Math. Z. 194, 585–601 (1987)

Mathematische Zeitschrift

Summen von einfach-radikalvollen Moduln

Helmut Zöschinger

Mathematisches Institut der Universität München, Theresienstr. 39, D-8000 München 2

Einleitung

Ein Modul M heißt radikalvoll, wenn er keinen maximalen Untermodul hat, d.h. wenn $\mathrm{Ra}(M)=M$ ist. M heiße *einfach-radikalvoll*, wenn M radikalvoll $\neq 0$ ist und keine echten radikalvollen Untermoduln besitzt, *halb-einfach-radikalvoll*, wenn M die Summe seiner einfach-radikalvollen Untermoduln ist. Diese Begriffe wurden von Matlis in [5] für teilbare Torsionsmoduln über einem 1-dimensionalen lokalen Cohen-Macaulay-Ring R eingeführt, um dessen totalen Quotientenring K und den für die Struktur der artinschen R-Moduln verantwortlichen Faktor K/R zu studieren. In der vorliegenden Arbeit sei R ein beliebiger kommutativer noetherscher Ring. Viele der von Matlis angegebenen Eigenschaften eines halb-einfach-radikalvollen Moduls M gelten dann nur mehr unter Zusatzbedingungen an die Mengen $\mathrm{Ass}(M)$ und $\mathrm{Koass}(M)$. (Dabei heißt ein Primideal $\mathfrak{p}$ wie üblich assoziiert zu M, wenn es einen endlich erzeugten Untermodul A von M gibt mit $\mathfrak{p}=\mathrm{Ann}_R(A)$, koassoziiert zu M, wenn es einen artinschen Faktormodul M/B gibt mit $\mathfrak{p}=\mathrm{Ann}_R(M/B)$.) Insbesondere vererbt sich die Eigenschaft „halb-einfach-radikalvoll“ nicht mehr – wie in [5] – auf radikalvolle Untermoduln. Sowohl für den Fall, daß M artinsch ist, als auch für den Fall, daß M sockelfrei, d.h. $\mathrm{So}(M)=0$ ist, untersuchen wir in dieser Arbeit Bedingungen, unter denen M halb-einfach-radikalvoll ist bzw. jeder radikalvolle Untermodul von M diese Eigenschaft hat.

Im ersten Abschnitt werden einige Grundtatsachen über halb-einfach-radikalvolle Moduln zusammengestellt. Dabei ergibt sich für jeden sockelfreien Modul M die Äquivalenz der drei folgenden Aussagen:

(a) *M ist halb-einfach-radikalvoll.*

(b) *M ist direkte Summe von einfach-radikalvollen Moduln.*

(c) *M ist radikalvoll und jeder Untermodul U von M, mit* $\mathrm{So}(M/U)=0$, *ist direkter Summand in M.*

Aus (b) folgt sofort $\mathrm{Ass}(M)\subset\mathrm{Koass}(M)$. Das Problem, wann diese beiden Mengen übereinstimmen, wird im zweiten Abschnitt behandelt. Das Hauptergebnis (2.8) lautet, daß für einen sockelfreien, halb-einfach-radikalvollen Modul M äquivalent sind:

(i) *Jeder radikalvolle Untermodul von M ist wieder halb-einfach-radikalvoll.*
(ii) $\operatorname{Ass}(M) = \operatorname{Koass}(M)$.
(iii) $\operatorname{Ass}(M)$ *ist lokalendlich, d.h. für jedes maximale Ideal* $\mathfrak{m}$ *von* R *ist die Menge* $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M) \mid \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}\}$ *endlich.*

Die Forderung, daß $\operatorname{Ass}(M)$ sogar endlich ist, bedeutet nach (2.11), daß M algebraisch kompakt ist.

Im dritten Abschnitt wird der artinsche Fall untersucht. Für die Formulierung der Ergebnisse sei ab jetzt M artinsch, R *lokal und vollständig*. Weil man für den halb-einfach-radikalvollen Modul M keine direkte Zerlegung in einfach-radikalvolle Moduln erwarten kann, bieten sich als Bausteine die unzerlegbaren Untermoduln U von M an (d.h. aus $U = U' + U''$ folgt stets $U = U'$ oder $U = U''$). Für sie geben wir in (3.1) folgendes einfache Kriterium, das in alle weiteren Beweise eingeht: Genau dann ist U halb-einfach-radikalvoll, wenn U radikalvoll und $\operatorname{Ann}_R(U)$ ein Primideal ist. Für einen beliebigen artinschen Modul M erhalten wir damit in (3.4) die folgenden Äquivalenzen:

(a) *M ist halb-einfach-radikalvoll.*
(b) $M = U_1 + \ldots + U_n$, *wobei jeder Untermodul* U_i *unzerlegbar und halb-einfach-radikalvoll ist.*
(c) *M ist radikalvoll und für jedes* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M)$ *gilt* $\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{q}) + \mathfrak{q}M = M$.

