JOURNAL OF ALGEBRA 102, 1–32 (1986)

Minimax-Moduln

HELMUT ZÖSCHINGER

Mathematisches Institut der Universität München,
8 München 2, Theresienstraße 39, München, Bundesrepublik Deutschland

Communicated by David Buchsbaum

Received September 7, 1983

EINLEITUNG

Eine abelsche Gruppe A heißt nach Baer [1] Minimaxgruppe, wenn sie "eine noethersche Untergruppe B mit artinscher Faktorgruppe A/B besitzt." Entsprechend wollen wir einen R-Modul M as *Minimax-Modul* bezeichnen, wenn M Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen artinschen Modul ist. Dabei sei R in dieser Arbeit stets ein kommutativer noetherscher Ring, und $\mathfrak{F}$ die Klasse aller Minimax-Moduln über R. Unser Interesse an diesen Moduln rührt von dem Ergebnis in [15] her, daß jeder linear-kompakte R-Modul zu $\mathfrak{F}$ gehört. Beim Beweis spielten die beiden folgenden Klassen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von R-Moduln eine zentrale Rolle:

$M \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow$ In jeder aufsteigenden Folge $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$ von Untermoduln von M sind fast alle Faktoren U_{i+1}/U_i artinsch,

$M \in \mathfrak{B} \Leftrightarrow$ In jeder absteigenden Folge $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$ von Untermoduln von M sind fast alle Faktoren U_i/U_{i+1} endlich erzeugt.

Klar ist $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, und von den vier Abschnitten der vorliegenden Arbeit zeigen die ersten zwei, daß sogar $\mathfrak{F} = \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist. Allgemeiner gelten nämlich für einen R-Modul M die beiden folgenden erstaunlich parallelen Aussagen:

(1.2) *Genau dann erfüllt M die Maximalbedingung für Untermoduln U mit $So(M/U) = 0$, wenn M Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen halbartinschen Modul ist.*

(2.3) *Genau dann erfüllt M die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln, wenn $P(M)$ wesentliche Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen halbartinschen Modul ist.*

Weil aber jeder Modul aus $\mathfrak{A}$ endliche Goldie-Dimension hat und die Maximalbedingung in (1.2) erfüllt, folgt daraus $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$, und aus (2.3) entsprechend $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$.

0021-8693/86 $3.00

Vertauscht man in den beiden angeführten Äquivalenzen die Maximal- mit der Minimalbedingung, so erhält man im ersten Fall:

(1.6) *Genau dann erfüllt M die Minimalbedingung für Untermoduln U mit $So(M/U)=0$, wenn $M/L(M)$ endliche Goldie-Dimension hat und für alle* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ *gilt* $\dim(R/\mathfrak{p}) \leqslant 1$.

Im zweiten Fall—der Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln—muß zuerst der Begriff "endliche Goldie-Dimension" dualisiert werden. Dies geschieht in Abschnitt 3, und die fünf Äquivalenzen in (3.6) legen nahe, dafür "wesentliche Überdeckung eines artinschen Moduls" vorzuschlagen. Damit erhalten wir folgendes hinreichende Kriterium:

(4.5) *Sei $P(M)$ wesentliche Überdeckung eines artinschen Moduls und sei* $\dim(R/\mathfrak{q}) \leqslant 1$ *für alle* $\mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}(M)$. *Dann erfüllt M die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln.*

Schon im Extremfall, daß M radikalvoll $\neq 0$ ist, aber keine weiteren radikalvollen Untermoduln besitzt—wir sagen dann, M sei *einfach-radikalvoll*—zeigen Beispiele, daß keine der beiden Annahmen in (4.5) für die untersuchte Maximalbedingung notwendig ist. Ist jedoch M komplementiert, so geben wir in (4.4) eine Reihe von äquivalenten Aussagen für unsere Maximalbedingung an, und (4.8) zeigt, daß in diesem Fall automatisch die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln folgt.

Als Anwendung geben wir zum Schluß eine Beschreibung derjenigen artinschen Moduln, die Summe von endlich vielen einfach-radikalvollen Untermoduln sind. Dieses Problem wurde von Matlis in [7] über 1-dim. lokalen Cohen–Macaulay-Ringen ausführlich untersucht, und einen Teil seiner Ergebnisse können wir in (4.10) auf beliebige kommutative noethersche Ringe erweitern.

0. Bezeichnungen und Grundtatsachen

Stets ist R ein kommutativer noetherscher Ring, Ω die Menge aller maximalen Ideale von R. Ist M ein R-Modul und $\mathfrak{m} \in \Omega$, so ist $L_{\mathfrak{m}}(M) = \{x \in M \mid \mathfrak{m}^e \subset \mathrm{Ann}_R(x)$ für ein $e \geqslant 1\}$ und $K_{\mathfrak{m}}(M) = \{x \in M \mid$ das einzige maximale Ideal über $\mathrm{Ann}_R(x)$ ist $\mathfrak{m}\}$. Für diese Untermoduln gilt $L_{\mathfrak{m}}(M) \subset K_{\mathfrak{m}}(M)$, und beide lassen sich in natürlicher Weise zu $R_{\mathfrak{m}}$-Moduln machen, $L_{\mathfrak{m}}(M)$ sogar zu einem Modul über $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$, der Vervollständigung des lokalen Ringes $R_{\mathfrak{m}}$.

Für einen Modul M ist $So(M)$ die Summe aller einfachen Untermoduln, $L(M)$ die Summe aller artinschen Untermoduln, und nach [6, Theorem 1] ist dann $L(M) = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \Omega} L_{\mathfrak{m}}(M)$. Falls $So(M)=0$, heißt M *sockelfrei*; falls

$L(M)=M$, heißt M *halbartinsch*, und das ist äquivalent mit $\mathrm{Ass}(M)\subset\Omega$. Ein halbartinscher Modul mit endlich erzeugtem Sockel ist nach [6, Proposition 3] bereits artinsch.

Dual ist $Ra(M)$ der Durchschnitt aller maximalen Untermoduln, und M heißt *radikalvoll*, wenn $Ra(M)=M$ ist. Für beliebiges M ist $P(M)$ die Summe aller radikalvollen Untermoduln, und damit heißt $M/P(M)$ der *reduzierte Anteil* von M. M heißt *koatomar*, wenn jeder von M verschiedene Untermodul in einem maximalen Untermodul enthalten ist. Nach [13, Abschnitt 1] ist dann auch jeder Untermodul von M koatomar, ebenso M_S als R_S-Modul für jede multiplikative Teilmenge S von R.

Ein Modul N heißt *unzerlegbar*, wenn $N\neq 0$ ist und aus $X+Y=N$ stets folgt $X=N$ oder $Y=N$. In diesem Fall ist die Menge $I(N)=\{x\in R\mid xN\neq N\}$ ein Primideal, und für einen beliebigen R-Modul M heißt ein Primideal $\mathfrak{p}$ *koassoziiert* zu M, wenn es einen unzerlegbaren Faktormodul N von M gibt mit $\mathfrak{p}=I(N)$. Weil R noethersch ist, hat jeder R-Modul $M\neq 0$ einen unzerlegbaren Faktormodul, so daß $\mathrm{Koass}(M)$, die Menge aller zu M koassoziierten Primideale, nicht leer ist. Die Grundtatsachen über $\mathrm{Koass}(M)$ sind in [15, Abschnitt 2] zusammengestellt; insbesondere wird dort gezeigt, daß $\bigcup \mathrm{Koass}(M)=\{x\in R\mid xM\neq M\}$ ist und daß M genau dann radikalvoll (bzw. koatomar) ist, wenn $\mathrm{Koass}(M)\cap\Omega=\varnothing$ (bzw. $\mathrm{Koass}(M)\subset\Omega$) ist.

Dual zu den wohlbekannten Begriffen einer wesentlichen Erweiterung und eines abgeschlossenen Untermoduls heißt ein Epimorphismus $f\colon B\to C$ *wesentlich* (oder B wesentliche Überdeckung von C), wenn $\mathrm{Ke}\,f$ klein in B ist, d.h. aus $X+\mathrm{Ke}\,f=B$ stets folgt $X=B$; und ein Untermodul U von M heißt *koabgeschlossen* in M, wenn aus U/X klein in M/X stets folgt $U/X=0$. Schließlich heißt ein Modul M *komplementiert*, wenn für jeden Untermodul U von M die Menge $\{V\subset M\mid V+U=M\}$ ein minimales Element V_0 hat. In diesem Fall ist $M/Ra(M)$ halbeinfach, $M/P(M)$ koatomar und $P(M)$ wieder komplementiert, außerdem hat man nach [14, Satz 2.5] eine Zerlegung $M=\bigoplus_{\mathfrak{m}\in\Omega}K_{\mathfrak{m}}(M)$, in der $K_{\mathfrak{m}}(M)$ wie oben der größte "$\mathfrak{m}$-lokale" Anteil von M ist.

1. Kettenbedingungen für Untermoduln U mit $So(M/U)=0$

Jede der drei Klassen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ist gegenüber Untermoduln, Faktormoduln und Gruppenerweiterungen abgeschlossen, und daraus folgt sofort $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{B}$. Um im ersten Fall die Gleichheit zu beweisen, untersuchen wir die Maximalbedingung für Untermoduln U von M mit $So(M/U)=0$, im zweiten Fall die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln von M. Beide Kettenbedingungen hängen eng (siehe 1.2, 2.3 und 2.6) mit dem Begriff des Minimax-Moduls zusammen, wenn man in seiner Definition "endlich erzeugt" zu "koatomar" und "artinsch" zu "halbartinsch" abschwächt. Die in dem folgenden Lemma aufgezählten Eigenschaften solch verallgemeinerter Minimax-Moduln werden wir ständig verwenden.

LEMMA 1.1. *Ist M Erweiterung eines koatomaren durch einen halbartinschen Modul, so gilt*:

(a) *Für jedes Primideal* $\mathfrak{p} \notin \Omega$ *ist* $M_\mathfrak{p}$ *als* $R_\mathfrak{p}$*-Modul endlich erzeugt.*

(b) *Für jeden Epimorphismus* $f\colon M \to M$ *ist* $Ke\, f$ *halbartinsch.*

(c) *Aus* $So(M/U) = 0$ *folgt stets* $P(U) = U \cap P(M)$.

(d) *Für jeden radikalvollen Untermodul U von M ist* $L(M/U) = (L(M) + U)/U$.

(e) *Für jedes* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(P(M))$ *ist* $\dim(R/\mathfrak{p}) \leqslant 1$.

Falls M zusätzlich sockelfrei *ist, gilt weiter*:

(f) *Für jeden Monomorphismus* $f\colon M \to M$ *ist* $Kok\, f$ *koatomar.*

(g) *Für jeden Untermodul U von M und jedes* $\mathfrak{m} \in \Omega$ *ist* $U/\mathfrak{m}U$ *endlich erzeugt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{h}$ die Klasse aller R-Moduln, die Erweiterung eines koatomaren durch einen halbartinschen Modul sind. Natürlich ist $\mathfrak{h}$ gegenüber Untermoduln und Faktormoduln abgeschlossen, aber auch gegenüber Gruppenerweiterungen: Ist $U \in \mathfrak{h}$ und $M/U \in \mathfrak{h}$, so hat man Untermoduln $B \subset U \subset C \subset M$ derart, daß B koatomar, U/B halbartinsch, C/U koatomar und M/C halbartinsch ist, wählt dazu in der Menge $\{X \subset M \mid X \cap U = B\}$ ein maximales Element X_0, und dann ist $U/B \to M/X_0$ ein wesentlicher Monomorphismus, also auch $M/X_0 \cap C$ halbartinsch; außerdem ist $X_0 \cap C/B$ als Untermodul von C/U koatomar, damit auch $X_0 \cap C$ koatomar und $M \in \mathfrak{h}$ wie behauptet.

(a) Sei B koatomar und M/B halbartinsch. Zu $\mathfrak{p} \notin \Omega$ wähle man ein $\mathfrak{m} \in \Omega$ mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$, und dann ist $(B/L(B))_\mathfrak{m}$ als $R_\mathfrak{m}$-Modul wieder sockelfrei und koatomar, also nach [13, Satz 2.4] sogar endlich erzeugt. Dann ist aber auch $(B/L(B))_\mathfrak{p}$ als $R_\mathfrak{p}$-Modul endlich erzeugt, so daß wegen $L(B)_\mathfrak{p} = 0 = (M/B)_\mathfrak{p}$ die Behauptung folgt.

(b) Für alle $\mathfrak{p} \notin \Omega$ ist die induzierte Abb. $M_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p}$ ein Isomorphismus, d.h. $(\mathrm{Ke}\, f)_\mathfrak{p} = 0$. Für diese $\mathfrak{p}$ gilt also $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}(\mathrm{Ke}\, f)$, und $\mathrm{Ass}(\mathrm{Ke}\, f) \subset \Omega$ bedeutet, daß $Ke\, f$ halbartinsch ist.

(c) *Beh.* 1. Ist R lokal und $M \in \mathfrak{h}$ sockelfrei, so folgt bereits $M \in \mathfrak{F}$. Zum Beweis sei B koatomar und M/B halbartinsch. Wieder nach [13, Satz 2.4] is dann B endlich erzeugt, also wegen der exakten Folge $0 \to So(M/B) \to \mathrm{Ext}^1_R(R/\mathfrak{m}, B)$ auch $So(M/B)$ endlich erzeugt, d.h. M/B artinsch wie gewünscht. *Beh.* 2. Ist R lokal, $M \in \mathfrak{h}$ radikalvoll und $So(M/U)=0$, so ist auch U radikalvoll. Zum Beweis kann man, weil $M/U \in \mathfrak{F}$, also $\operatorname{Ass}(M/U)$ und $\operatorname{Koass}(M/U)$ endlich und $\mathfrak{m} \not\subset \bigcup \operatorname{Ass}(M/U) \cup \bigcup \operatorname{Koass}(M/U)$ ist, ein $x \in \mathfrak{m}$ wählen, das bijektiv auf M/U operiert. In der exakten Folge $\operatorname{Tor}_1^R(M/U, R/\mathfrak{m}) \to U \otimes_R R/\mathfrak{m} \to M \otimes_R R/\mathfrak{m}$ ist daher das erste und das dritte Glied Null, also U radikalvoll wie verlangt. *Beh.* 3. Dasselbe ohne lokal: Ist $M \in \mathfrak{h}$ radikalvoll und $So(M/U)=0$, so gilt für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$, daß $M_\mathfrak{m}$ als $R_\mathfrak{m}$-Modul zu $\mathfrak{h}$ gehört und radikalvoll ist, außerdem $So(M_\mathfrak{m}/U_\mathfrak{m})=0$, also nach Beh. 2 $U_\mathfrak{m}$ radikalvoll ist, d.h. U $\mathfrak{m}$-teilbar.—Wendet man dies auf $U \cap P(M) \subset P(M)$ an, so ist (c) bewiesen.

