)$, so wurde in ([12] Lemma 1.2) gezeigt, daß $\mathfrak{p} + \mathfrak{a} \neq R$ ist, also $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(N)$.)

Lemma 2.1. *Sei U ein Untermodul von M.*

(a) *Stets gilt* $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Koass}(U) \cup \mathrm{Koass}(M/U)$.

(b) *Ist* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(U)$, *so gibt es ein* $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Koass}(M)$ *mit* $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}$.

(c) *Ist U klein in M, so gilt* $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Koass}(M/U)$.

(d) *Ist U koabgeschlossen in M, so gilt* $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Koass}(U) \cup \mathrm{Koass}(M/U)$.

Beweis. (a) Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$, $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Koass}(U)$. In $\mathfrak{p} = I(M/M_0)$, mit M/M_0 unzerlegbar, muß dann $U + M_0 \neq M$ sein, so daß aus $I(M/M_0) = I(M/U + M_0)$ folgt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M/U)$.

(b) In $\mathfrak{p} = I(U/U_0)$ können wir zusätzlich U/U_0 artinsch annehmen, und dann gilt für ein maximales Element V_0 in der Menge $\{U_0 \subset V \subset M \mid V \cap U = U_0\}$, daß $U/U_0 \to M/V_0$ ein wesentlicher Monom., also auch M/V_0 artinsch ist. Nach Beispiel 1 folgt $\bigcap \operatorname{Koass}(M/V_0) \subset \sqrt{\operatorname{Ann}_R(U/U_0)} \subset \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}$ für ein $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Koass}(M/V_0)$, und natürlich ist $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Koass}(M)$.

(c) Das wird in ([3] Proposition 4) gezeigt.

(d) Ein Untermodul U heißt *koabgeschlossen* in M (siehe [12] Abschnitt 3), wenn für jedes $X \subsetneqq U$ gilt, daß U/X nicht klein in M/X ist. Nach (a) müssen wir jetzt $\operatorname{Koass}(U) \subset \operatorname{Koass}(M)$ zeigen: In $\mathfrak{p} = I(U/U_0)$ ist nach Voraussetzung U/U_0 nicht klein in M/U_0, so daß es ein $U_0 \subset M_0 \subsetneqq M$ gibt mit $U + M_0 = M$. Es folgt $I(U/U_0) = I(M/M_0)$, also $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$.

Bemerkung. Alle vier Punkte des Lemmas (und ebenso die von 2.2) sind in der entsprechenden Formulierung bei assoziierten Primidealen wohlbekannt. Aber für die Tatsache $\operatorname{Ass}\left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Ass}(M_\lambda)$ gibt es bei koassoziierten Primidealen keine Entsprechung: Für alle $n \geqq 1$ ist $\operatorname{Koass}(R^n) = \Omega$, während nach Beispiel 2 $\operatorname{Koass}(R^{(\mathbb{N})}) = \operatorname{Koass}(R^{\mathbb{N}}) = \operatorname{Spec}(R)$ ist.

Lemma 2.2. *Sei M ein R-Modul und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R.*

(a) *Genau dann ist M $\mathfrak{a}$-teilbar, wenn $\mathfrak{a}$ in keinem der zu M koassoziierten Primideale liegt.*

(b) *Genau dann ist $\mathfrak{a}M$ klein in M, wenn $\mathfrak{a}$ in allen zu M koassoziierten Primidealen liegt.*

(c) *Genau dann ist M radikalvoll, wenn* Koass(M) *kein maximales Ideal enthält.*

(d) *Genau dann ist M koatomar, wenn* Koass(M) *nur aus maximalen Idealen besteht.*

Beweis. (a) Wir zeigen allgemeiner $\operatorname{Koass}(M/\mathfrak{a}M) = \operatorname{Koass}(M) \cap V(\mathfrak{a})$. Klar gilt für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M/\mathfrak{a}M)$, daß $\mathfrak{p} \supset \operatorname{Ann}_R(M/\mathfrak{a}M) \supset \mathfrak{a}$ ist. Sei umgekehrt $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} = I(M')$ für einen unzerlegbaren Faktormodul M' von M: Wäre M' $\mathfrak{a}$-teilbar, so folgte bereits $xM' = M'$ für ein $x \in \mathfrak{a}$, also $x \notin \mathfrak{p}$, und das ist unmöglich. Damit ist $I(M') = I(M'/\mathfrak{a}M')$ und $M'/\mathfrak{a}M'$ ein Faktormodul von $M/\mathfrak{a}M$, d.h. $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M/\mathfrak{a}M)$.