Ob sich die Eigenschaft (a) auf radikalvolle Untermoduln vererbt, läßt sich – wie in Teil 2 – allein an der Menge $\operatorname{Koass}(M)$ ablesen, denn für einen artinschen, halb-einfach-radikalvollen Modul M sind äquivalent:

(i) *Jeder radikalvolle Untermodul von M ist wieder halb-einfach-radikalvoll.*
(ii) *Für jedes* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M)$ *ist* $\dim(R/\mathfrak{q}) = 1$.
(iii) *M erfüllt die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln.*

1. Grundtatsachen über halb-einfach-radikalvolle Moduln

Stets sei im folgenden der Ring R kommutativ und noethersch. Ein einfach-radikalvoller (erv) R-Modul X ist dann nach ([10] Lemma 4.1) entweder sockelfrei oder artinsch; im ersten Fall ist X sogar isomorph zum Quotientenkörper $\kappa(\mathfrak{p})$ des Integritätsringes $R/\mathfrak{p}$ mit $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$, im zweiten Fall ist jeder echte Untermodul von X endlich erzeugt. Die nächsten beiden Lemmata zählen die Eigenschaften von halb-einfach-radikalvollen (herv) Moduln auf, die wir ständig verwenden. Es folgt ein Satz mit Charakterisierungen der sockelfreien (herv) Moduln und zum Schluß dieses Abschnittes ein Beispiel dafür, daß sich im Falle $\operatorname{So}(M) \neq 0$ unsere Eigenschaft nicht einmal auf direkte Summanden vererbt.

Lemma 1.1. *Ist M halb-einfach-radikalvoll, so gilt:*

(a) *Für jedes* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ *ist* $\dim(R/\mathfrak{p}) \leqq 1$.
(b) *Für jeden großen Untermodul U von M ist M/U halbartinsch.*
(c) *Ist U ein Untermodul von M mit* $\operatorname{So}(M/U) = 0$, *so ist U radikalvoll und abgeschlossen in M.*
(d) *Für jedes Ideal* $\mathfrak{a}$ *von R gilt* $M[\mathfrak{a}] + \mathfrak{a}M = M$.
(e) *Für jeden Untermodul U von M ist* $\operatorname{Ann}_R(M/U)$ *ein Wurzelideal.*

(f) *Für jedes Ideal* $\mathfrak{a}$ *von* R *ist* $\operatorname{Ann}_R(M/\mathfrak{a}M)=\bigcap\{\mathfrak{q}\in\operatorname{Koass}(M)\mid\mathfrak{a}\subset\mathfrak{q}\}$ *und* $\operatorname{Ann}_R(\mathfrak{a}M)=\bigcap\{\mathfrak{q}\in\operatorname{Koass}(M)\mid\mathfrak{a}\not\subset\mathfrak{q}\}$.

(g) *Jeder sockelfreie Faktormodul von* M *ist wieder halb-einfach-radikalvoll.*

Beweis. Seien in $M=\sum X_\lambda$ alle X_λ (erv). Bei (a) hat man zu $N=\coprod X_\lambda$ einen Epimorphismus $N\to M$, so daß zu jedem $\mathfrak{p}\in\operatorname{Ass}(M)$ ein $\mathfrak{q}\in\operatorname{Ass}(N)$ existiert mit $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{p}$, dazu ein λ_0 mit $\mathfrak{q}\in\operatorname{Ass}(X_{\lambda_0})$, und damit folgt $\dim(R/\mathfrak{q})\leqq 1$, $\dim(R/\mathfrak{p})\leqq 1$ wie behauptet.

(b) Sei $U_*/U=L(M/U)$ die Summe aller artinschen Untermoduln von M/U. Dann ist M/U_* sockelfrei, ebenso $X_\lambda/U_*\cap X_\lambda$. Weil aber U_* groß in M, also $U_*\cap X_\lambda\neq 0$ ist, folgt $U_*\cap X_\lambda=X_\lambda$ für alle λ, d.h. $U_*=M$. – Allgemeiner gilt für jeden Untermodul A von M: Ist B eine wesentliche Erweiterung von A in M, so ist B/A halbartinsch. Wählt man zum Beweis ein maximales Element V_0 in der Menge $\{V\subset M\mid V\cap A=0\}$, so ist $V_0\oplus A$ groß in M, also nach eben $\bar{M}=M/V_0\oplus A$ halbartinsch, und weil die kanonische Abb. $B\to\bar{M}$ den Kern A hat, folgt die Behauptung.

(c) U ist abgeschlossen in M, denn für jede wesentliche Erweiterung B von U in M ist nach dem letzten B/U halbartinsch, d.h. nach Voraussetzung schon Null. U ist auch radikalvoll, denn zu jedem $a\in U$ gibt es endlich viele $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, so daß a in $A=\sum_{i=1}^{n}X_{\lambda_i}$ liegt, und weil A Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen halbartinschen Modul ist, außerdem $A/U\cap A$ sockelfrei, ist $U\cap A$ nach ([10] Lemma 1.1) radikalvoll, also $a\in Ra(U)$.

(d) $M[\mathfrak{a}]$ ist die übliche Abkürzung für $\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a})=\{y\in M\mid ry=0$ für alle $r\in\mathfrak{a}\}$. Für jedes (erv) X_λ gilt $\mathfrak{a}X_\lambda=0$ oder $\mathfrak{a}X_\lambda=X_\lambda$, also $X_\lambda\subset M[\mathfrak{a}]+\mathfrak{a}M$, so daß die Summe über alle X_λ die Behauptung liefert.

(e) Für $\bar{M}=M/U$ zeigen wir genauer $\operatorname{Ann}_R(\bar{M})=\bigcap\operatorname{Koass}(\bar{M})$. Speziell für das Ideal $\mathfrak{b}=\bigcap\operatorname{Koass}(\bar{M})$ folgt aus $M[\mathfrak{b}]+\mathfrak{b}M=M$ nämlich $\bar{M}[\mathfrak{b}]+\mathfrak{b}\bar{M}=\bar{M}$, weil $\mathfrak{b}\bar{M}$ nach ([9] S. 129) klein in $\bar{M}$ ist, sogar $\bar{M}[\mathfrak{b}]=\bar{M}$, so daß in $\mathfrak{b}\subset\operatorname{Ann}_R(\bar{M})$ Gleichheit gilt.