(d) Betrachtet man $(L(M)+U)/L(M) \subset M/L(M)$, so kann man gleich annehmen, daß M sockelfrei ist (und muß dasselbe für M/U zeigen). Im lokalen Fall ist wieder $U \in \mathfrak{F}$, also für ein $x \in \mathfrak{m}$ die Multiplikation mit $x: U \to U$ bijektiv, so daß in der exakten Folge $So(M) \to So(M/U) \to \operatorname{Ext}_R^1(R/\mathfrak{m}, U)$ alle drei Glieder Null sind. Im allgemeinen Fall gilt für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$, daß $M_\mathfrak{m} \in \mathfrak{h}$ sockelfrei und $U_\mathfrak{m}$ radikalvoll, also $So(M_\mathfrak{m}/U_\mathfrak{m}) = 0$ ist, und das heißt $So_\mathfrak{m}(M/U)=0$ wie verlangt.

(e) Das ist [15, Hilfssatz 1.1], denn für jedes $U \subset P(M)$ folgt aus $So(P(M)/U)=0$ nach (c), daß U radikalvoll ist.

(f) Im lokalen Fall ist wieder $M \in \mathfrak{F}$, also erst recht $M \in \mathfrak{B}$, so daß es zur absteigenden Folge $\operatorname{Bi} f \supset \operatorname{Bi} f^2 \supset \operatorname{Bi} f^3 \supset \cdots$ ein $m \geqslant 1$ gibt mit $\operatorname{Bi} f^m/\operatorname{Bi} f^{m+1}$ endlich erzeugt, und dieser Faktor ist wegen der Injektivität von f isomorph zu $M/\operatorname{Bi} f$, d.h. zu $\operatorname{Kok} f$. Im nichtlokalen Fall ist $(\operatorname{Kok} f)_\mathfrak{m}$ endlich erzeugt für alle $\mathfrak{m} \in \Omega$, also $\operatorname{Kok} f$ wenigstens koatomar.

(g) Als $R_\mathfrak{m}$-Modul ist $U_\mathfrak{m}$ Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen artinschen Modul. Diese beiden haben einen endlich erzeugten Radikalfaktormodul, also auch $U_\mathfrak{m}$, so daß $\dim(U/\mathfrak{m}U) = \dim(U_\mathfrak{m}/Ra(U_\mathfrak{m}))$ die Behauptung liefert.

Satz 1.2. *Für einen R-Modul M sind äquivalent*:

(i) *M erfüllt die Maximalbedingung für Untermoduln U mit* $So(M/U)=0$.

(ii) *In jeder aufsteigenden Folge* $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$ *von Untermoduln von M sind fast alle Faktoren* U_{i+1}/U_i *halbartinsch.*

(iii) *M ist Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen halbartinschen Modul.*

In diesem Fall ist $\bar{M} = M/L(M)$ *von endlicher Goldie-Dimension und* $\bigcap \operatorname{Ass}(\bar{M}) = \sqrt{\operatorname{Ann}_R(\bar{M})}$.

Beweis. Sei $\mathfrak{F}'$ die Klasse aller R-Moduln, die Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen halbartinschen Modul sind. Auch $\mathfrak{F}'$ ist gegenüber Untermoduln, Faktormoduln und Gruppenerweiterungen abgeschlossen.

(i → iii) Angenommen $M \notin \mathfrak{F}'$, so ist auch $M/L(M) \notin \mathfrak{F}'$ und die Menge $\{X \subset M \mid So(M/X) = 0$ und $M/X \notin \mathfrak{F}'\}$ hat ein maximales Element X_0. Wählt man $X_0 \subsetneq A \subset M$ mit A/X_0 endlich erzeugt, dazu $U/A = L(M/A)$, so ist $X_0 \subsetneq U$ und $So(M/U) = 0$, also wegen der Maximalität $M/U \in \mathfrak{F}'$. Es folgt $M/A \in \mathfrak{F}'$, also $M/X_0 \in \mathfrak{F}'$ entgegen der Wahl von X_0. (iii → ii) Die Eigenschaft (ii) ist gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen, und natürlich besitzt sie jeder endlich erzeugte und jeder halbartinsche Modul, also auch M. (ii → i) Klar.

Für den Zusatz können wir gleich M sockelfrei annehmen. Dann gilt für jeden abgeschlossenen Untermodul U von M, daß $\mathrm{Ass}(M/U) \subset \mathrm{Ass}(M)$, also M/U sockelfrei ist. Die Maximalbedingung für abgeschlossene Untermoduln ist aber gleichbedeutend mit endlicher Goldie-Dimension. Mit $\mathfrak{b} = \bigcap \mathrm{Ass}(M)$ ist schließlich M $\mathfrak{b}$-primär, d.h. $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{b}^i) = M$. Weil alle $M/\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{b}^i)$ sockelfrei sind, gibt es nach Voraussetzung ein $e \geqslant 1$ mit $\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{b}^e) = \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{b}^{e+1}) = \cdots$, und aus $\mathfrak{b}^e M = 0$ folgt $\mathfrak{b} \subset \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$, während die umgekehrte Inklusion stets gilt.

FOLGERUNG 1.3. $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$.

Beweis. $M \in \mathfrak{A}$ kann nicht unendliche direkte Summe von Moduln $\neq 0$ sein: Hätte man $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i$, alle $M_i \neq 0$, so würde wie in [1, p. 4] $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} N_i$ folgen, so daß jedes N_i unendliche direkte Summe von Moduln $\neq 0$ ist, und mit $U_n = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ wäre in der aufsteigenden Folge $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$ keiner der Faktoren $U_{n+1}/U_n \cong N_{n+1}$ artinsch, was unmöglich ist. Wählt man jetzt nach (1.2) einen endlich erzeugten Untermodul B von M mit halbartinschem Faktor M/B, so ist auch $So(M/B) \in \mathfrak{A}$, also nach eben $So(M/B)$ endlich erzeugt, M/B artinsch, $M \in \mathfrak{F}$ wie gewünscht.

Für einen Integritätsring R mit Quotientenkörper $K \neq R$ ist leicht zu sehen: Genau dann gehört $_RK$ zu $\mathfrak{F}'$, wenn $\dim(R) = 1$ ist. Genau dann ist $_RK$ ein Minimax-Modul, wenn $\dim(R) = 1$ und R semilokal ist. Allgemeiner erhält man eine ganze Klasse von Moduln aus $\mathfrak{F}'$ durch folgendes

BEISPIEL 1.4. *Sei* $\dim(R) \leqslant 1$ *und* M *ein* R*-Modul von endlicher Goldie-Dimension. Dann besitzt* M *einen endlich erzeugten Untermodul* B *mit halbartinschem Faktor* M/B, *so daß jede Primärkomponente von* M/B *artinsch ist.*

Beweis. Im Falle $\dim(R) = 0$ ist M selbst artinsch, also alles erfüllt. Im Falle $\dim(R) = 1$ bilde man mit den nicht-maximalen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ von R die multiplikative Teilmenge $S = R \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{p}_i$, und dann ist der Ring

R_S artinsch, also M_S als R_S-Modul nicht nur von endlicher Goldie-Dimension, sondern sogar endlich erzeugt. Sei B ein endlich erzeugter Untermodul von M mit $(M/B)_S = 0$. Dann ist M/B halbartinsch, also $M \in \mathfrak{F}'$. Für jeden Untermodul U von M und jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ ist nun $U/\mathfrak{m}U$ endlich erzeugt, denn für $L(U) \otimes_R R/\mathfrak{m}$ ist das klar, und für $U/L(U) \otimes_R R/\mathfrak{m}$ gilt das nach (1.1)(g). Speziell sind alle $So_{\mathfrak{m}}(M/B)$ endlich erzeugt, also alle $L_{\mathfrak{m}}(M/B)$ artinsch wie behauptet.

Um weitere Beispiele für Moduln aus $\mathfrak{F}'$ anzugeben, erinnern wir an folgenden Begriff: Ein Modul M heißt *schwach-komplementiert*, wenn es zu jedem Untermodul U von M einen Untermodul V gibt mit $V + U = M$ und $V \cap U$ klein in M (ein solches V heißt dann auch schwaches Komplement von U in M). Ist speziell R ein Dedekindring, kein Körper, so kann man (siehe [12, p. 197]) zeigen, daß M genau dann schwach-komplementiert ist, wenn M die folgenden drei Bedingungen erfüllt: (1) $M/Ra(M)$ ist halbeinfach. (2) $M/L(M)$ hat endliche Goldie-Dimension. (3) Für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ ist $L_{\mathfrak{m}}(M)$ direkte Summe aus einem beschränkten und einem artinschen R-Modul. Allgemeiner gilt nun:

BEISPIEL 1.5. *Sei* dim $(R) \leqslant 1$ *und* M *ein schwach-komplementierter* R-*Modul. Dann ist* M *Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen halbartinschen Modul.*

Beweis. Sei im 1. *Schritt* R beliebig, $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe Null und $\mathfrak{p} \notin \Omega$. Wir behaupten, daß $M_{\mathfrak{p}}$ als $R_{\mathfrak{p}}$-Modul endlich erzeugt ist:

Falls $\mathfrak{p} = 0$, d.h. R ein Integritätsring mit Quotientenkörper $K \neq R$ ist, müssen wir $\dim_K(K \otimes_R M) < \infty$ zeigen. Dazu sei gleich M torsionsfrei. Dann ist $Ra(M)$ groß in M (weil $M/Ra(M)$ halbeinfach und R kein Körper ist), so daß mit einem freien, großen Untermodul U von $Ra(M)$ gilt $\mathrm{Rang}(U) = \mathrm{Rang}(M)$. Ist V ein schwaches Komplement von U in M, so ist $V \cap U$ als kleiner Untermodul von endlichem Rang, außerdem $U/V \cap U$ radikalvoll, also $\mathrm{Rang}(U) < \infty$.

Falls $\mathfrak{p} \neq 0$, kann man das eben bewiesene auf den schwach-komplementierten $R/\mathfrak{p}$-Modul $M/\mathfrak{p}M$ anwenden und erhält mit $\mathfrak{k}(\mathfrak{p})$, dem Quotientenkörper von $R/\mathfrak{p}$, daß $\mathfrak{k}(\mathfrak{p}) \otimes_{R/\mathfrak{p}} (M/\mathfrak{p}M) \cong M_{\mathfrak{p}}/Ra(M_{\mathfrak{p}})$ endlich erzeugt ist. Aber wegen $h(\mathfrak{p}) = 0$ ist der Ring $R_{\mathfrak{p}}$ artinsch, also sogar $M_{\mathfrak{p}}$ endlich erzeugt.

Sei im 2. *Schritt* $\dim(R) = 1$ (im Falle $\dim(R) = 0$ sind ja alle R-Moduln halbartinsch). Sind $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_k$ die nicht-maximalen Primideale von R, so gibt es nach dem ersten Schritt endlich erzeugte Untermoduln U_i von M mit $(M/U_i)_{\mathfrak{p}_i} = 0$, und dann ist auch $B = U_1 + \cdots + U_k$ endlich erzeugt mit $\mathfrak{p}_i \notin \mathrm{Ass}(M/B)$ für alle i, also M/B halbartinsch.

Bemerkung. Ist $\dim(R) \leqslant 1$ und M sockelfrei, so folgt durch Kombination von (1.4) mit (1.5) sofort: Genau dann ist M schwach-komplementiert, wenn M endliche Goldie-Dimension hat und $M/Ra(M)$ halbeinfach ist.

SATZ 1.6. *Für einen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *M erfüllt die Minimalbedingung für Untermoduln U mit* $So(M/U)=0$.

(ii) *In jeder absteigenden Folge $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$ von Untermoduln von M sind fast alle Faktoren U_i/U_{i+1} halbartinsch.*

(iii) *$M/L(M)$ hat endliche Goldie-Dimension, und für alle* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ *gilt* $\dim(R/\mathfrak{p}) \leqslant 1$.

In diesem Fall gilt für jeden Monomorphismus $f\colon M \to M$, daß Kok f halbartinsch ist.

Beweis (i $\to$ ii) Mit $V_n/U_n = L(M/U_n)$ für alle $n \geqslant 1$ ist $So(M/V_n)=0$, aber auch $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \cdots$, denn $(V_{n+1}+U_n)/U_n$ ist als epimorphes Bild von V_{n+1}/U_{n+1} halbartinsch, also enthalten in V_n/U_n, d.h. $V_{n+1} \subset V_n$. Nach Voraussetzung folgt $V_m = V_{m+1} = \cdots$ für ein $m \geqslant 1$, so daß für alle $i \geqslant m$ gilt $U_i/U_{i+1} \subset V_{m+1}/U_{i+1} = L(M/U_{i+1})$, d.h. U_i/U_{i+1} halbartinsch ist.

(ii $\to$ iii) Weil sich (ii) auf Faktormoduln vererbt und für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(L(M))$ sogar $\dim(R/\mathfrak{p})=0$ ist, können wir gleich M sockelfrei annehmen. Für jeden abgeschlossenen Untermodul U von M ist dann $So(M/U)=0$, so daß M die Minimalbedingung für abgeschlossene Untermoduln, d.h. endliche Goldie-Dimension hat. Weil sich (ii) auf Untermoduln vererbt, können wir für die zweite Aussage gleich $M \cong R/\mathfrak{p}$ annehmen: Wählt man in der Menge $\{X \subset M \mid X \neq 0 \text{ und } So(M/X)=0\}$ ein minimales Element X_0, so ist $So(X_0/Y) \neq 0$ für alle $0 \neq Y \subsetneqq X_0$, also X_0/U halbartinsch für alle $0 \neq U \subset X_0$. Nun hat $R/\mathfrak{p}$ als Untermodul von X_0 dieselbe Eigenschaft, und daraus folgt $\dim(R/\mathfrak{p})=1$.

(iii $\to$ i) Aus $So(M/U)=0$ folgt $L(M) \subset U$, so daß wir gleich M sockelfrei $\neq 0$ annehmen können. Mit $S = R \setminus \bigcup \mathrm{Ass}(M)$ zeigen wir im 1. *Schritt*: Genau dann ist $So(M/U)=0$, wenn U S-gesättigt in M ist. Aus $So(M/U)=0$ folgt nämlich für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/U)$, daß $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p} \notin \Omega$ ist für ein $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Ass}(M)$, also wegen $\dim(R/\mathfrak{p}_0)=1$ schon $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$; aber $\mathrm{Ass}(M/U) \subset \mathrm{Ass}(M)$ zeigt, daß kein $x \in S$ Nullteiler bzgl. M/U ist, d.h. U S-gesättigt in M. Ist umgekehrt $So(M/U) \neq 0$, d.h. $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(M/U)$ für ein $\mathfrak{m} \in \Omega$, so folgt $\mathfrak{m} \not\subset \bigcup \mathrm{Ass}(M)$, und $x_0 \in \mathfrak{m} \cap S$ ist ein Nullteiler bzgl. M/U, also U nicht S-gesättigt in M. Bleibt im 2. *Schritt* zu zeigen, daß M_S als R_S-Modul artinsch ist: Für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ gilt, daß $\mathfrak{p}R_S$ ein maximales Ideal in R_S ist, denn angenommen $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{p}_1$ mit $\mathfrak{p}_1 \cap S = \varnothing$, so folgte $\mathfrak{p}_1 \in \Omega$ und $\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{Ass}(M)$ im Widerspruch zu $So(M)=0$. Wegen endlicher Goldie-

Dimension hat man nun einen wesentlichen Monomorphismus $\coprod_{i=1}^{n} R/\mathfrak{p}_i \to M$, der zu einem wesentlichen R_S-Monomorphismus $\coprod_{i=1}^{n} (R_S/\mathfrak{p}_i R_S) \to M_S$ wird, in dem die Quelle artinsch ist, also auch das Ziel.