(b) Ist $\mathfrak{a}M$ klein in M, so folgt nach (2.1, c) und der eben bewiesenen Formel $\operatorname{Koass}(M) \subset V(\mathfrak{a})$; ist aber $\mathfrak{a}M$ nicht klein in M, so gibt es einen unzerlegbaren $\mathfrak{a}$-teilbaren Faktormodul M' von M, und $\mathfrak{p} = I(M')$ liegt nach (a) nicht über $\mathfrak{a}$.

(c) Das folgt unmittelbar aus (a) mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ für alle $\mathfrak{m} \in \Omega$.

(d) Ein Modul M heißt *koatomar* (siehe [11]), wenn jeder von M verschiedene Untermodul in einem maximalen Untermodul enthalten ist. In diesem Fall gilt für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$, $\mathfrak{p} = I(M')$, daß M' einen Faktormodul der Form $R/\mathfrak{m}$

hat, also $\mathfrak{p} = I(R/\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$ ist. Umgekehrt folgt aus $\mathrm{Koass}(M) \subset \Omega$ für jedes $X \subsetneqq M$, daß M/X nach (c) nicht radikalvoll ist, d.h. X in einem maximalen Untermodul von M liegt.

Folgerung 1. *Für jeden Modul M ist $\bigcup \mathrm{Koass}(M) = \{x \in R \mid xM \neq M\}$, und $\bigcap \mathrm{Koass}(M)$ ist das größte Ideal $\mathfrak{a}$ von R, so daß $\mathfrak{a}M$ klein in M ist.*

Punkt (b) liefert auch eine Verallgemeinerung des Krullschen Durchschnittssatzes. Ist J das Jacobsonradikal des Ringes und M ein endlich erzeugter R-Modul, so ist bekanntlich JM klein in M und $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} J^i M = 0$. Die Verallgemeinerung lautet:

Folgerung 2. *Sind $\mathfrak{a}$ und M beliebig und ist $\mathfrak{a}M$ klein in M, so folgt*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i M = 0.$$

Beweis. Falls M artinsch ist, folgt aus $\mathfrak{a} \subset \bigcap \mathrm{Koass}(M)$ nach Beispiel 1 sogar $\mathfrak{a}^e M = 0$ für ein $e \geqq 1$. Ist aber M beliebig, so gibt es eine Familie $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ von Untermoduln, so daß alle M/U_λ artinsch sind und $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = 0$ ist. Weil jedes M/U_λ durch eine (von λ abhängige) Potenz von $\mathfrak{a}$ annulliert wird, gilt $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i M \subset U_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$, also die Behauptung.

Aus der ersten Folgerung erhält man: *Genau dann ist $\bigcap \mathrm{Koass}(M) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$, wenn aus $\mathfrak{a}M$ klein in M stets folgt $\mathfrak{a}^e M = 0$ für ein $e \geqq 1$.* Wir wollen zum Abschluß zwei nichttriviale Beispiele für diese Situation angeben. Sie resultieren beide aus dem folgenden Satz, der eine Verschärfung von ([11] Lemma 1.2) ist.

Satz 2.3. *Sei M $\mathfrak{a}$-primär und $\mathfrak{a}M$ klein in M. Außerdem gebe es endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k$, so daß jedes Element von $\mathrm{Ass}(M)$ in einem der $\mathfrak{m}_i$ enthalten ist. Dann folgt $\mathfrak{a}^e M = 0$ für ein $e \geqq 1$.*

Beweis. Wie in ([11] p. 223) bildet man $M^0 = \mathrm{Hom}_R(M, C)$ mit dem injektiven artinschen Modul $C = \coprod\limits_{i=1}^{k} E(R/\mathfrak{m}_i)$ und zeigt, daß M^0 in der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie vollständig ist. M^0 ist aber auch $\mathfrak{a}$-primär, denn zu jedem $f \in M^0$ ist $\mathrm{Bi}\, f$ artinsch und $\mathfrak{a}\, \mathrm{Bi}\, f$ klein in $\mathrm{Bi}\, f$, also $\mathfrak{a}^n\, \mathrm{Bi}\, f = 0$ für ein $n \geqq 1$, d.h. $f \in \mathrm{Ann}_{M^0}(\mathfrak{a}^n)$. Nach dem Satz von Baire gilt daher $\mathfrak{a}^e M^0 = 0$ für ein $e \geqq 1$, und wegen $\mathrm{Ann}_R(M) = \mathrm{Ann}_R(M^0)$ folgt die Behauptung.