(f) Nach ([10] Folgerung 3.2) ist $\operatorname{Koass}(M/\mathfrak{a}M)=\{\mathfrak{q}\in\operatorname{Koass}(M)\mid\mathfrak{a}\subset\mathfrak{q}\}$, so daß die Formel für $\operatorname{Ann}_R(M/\mathfrak{a}M)$ mit der letzten Aussage folgt. Weil auch $\mathfrak{a}M$ (herv) ist, wollen wir für die zweite Formel entsprechend $\operatorname{Koass}(\mathfrak{a}M)=\{\mathfrak{q}\in\operatorname{Koass}(M)\mid\mathfrak{a}\not\subset\mathfrak{q}\}$ zeigen. Darin ist „$\supset$“ klar, und für jedes $\mathfrak{q}\in\operatorname{Koass}(\mathfrak{a}M)$ gilt, weil $\mathfrak{a}M$ epimorphes Bild von M^n ist, $q\in\operatorname{Koass}(M)$, wegen $M[\mathfrak{a}]+\mathfrak{a}M=M$, $\mathfrak{a}^2M=\mathfrak{a}M$ aber auch $\mathfrak{a}\not\subset\mathfrak{q}$.

(g) Ist $\bar{M}=M/U$ sockelfrei, so sind in $\bar{M}=\sum\bar{X}_\lambda$ alle Summanden Null oder wieder (erv), denn aus $\operatorname{So}(X_\lambda/U\cap X_\lambda)=0$ folgt entweder $U\cap X_\lambda=0$ oder $X_\lambda\subset U$.

Lemma 1.2. *Ist* M *sockelfrei und halb-einfach-radikalvoll, so gilt:*

(a) $M=\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Ass}(M)}M[\mathfrak{p}]$.

(b) *M ist direkte Summe von einfach-radikalvollen Moduln.*

(c) *Ist U ein Untermodul von M mit* $\operatorname{So}(M/U)=0$, *so ist U direkter Summand in M.*

(d) *Für jedes Ideal* $\mathfrak{a}$ *von* R *gilt* $M[\mathfrak{a}]\oplus\mathfrak{a}M=M$.

(e) *Für jeden Untermodul U von M ist* $\mathrm{Ann}_R(U)$ *ein Wurzelideal.*
(f) *Für jeden halbartinschen Modul C ist* $\mathrm{Ext}_R^1(C, M)=0=\mathrm{Tor}_1^R(M, C)$.
(g) *M ist selbstinjektiv und selbstflach.*

Beweis. (a) Für jedes $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)$ ist $\dim(R/\mathfrak{p})=1$, also $\mathrm{Ass}(M[\mathfrak{p}])=\{\mathfrak{p}\}$, und für jedes $0\neq x\in M[\mathfrak{p}]$ gilt $\mathrm{Ann}_R(x)=\mathfrak{p}$. Damit ist die Summe direkt, d.h. in $x_1+\ldots+x_n=0$ mit $x_i\in M[\mathfrak{p}_i]$, die $\mathfrak{p}_i$ paarweise verschieden, müssen alle $x_i=0$ sein: Wäre ein $x_j\neq 0$, folgte $\mathrm{Ann}_R(x_j)=\mathfrak{p}_j$, also $\bigcap_{i\neq j}\mathrm{Ann}_R(x_i)\subset\mathfrak{p}_j$, also $\mathrm{Ann}_R(x_k)\subset\mathfrak{p}_j$ für ein $k\neq j$, d.h. $\mathfrak{p}_k\subset\mathfrak{p}_j$, und das ist unmöglich. Mit $M=\sum X_\lambda$ und $X_\lambda\cong\kappa(\mathfrak{p}_\lambda)$ ist natürlich $X_\lambda\subset M[\mathfrak{p}_\lambda]$ und $\mathfrak{p}_\lambda\in\mathrm{Ass}(M)$, so daß auch $M=\sum M[\mathfrak{p}]$ gilt.

(b) Für jedes $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)$ ist jetzt $M[\mathfrak{p}]$ radikalvoll, also auch $\mathrm{Koass}(M[\mathfrak{p}])=\{\mathfrak{p}\}$. Als $R/\mathfrak{p}$-Modul ist deshalb $M[\mathfrak{p}]$ sowohl torsionsfrei als auch teilbar, d.h. von der Form $\kappa(\mathfrak{p})^{(I)}$: Wir haben $M[\mathfrak{p}]$ als direkte Summe von (erv) Moduln ($\cong\kappa(\mathfrak{p})$) dargestellt, also mit (a) auch ganz M.

(c) Dazu wollen wir den (unten zu beweisenden) Punkt (g) verwenden: Nach (1.1, c) ist U abgeschlossen in M, und in jedem selbstinjektiven Modul spalten die abgeschlossenen Untermoduln ab (siehe den Beweis in [1] S. 207). – Schreiben wir also für einen beliebigen Untermodul A von M im folgenden $A_*/A=L(M/A)$, so ist A_* die größte wesentliche Erweiterung von A in M (wegen 1.1, b) und A_* direkter Summand in M.