Für den Zusatz hat man wie in (1.1)(f) zur absteigenden Folge $\mathrm{Bi}\, f \supset \mathrm{Bi}\, f^2 \supset \cdots$ ein $m \geqslant 1$, so daß $\mathrm{Bi}\, f^m/\mathrm{Bi}\, f^{m+1} \cong \mathrm{Kok}\, f$ halbartinsch ist.

FOLGERUNG 1.7. *Ist M radikalvoll und erfüllt M die Maximalbedingung für Untermoduln U mit* $So(M/U) = 0$, *so hat M auch die entsprechende Minimalbedingung.*

Beweis. Die Maximalbedingung impliziert nach (1.2) und (1.1)(e), daß $\dim(R/\mathfrak{p}) \leqslant 1$ ist für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. Ebenfalls nach (1.2) ist $M/L(M)$ von endlicher Goldie-Dimension, also Punkt (iii) in (1.6) erfüllt.

Ähnlich erhält man durch Zusammensetzen von (1.2), (1.4) und (1.6) die

FOLGERUNG 1.8. *Ist* $\dim(R) \leqslant 1$, *so sind für einen R-Modul M äquivalent*:

(i) *M erfüllt die Maximalbedingung für Untermoduln U mit* $So(M/U) = 0$.

(ii) *M erfüllt die entsprechende Minimalbedingung.*

(iii) $M/L(M)$ *hat endliche Goldie-Dimension.*

Bemerkung. Im allgemeinen haben die beiden Kettenbedingungen (i) und (ii) nichts miteinander zu tun: R selbst erfüllt natürlich immer (i), aber (ii) nur dann, wenn $\dim(R) \leqslant 1$ ist; ist andererseits $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$ und M die injektive Hülle von $R/\mathfrak{p}$, so erfüllt M die Bedingung (ii), aber (i) nur dann, wenn $h(\mathfrak{p}) = 0$ ist.

SATZ 1.9. *Sei M ein R-Modul und* $\bar{M} = M/L(M)$. *Dann sind äquivalent*:

(i) *M erfüllt die Minimal- und Maximalbedingung für Untermoduln U mit* $So(M/U) = 0$.

(ii) *M erfüllt die entsprechende Minimalbedingung und es ist* $\bigcap \mathrm{Ass}(\bar{M}) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(\bar{M})}$.

(iii) *M erfüllt die entsprechende Maximalbedingung und für jeden Monomorphismus* $g\colon \bar{M} \to \bar{M}$ *ist* Kok g *halbartinsch.*

Beweis. (i → ii) bzw. (i → iii) sind die Zusätze in (1.2) bzw. (1.6).

(ii → i) Wie im Beweis von (1.6)(iii → i) können wir M sockelfrei $\neq 0$ annehmen und müssen für $S = R \setminus \bigcup \mathrm{Ass}(M)$ zeigen, daß M_S als R_S-Modul endliche Länge hat. Mit $\mathfrak{b} = \bigcap \mathrm{Ass}(M)$ ist $\mathfrak{b} R_S$ gerade das Jacobsonradikal des semilokalen Ringes R_S, und $\bigcap \mathrm{Ass}(M) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$ bedeutet $\mathfrak{b}^e M = 0$

für ein $e \geqslant 1$, so daß auch M_S durch $(\mathfrak{b}R_S)^e$ annulliert wird. Als artinscher R_S-Modul ist daher M_S sogar von endlicher Länge.

(iii → i) Zum Nachweis von (1.6)(iii) können wir wieder M sockelfrei annehmen, dazu nach (1.2) einen endlich erzeugten Untermodul B mit M/B halbartinsch. Dann ist B groß in M, insbesondere M von endlicher Goldie-Dimension und $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(B)$. Jedes $x \in R$, das kein Nullteiler bzgl. B ist, ist dann auch kein Nullteiler bzgl. M, so daß nach Voraussetzung M/xM halbartinsch ist, also wegen der exakten Folge $\mathrm{Ann}_{M/B}(x) \to B/xB \to M/xM$ auch B/xB. Für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ ist jetzt $\dim_{R_\mathfrak{m}}(B_\mathfrak{m}) = 1$: Wegen $\mathfrak{m} \not\subset \bigcup \mathrm{Ass}(B)$ kann man ein $x \in \mathfrak{m}$ wählen, das kein Nullteiler bzgl. B ist, es folgt $\dim_{R_\mathfrak{m}}(B_\mathfrak{m}/(x/1) \cdot B_\mathfrak{m}) = 0$, wobei $x/1 \in \mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$ kein Nullteiler bzgl. $B_\mathfrak{m}$ ist, also die Behauptung. Für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(B)$ ist daher $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{m}$ unmöglich, d.h. $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$ wie verlangt.

FOLGERUNG 1.10. *Ist M koatomar und erfüllt M die Minimalbedingung für Untermoduln U mit $So(M/U) = 0$, so hat M auch die entsprechende Maximalbedingung.*

Beweis. Mann kann M sockelfrei annehmen, und dann ist M nach (1.6) von endlicher Goldie-Dimension, insbesondere $\mathrm{Ass}(M)$ endlich. Nach [13, Lemma 1.2] ist daher $\bigcap \mathrm{Ass}(M) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$, so daß (1.9)(ii → i) die Maximalbedingung liefert.

2. DIE MINIMALBEDINGUNG FÜR RADIKALVOLLE UNTERMODULN

Weil ein Minimax-Modul M zur Klasse $\mathfrak{B}$ gehört, ist in ihm jede absteigende Folge $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$ von radikalvollen Untermoduln U_i sogar stationär. Für diese Minimalbedingung geben wir in (2.3) einen Struktursatz, der in Punkt (ii) der früheren Bedingung (1.2)(iii) überraschend ähnlich ist. Mit seiner Hilfe folgt in (2.7) die angekündigte Gleichheit $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}$.

LEMMA 2.1. *Sei M durch jedes seiner assoziierten Primideale teilbar und sei B ein Untermodul von M, so daß M/B artinsch ist. Dann ist auch $M/P(B)$ artinsch.*

Beweis. Aus der Voraussetzung über M folgt, daß es zu jedem endlich erzeugten Untermodul V von M ein Ideal $\mathfrak{a}$ gibt mit $\mathfrak{a}V = 0$ und $\mathfrak{a}M = M$: Bei $V = 0$ ist das klar, und bei $V \neq 0$ folgt mit $\mathrm{Ass}(V) = \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n\}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$ nach Voraussetzung $\mathfrak{b}M = M$, aber auch $\mathfrak{b} \subset \bigcap \mathrm{Ass}(V)$, also $\mathfrak{b}^e V = 0$ für ein $e \geqslant 1$, so daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^e$ das gewünschte leistet.—Speziell ist jeder endlich erzeugte Faktormodul von M Null, d.h. M radikalvoll.

Sei nun M/B artinsch. Für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}(M/B)$ ist dann $B/\mathfrak{m}B$ endlich erzeugt, denn in der exakten Folge $\operatorname{Tor}_1^R(M/B, R/\mathfrak{m}) \to B \otimes_R R/\mathfrak{m} \to M \otimes_R R/\mathfrak{m}$ ist das erste Glied endlich erzeugt und das dritte Null. Für alle $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass}(M/B)$ ist B sogar $\mathfrak{m}$-teilbar, denn für $x \in \mathfrak{m}$, $x \notin \bigcup \operatorname{Ass}(M/B)$ ist die Multiplikation mit $x: M/B \to M/B$ bijektiv, also $\operatorname{Tor}_1^R(M/B, R/\mathfrak{m}) = 0$. Wählt man einen endlich erzeugten Untermodul V von B mit $V + \mathfrak{m}B = B$ für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}(M/B)$, dazu ein Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}V = 0$ und $\mathfrak{a}M = M$, so ist $\mathfrak{a}B$ radikalvoll und wegen der exakten Folge $\operatorname{Tor}_1^R(M/B, R/\mathfrak{a}) \to B \otimes_R R/\mathfrak{a} \to M \otimes_R R/\mathfrak{a}$ auch $B/\mathfrak{a}B$ artinsch. Wegen $\mathfrak{a}B \subset P(B)$ ist daher auch $M/P(B)$ artinsch.

Bemerkung. Die im Lemma an $\operatorname{Ass}(M)$ gestellte Bedingung ist z.B. dann erfüllt, wenn M halbartinsch und radikalvoll ist, oder wenn R ein Integritätsring und M ein teilbarer Torsionsmodul ist.

LEMMA 2.2. *Sei $\mathfrak{F}'$ wie in* (1.2) *die Klasse aller R-Moduln, die Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen halbartinschen Modul sind. Sei M ein radikalvoller R-Modul, so daß für jeden radikalvollen Untermodul $U \subsetneqq M$ gilt $U \in \mathfrak{F}'$. Dann folgt bereits $M \in \mathfrak{F}'$.*

Beweis. Sei im 1. *Schritt* zusätzlich R ein Integritätsring und M teilbar, torsionsvoll. Angenommen $M \notin \mathfrak{F}'$, so wähle man einen Untermodul $B \subsetneqq M$ mit M/B artinsch, und dann ist nach (2.1) auch $M/P(B)$ artinsch, außerdem nach Voraussetzung $P(B) \in \mathfrak{F}'$, also auch $M \in \mathfrak{F}'$ entgegen der Annahme.

Sei im 2. *Schritt* R beliebig und M wie angegeben. Angenommen $M \notin \mathfrak{F}'$, so ist die Menge $\{x \in R \mid xM \neq M\}$ ein Primideal, sagen wir $\mathfrak{p}$, mit $\mathfrak{p}M \subsetneqq M$. Über dem Integritätsring $\bar{R} = R/\mathfrak{p}$ ist $M_1 = M/\mathfrak{p}M$ wieder radikalvoll und nicht aus $\mathfrak{F}'$, aber jeder echte radikalvolle Untermodul von M_1 aus $\mathfrak{F}'$. Statt $\bar{R}$ schreiben wir wieder R. Dann ist M_1 teilbar und nach dem ersten Schritt nicht torsionsvoll, also $M_2 = M_1/T(M_1)$ teilbar, torsionsfrei und nicht aus $\mathfrak{F}'$, aber jeder echte radikalvolle Untermodul von M_2 aus $\mathfrak{F}'$. Es folgt $M_2 \cong K$, $\dim(R) > 1$ (siehe die Bemerkungen vor (1.4)), mit $0 \neq \mathfrak{q} \notin \Omega$ also $R_\mathfrak{q} \subsetneqq K$, und weil $R_\mathfrak{q}$ als R-Modul radikalvoll ist auch $R_\mathfrak{q} \in \mathfrak{F}'$. In dem teilbaren Torsionsmodul $K/R_\mathfrak{q}$ ist nun wieder jeder echte radikalvolle Untermodul aus $\mathfrak{F}'$, nach dem ersten Schritt also $K/R_\mathfrak{q} \in \mathfrak{F}'$, $M_2 \in \mathfrak{F}'$, und das ist der gewünschte Widerspruch.

SATZ 2.3. *Für einen radikalvollen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *M erfüllt die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln.*

(ii) *M ist* wesentliche *Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen halbartinschen Modul.*

(iii) *M hat endliche Goldie-Dimension und jeder sockelfreie Faktor-*

modul von M hat nur endlich viele assoziierte, jeder radikalvolle Untermodul von M nur endlich viele koassoziierte Primideale.

Genügt der radikalvolle Modul M diesen äquivalenten Bedingungen, so gilt:

(a) *M ist schwach-komplementiert.*

(b) *Für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ ist $M_{\mathfrak{m}}$ ein Minimax-Modul.*

(c) *Es ist* $\bigcap \mathrm{Koass}(M) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$.

Beweis. (i $\to$ ii) Wir müssen zeigen, daß $M \in \mathfrak{F}'$ ist und endliche Goldie-Dimension hat. Angenommen $M \notin \mathfrak{F}'$, so hat die Menge $\{X \subset M \mid X$ ist radikalvoll und $X \notin \mathfrak{F}'\}$ ein minimales Element X_0, und aus der Minimalität folgt, daß jeder echte radikalvolle Untermodul von X_0 zu $\mathfrak{F}'$ gehört, also nach (2.2) auch X_0 selbst. Das ist aber unmöglich.

Aus $M \in \mathfrak{F}'$ folgt, daß $M/L(M)$ endliche Goldie-Dimension hat. Nach (1.1)(c) ist weiter $L(M)$ radikalvoll, so daß die Menge $\{X \subset L(M) \mid X$ ist radikalvoll und $L(M)/X$ artinsch$\}$ ein minimales Element X_0 hat. Angenommen $X_0 \neq 0$, so wähle man wie im ersten Beweisschritt von (2.2) ein $B \subsetneqq X_0$ mit X_0/B artinsch, und dann ist nach (2.1) auch $L(M)/P(B)$ artinsch, entgegen der Minimalität von X_0. Also ist $X_0 = 0$, d.h. $L(M)$ artinsch wie verlangt.

(ii $\to$ iii) Klar ist die endliche Goldie-Dimension. Für jeden sockelfreien Faktormodul M/U zeigen wir sogar $\mathrm{Koass}(M/U) \subset \mathrm{Ass}(M/U) \subset \mathrm{Ass}(M)$: Zu $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/U)$ gibt es ein $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Ass}(M)$ mit $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}$, und nach (1.1)(e) ist $\dim(R/\mathfrak{p}_0) \leqslant 1$, also wegen $\mathfrak{p} \notin \Omega$ schon $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. Zu $\mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}(M/U)$ gibt es, weil nach (1.2) $\bigcap \mathrm{Ass}(M/U) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/U)}$ ist, ein $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/U)$ mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, und wegen $\mathfrak{q} \notin \Omega$, $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$ folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M/U)$.