Beispiel 3. Ist M halbartinsch und $\mathrm{Ass}(M)$ endlich, so folgt $\bigcap \mathrm{Koass}(M) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$.

Beweis. Mit $\mathfrak{a} = \bigcap \mathrm{Koass}(M)$ ist $\mathfrak{a}M$ klein in M. Außerdem ist M $\mathfrak{a}$-primär, denn jeder endlich erzeugte Untermodul von M ist artinsch, also nach Folgerung 2 durch eine Potenz von $\mathfrak{a}$ annulliert. (Offenbar ist dies eine Verallgemeinerung von Beispiel 1. Auf die Bedingung an $\mathrm{Ass}(M)$ kann man aber nicht verzichten: In ([11] p. 223) wird über $R = \mathbb{Z}[[X]]$ ein halbartinscher R-Modul M angegeben, bei dem $\bigcap \mathrm{Koass}(M) \supsetneqq \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$ ist.)

Beispiel 4. Sei $M \in \mathfrak{C}$ radikalvoll wie in (1.3). Dann folgt

$$\bigcap \operatorname{Koass}(M) = \sqrt{\operatorname{Ann}_R(M)}.$$

Beweis. In (1.3, b) haben wir $\bigcup \operatorname{Koass}(M) \subset \bigcup \operatorname{Ass}(M)$ gezeigt, d.h. jedes koassoziierte Primideal von M liegt in einem assoziierten. Umgekehrt umfaßt nun auch jedes assoziierte Primideal $\mathfrak{p}$ ein koassoziiertes, denn zu $B \subset M$, mit $B \cong R/\mathfrak{p}$, wähle man in der Menge $\{V \subset M \mid V \cap B = 0\}$ ein maximales Element V_0, und dann ist $B \to M/V_0$ ein wesentlicher Monom., also $\operatorname{Ass}(M/V_0) = \{\mathfrak{p}\}$. Für irgendein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M/V_0)$ gilt nach (1.3, b) $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, und natürlich ist $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M)$. Also ist $\mathfrak{a} = \bigcap \operatorname{Koass}(M)$ enthalten in $\bigcap \operatorname{Ass}(M)$, M $\mathfrak{a}$-primär (nach der zu (2.2, b) wohlbekannten dualen Aussage) und $\mathfrak{a}M$ klein in M, damit nach dem Satz $\mathfrak{a}^e M = 0$ für ein $e \geqq 1$.

Literaturverzeichnis

[1] B. Ballet, Sur les modules linéairement compacts. Bull. Soc. math. France **100**, 345—351 (1972).
[2] N. Bourbaki, Algèbre commutative. Paris 1967.
[3] L. Chambless, Coprimary decomposition, N-dimension and divisibility. Application to artinian modules: Comm. Algebra **9**, 1131—1146 (1981).
[4] E. Matlis, Injective modules over noetherian rings. Pacific J. Math. **8**, 511—528 (1958).
[5] E. Matlis, Modules with descending chain condition. Trans. Amer. Math. Soc. **97**, 495—508 (1960).
[6] B. J. Müller, Linear compactness and Morita duality. J. Algebra **16**, 60—66 (1970).
[7] T. Onodera, Linearly compact modules and cogenerators. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. **22**, 116—125 (1972).
[8] F. L. Sandomierski, Linearly compact modules and local Morita duality: Ring theory, 333—346, New York 1972.
[9] D. Zelinsky, Linearly compact modules and rings. Amer. J. Math. **75**, 79—90 (1953).
[10] H. Zöschinger, Moduln, die in jeder Erweiterung ein Komplement haben. Math. Scand. **35**, 267—287 (1974).
[11] H. Zöschinger, Koatomare Moduln. Math. Z. **170**, 221—232 (1980).
[12] H. Zöschinger, Gelfandringe und koabgeschlossene Untermoduln. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl., S.B. **3**, 43—70 (1982).

Eingegangen am 24. 9. 1982

Anschrift des Autors:

Helmut Zöschinger
Mathematisches Institut
der Universität München
Theresienstr. 39
D-8000 München 2