(d) Wir haben $M=\bigoplus X_\lambda\cong\kappa(\mathfrak{p}_\lambda)$. Falls $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}_\lambda$, ist $X_\lambda[\mathfrak{a}]=X_\lambda$ und $\mathfrak{a}X_\lambda=0$, falls $\mathfrak{a}\not\subset\mathfrak{p}_\lambda$, ist $X_\lambda[\mathfrak{a}]=0$ und $\mathfrak{a}X_\lambda=X_\lambda$, beide Male also $X_\lambda[\mathfrak{a}]\oplus\mathfrak{a}X_\lambda=X_\lambda$. Das gilt dann auch für die direkte Summe der X_λ.

(e) Zeigen wir genauer $\mathrm{Ann}_R(U)=\bigcap\mathrm{Ass}(U)$: Für das Ideal $\mathfrak{b}=\bigcap\mathrm{Ass}(U)$ gilt nach dem letzten Punkt $M[\mathfrak{b}]\cap\mathfrak{b}M=0$, also auch $U[\mathfrak{b}]\cap\mathfrak{b}U=0$, und weil $U[\mathfrak{b}]$ groß in U ist, sogar $\mathfrak{b}U=0$, so daß in $\mathfrak{b}\subset\mathrm{Ann}_R(U)$ Gleichheit gilt.

(f) Wir zeigen im *1. Schritt* für jeden einfachen Modul C, daß $\mathrm{Ext}_R^1(C, M)=0=\mathrm{Tor}_1^R(M, C)$ ist. Mit $M=\bigoplus X_\lambda$, $X_\lambda\cong\kappa(\mathfrak{p}_\lambda)$ und $C\cong R/\mathfrak{m}$ gilt für jedes λ, daß $\mathfrak{m}\not\subset\mathfrak{p}_\lambda$ ist, es also ein $r_\lambda\in\mathfrak{m}$ gibt, das bijektiv auf X_λ operiert, und es folgt $\mathrm{Ext}_R^1(C, X_\lambda)=0=\mathrm{Tor}_1^R(X_\lambda, C)$. Weil Tor mit direkten Summen vertauscht, ist man im zweiten Fall fertig; im ersten Fall ist $\coprod X_\lambda$ ein reiner Untermodul von $\prod X_\lambda$, also auch $N=\prod X_\lambda/\coprod X_\lambda$ sockelfrei, so daß in der exakten Folge $\mathrm{Hom}_R(C, N)\to\mathrm{Ext}_R^1(C, M)\to\mathrm{Ext}_R^1(C, \prod X_\lambda)$ das erste und dritte Glied Null ist, also auch das mittlere. Ist im *2. Schritt* C nur halbartinsch, gibt es einen Epimorphismus $\pi\colon\coprod C_i\to C$, in dem alle C_i endliche Länge haben, also (via Kompositionsreihe) $\mathrm{Ext}_R^1(C_i, M)=0=\mathrm{Tor}_1^R(M, C_i)$ ist für alle i. In den exakten Folgen $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ke}\,\pi, M)\to\mathrm{Ext}_R^1(C, M)\to\mathrm{Ext}_R^1(\coprod C_i, M)$ bzw. $\mathrm{Tor}_1^R(M, \coprod C_i)\to\mathrm{Tor}_1^R(M, C)\to M\bigotimes_R\mathrm{Ke}\,\pi$ ist also jeweils das erste und dritte Glied Null, und es folgt die Behauptung.

(g) Sei B ein Modul mit der Eigenschaft, daß für jeden großen Untermodul B_1 von B der Faktormodul B/B_1 halbartinsch ist. Wir behaupten, daß M B-injektiv (siehe [1] S. 184) und B-flach (siehe [2] Kap. 1, S. 23) ist, d.h. für jeden Untermodul A von B die induzierte Abb. $\mathrm{Hom}_R(B, M)\to\mathrm{Hom}_R(A, M)$ surjektiv und entsprechend $M\bigotimes_R A\to M\bigotimes_R B$ injektiv ist: Mit einem maximalen Element

V_0 in der Menge $\{V \subset B \mid V \cap A = 0\}$ ist $B_1 = V_0 \oplus A$ groß in B und natürlich A direkter Summand in B_1, so daß nur noch die Surjektivität von $\operatorname{Hom}_R(B, M) \to \operatorname{Hom}_R(B_1, M)$ und die Injektivität von $M \bigotimes_R B_1 \to M \bigotimes_R B$ zu zeigen ist, und das folgt sofort aus $\operatorname{Ext}_R^1(B/B_1, M) = 0 = \operatorname{Tor}_1^R(M, B/B_1)$. Nach (1.1, b) dürfen wir speziell $B = M$ setzen und erhalten, daß M sowohl M-injektiv als auch M-flach ist.

Folgerung 1.3. *Ist M sockelfrei und halb-einfach-radikalvoll, so gilt* $\operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{Koass}(M)$.

Beweis. Genauer ist $\operatorname{Ass}(M) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M) \mid \dim(R/\mathfrak{q}) = 1\}$, denn für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ gilt $\{\mathfrak{p}\} = \operatorname{Koass}(M[\mathfrak{p}]) \subset \operatorname{Koass}(M)$ sowie $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$. Umgekehrt gilt für jedes $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M)$, daß M nicht $\mathfrak{q}$-teilbar ist, es also ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ gibt, so daß $M[\mathfrak{p}]$ nicht $\mathfrak{q}$-teilbar ist, und daraus folgt $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Mit der Zusatzbedingung $\dim(R/\mathfrak{q}) = 1$ erhält man $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M)$.