Weil sich die Eigenschaft (ii) auf radikalvolle Untermoduln vererbt, müssen wir nur noch zeigen, daß $\mathrm{Koass}(M)$ endlich ist: Für den artinschen Anteil $L(M)$ ist das klar, und für $M/L(M)$ haben wir das eben bewiesen.

(iii $\to$ i) Wir zeigen zuerst für jeden Untermodul U von M: Genau dann ist M/U sockelfrei, wenn U radikalvoll und $L(M) \subset U$ ist. Aus $So(M/U) = 0$ folgt natürlich $L(M) \subset U$, und weil nach Voraussetzung sowohl $\mathrm{Ass}(M/U)$ als auch $\mathrm{Koass}(M/U)$ endlich ist, erhält man wie im Beweis von (1.1)(c) $\mathrm{Tor}_1^R(M/U, R/\mathfrak{m}) = 0$, also $U \otimes_R R/\mathfrak{m} = 0$ für alle $\mathfrak{m} \in \Omega$, d.h. U ist radikalvoll. Ist umgekehrt $L(M) \subset U$ und U radikalvoll, so folgt für $\bar{U} = U/L(M)$ entsprechend $\mathrm{Ext}_R^1(R/\mathfrak{m}, \bar{U}) = 0$, also $So_{\mathfrak{m}}(\bar{M}/\bar{U}) = 0$ für alle $\mathfrak{m} \in \Omega$, d.h. $So(M/U) = 0$.

Nach [15, Hilfssatz 1.1] gilt daher $\dim(R/\mathfrak{p}) \leqslant 1$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, so daß M nach (1.6) die Minimalbedingung für Untermoduln U mit $So(M/U) = 0$ hat. Sind aber in $M \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ alle U_i radikalvoll, so ist einerseits $L = L(M)$ artinsch, also $U_m \cap L = U_{m+1} \cap L = \cdots$ für ein $m \geqslant 1$, andererseits jedes der $M/(U_i+L)$ sockelfrei, also $U_n+L=U_{n+1}+L=\cdots$ für ein $n\geqslant m$, und daraus folgt $U_n=U_{n+1}=\cdots$ wie gewünscht.

Von den drei Zusätzen folgt (c) unmittelbar aus (i): Mit $\mathfrak{a}=\bigcap \operatorname{Koass}(M)$ ist $M\supset \mathfrak{a}M\supset \mathfrak{a}^2M\supset \mathfrak{a}^3M\supset\cdots$ eine absteigende Folge von radikalvollen Untermoduln, also $\mathfrak{a}^eM=\mathfrak{a}^{e+1}M=\cdots$ für ein $e\geqslant 1$. Aber nach [15, p. 129] ist $\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathfrak{a}^iM=0$, d.h. schon $\mathfrak{a}^eM=0$, $\mathfrak{a}=\sqrt{\operatorname{Ann}_R(M)}$ wie behauptet.—Bei (b) ist $(M/L(M))_{\mathfrak{m}}$ sockelfrei und aus $\mathfrak{F}'$, also nach dem Beweis von (1.1)(c) schon aus $\mathfrak{F}$; aber $L(M)_{\mathfrak{m}}$ ist sogar artinsch, also insgesamt $M_{\mathfrak{m}}\in\mathfrak{F}$.—Für (a) nehme man einen endlich erzeugten Untermodul B mit halbartinschem Faktor M/B. Dann ist in $M/B=\bigoplus_{\mathfrak{m}\in\Omega}L_{\mathfrak{m}}(M/B)$ nach eben jede Primärkomponente ein Minimax-Modul, d.h. artinsch. Speziell ist M/B schwach-komplementiert, also auch die wesentliche Überdeckung M.

Bei endlichem Ω ist mit den vorstehenden Bezeichnungen sogar M/B artinsch:

FOLGERUNG 2.4. *Ist R semilokal, so erfüllt ein R-Modul M genau dann die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln, wenn $P(M)$ ein Minimax-Modul ist.*

Die zu (1.7) duale Aussage lautet:

FOLGERUNG 2.5. *Ist M sockelfrei und erfüllt M die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln, so hat M auch die entsprechende Maximalbedingung.*

Beweis. Beide Kettenbedingungen beziehen sich nur auf $P(M)$, so daß wir gleich M radikalvoll und sockelfrei annehmen können. Aus der Minimalbedingung folgt nach dem Satz $M\in\mathfrak{F}'$, d.h. nach (1.2) die Maximalbedingung für Untermoduln U mit $So(M/U)=0$. Aber nach (1.1)(d) haben die radikalvollen Untermoduln von M diese Eigenschaft.

Bemerkung 1. Über einem 1-dim. lokalen Cohen–Macaulay-Ring zeigt Matlis in [7, Theorem 5.5] u.a., daß ein teilbarer Torsionsmodul mit der Minimalbedingung für teilbare Untermoduln bereits artinsch ist. Es ist leicht zu sehen, daß über einem solchen Ring die Begriffe teilbar und radikalvoll bzw. torsionsvoll und halbartinsch zusammenfallen und daher der Schluß (i $\to$ ii) in (2.3) eine Verallgemeinerung des Matlis'schen Resultates ist.

Bemerkung 2. Der Schluß (iii $\to$ ii) in (2.3) liefert einen neuen Beweis für das Ergebnis von [15], daß jeder linear-kompakte R-Modul M ein Minimax-Modul ist: Weil $P(M)$ von endlicher Goldie-Dimension und $\operatorname{Koass}(P(M))$ endlich ist, weil jeder Faktor- bzw. Untermodul von $P(M)$ wieder diese Eigenschaft hat, ist nach (2.3) $P(M)\in\mathfrak{F}$; bekanntlich ist $M/P(M)$ endlich erzeugt, also $M\in\mathfrak{F}$.

Im Gegensatz zu (1.2)(ii) folgt aus der Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln von M nicht, daß in jeder absteigenden Folge $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$ von Untermoduln von M fast alle Faktoren U_i/U_{i+1} koatomar sind (Beispiel: $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Q}$). Ist jedoch M komplementiert, so kann man leicht sehen, daß beide Kettenbedingungen äquivalent sind. Auch im folgenden (siehe 4.4) werden wir die Ergebnisse aus Abschnitt 1 oft nur unter der Zusatzbedingung "M ist komplementiert" dualisieren können.

SATZ 2.6. *Für einen R-Modul M sind äquivalent*:

(i) *In jeder absteigenden Folge* $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$ *von Untermoduln von M sind fast alle Faktoren* U_i/U_{i+1} *koatomar.*

(ii) *M ist Erweiterung eines koatomaren durch einen artinschen Modul.*

In diesem Fall ist P(M) ein Minimax-Modul und daher wesentliche Überdeckung eines artinschen Moduls.

Beweis. (i $\rightarrow$ ii) M besitzt einen koatomaren Untermodul V, so daß M/V radikalvoll ist. Andernfalls gäbe es ein $U_1 \subsetneqq M$ mit M/U_1 radikalvoll, dazu ein $U_2 \subsetneqq U_1$ mit U_1/U_2 radikalvoll, also induktiv eine Folge $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$, in der alle U_i/U_{i+1} radikalvoll $\neq 0$ wären, und das ist nach Voraussetzung unmöglich.—Mit einem solchen V genügt jetzt M/V wieder der Bedingung (i), hat also nach (2.3) einen endlich erzeugten Untermodul B/V, so daß M/B halbartinsch ist. Wieder nach (2.3) ist jetzt M/B artinsch, außerdem B koatomar, also M von der verlangten Gestalt. (ii $\rightarrow$ i) Die Eigenschaft (i) ist gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen, und natürlich besitzt sie jeder koatomare und jeder artinsche Modul, also auch M.

Für den Zusatz können wir gleich M radikalvoll annehmen, dazu nach (2.3) einen endlich erzeugten Untermodul B, so daß M/B halbartinsch ist. Wieder nach (2.3) muß dann M/B artinsch sein, d.h. $M \in \mathfrak{F}$, und natürlich ist B auch klein in M, also M wesentliche Überdeckung des artinschen Moduls M/B.

FOLGERUNG 2.7. $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}$.

Beweis. Analog zu (1.3) zeigt man, daß $M \in \mathfrak{B}$ nicht unendliche direkte Summe von Moduln $\neq 0$ sein kann, genauer: Jeder Faktormodul von M hat endliche Goldie-Dimension. Nach [3] (oder dem Zusatz in (3.5)) besitzt daher M einen endlich erzeugten Untermodul B mit radikalvollem Faktor M/B, und nach (2.6) ist $M/B \in \mathfrak{F}$, also auch $M \in \mathfrak{F}$.

Die Kombination von (2.7) mit (1.6) ergibt jetzt sofort die

FOLGERUNG 2.8. *Für einen R-Modul M sind äquivalent*:

(i) *In jeder absteigenden Folge* $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$ *von Untermoduln von M sind fast alle Faktoren* U_i/U_{i+1} *von endlicher Länge.*

(ii) *M ist ein Minimax-Modul, und für alle* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ *gilt* $\dim(R/\mathfrak{p}) \leqslant 1$.

Erfüllt ein R-Modul M die Bedingungen in (2.6) bzw. (2.7) bzw. (2.8), so gilt für jeden Monomorphismus $f: M \to M$, daß $\operatorname{Kok} f$ koatomar bzw. endlich erzeugt bzw. von endlicher Länge ist. Dies folgt wie in (1.6), doch wollen wir allgemeiner (und im Hinblick auf die in Abschnitt 4 untersuchte Maximalbedingung auch für den dualen Fall) zeigen:

LEMMA 2.9. *Sei $\mathfrak{X}$ eine Klasse von R-Moduln, die gegenüber Untermoduln, Faktormoduln und Gruppenerweiterungen abgeschlossen ist. Sei M ein R-Modul und $f: M \to M$.*

(a) *Ist* $\operatorname{Ke} f \in \mathfrak{X}$ *und sind in jeder absteigenden Folge* $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$ *von Untermoduln von M fast alle Faktoren* U_i/U_{i+1} *aus* $\mathfrak{X}$, *so folgt auch* $\operatorname{Kok} f \in \mathfrak{X}$.

(b) *Ist* $\operatorname{Kok} f \in \mathfrak{X}$ *und sind in jeder aufsteigenden Folge* $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$ *von Untermoduln von M fast alle Faktoren* U_{i+1}/U_i *aus* $\mathfrak{X}$, *so folgt auch* $\operatorname{Ke} f \in \mathfrak{X}$.

Beweis. Für jedes $n \geqslant 1$ induziert der Isomorphismus $M/\operatorname{Ke} f^n \xrightarrow{\cong} \operatorname{Bi} f^n$ die beiden Isomorphismen $\operatorname{Ke} f^{n+1}/\operatorname{Ke} f^n \xrightarrow{\cong} \operatorname{Ke} f \cap \operatorname{Bi} f^n$ und $M/(\operatorname{Bi} f + \operatorname{Ke} f^n) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Bi} f^n/\operatorname{Bi} f^{n+1}$. Aus $\operatorname{Ke} f \in \mathfrak{X}$ folgt also $\operatorname{Ke} f^n \in \mathfrak{X}$ für alle $n \geqslant 1$, aus $\operatorname{Kok} f \in \mathfrak{X}$ folgt $M/\operatorname{Bi} f^n \in \mathfrak{X}$ für alle $n \geqslant 1$.

(a) Aus der angegebenen Minimalbedingung folgt $\operatorname{Bi} f^m/\operatorname{Bi} f^{m+1} \in \mathfrak{X}$ für ein $m \geqslant 1$, d.h. $M/(\operatorname{Bi} f + \operatorname{Ke} f^m) \in \mathfrak{X}$. Aus $\operatorname{Ke} f \in \mathfrak{X}$ folgt auch $(\operatorname{Bi} f + \operatorname{Ke} f^m)/\operatorname{Bi} f \in \mathfrak{X}$, also zusammen $M/\operatorname{Bi} f \in \mathfrak{X}$ wie behauptet.

(b) Ebenso.

3. DER ÜBERGANG ZUM DUALEN $M^0 = \operatorname{Hom}_R(M, E)$

Um die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln zu untersuchen, wollen wir die in (1.6) auftretenden Begriffe und Ergebnisse dualisieren. Für die Dualisierung des Begriffes "Ass(M)" ist das unproblematisch, die Grundtatsachen über Koass(M), die wir bereits laufend benützten, wurden im zweiten Teil von [15] zusammengestellt und werden jetzt durch (3.1) bis (3.4) ergänzt. Für die Dualisierung des Begriffes "Goldie-Dimension" gibt es mehrere Ansätze, vor allem in [8, 10, 11], während wir in (3.6) fünf äquivalente Bedingungen angeben, die beim Übergang zum $\hat{R}$-Modul M^0 gerade die alte Goldie-Dimension liefern.

Dabei sei im folgenden stets, wenn R ein lokaler Ring ist, $\hat{R}$ die Vervollständigung von R, E die injektive Hülle des Restklassenkörpers von R und $M^0 = \operatorname{Hom}_R(M, E)$.

LEMMA 3.1. *Für einen R-Modul M und ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *von R sind äquivalent*:

(i) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$.

(ii) $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(A)$ *für einen artinschen Faktormodul A von M.*

(iii) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(\operatorname{Hom}_R(M, C))$ *für einen artinschen R-Modul C.*

Ist R lokal, so ist das weiter äquivalent mit

(iv) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M^0)$.

Beweis. (i → ii) Zu $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$ gibt es einen unzerlegbaren, artinschen Faktormodul M/M_0 mit $\mathfrak{p} = I(M/M_0)$, und für jeden Untermodul U, mit $M_0 \subset U \subsetneqq M$, gilt dann $\mathfrak{p} = \sqrt{\operatorname{Ann}_R(M/U)}$. Um die Wurzel zu eliminieren, wähle man in der Menge $\{\operatorname{Ann}_R(M/U) \mid M_0 \subset U \subsetneqq M\}$ ein maximales Element $\mathfrak{a}_0 = \operatorname{Ann}_R(M/U_0)$, und dann ist $\mathfrak{a}_0$ wie im klassischen Fall (siehe [2, chap. IV, §1, Prop. 1]) ein Primideal, also $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_0$. (ii → iii) Ist $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(M/U)$ und M/U artinsch, so leistet $C = M/U$ das gewünschte, denn für die kanonische Abb. $\gamma \in \operatorname{Hom}_R(M, C)$ gilt $\operatorname{Ann}_R(\gamma) = \mathfrak{p}$. (iii → i) Ist C wie verlangt und $f \in \operatorname{Hom}_R(M, C)$ mit $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(f)$, so ist $A = M/\operatorname{Ke} f$ ein artinscher Faktormodul von M mit $\operatorname{Ann}_R(A) = \mathfrak{p}$. Nach [15, p. 127] ist $\bigcap \operatorname{Koass}(A) = \sqrt{\operatorname{Ann}_R(A)}$, also $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(A)$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$ wie gewünscht.

Im lokalen Fall ist nur noch zu zeigen, daß man bei (iii) den artinschen Modul C durch E ersetzen kann: $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(\operatorname{Hom}_R(M, C))$ und $C \subset E^n$ impliziert $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(\operatorname{Hom}_R(M, E)^n) = \operatorname{Ass}(M^0)$.

FOLGERUNG 3.2. *Ist B ein endlicher erzeugter R-Modul, so gilt* $\operatorname{Koass}(M \otimes_R B) = \operatorname{Koass}(M) \cap \operatorname{Supp}(B)$.

Beweis. Weil B endlich erzeugt ist, gilt für jeden R-Modul C nach [2, chap. IV, §1, Prop. 10], daß $\operatorname{Ass}(\operatorname{Hom}_R(M \otimes_R B, C)) = \operatorname{Ass}(\operatorname{Hom}_R(M, C)) \cap \operatorname{Supp}(B)$ ist, so daß (iii) die Behauptung liefert.

FOLGERUNG 3.3. *Ist A ein endlich erzeugter R-Modul und M injektiv, so gilt* $\operatorname{Koass}(\operatorname{Hom}_R(A, M)) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(A) \mid \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{p}) \neq 0\}$.

Beweis. Zu $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(\operatorname{Hom}_R(A, M))$ gibt es nach (ii) einen Untermodul U von $\operatorname{Hom}_R(A, M)$ mit $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(\operatorname{Hom}_R(A, M)/U)$, dazu einen injektiven Modul Q und einen Homom. f: $\operatorname{Hom}_R(A, M) \to Q$ mit $\operatorname{Ke} f = U$. Es ist also $f \in \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(A, M), Q)$ mit $\operatorname{Ann}_R(f) = \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(A \otimes_R F)$ mit dem flachen R-Modul $F = \operatorname{Hom}_R(M, Q)$ (siehe [2, chap. I, §2, Ex. 14]). Das Verhalten von Ass beim Tensorieren mit flachen Moduln ist aber wohlbekannt: Nach [2, chap. IV, §2, Théorème 2] ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(A)$ und $R/\mathfrak{p} \otimes_R F \neq 0$, das letztere bedeutet $\operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{p}), Q) \neq 0$, so daß auch $\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{p}) \neq 0$ ist.

Sei umgekehrt A ein beliebiger R-Modul und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)$, M injektiv und $\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{p}) \neq 0$. Der Monom. $R/\mathfrak{p} \to A$ liefert den Epim. $\mathrm{Hom}_R(A, M) \to \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{p}, M)$, und für irgendein $\mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}(\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{p}, M))$ gilt nach dem ersten Teil $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{p})$, d.h. $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, so daß folgt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(\mathrm{Hom}_R(A, M))$.

FOLGERUNG 3.4. *Ist R lokal und A ein koatomarer R-Modul, so gilt* $\mathrm{Koass}(A^0) = \mathrm{Ass}(A)$.

Beweis. Für beliebiges A gilt nach (3.1) $\mathrm{Koass}(A^0) = \mathrm{Ass}(A^{00}) \supset \mathrm{Ass}(A)$. Gleichheit gilt z.B. dann, wenn A endlich erzeugt ist (3.3), aber auch, wenn A durch eine Potenz von $\mathfrak{m}$ annulliert wird: Aus $\mathfrak{m}^e A = 0$ folgt nämlich $\mathfrak{m}^e A^0 = 0$, so daß für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(A^0)$ gilt $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, $A \neq 0$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)$. Für einen koatomaren R-Modul A ist aber nach [13, Satz 2.4] $A/L(A)$ endlich erzeugt und $L(A)$ durch eine Potenz von $\mathfrak{m}$ annulliert, also ebenfalls $\mathrm{Koass}(A^0) = \mathrm{Ass}(A)$.

Bemerkung. Für einen beliebigen R-Modul M definieren wir $\mathrm{Att}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(M/U)$ für einen Untermodul U von $M\}$. Klar ist $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Att}(M)$, und falls M artinsch oder injektiv ist, gilt sogar Gleichheit. Ist nun R lokal und A ein endlich erzeugter R-Modul, so zeigt Sharp in [9, Theorem 2.3], daß $\mathrm{Att}(A^0) = \mathrm{Ass}(A)$ ist. Weil in diesem Fall A^0 artinsch ist, war unsere letzte Folgerung eine Verallgemeinerung dieses Theorems.

Ein R-Modul M hat bekanntlich genau dann endliche Goldie-Dimension, wenn jeder Untermodul von M der Maximalbedingung für direkte Summanden genügt. Die entsprechende Bedingung an alle Faktormoduln von M ist jedoch, wie (3.6)(iii) und (3.7)(i) zeigen werden, für eine Dualisierung des Begriffes "Goldie-Dimension" zu schwach.

LEMMA 3.5. *Für einen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *Jeder Faktormodul von M genügt der Maximalbedingung für direkte Summanden.*

(ii) *Ist $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Untermoduln von M mit $X_n + (\bigcap_{i=n+1}^{\infty} X_i) = M$ für alle $n \geq 1$, so gilt $X_i = M$ für fast alle i.*

In diesem Fall besitzt M einen endlich erzeugten Untermodul M_0, so daß M/M_0 radikalvoll ist.

Beweis. (i $\to$ ii) Sind die X_i wie angegeben, so folgt mit $A_n = X_1 \cap \cdots \cap X_n$ und $B_n = X_{n+1} \cap X_{n+2} \cap \cdots$ für alle $n \geq 1$, daß $A_n + B_n = M$ ist: Klar ist das bei $n = 1$, und auch bei $n > 1$ hat man nach Induktion $A_n + B_n = (B_{n-1} + A_{n-1}) \cap X_n + B_n = X_n + B_n = M$. Mit $D = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ gilt also $(A_n/D) \oplus (B_n/D) = M/D$ für alle $n \geq 1$, nach Voraussetzung $A_m = D$ für ein $m \geq 1$, $B_m = M$, $X_{m+1} = X_{m+2} = \cdots = M$ wie gewünscht.

(ii $\to$ i) Weil sich (ii) auf Faktormoduln vererbt, brauchen wir die Maximalbedingung nur in M nachzuweisen: Zu einer aufsteigenden Folge $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$ von direkten Summanden von M wähle man $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \cdots$ mit $V_i \oplus U_i = M$ für alle i, dazu $X_i = V_{i+1} \oplus U_i$, und dann gilt $X_n + (\bigcap_{i=n+1}^{\infty} X_i) = M$ für alle $n \geqslant 1$, denn U_{n+1} liegt in diesem Durchschnitt. Nach Voraussetzung folgt $X_m = X_{m+1} = \cdots = M$ für ein $m \geqslant 1$, daraus $V_m = V_{m+1} = \cdots$, endlich $U_m = U_{m+1} = \cdots$ wie verlangt.

Angenommen, im Zusatz gibt es kein solches M_0, so konstruieren wir eine Folge von maximalen Untermoduln $(X_i)_{i \geqslant 1}$ von M und eine Folge von zyklischen Untermoduln $(V_i)_{i \geqslant 1}$ von M, so daß $V_i + X_i = M$ und $V_1 + \cdots + V_i \subset X_{i+1}$ ist für alle $i \geqslant 1$: Hat man bereits $X_1, ..., X_n$ und $V_1, ..., V_n$ wie verlangt, so ist $M/(V_1 + \cdots + V_n)$ nach der Annahme nicht radikalvoll, d.h. es gibt einen maximalen Untermodul X_{n+1} von M mit $V_1 + \cdots + V_n \subset X_{n+1}$, und dazu natürlich einen zyklischen Untermodul V_{n+1} von M mit $V_{n+1} + X_{n+1} = M$. Für diese beiden Folgen gilt nun $V_n \subset X_{n+1} \cap X_{n+2} \cap \cdots$, also $X_n + (\bigcap_{i=n+1}^{\infty} X_i) = M$ für alle $n \geqslant 1$, und $X_i = M$ für fast alle i ist der gewünschte Widerspruch.

Bemerkung. Der Zusatz liefert auch einen Beweis (über beliebigen Ringen) für folgendes Resultat in [3]: Genau dann hat jeder Faktormodul von M endliche Goldie-Dimension, wenn jeder Untermodul U von M einen endlich erzeugten Untermodul U_0 besitzt, so daß U/U_0 radikalvoll ist.

Ein anderes Kriterium für endliche Goldie-Dimension lautet, daß jede direkte Menge von Untermoduln endlich ist. Dual sagen wir, eine Menge von Untermoduln von M sei *kodirekt* (kounabhängig in [10]), wenn für paarweise verschiedene Elemente $X_1, ..., X_m$ aus dieser Menge stets gilt $X_1 + (X_2 \cap \cdots \cap X_m) = M$. Zum Beispiel ist in R die Menge aller maximalen Ideale kodirekt.

SATZ 3.6. *Für einen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *Jede kodirekte Menge von Untermoduln von M ist endlich.*

(ii) *Ist $X_1, X_2, ...$ eine Folge von Untermoduln von M mit $(X_1 \cap \cdots \cap X_{n-1}) + X_n = M$ für alle $n \geqslant 2$, so gilt $X_i = M$ für fast alle i.*

(iii) *M ist schwach-komplementiert, und jeder Faktormodul von M genügt der Maximalbedingung für direkte Summanden.*

(iv) *M ist wesentliche Überdeckung einer endlichen direkten Summe von unzerlegbaren Moduln.*

(v) *M ist wesentliche Überdeckung eines artinschen Moduls.*

Ist R lokal, so ist das weiter äquivalent mit

(vi) *M^0 hat als $\hat{R}$-Modul endliche Goldie-Dimension.*

Beweis. (i → ii) Für jede solche Folge gilt sogar

$$X_n + \Bigl(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{m} X_i \Bigr) = M$$

für alle $1 \leqslant n < m$. Nach Voraussetzung ist nämlich

$$\begin{aligned} (X_1 \cap \cdots \cap X_{m-1}) + X_m &= M \\ (X_1 \cap \cdots \cap X_{m-2}) + (X_{m-1} \cap X_m) &= M \\ &\vdots \\ (X_1 \cap \cdots \cap X_n) + (X_{n+1} \cap \cdots \cap X_m) &= M, \end{aligned}$$

so daß bei $n > 1$ Schneiden mit $X_1 \cap \cdots \cap X_{n-1}$ und dann Addition mit X_n die Behauptung liefert.

Angenommen, in unserer Folge sind unendlich viele $X_i \neq M$, so gibt es eine (Teil) Folge $(Y_i)_{i \geqslant 1}$ von Untermoduln $\neq M$ mit $(Y_1 \cap \cdots \cap Y_{n-1}) + Y_n = M$ für alle $n \geqslant 2$. Für alle $1 \leqslant n < m$ ist dann $Y_n + Y_m = M$, also $Y_n \neq Y_m$, und die unendliche Menge $\{Y_1, Y_2, Y_3, ...\}$ nach der Vorbemerkung kodirekt. Aber das ist unmöglich.

(ii → iii) Angenommen, M ist nicht schwach-komplementiert, so konstruieren wir eine Folge $X_1, X_2, ...$ von Untermoduln $\neq M$ mit $(X_1 \cap \cdots \cap X_{n-1}) + X_n = M$ für alle $n \geqslant 2$. Sei dazu $X_1 \subset M$ ohne schwaches Komplement in M. Dann ist $X_1 \neq M$, außerdem X_1 nicht klein in M, also $X_1 + X_2 = M$ mit $X_2 \neq M$. Hat man bereits $X_1, ..., X_n$ wie verlangt ($n \geqslant 2$), so folgt aus $X_1 + (X_2 \cap \cdots \cap X_n) = M$ (siehe die Umformungen im Beweis von (i → ii)), daß $X_1 \cap (X_2 \cap \cdots \cap X_n)$ nicht klein in M sein kann, also $(\bigcap_{i=1}^{n} X_i) + X_{n+1} = M$ ist für ein $X_{n+1} \neq M$.—Für die gewünschte Maximalbedingung nehmen wir nach (3.5) eine Folge $X_1, X_2, ...$ von Untermoduln von M mit $X_n + (\bigcap_{i=n+1}^{\infty} X_i) = M$ für alle $n \geqslant 1$. Mit den dortigen Bezeichnungen ist dann $A_{n-1} + B_{n-1} = M$, insbesondere $(X_1 \cap \cdots \cap X_{n-1}) + X_n = M$ für alle $n \geqslant 2$, also nach Voraussetzung $X_i = M$ für fast alle i.

(iii → i) Angenommen, es gibt eine unendliche kodirekte Menge von Untermoduln, so kann man sie gleich in der Form $\{Y_1, Y_2, Y_3, ...\}$ annehmen mit paarweise verschiedenen Y_i. Zu $V_n = Y_1 \cap \cdots \cap Y_n$ ($n \geqslant 1$) wähle man eine aufsteigende Folge $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$ derart, daß V_i ein schwaches Komplement von U_i in M ist (hat man bereits $U_1, ..., U_n$ und ist W ein schwaches Komplement von $V_{n+1} + U_n$ in M, so leistet $U_{n+1} = W + U_n$ das gewünschte). Mit $X_i = V_{i+1} + U_i$ gilt dann $X_n + (\bigcap_{i=n+1}^{\infty} X_i) = M$ für alle $n \geqslant 1$ (denn U_{n+1} liegt in diesem Durchschnitt), also nach (3.5) $X_m = X_{m+1} = \cdots = M$ für ein $m \geqslant 1$. Für alle $i \geqslant m$ folgt aus

$V_{i+1}+U_i=M$, $V_{i+1}+(U_i \cap V_i)=V_i$ wegen der Kodirektheit $V_{i+1}+Y_{i+1}=M$, d.h. $Y_{m+1}=Y_{m+2}=\cdots=M$ im Widerspruch zur Wahl der Y_i.

(ii → v) Angenommen, M ist nicht wesentliche Überdeckung eines artinschen Moduls, so ist $M \neq 0$ und es gibt ein $X_1 \subset M$, so daß M/X_1 artinsch $\neq 0$ ist. Weil X_1 nicht klein in M ist, folgt $X_1+X_2=M$ mit M/X_2 artinsch $\neq 0$, also induktiv eine Folge $X_1, X_2, \ldots$ von Untermoduln von M mit $(X_1 \cap \cdots \cap X_{n-1})+X_n=M$ und M/X_n artinsch $\neq 0$ für alle $n \geqslant 2$. Andererseits muß $X_i=M$ sein für fast alle i, und das ist der gewünschte Widerspruch.