Bemerkung. Falls $\operatorname{Ass}(M)$ endlich ist, folgt aus der Zerlegung (1.2, a) sofort $\operatorname{Ass}(M) = \operatorname{Koass}(M)$. Weil aber i.allg. nur Ass, nicht Koass mit unendlichen direkten Summen „vertauscht“, kann auch $\operatorname{Ass}(M) \subsetneq \operatorname{Koass}(M)$ vorkommen. Diese Abweichung hängt eng mit dem Problem zusammen, wann in M jeder radikalvolle Untermodul wieder (herv) ist und wird in Abschnitt 2 genauer untersucht.

Satz 1.4. *Für einen sockelfreien Modul M sind äquivalent:*

(i) *M ist halb-einfach-radikalvoll.*

(ii) *Jeder abgeschlossene Untermodul von M ist radikalvoll und für jeden großen Untermodul U von M ist M/U halbartinsch.*

(iii) *M ist radikalvoll und jeder Untermodul U von M, mit* $\operatorname{So}(M/U) = 0$, *ist direkter Summand in M.*

Beweis. Klar ist (i → iii) nach (1.2, c). Bei (iii → ii) gilt für jeden abgeschlossenen Untermodul A von M, daß $\operatorname{Ass}(M/A) \subset \operatorname{Ass}(M)$, also M/A sockelfrei und daher A als direkter Summand radikalvoll ist. Für jeden großen Untermodul U gilt mit $U_*/U = L(M/U)$, daß M/U_* sockelfrei, also U_* direkter Summand in M ist, und U_* groß in M liefert $U_* = M$, d.h. M/U halbartinsch. Bei (ii → i) ist zu zeigen, daß jedes $0 \neq x \in M$ in einem (herv) Untermodul A von M liegt, und dafür bietet sich $A/Rx = L(M/Rx)$ an: Für jede wesentliche Erweiterung B von A in M ist mit der zweiten Bedingung B/A halbartinsch (vgl. den Beweis von 1.1, b), wegen $\operatorname{So}(M/A) = 0$ also schon $B/A = 0$, d.h. es ist A abgeschlossen in M, mit der ersten Bedingung also A radikalvoll. A ist sogar direkter Summand in M, denn mit einem maximalen Element V_0 in der Menge $\{V \subset M \mid V \cap A = 0\}$ ist $\bar{M} = M/V_0$ sockelfrei sowie Erweiterung eines zyklischen durch einen halbartinschen Modul, also nach ([10] Lemma 1.1) auch $\bar{M}/\bar{A}$ sockelfrei, $\bar{M}/\bar{A} = 0$, $V_0 \oplus A = M$. Derselbe Beweis zeigt, daß auch jeder radikalvolle Untermodul von A direkter Summand in M ist. Schreibt man also $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ mit direkt unzerlegbaren A_i, so ist jedes A_i notwendig (erv) und daher A von der verlangten Gestalt.

Lemma 1.5. *Ist M halb-einfach-radikalvoll und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal, so gilt:*

(a) *$M_{\mathfrak{m}}$ ist als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul wieder halb-einfach-radikalvoll.*

(b) *Die radikalvollen $R_{\mathfrak{m}}$-Untermoduln von $M_{\mathfrak{m}}$ entsprechen genau den S-gesättigten ($S = R \setminus \mathfrak{m}$) radikalvollen R-Untermoduln von M.*

(c) *Ist R lokal und vollständig, so ist jeder Faktormodul von M halb-einfach-radikalvoll.*

Beweis. (b) Ein S-gesättigter Untermodul U von M ist durch alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$ teilbar. Zu jedem $a \in U$ gibt es nämlich endlich viele (erv) Untermoduln X_i von M mit $a \in \sum_{i=1}^{n} X_i$, wegen $\mathfrak{m}' \not\subset \mathfrak{m} \cup \operatorname{Ann}_R(X_1) \cup \ldots \cup \operatorname{Ann}_R(X_n)$ also ein $r \in \mathfrak{m}'$ mit $r \in S$, $rX_i = X_i$ für alle i, und es folgt $a \in U \cap rM = rU \subset \mathfrak{m}'U$. Weil natürlich die S-gesättigten $\mathfrak{m}$-teilbaren Untermoduln von M genau den radikalvollen Untermoduln von $M_{\mathfrak{m}}$ entsprechen, folgt die Behauptung. (a) Für jeden (erv) Untermodul X von M ist $X_{\mathfrak{m}}$ Null oder nach (b) wieder (erv). Sind also in $M = \sum X_\lambda$ alle X_λ (erv), ist $M_{\mathfrak{m}} = \sum X_{\lambda\mathfrak{m}}$ wie gewünscht. (c) Für $\bar{M} = M/U$ gilt, mit den X_λ wie eben, $\bar{M} = \sum \bar{X}_\lambda$. Darin ist jeder Summand Null oder wieder (erv), denn in $X_\lambda/U \cap X_\lambda$ ist jeder echte Untermodul endlich erzeugt: Falls X_λ artinsch war, ist das klar; falls aber X_λ sockelfrei war, also $X_\lambda \cong \kappa(\mathfrak{p}_\lambda)$, ist wegen der Vollständigkeit des 1-dim. lokalen Integritätsringes $R/\mathfrak{p}_\lambda$ sein Quotientenkörper linear-kompakt, also wieder jeder echte Untermodul von X_λ endlich erzeugt.