(v → iv) Ist M wesentliche Überdeckung des artinschen Moduls A, so genügt es zu zeigen, daß A die gewünschte Eigenschaft hat. Falls A Null oder unzerlegbar ist, ist man fertig. Andernfalls ist $A=U_1+\cdots+U_n$ mit unzerlegbaren U_i, und wir können gleich annehmen, daß keines der U_i überflüssig ist. Mit $D_i=U_1+\cdots+U_{i-1}+U_{i+1}+\cdots+U_n$ ist dann auch A/D_i unzerlegbar $(1 \leqslant i \leqslant n)$, außerdem die kanonische Abb. $f\colon A \to \prod_{i=1}^n (A/D_i)$ surjektiv und $\operatorname{Ke} f=\sum_{i=1}^n (U_i \cap D_i)$ klein in A, d.h. f der gewünschte wesentliche Epimorphismus.

(iv → ii) Jeder unzerlegbare Modul ist wesentliche Überdeckung eines artinschen Moduls, so daß auch M wesentliche Überdeckung eines artinschen Moduls A ist. A erfüllt natürlich die Bedingung (iii), also auch (ii), und weil sich die Eigenschaft (ii) auf wesentliche Überdeckungen fortsetzt, besitzt sie auch M.

Ist jetzt R lokal, so wurde für beliebiges M in [14, p. 59] gezeigt, daß ein Untermodul U von M genau dann klein in M ist, wenn $\operatorname{Ann}_{M^0}(U)$ $\hat{R}$-groß in M^0 ist. Falls nun bei (v → vi) U ein kleiner Untermodul von M ist mit artinschem Faktor M/U, ist $\operatorname{Ann}_{M^0}(U)$ als $\hat{R}$-Modul endlich erzeugt und groß in M^0, also M^0 von endlicher Goldie-Dimension. Ist umgekehrt bei (vi → v) H ein endlich erzeugter, großer $\hat{R}$-Modul von M^0, so gilt bekanntlich $H=\operatorname{Ann}_{M^0}(U)$ für einen R-Untermodul U von M (nämlich $U=\operatorname{Ann}_M(H)$), und dann ist U klein in M, M/U artinsch wie gewünscht.

Bemerkung 1. Für (3.5) und die Äquivalenz von (i), (ii) und (iii) in (3.6) brauchte der Grundring weder noethersch noch kommutativ zu sein. Moduln mit der Eigenschaft (i) werden—über beliebigen Ringen—in [10] als "cofinite-dimensional" bezeichnet. Proposition 4.11 und Theorem 4.13 in [10] geben—unter der Zusatzbedingung "supplementiert"—noch weitere Äquivalenzen für die Bedingung (i) an.

Bemerkung 2. Auch (iv → i) gilt über beliebigen Ringen, genauer: Ist M wesentliche Überdeckung einer direkten Summe von n unzerlegbaren Moduln $(n \geqslant 1)$, so besteht jede kodirekte Menge von Untermoduln $\neq M$ aus höchstens n Elementen. Damit folgt unmittelbar Theorem 1.17 in [11], ebenso Proposition 1.7 in [8] und die dort gefolgerte Gleichheit "corank M = weak corank M."

FOLGERUNG 3.7. *Für einen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *M ist komplementiert, und jeder Faktormodul von M genügt der Maximalbedingung für direkte Summanden.*

(ii) *M ist Summe von endlich vielen unzerlegbaren Untermoduln.*

Beweis. (i → ii) Angenommen, M ist nicht Summe von endlich vielen unzerlegbaren Untermoduln, so geben wir—vgl. den Zusatz in (3.5)—zwei Folgen $(X_i)_{i \geqslant 1}$ und $(V_i)_{i \geqslant 1}$ von Untermoduln von M an, so daß M/X_i unzerlegbar und V_i ein Komplement von X_i in M ist, außerdem $V_1 + \cdots + V_i \subset X_{i+1}$ für alle $i \geqslant 1$: Hat man bereits $X_1, ..., X_n$ und $V_1, ..., V_n$ wie verlangt, so sind die V_i unzerlegbar, also nach Annahme $V_1 + \cdots + V_n \neq M$, so daß man $V_1 + \cdots + V_n \subset X_{n+1} \subset M$ wählen kann mit M/X_{n+1} unzerlegbar, dazu ein Komplement V_{n+1} von X_{n+1} in M. Es folgt $X_n + (\bigcap_{i=n+1}^{\infty} X_i) = M$ für alle $n \geqslant 1$, mit der zusätzlichen Maximalbedingung und (3.5) also $X_i = M$ für fast alle i, entgegen der Wahl der X_i.

(ii → i) Als Summe von endlich vielen komplementierten Untermoduln ist M wieder komplementiert. Falls M Null oder unzerlegbar ist, sind wir fertig. Andernfalls schreibe man wie im Beweis von (3.6)(v → iv) $M = U_1 + \cdots + U_n$, $D_i = U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_n$, so daß die Faktoren M/D_i unzerlegbar sind und die kanonische Abb. $M \to \prod_{i=1}^{n} (M/D_i)$ ein wesentlicher Epim. wird, also M nach (3.6) die gewünschte Maximalbedingung erfüllt.

Bemerkung. Auch diese Folgerung gilt über beliebigen Ringen: Der Beweis von (ii → i) bleibt unverändert (wegen Bem. 2 zu (3.6)), aber auch der von (i → ii), denn allein aus (i)—ohne daß R noethersch oder kommutativ ist—folgt, daß es zu jedem echten Untermodul V von M einen Zwischenmodul $V \subset X \subset M$ gibt mit M/X unzerlegbar.

FOLGERUNG 3.8. *Ist* $\dim(R) \leqslant 1$, *so sind für einen R-Modul M äquivalent:*

(i) *M ist wesentliche Überdeckung eines artinschen Moduls.*

(ii) *M ist ein Minimax-Modul und M/Ra(M) halbeinfach.*

Beweis. (i → ii) Weil M schwach-komplementiert ist, ist $M/Ra(M)$ halbeinfach. Weil sich (i) auf Faktormoduln vererbt, genügt es nach (1.4) zu zeigen, daß M endliche Goldie-Dimension hat, und für $M/L(M)$ wissen wir das schon aus (1.5). Bleibt zu zeigen, daß $L(M)$ artinsch ist: Ist V_0 ein maximales Element in der Menge $\{V \subset M \mid V \cap L(M) = 0\}$, so zeigt der wesentliche Monom. $L(M) \to M/V_0$, daß auch M/V_0 halbartinsch ist, wir also gleich $V_0 = 0$, d.h. M halbartinsch annehmen können. In $M = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \Omega} L_{\mathfrak{m}}(M)$ sind nach (3.6) fast alle $L_{\mathfrak{m}}(M)$ Null, so daß wir jetzt M als $\mathfrak{m}$-primär voraussetzen, dazu R lokal und vollständig mit dem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Wieder nach (3.6) ist jetzt M^0 von endlicher Goldie-Dimension, d.h. nach (1.4) sogar ein Minimax-Modul, damit auch M^{00} ein Minimax-Modul, also der halbartinsche Untermodul M wie behauptet artinsch.

(ii $\to$ i) Das gilt auch ohne Einschränkung an $\dim(R)$: Ist B ein endlich erzeugter Untermodul von M mit artinschem Faktor M/B, so ist $B_1 = B \cap Ra(M)$ klein in M und B/B_1 nach Voraussetzung halbeinfach, also von endlicher Länge. Damit ist M wesentliche Überdeckung des artinschen Moduls M/B_1.

Beispiel 3.9. *Sei R ein Integritätsring mit unendlich vielen maximalen Idealen und sei* $\dim(R) = 1$. *Dann ist jede wesentliche Überdeckung eines artinschen Moduls wieder artinsch.*

Beweis. Sei zunächst R nur kommutativ und noethersch, M wesentliche Überdeckung des artinschen Moduls A. Für fast alle $\mathfrak{m} \in \Omega$ ist dann $A_{\mathfrak{m}} = 0$, also auch $M_{\mathfrak{m}} = 0$ nach [13, Lemma 4.1], so daß für jeden Untermodul U von M gilt: U ist durch fast alle $\mathfrak{m} \in \Omega$ teilbar. Insbesondere gilt für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$, daß $R/\mathfrak{p}$ semilokal ist. Ist nun R wie angegeben, so gilt für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$, daß $\mathfrak{p} \neq 0$, also $\mathfrak{p} \in \Omega$ ist, d.h. M halbartinsch. Nach (3.8) ist aber M ein Minimax-Modul, also bereits artinsch.

Beispiel 3.10. *Ist R ein Integritätsring mit Quotientenkörper $K \neq R$, so sind äquivalent*:

(i) *K ist wesentliche Überdeckung eines artinschen R-Moduls.*

(ii) *R ist semilokal und* $\dim(R) = 1$.

Beweis. (i $\to$ ii) Es genügt, daß jeder Faktormodul von K die Maximalbedingung für direkte Summanden hat. 1. *Fall* $\dim(R) = 1$. Dann ist $\operatorname{Ass}(K/R) = \Omega$, und die Zerlegung $K/R = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \Omega} L_{\mathfrak{m}}(K/R)$ zeigt, daß Ω endlich, d.h. R semilokal ist. 2. *Fall* $\dim(R) > 1$. Dann wähle man ein Primideal $\mathfrak{q}$ mit $h(\mathfrak{q}) = 2$, dazu ein $0 \neq x \in \mathfrak{q}$ und die multiplikative Teilmenge $S = \{ab \mid a \in R \backslash \mathfrak{q},\ b \in \{1, x, x^2, \ldots\}\}$. Die Primideale des Zwischenringes $T = R_S$ entsprechen dann den Primidealen $\mathfrak{p}$ von R mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ und $x \notin \mathfrak{p}$, und davon gibt es nach dem Krull'schen Hauptidealsatz unendlich viele. Also ist $\dim(T) = 1$ und T nicht semilokal, K/T unendliche direkte Summe seiner Primärkomponenten: Der zweite Fall war nicht möglich.

(ii → i) Dann ist K/R artinsch, und weil R natürlich klein in K ist, folgt die Behauptung.

4. DIE MAXIMALBEDINGUNG FÜR RADIKALVOLLE UNTERMODULN

Das vielleicht überraschendste Ergebnis dieses letzten Abschnittes ist, daß ein komplementierter Modul mit der im Titel angegebenen Maximalbedingung automatisch die entsprechende Minimalbedingung erfüllt (4.8). Für die Maximalbedingung geben wir in (4.4) eine Reihe von Äquivalenzen, die im lokalen Fall gerade die Dualisierung von (1.6) darstellen. Grundlegend ist dabei der von Matlis in [7, p. 46] eingeführte Begriff des "simple divisible" Moduls, den wir über beliebigem R so abändern: Ein R-Modul M heiße *einfach-radikalvoll*, wenn M radikalvoll $\neq 0$ ist und keine weiteren radikalvollen Untermoduln besitzt. Zu einem kleinen Teil können wir dann die Matlis'schen Untersuchungen in [7], wie sich über einem 1-dim. lokalen Cohen–Macaulay-Ring die artinschen Moduln aus den einfach-radikalvollen aufbauen, hier auf beliebige kommutative noethersche Ringe erweitern (4.10).

LEMMA 4.1. *Für jeden einfach-radikalvollen R-Modul M gilt*:

(a) $\mathrm{Ann}_R(M)$ *ist ein Primideal, sagen wir* $\mathfrak{p}$, *und damit ist* $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$.

(b) *Für jeden Untermodul $U \neq 0$ ist M/U halbartinsch.*

(c) *M ist entweder sockelfrei und irreduzibel oder artinsch und unzerlegbar.*

(c1) *Ist M sockelfrei und irreduzibel,* $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(M)$ *wie in* (a), *so folgt* $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$, *und als $R/\mathfrak{p}$-Modul ist M gerade der Quotientenkörper von $R/\mathfrak{p}$.*

(c2) *Ist M artinsch und unzerlegbar, so kann man R* lokal und vollständig *annehmen. Mit* $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(M)$ *wie in* (a) *folgt dann* $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$, *und M ist ein Faktormodul von* $\mathrm{Ann}_E(\mathfrak{p})$.

Beweis. (a) Klar ist $\mathrm{Ann}_R(M) \neq R$, und aus $x \notin \mathrm{Ann}_R(M) \not\ni y$ folgt, daß xM und yM von Null verschiedene radikalvolle Untermoduln von M sind, also $xM = M = yM$ ist, $xyM = M$, $xy \notin \mathrm{Ann}_R(M)$. Ebenso folgt aus $x \in \mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}(M)$, daß $xM \neq M$, also $xM = 0$ ist, d.h. $\mathfrak{q} \subset \mathrm{Ann}_R(M)$; weil aber die umgekehrte Inklusion stets gilt, heißt das $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathrm{Ann}_R(M)\}$.

(b) Nach (2.2) ist $M \in \mathfrak{F}'$. Mit $X/U = L(M/U)$ ist M/X sockelfrei, also X nach (1.1)(c) radikalvoll, $X = M$ wie behauptet.

(c) Falls $So(M)=0$, folgt aus $U_1 \neq 0$, $U_2 \neq 0$ nach (b), daß $M/(U_1 \cap U_2)$ halbartinsch, also auch $U_1 \cap U_2 \neq 0$ ist. Falls $So(M) \neq 0$, ist M selbst halbartinsch, ja nach (2.3) artinsch, und jeder Untermodul $U \neq M$ ist reduziert, als endlich erzeugt, also klein in M.

(c1) Nach dem Zusatz in (1.2) gilt $\mathrm{Ass}(M)=\{\mathfrak{p}\}$, also nach (1.1)(e) auch $\dim(R/\mathfrak{p})=1$. Für alle $x \in R \setminus \mathfrak{p}$ ist die Multiplikation mit $x: M \to M$ bijektiv, also M als $R/\mathfrak{p}$-Modul teilbar, torsionsfrei und natürlich wieder irreduzibel, d.h. der Quotientenkörper von $R/\mathfrak{p}$.

(c2) Sei gleich R lokal und vollständig. Dann ist $M^0 = \mathrm{Hom}_R(M, E)$ endlich erzeugt und irreduzibel, $\mathrm{Ann}_R(M^0)=\mathfrak{p}$ und nach (3.1) $\mathrm{Ass}(M^0)=\{\mathfrak{p}\}$. Entsprechend ist jetzt M^0 sockelfrei $\neq 0$, aber ohne echte sockelfreie Faktormoduln—wir sagen, M^0 sei *einfach-sockelfrei*—so daß nach (1.6) folgt $\dim(R/\mathfrak{p})=1$. Und weil M^0 als $R/\mathfrak{p}$-Modul torsionsfrei ist, läßt es sich in den Quotientenkörper von $R/\mathfrak{p}$, also schon in $R/\mathfrak{p}$ selbst einbetten, so daß ein Monom. $M^0 \to R/\mathfrak{p}$ einen Epim. $(R/\mathfrak{p})^0 \to M^{00}$ liefert, d.h. einen Epim. $\mathrm{Ann}_E(\mathfrak{p}) \to M$ wie gewünscht.

Bemerkung zu (c2). Ist M einfach-radikalvoll und artinsch, aber R nicht mehr vollständig, so kann für $\mathfrak{p}=\mathrm{Ann}_R(M)$ auch $\dim(R/\mathfrak{p})>1$ sein.

Sei dazu R ein lokaler Integritätsring mit $\dim(R)=2$, so daß $\hat{R}$ ein assoziiertes Primideal $\mathfrak{P}$ der Höhe $\neq 0$ hat (etwa nach [4, p. 304]). Weil dann $\dim(\hat{R}/\mathfrak{P})=1$ ist, gibt es einen einfach-radikalvollen artinschen $\hat{R}$-Modul H mit $\mathrm{Ann}_{\hat{R}}(H)=\mathfrak{P}$ (siehe 4.2), und dann ist $M={}_RH$ ein einfach-radikalvoller artinscher R-Modul mit $\mathrm{Ann}_R(M)=\mathfrak{P} \cap R=0$. Für $\mathfrak{p}=\mathrm{Ann}_R(M)$ gilt also $\dim(R/\mathfrak{p})=2$.

BEISPIEL 4.2. *Zu jedem Primideal* $\mathfrak{p}$, *mit* $\dim(R/\mathfrak{p})=1$, *gibt es einen sockelfreien einfach-radikalvollen R-Modul M mit* $\mathrm{Ann}_R(M)=\mathfrak{p}$ *und einen artinschen einfach-radikalvollen R-Modul N mit* $\mathrm{Ann}_R(N)=\mathfrak{p}$.

Beweis. Im ersten Fall wähle man für M den Quotientenkörper von $R/\mathfrak{p}$: Klar ist M als R-Modul sockelfrei und radikalvoll $\neq 0$, sowie $\mathrm{Ann}_R(M)=\mathfrak{p}$. Ist aber U ein radikalvoller R-Untermodul von M, so ist U als $R/\mathfrak{p}$-Modul sogar teilbar (wegen $\dim(R/\mathfrak{p})=1$), also $U=0$ oder $U=M$.

Im zweiten Fall wähle man ein $\mathfrak{m} \in \Omega$ mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$, dazu die injektive Hülle Q von $R/\mathfrak{m}$ und $Q_0=\mathrm{Ann}_Q(\mathfrak{p})$. Weil dann Q_0 artinsch und radikalvoll $\neq 0$ ist (die Formel in (3.3) liefert $\mathrm{Koass}(Q_0)=\{\mathfrak{p}\}$), enthält Q_0 einen einfach-radikalvollen Untermodul N. Dabei ist $\mathfrak{q}=\mathrm{Ann}_R(N)$ nach (4.1)(a) ein Primideal, und aus $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \notin \Omega$ folgt (wegen $\dim(R/\mathfrak{p})=1$) wie gewünscht $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$.

BEISPIEL 4.3. *Ist* $\dim(R)=1$, *so besitzt jeder radikalvolle R-Modul* $\neq 0$ *einen einfach-radikalvollen Untermodul.*

Beweis. Aus $\dim(R)=1$ folgt für jeden radikalvollen R-Modul M, daß $M/L(M)$ nur endlich viele assoziierte bzw. koassoziierte Primideale hat, also $\mathrm{Tor}_1^R(M/L(M), R/\mathfrak{m})=0$ ist für alle $\mathfrak{m}\in\Omega$ (vgl. den Beweis von (1.1)(c)), also auch $L(M)$ radikalvoll ist.

1. *Fall* $L(M)\neq 0$. Dann können wir M selbst als $\mathfrak{m}$-primär annehmen, dazu R lokal mit dem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Mit $\mathfrak{a}=L(R)$ ist der Ring $\bar{R}=R/\mathfrak{a}$ ein 1-dim. lokaler Cohen–Macaulay-Ring, und aus $\mathfrak{m}^e\mathfrak{a}=0$, $\mathfrak{m}M=M$ folgt $\mathfrak{a}M=0$, so daß wir M als $\bar{R}$-Modul auffassen können. Nach [7, Theorem 5.17] ist jetzt M die Summe seiner artinschen radikalvollen Untermoduln, hat also mindestens einen einfach-radikalvollen Untermodul X_0.

2. *Fall* $L(M)=0$. Mit $S=R\backslash\bigcup_{i=1}^k \mathfrak{p}_i$, wobei $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_k$ die nicht-maximalen Primideale von R seien, stimmen dann die radikalvollen Untermoduln von M mit den S-gesättigten überein, und die entsprechen genau den R_S-Untermoduln von M_S. Damit hat, weil der Ring R_S artinsch ist, die Menge $\{X\subset M \mid X\neq 0$ und X ist S-gesättigt in $M\}$ ein minimales Element X_0, und X_0 ist der gewünschte einfach-radikalvolle Untermodul von M.

SATZ 4.4. *Für einen komplementierten R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *M erfüllt die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln.*

(ii) *In jeder aufsteigenden Folge* $U_1\subset U_2\subset U_3\subset\cdots$ *von Untermoduln von M sind fast alle Faktoren* U_{i+1}/U_i *koatomar.*

(iii) $P(M)$ *ist wesentliche Überdeckung einer endlichen direkten Summe von einfach-radikalvollen Moduln.*

Ist R lokal, so ist das weiter äquivalent mit

(iv) M^0 *erfüllt als* $\hat{R}$*-Modul die Bedingungen von* (1.6).

Beweis. (i → iii) Weil auch $P(M)$ komplementiert ist, können wir gleich M radikalvoll annehmen. Angenommen, M hat nicht die angegebene Gestalt, so hat die Menge $\{U\subsetneqq M \mid U$ ist radikalvoll$\}$ ein maximales Element U_1, und mit einem Komplement V_1 von U_1 in M folgt aus dem wesentlichen Epim. $M\to(M/U_1)\times(M/V_1)$, daß $V_1\neq M$ ist. Ist U_2 ein maximales Element in der Menge $\{V_1\subset U\subsetneqq M \mid U$ ist radikalvoll$\}$ und V_2/V_1 ein Komplement von U_2/V_1 in M/V_1, so folgt aus dem wesentlichen Epim. $M/V_1\to(M/U_2)\times(M/V_2)$, daß auch $V_2\neq M$ ist. Induktiv erhält man so eine Folge $0\neq V_1\subsetneqq V_2\subsetneqq\cdots$ von radikalvollen Untermoduln V_i von M, entgegen der Voraussetzung.

(iii → ii) Sei $\mathfrak{C}'$ die Klasse aller R-Moduln, die (ii) erfüllen. Wir zeigen im 1. *Schritt* auch ohne Komplementiertheit: Ist R lokal und M wesentliche Überdeckung einer endlichen direkten Summe von einfach-radikalvollen Moduln, so folgt $M \in \mathfrak{C}'$. Sei dazu $f\colon M \to \prod_{i=1}^{n} A_i$ ein wesentlicher Epim., alle A_i einfach-radikalvoll. Nach (4.1) ist A_i entweder artinsch oder sockelfrei. Im ersten Fall zeigt der Verbandsantiisomorphismus $\mathscr{L}_R(A_i) \ni U \mapsto \mathrm{Ann}(U) \in \mathscr{L}_{\hat{R}}(A_i^0)$, daß A_i^0 als $\hat{R}$-Modul sogar einfach-sockelfrei ist, im zweiten Fall folgt aus (2.4), daß A_i^0 über $\hat{R}$ wenigstens ein radikalvoller Minimax-Modul ist, so daß in beiden Fällen A_i^0 die Bedingungen in (1.6) erfüllt. Das gilt dann auch für $\coprod_{i=1}^{n} A_i^0$, ja sogar für M^0, denn nach [14, p. 59] ist f^0 über $\hat{R}$ ein wesentlicher Monom. Damit folgt $M \in \mathfrak{C}'$: Aus $U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset M$ erhält man $M^0 \supset \mathrm{Ann}_{M^0}(U_1) \supset \mathrm{Ann}_{M^0}(U_2) \supset \cdots$, also nach (1.6) ein $m \geqslant 1$ mit $\mathrm{Ann}_{M^0}(U_i)/\mathrm{Ann}_{M^0}(U_{i+1}) \cong (U_{i+1}/U_i)^0$ halbartinsch für alle $i \geqslant m$. Für dieselben i ist daher (vgl. [13, Lemma 2.1]) U_{i+1}/U_i koatomar.

Sei im 2. *Schritt* M wie angegeben, d.h. M komplementiert und $P(M)$ wesentliche Überdeckung einer endlichen direkten Summe von einfach-radikalvollen Moduln. Weil $\mathfrak{C}'$ gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen, $M/P(M)$ koatomar und $P(M)$ wieder komplementiert ist, können wir gleich M radikalvoll $\neq 0$ annehmen, dazu einen wesentlichen Epim. $f\colon M \to \prod_{i=1}^{n} A_i$ mit einfach-radikalvollen A_i. Jedes A_i ist wieder komplementiert, also sogar unzerlegbar, so daß M die äquivalenten Bedingungen von (3.6) erfüllt und in $M = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \Omega} K_{\mathfrak{m}}(M)$ fast alle $K_{\mathfrak{m}}(M)$ Null sind. Aber jedes $K_{\mathfrak{m}}(M)$ ist wesentliche Überdeckung von $\prod_{i=1}^{n} K_{\mathfrak{m}}(A_i)$, jedes $K_{\mathfrak{m}}(A_i)$ Null oder gleich A_i, also $K_{\mathfrak{m}}(M)$ nach dem ersten Schritt aus $\mathfrak{C}'$.

Weil (ii $\to$ i) klar ist, sind jetzt die ersten drei Bedingungen des Satzes zueinander äquivalent. Der letzte Beweisteil zeigte zudem, daß $P(M)$ *wesentliche Überdeckung eines artinschen Moduls ist.*

Ist nun R lokal, so wurde (iv $\to$ ii) bereits im ersten Beweisschritt von (iii $\to$ ii) gezeigt, und aus demselben Abschnitt wissen wir bei (iii $\to$ iv), daß in der $\hat{R}$-exakten Folge $0 \to (M/P(M))^0 \to M^0 \to (P(M))^0 \to 0$ das dritte Glied die Bedingungen in (1.6) erfüllt. Das erste ist sogar halbartinsch (vgl. [13, Lemma 2.1]), so daß M^0 das gewünschte leistet.

Bemerkung zu (iii). Im dualen Fall kann man natürlich auf die Voraussetzung "M komplementiert" verzichten und erhält als Ergänzung von (1.6): Genau dann erfüllt M die Minimalbedingung für Untermoduln U mit $So(M/U) = 0$, wenn $M/L(M)$ wesentliche Erweiterung einer endlichen direkten Summe von einfach-sockelfreien Moduln ist.

Unsere erste Folgerung ist eine Verallgemeinerung des Matlis'schen Resultates (siehe [7, Theorem 5.5]), daß über 1-dim. lokalen Cohen–Macaulay-Ringen jeder artinsche Modul die Maximalbedingung für teilbare Untermoduln hat.

FOLGERUNG 4.5. *Sei $P(M)$ wesentliche Überdeckung eines artinschen Moduls und sei* $\dim(R/\mathfrak{q}) \leqslant 1$ *für alle* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M)$. *Dann erfüllt M die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln.*

Beweis. Wir zeigen im 1. *Schritt* allgemeiner: Ist M wesentliche Überdeckung eines artinschen Moduls A und erfüllt A die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln, so folgt $M \in \mathfrak{C}'$. Dazu kann man, falls R lokal ist, wie im ersten Beweisschritt von (iii → ii) vorgehen. Der Verbandsantiisomorphismus $\mathscr{L}_R(A) \ni U \mapsto \operatorname{Ann}(U) \in \mathscr{L}_{\hat{R}}(A^0)$ zeigt, daß A^0 als $\hat{R}$-Modul die Bedingungen von (1.6) erfüllt, dasselbe gilt dann für M^0, und daraus folgt $M \in \mathfrak{C}'$. Ist aber R nicht lokal, so gilt für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$, das $M_{\mathfrak{m}}$ wesentliche Überdeckung von $A_{\mathfrak{m}}$ ist [13, Lemma 4.1] und $A_{\mathfrak{m}}$ wieder die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln besitzt, also $M_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{C}'$ ist. Für fast alle $\mathfrak{m} \in \Omega$ ist aber $A_{\mathfrak{m}} = 0$, also auch $M_{\mathfrak{m}} = 0$, und deshalb gilt wieder $M \in \mathfrak{C}'$.

Sei nun im 2. *Schritt* $P(M)$ wesentliche Überdeckung eines artinschen Moduls, sagen wir A, und $\dim(R/\mathfrak{q}) \leqslant 1$ für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M)$. Dann gilt für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(A) = \operatorname{Koass}(P(M))$ nach [15, Lemma 2.1] $\dim(R/\mathfrak{q}) = 1$, so daß im Falle $A \neq 0$ auch für den Ring $\bar{R} = R/\operatorname{Ann}_R(A)$ gilt $\dim(\bar{R}) = 1$. Damit erfüllt jede Primärkomponente von A, als artinscher Modul über einem 1-dim. lokalen vollständigen Ring, nach (4.4)(iv) die gewünschte Maximalbedingung, also auch A selbst, also nach dem ersten Schritt auch $P(M)$.

Bemerkung. Keine der beiden Voraussetzungen in (4.5) ist notwendig für die untersuchte Maximalbedingung: Über $R = \mathbb{Z}$ ist $M = \mathbb{Q}$ einfach-radikalvoll, aber nicht wesentliche Überdeckung eines artinschen Moduls, und für das einzige koassoziierte Primideal $\mathfrak{p}$ des artinschen einfach-radikalvollen Moduls M vor (4.2) galt $\dim(R/\mathfrak{p}) = 2$.

Genügt ein artinscher Modul der Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln, so sind schon in jeder aufsteigenden Folge von Untermoduln fast alle Faktoren von endlicher Länge. Weil das natürlich auch für jeden endlich erzeugten Modul gilt, lautet die zu (2.8) duale Aussage:

FOLGERUNG 4.6. *Sei M ein Minimax-Modul und* $\dim(R/\mathfrak{q}) \leqslant 1$ *für alle* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M)$. *Dann sind in jeder aufsteigenden Folge $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$ von Untermoduln von M fast alle Faktoren U_{i+1}/U_i von endlicher Länge.*

Entsprechend zu (1.8) erhält man jetzt die

FOLGERUNG 4.7. *Ist* $\dim(R) \leqslant 1$, *so sind für einen R-Modul M äquivalent*:

(i) *M erfüllt die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln.*

(ii) *M erfüllt die entsprechende Minimalbedingung.*

(iii) *$P(M)$ hat endliche Goldie-Dimension.*

Beweis. Weil jeder sockelfreie R-Modul nur endlich viele assoziierte und jeder radikalvolle R-Modul nur endlich viele koassoziierte Primideale hat, ist (ii $\leftrightarrow$ iii) klar nach (2.3)(iii).