Bemerkung. Der letzte Beweisschritt zeigte: Auch dann ist $\bar{M} = M/U$ (herv), wenn R beliebig, aber U halbartinsch war (denn im Falle $\operatorname{So}(X_\lambda) = 0$ ist $\bar{X}_\lambda \cong X_\lambda$). Daß sich die Eigenschaft (herv) i. allg. nicht einmal auf direkte Summanden vererbt, zeigt folgendes

Beispiel 1.6. *Ist R ein 1-dim. Integritätsring, so ist jeder radikalvolle R-Modul direkter Summand eines halb-einfach-radikalvollen R-Moduls.*

Beweis. Ist K der Quotientenkörper von R, so gibt es zu jedem radikalvollen Modul N nach ([5] Theorem 4.3) einen Epimorphismus $\pi\colon K^{(I)} \to N$. Bildet man damit das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ke}\pi \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & K^{(I)} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^{(I)} \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

so ist in $M = \operatorname{Bi}\alpha + \operatorname{Bi} f$ jeder Summand (herv), also auch M. Weil die untere Zeile zerfällt, heißt das, daß $N \times K^{(I)}$ (herv) ist.

Sei jetzt speziell R ein lokaler 1-dim. Integritätsring, so daß die Vervollständigung $\hat{R}$ ein nilpotentes Element $\neq 0$ hat. Für die injektive Hülle E des Restklassenkörpers gibt es dann nach dem Beispiel eine Indexmenge I, so daß $M = E \times K^{(I)}$ (herv) ist. Aber $\operatorname{Ann}_{\hat{R}}(E)$ ist kein Wurzelideal, so daß der direkte Summand $E \cong L(M)$ nicht (herv) ist.

2. Der sockelfreie Fall und die Bedingung Ass (M) = Koass (M)

Für einen sockelfreien (herv) Modul M galt stets Ass $(M) \subset$ Koass (M). Wir untersuchen in diesem Abschnitt die Frage nach der Gleichheit und zeigen dazu erstens (2.4), daß jedes $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M)$ von der Form $\mathfrak{q} = \bigcap \mathfrak{p}_\lambda$ ist mit gewissen $\mathfrak{p}_\lambda \in \operatorname{Ass}(M)$, zweitens (2.7), daß für jedes $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M)$ und jede Wahl $\mathfrak{q} = \operatorname{Ann}_R(M/B)$ mit M/B artinsch gilt: Genau dann ist $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M)$, wenn der größte radikalvolle Untermodul $P(B)$ auch (herv) ist. Wenn also in M jeder radikalvolle Untermodul wieder (herv) ist, folgt Ass (M) = Koass (M), und das Hauptergebnis (2.8) sagt, daß hierin auch die Umkehrung gilt.

Weil jeder sockelfreie (herv) Modul nach (1.2) direkte Summe von Moduln der Form $\kappa(\mathfrak{p})$ ist mit $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$, ist für jede Art von Beispielen folgende Tatsache grundlegend:

Satz (Krull [3] S. 369). *Jedes nichtmaximale Primideal* $\mathfrak{q}$ *läßt sich in der Form* $\mathfrak{q} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i$ *darstellen mit* $\dim(R/\mathfrak{p}_i) = 1$ *für alle i.*

Gäbe es nämlich ein $\mathfrak{q}$ ohne eine solche Darstellung, folgte für ein maximales Gegenbeispiel $\mathfrak{q}_0$, daß $\dim(R/\mathfrak{q}_0) > 1$ wäre, also $\mathfrak{q}_0 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathfrak{r}_j$ mit nichtmaximalen Primidealen $\mathfrak{r}_j \neq \mathfrak{q}_0$. Weil jedes $\mathfrak{r}_j$ Durchschnitt von abzählbar vielen Primidealen $\mathfrak{p}$ mit $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$ ist, folgte das auch für $\mathfrak{q}_0$, entgegen der Wahl.

Aufgrund der folgenden Äquivalenz (i$\leftrightarrow$ii) untersuchen wir nur mehr, wann in M jeder radikalvolle Untermodul abspaltet:

Lemma 2.1. *Ist M sockelfrei und halb-einfach-radikalvoll, so sind für einen Untermodul U von M äquivalent:*

(i) *U ist halb-einfach-radikalvoll.*
(ii) *U ist direkter Summand in M.*
(iii) *M/U ist sockelfrei.*
(iv) *Für jedes* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(U)$ *ist* $U[\mathfrak{p}]$ radikalvoll.

Beweis. Nach (1.2, c) und (1.1, g) ist (iii$\rightarrow$ii$\rightarrow$i) klar. Hätte bei (i$\rightarrow$iii) M/U einen einfachen Untermodul U_1/U, folgte nach (1.2, f) $\operatorname{Ext}^1_R(U_1/U, U) = 0$, also $U \subset^{\oplus} U_1$, und das ist unmöglich.

(i$\rightarrow$iv) U ist radikalvoll und nach (1.2, d) ist $U[\mathfrak{p}]$ direkter Summand in U. (iv$\rightarrow$i) Sei U_0 der größte (herv) Untermodul von U. Nach den bereits bewiesenen Äquivalenzen ist $V \oplus U_0 = M$, $(V \cap U) \oplus U_0 = U$, so daß wir nur noch $V \cap U = 0$ zeigen müssen: Gäbe es ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(V \cap U)$, wäre nach Voraussetzung $U[\mathfrak{p}]$ radikalvoll, d.h. von der Form $\kappa(\mathfrak{p})^{(I)}$ mit $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$, also $U[\mathfrak{p}] \subset U_0$. Es folgte $(V \cap U)[\mathfrak{p}] = 0$, und das ist unmöglich.

Folgerung 2.2. *Ist M sockelfrei und halb-einfach-radikalvoll und* $(U_i \mid i \in I)$ *eine Familie von direkten Summanden, so sind auch* $\sum U_i$ *und* $\bigcap U_i$ *direkte Summanden in M. Für jeden Endomorphismus* $f\colon M \to M$ *ist* Bif *und* Kef *direkter Summand in M.*

Folgerung 2.3. *Sei M sockelfrei und halb-einfach-radikalvoll, U ein radikalvoller Untermodul von M. Falls* Ass(U) *endlich ist, ist U direkter Summand in M.*

Beweis. Bei der ersten Folgerung ist nichts mehr zu beweisen. Bei der zweiten zeigen wir im *1. Schritt* Koass$(U) \subset$ Ass(U): Mit $U \subset U_* \subset^{\oplus} M$ ist auch Ass(U_*) endlich, außerdem U_* (herv), also nach der Bemerkung zu (1.3) Ass(U_*) $=$Koass(U_*). Zu jedem $\mathfrak{q} \in$Koass(U) gibt es nun nach [9] Lemma 2.1) ein $\mathfrak{q}_0 \in$Koass(U_*) mit $\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}$, und weil U radikalvoll, also $\mathfrak{q}$ kein maximales Ideal ist, folgt aus $\dim(R/\mathfrak{q}_0)=1$ bereits $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(U_*) = \mathrm{Ass}(U)$. Im *2. Schritt* gilt für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$, weil Ass(U) und Koass(U) endlich sind, $\mathfrak{m} \not\subset \cup \mathrm{Ass}(U) \cup \bigcup \mathrm{Koass}(U)$, so daß es ein $r \in \mathfrak{m}$ gibt, das bijektiv auf U operiert, und es folgt $\mathrm{Ext}^1_R(R/\mathfrak{m}, U)=0$, $\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, M/U)=0$, d.h. $(M/U)[\mathfrak{m}]=0$. Aber So$(M/U)=0$ bedeutet nach dem Lemma $U \subset^{\oplus} M$.

Für eine Beschreibung von Koass(M) benötigen wir die folgende Verallgemeinerung: Zu einem beliebigen Modul M heißt ein Primideal $\mathfrak{q}$ nach [6] *attachiert* (im artinschen Fall siehe auch [7]), wenn es einen Untermodul U von M gibt mit $\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}_R(M/U)$. In diesem Fall gilt sogar $\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}_R(M/\mathfrak{q}M)$, und die Menge aller zu M attachierten Primideale bezeichnet man mit Att(M). Klar ist die Inklusion Koass$(M) \subset$ Att(M), und i. allg. ist sie echt (z.B. ist Koass$(R) = \Omega$, Att(R) = Spec(R)). Ist ein Primideal $\mathfrak{q}$ minimal über $\mathrm{Ann}_R(M)$, so folgt $\mathfrak{q} \in$Att(M): Mit einem Erzeugendensystem $(x_i \mid i \in I)$ des Moduls M und $x=(x_i) \in M^I$ ist nämlich $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(R/\mathrm{Ann}_R(M)) = \mathrm{Ass}(Rx)$, also $\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}_R(rx)$ für ein $r \in R$, $\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}_R(M/M[r])$. Insbesondere gilt stets $\bigcap \mathrm{Att}(M) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$.

Lemma 2.4. *Sei M sockelfrei und halb-einfach-radikalvoll, U ein Untermodul von M und $\mathfrak{q}$ ein Primideal. Dann gilt:*

(a) $\mathrm{Ann}_R(M/U) = \bigcap\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \mid \mathrm{Ann}_R(M/U) \subset \mathfrak{p} \subset \bigcup \mathrm{Ass}(M/U)\}$.

(b) $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(M) \Leftrightarrow$ *es gibt* $\mathfrak{p}_\lambda \in \mathrm{Ass}(M)$ *mit* $\mathfrak{q} = \bigcap \mathfrak{p}_\lambda$.

(c) $\mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}(M) \Leftrightarrow$ *es gibt* $\mathfrak{p}_\lambda \in \mathrm{Ass}(M)$ *und maximale Ideale* $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k$, *so daß* $\mathfrak{q} = \bigcap \mathfrak{p}_\lambda$ *ist und jedes* $\mathfrak{p}_\lambda$ *in einem der* $\mathfrak{m}_i$ *liegt.*

(d) *Ist R semilokal, so gilt* Koass(M) = Att(M).

Beweis. (a) Mit $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}_R(M/U)$ und $S = R \setminus \bigcup \mathrm{Ass}(M/U)$ müssen wir für jedes $r \in \bigcap\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing\}$ zeigen, daß $rM \subset U$ ist, also nach (1.2, a) $r(M[\mathfrak{p}]) \subset U$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. *1. Fall* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$. Dann ist $\mathfrak{p} \in \{\ \}$, $r \in \mathfrak{p}$, $r(M[\mathfrak{p}])=0$. *2. Fall* $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{p} \cap S \neq \varnothing$. Dann ist sogar $M[\mathfrak{p}] \subset U$, denn aus $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$ folgt die $\mathfrak{a}$-Teilbarkeit von $M[\mathfrak{p}]$, also $M[\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{a}M \subset U$, und aus $\mathfrak{p} \cap S \neq \varnothing$ folgt mit einem $s_0 \in \mathfrak{p}$, das auf M/U injektiv operiert, $M[\mathfrak{p}] \subset M[s_0] \subset U$.