(i $\rightarrow$ iii) Die Menge $\{X \subset M \mid X$ ist radikalvoll und von endlicher Goldie-Dim.$\}$ hat nach Voraussetzung ein maximales Element X_0. Angenommen $X_0 \subsetneqq P(M)$, so hat $P(M)/X_0$ nach (4.3) einen einfach-radikalvollen Untermodul U/X_0. Der ist nach (4.1)(c) von endlicher Goldie-Dimension, und das gilt dann auch für den radikalvollen Modul U, im Widerspruch zur Maximalität von X_0.

(iii $\rightarrow$ i) In jeder aufsteigenden Folge $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$ von radikalvollen Untermoduln von M sind auch alle $L(U_i)$ radikalvoll (siehe den Beweis von (4.3)), und weil $L = L(P(M))$ nach Voraussetzung artinsch ist, gilt nach (4.5) $U_m \cap L = U_{m+1} \cap L = \cdots$ für ein $m \geqslant 1$. Auch $P(M)/L$ hat endliche Goldie-Dimension, also nach (iii $\rightarrow$ i) und (2.5) die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln, und aus $U_n + L = U_{n+1} + L = \cdots$ für ein $n \geqslant m$ folgt $U_n = U_{n+1} = \cdots$ wie gewünscht.

SATZ 4.8. *Erfüllt ein komplementierter R-Modul M die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln, so hat M auch die entsprechende Minimalbedingung.*

Beweis. Wir können gleich annehmen, daß M radikalvoll ist, und weil dann in $M = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \Omega} K_{\mathfrak{m}}(M)$ fast alle $K_{\mathfrak{m}}(M)$ Null sind, auch noch R lokal mit dem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Die zu zeigende Minimalbedingung ist dann nach (2.4) äquivalent mit $M \in \mathfrak{F}$.

1. *Schritt* $M/L(M)$ hat endliche Goldie-Dimension. Zum Beweis sei $\mathfrak{C}'$ wie in (4.4)(iii $\rightarrow$ ii) die Klasse der R-Moduln, bei denen in jeder aufsteigenden Folge von Untermoduln fast alle Faktoren koatomar sind. Angenommen, $M/L(M)$ hat einen Untermodul X mit einer Zerlegung $X = \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$, in der alle $X_i \neq 0$ sind, so folgt wie in (1.3) $X = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Y_i$, worin jedes Y_i unendliche direkte Summe von Moduln $\neq 0$ ist, also als sockelfreier Modul nach [13, p. 225] nicht koatomar sein kann. Andererseits ist nach (4.4) $M \in \mathfrak{C}'$, also auch $X \in \mathfrak{C}'$, so daß in der aufsteigenden Folge $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$, mit $U_n = \bigoplus_{i=1}^{n} Y_i$, fast alle Faktoren $U_{i+1}/U_i \cong Y_{i+1}$ koatomar sein müssen, und das ist der gewünschte Widerspruch.

2. *Schritt* $M \in \mathfrak{F}'$. Nach (1.2) müssen wir die Maximalbedingung für Untermoduln U mit $So(M/U) = 0$ zeigen. Aber für solche U ist $\mathrm{Ass}(M/U) \cup \mathrm{Koass}(M/U)$ endlich (nach dem ersten Schritt bzw (4.4)),

$\mathrm{Tor}_1^R(M/U,\ R/\mathfrak{m}) = 0$, $\mathfrak{m}U = U$, und für die gilt die Maximalbedingung nach Voraussetzung.

3. *Schritt* $M \in \mathfrak{F}$. Wir haben bereits einen endlich erzeugten Untermodul B mit halbartinschem Faktor $A = M/B$ und müssen zeigen, daß A artinsch ist. Dazu kann man R vollständig und $A \neq 0$ annehmen, und dann folgt für den Ring $\bar{R} = R/\mathrm{Ann}_R(A)$, daß $\dim(\bar{R}) = 1$ ist: Nach [15, p. 129, Beispiel 3] ist $\bigcap \mathrm{Koass}(A) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(A)}$, außerdem nach (4.4) $\mathrm{Koass}(A)$ endlich und $\dim(R/\mathfrak{q}) = 1$ für alle $\mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}(A)$, so daß für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ über $\mathrm{Ann}_R(A)$ wie behauptet $\dim(R/\mathfrak{p}) \leqslant 1$ ist. Nach (4.7) ist jetzt A von endlicher Goldie-Dimension, d.h. artinsch.

Bemerkung. Aus der Minimalbedingung folgt natürlich nicht die Maximalbedingung: Nach (1.9)(iii) bzw (2.9)(b) erfüllt ein artinscher Modul M genau dann die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln, wenn für jeden Epimorphismus $g\colon P(M) \to P(M)$ gilt, daß $\mathrm{Ke}\, g$ endlich erzeugt ist. Und verlangt man für jeden artinschen R-Modul diese Maximalbedingung, so muß nach (4.4)(iv) schon $\dim(R) \leqslant 1$ sein.

Die letzte Frage in diesem Abschnitt lautet, welche artinschen Moduln Summe von endlich vielen einfach-radikalvollen Untermoduln sind. Sie wurde über 1-dim. lokalen Cohen–Macaulay-Ringen von Matlis in [7, chap. IX, X] untersucht. Wir zeigen in (4.10), daß diese Frage eng mit folgendem in [13, p. 230] eingeführten Begriff zusammenhängt: Ein Modul M heißt *schwach-reduziert*, wenn jeder radikalvolle kleine Untermodul von M Null ist.

LEMMA 4.9. *Für jeden artinschen, schwach-reduzierten R-Modul M gilt*:

(a) *Ist* $X \subset U \subset M$ *und* U/X *klein in* M/X, *so ist* U/X *endlich erzeugt.*

(b) *Jeder Faktormodul von M ist wieder schwach-reduziert.*

(c) *Jeder radikalvolle Untermodul von M ist koabgeschlossen in M.*

(d) $\mathrm{Ann}_R(P(M))$ *ist ein Wurzelideal.*

Beweis. Ist bei (a) V ein Komplement von U in M, so ist $V \cap U$ klein in M, also nach Voraussetzung reduziert, d.h. schon endlich erzeugt. Aus $V + X = M$, $(V \cap U) + X = U$ folgt die Behauptung. Damit sind (b) und (c) klar, und bei (d) ist auch $P = P(M)$ artinsch und schwach-reduziert, so daß für $\mathfrak{a} = \bigcap \mathrm{Koass}(P)$ gilt: $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(P)}$, $\mathfrak{a}P$ ist radikalvoll und nach [15, p. 129] klein in P, $\mathfrak{a}P = 0$, $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}_R(P)$.

Wie in [7, p. 50] sagen wir, zwei Moduln M und N seien zueinander äquivalent ($M \sim N$), wenn es einen Epimorphismus von M nach N und einen von N nach M gibt. Ist z.B. M ein artinscher, radikalvoller R-Modul, so gilt für jeden endlich erzeugten Untermodul U, daß $M \sim M/U$ ist: Es gibt ein Ideal $\mathfrak{a}$ von R mit $\mathfrak{a}U=0$ und $\mathfrak{a}M=M$, dazu (weil Koass(M) endlich ist) ein $x \in \mathfrak{a}$ mit $xM=M$, so daß aus $xU=0$ die Behauptung folgt.

Über 1-dim. lokalen Cohen–Macaulay-Ringen wurden die Äquivalenzen (i), (ii) und (iii) des nächsten Satzes von Matlis in [7, Theorem 9.1] bewiesen, die Äquivalenz (i $\leftrightarrow$ v) für den Spezialfall $M=E$ in [7, Theorem 10.2].

SATZ 4.10. *Für einen artinschen, radikalvollen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *M ist Summe von endlich vielen einfach-radikalvollen Untermoduln.*

(ii) *M ist äquivalent zu einer endlichen direkten Summe von einfach-radikalvollen Moduln.*

(iii) *Für jeden radikalvollen Untermodul U von M ist* $M \sim U \times (M/U)$.

(iv) *M ist schwach-reduziert.*

Ist R lokal, so ist das weiter äquivalent mit

(v) *M erfüllt die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln und* $\operatorname{Ann}_{\hat{R}}(M)$ *ist ein Wurzelideal.*

Beweis. Jeder artinsche Modul M hat die Maximalbedingung für koabgeschlossene Untermoduln: Ist $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$ eine aufsteigende Folge von koabgeschlossenen Untermoduln von M, so wähle man eine Folge von Untermoduln $M \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots$ derart, daß V_i ein Komplement von U_i in M ist für alle $i \geqslant 1$. Aus $V_m = V_{m+1} = \cdots = V$ folgt dann, daß die U_m, $U_{m+1}, \ldots$ alle ein Komplement von V in M sind, also übereinstimmen.—Jeder artinsche, schwach-reduzierte Modul hat also nach (4.9)(c) die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln.

Sei ab jetzt M artinsch und radikalvoll $\neq 0$.

(i $\to$ iv) Ist $M = U_1 + \cdots + U_n$ mit einfach-radikalvollen U_i, so ist natürlich jedes U_i schwach-reduziert, also auch $\coprod_{i=1}^n U_i$, also nach (4.9)(b) auch der Faktormodul M. (iv $\to$ ii) Nach der Vorbemerkung hat M die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln, so daß nach (4.4) ein wesentlicher Epim. $f\colon M \to \prod_{i=1}^n A_i$ existiert mit einfach-radikalvollen A_i. Weil dann $\operatorname{Ke} f$ endlich erzeugt ist, folgt $M \sim \prod_{i=1}^n A_i$. (ii $\to$ i) Sei g: $\coprod_{i=1}^n M_i \to M$ ein Epim. mit einfach-radikalvollen, artinschen Moduln M_i. In $M = \sum_{i=1}^n g(M_i)$ ist dann jedes $g(M_i)$ Null oder nach (4.1) wieder einfach-radikalvoll, also M wie gewünscht.

(iv $\to$ iii) Sei U radikalvoll und V ein Komplement von U in M. Nach Voraussetzung ist dann $V \cap U$ endlich erzeugt. Es folgt $M \sim M/(V \cap U) \cong (M/V) \times (M/U)$ sowie $U \sim U/(V \cap U) \cong M/V$, also zusammen

$M \sim U \times (M/U)$. (iii $\to$ iv) Wir zeigen im 1. *Schritt*, daß M die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln erfüllt. Weil (iii) auch für alle $L_{\mathfrak{m}}(M)$ gilt, können wir gleich R lokal und vollständig mit dem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ annehmen. Dann ist $A = M^0$ endlich erzeugt und sockelfrei, so daß sich jeder sockelfreie Faktormodul in A einbetten läßt. Für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)$ gilt daher: Ist $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \neq \mathfrak{m}$, so ist auch $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(A)$. Weil aber $\mathrm{Ass}(A)$ endlich ist, ist nach dem Krull'schen Hauptidealsatz $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}$ unmöglich, d.h. $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$. Für $A = M^0$ haben wir also (1.6)(iii) nachgewiesen, und das bedeutet nach (4.4) die gewünschte Maximalbedingung. Sei im 2. *Schritt* N die Summe aller einfach-radikalvollen Untermoduln von M. Wegen der eben bewiesenen Maximalbedingung ist N schon Summe von endlich vielen, also schwach-reduziert. Mit einem Ansatz wie in [7, p. 86] zeigen wir $N = M$: Nach Voraussetzung ist $M \sim N \times (M/N)$, und mit den Epimorphismen

$$N \times (M/N) \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \times (M/N)$$

folgt, daß $\mathrm{Ke}\, gf$ nach (2.9)(b) endlich erzeugt ist, also auch $\mathrm{Ke}\, f$. Nach (2.9)(a) ist also auch die von f induzierte Abb. $N \times 0 \to N$ surjektiv, d.h. $f(N \times 0) = N$. Angenommen $N \neq M$, so hat M/N einen einfach-radikalvollen Untermodul U/N, aus $f(0 \times (U/N)) \subset N$ folgt $0 \times (U/N) \subset \mathrm{Ke}\, f + N \times 0$, also (weil $\mathrm{Ke}\, f$ endlich erzeugt ist) $0 \times (U/N) \subset N \times 0$, und das ist unmöglich.

Für die Äquivalenz (iv $\leftrightarrow$ v) können wir gleich R lokal und vollständig annehmen. Bei (iv $\to$ v) ist die Maximalbedingung nach der Vorbemerkung klar, und $\mathrm{Ann}_R(M)$ ein Wurzelideal nach (4.9)(d). Bei (v $\to$ iv) ist der Ring $\bar{R} = R/\mathrm{Ann}_R(M)$ wieder lokal und vollständig, hat aber nach Voraussetzung keine nilpotenten Elemente, und die Maximalbedingung liefert nach (4.4) $\dim(\bar{R}) = 1$. Nach [13, Satz 4.2] ist daher $\bar{R}$ ein sog. K-Ring, d.h. jeder $\bar{R}$-Modul schwach-reduziert, und das gilt dann auch für M als R-Modul.

LITERATUR

1. R. BAER, Polyminimaxgruppen, *Math. Ann.* **175** (1968), 1–43.
2. N. BOURBAKI, "Algèbre commutative," Hermann, Paris, 1967.
3. V. P. CAMILLO, Modules whose quotients have finite Goldie dimension, *Pacific J. Math.* **69** (1977), 337–338.
4. D. FERRAND AND M. RAYNAUD, Fibres formelles d'un anneau local noethérien, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **3** (1970), 295–311.
5. E. MATLIS, Injective modules over noetherian rings, *Pacific J. Math.* **8** (1958), 511–528.
6. E. MATLIS, Modules with descending chain condition, *Trans. Amer. Math. Soc.* **97** (1960), 495–508.
7. E. MATLIS, 1-Dimensional Cohen–Macaulay Rings, *in* "Lecture Notes in Mathematics, Vol. 327," Springer-Verlag, New York/Berlin, 1973.

8. B. SARATH AND K. VARADARAJAN, Dual Goldie dimension, II, *Commun. Algebra* **7** (1979), 1885–1899.
9. R. Y. SHARP, Some results on the vanishing of local cohomology modules, *Proc. London Math. Soc.* **30** (1975), 177–195.
10. T. TAKEUCHI, On cofinite-dimensional modules, *Hokkaido J. Math.* **5** (1976), 1–43.
11. K. VARADARAJAN, Dual Goldie dimension, *Commun. Algebra* **7** (1979), 565–610.
12. H. ZÖSCHINGER, Invarianten wesentlicher Überdeckungen, *Math. Ann.* **237** (1978), 193–202.
13. H. ZÖSCHINGER, Koatomare Moduln, *Math. Z.* **170** (1980), 221–232.
14. H. ZÖSCHINGER, Gelfandringe und koabgeschlossene Untermoduln, *Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl., Sitzungsber.* **3** (1982), 43–70.
15. H. ZÖSCHINGER, Linear-kompakte Moduln über noetherschen Ringen, *Arch. Math.* **41** (1983), 121–130.