(b) Aus $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(M)$ folgt $\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}_R(M/\mathfrak{q}M)$, also nach dem eben bewiesenen $\mathfrak{q} = \bigcap\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$. Ist umgekehrt $\mathfrak{q} = \bigcap \mathfrak{p}_\lambda$ mit gewissen $\mathfrak{p}_\lambda \in \mathrm{Ass}(M)$, so kann man die $\mathfrak{p}_\lambda$ paarweise verschieden annehmen, und dann ist $M' = \coprod \kappa(\mathfrak{p}_\lambda)$ nach (1.2) direkter Summand von M mit $\mathrm{Ann}_R(M') = \mathfrak{q}$, also $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(M)$.

(c) Aus $\mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}(M)$, also $\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}_R(M/B)$ mit M/B artinsch, $\mathrm{Ass}(M/B)$ $= \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k\}$, folgt nach Punkt (a) $\mathfrak{q} = \bigcap\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ liegt in einem der $\mathfrak{m}_i\}$. Sind umgekehrt die $\mathfrak{p}_\lambda$ und $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k$ wie angegeben, nehme man wie eben die $\mathfrak{p}_\lambda$ paarweise verschieden an und erhält, daß $M' = \coprod \kappa(\mathfrak{p}_\lambda)$ direkter Summand von M ist. Die direkte Summe $C = \coprod_{i=1}^{k} E(R/\mathfrak{m}_i)$ über die injektiven

Hüllen der $R/\mathfrak{m}_i$ ist nach ([4] Proposition 3) artinsch, und weil jedes $\mathfrak{p}_\lambda$ in einem der $\mathfrak{m}_i$ liegt, ist $\operatorname{Hom}_R(\kappa(\mathfrak{p}_\lambda), C)\neq 0$, so daß es ein $h_\lambda\colon \kappa(\mathfrak{p}_\lambda)\to C$ gibt mit $\operatorname{Ann}_R(h_\lambda)=\mathfrak{p}_\lambda$. Diese h_λ induzieren einen Homom. $h\colon M'\to C$ mit $\operatorname{Ann}_R(\operatorname{Bi} h)=\bigcap \operatorname{Ann}_R(\operatorname{Bi} h_\lambda)=\bigcap \mathfrak{p}_\lambda=\mathfrak{q}$, und weil $\operatorname{Bi} h$ ein artinscher Faktormodul von M ist, heißt das $\mathfrak{q}\in\operatorname{Koass}(M)$.

(d) Für die in (c) geforderten $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k$ nehme man das ganze Maximalspektrum Ω. (Im nicht semilokalen Fall kann $\operatorname{Koass}(M)\subsetneqq\operatorname{Att}(M)$ sein, etwa in dem Beispiel nach (2.8) über $R=\mathbb{Z}[[X]]$.)

Die Punkte (b) und (c) des Lemmas zeigen auch, daß bei einem sockelfreien (herv) Modul M die Mengen $\operatorname{Att}(M)$ und $\operatorname{Koass}(M)$ allein durch $\operatorname{Ass}(M)$ bestimmt sind. Enthält insbesondere $\operatorname{Ass}(M)$ *alle* Primideale $\mathfrak{p}$ mit $\dim(R/\mathfrak{p})=1$, folgt nach dem Satz von Krull $\operatorname{Att}(M)=\operatorname{Spec}(R)\setminus\Omega$. Speziell erhält man folgendes

Beispiel 2.5. Sei R lokal mit $\dim(R)\geqq 2$, und sei Δ die Menge aller Primideale $\mathfrak{p}$ mit $\dim(R/\mathfrak{p})=1$. Dann ist $M=\coprod_{\mathfrak{p}\in\Delta}\kappa(\mathfrak{p})$ sockelfrei und halb-einfach-radikalvoll und $\operatorname{Ass}(M)\subsetneqq\operatorname{Koass}(M)$.

Lemma 2.6. *Sei M sockelfrei und halb-einfach-radikalvoll, B ein Untermodul von M und M/B artinsch $\neq 0$. Sei $P(B)$ der größte radikalvolle Untermodul von B und $\mathfrak{b}=\operatorname{Ann}_R(M/B)$. Dann gilt:*

(a) $\operatorname{Ass}(M/P(B))$ *ist endlich.*

(b) *Genau dann ist $P(B)$ direkter Summand in M, wenn* $\dim(R/\mathfrak{b})=1$ *ist.*

Beweis. (a) Für jedes $\mathfrak{m}\in\Omega$ ist in der exakten Folge $\operatorname{Tor}_1^R(M/B, R/\mathfrak{m})\to B\bigotimes_R R/\mathfrak{m}\to M\bigotimes_R R/\mathfrak{m}$ das dritte Glied Null, also $B/\mathfrak{m}B=0$ für alle $\mathfrak{m}\notin\operatorname{Ass}(M/B)$, $B/\mathfrak{m}B$ endlich erzeugt für alle $\mathfrak{m}\in\operatorname{Ass}(M/B)$, so daß es einen endlich erzeugten Untermodul V von B gibt mit $V+\mathfrak{m}B=B$ für alle $\mathfrak{m}\in\Omega$. Dazu gibt es paarweise verschiedene $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t\in\operatorname{Ass}(M)$ mit $V\subset M'=\bigoplus_{i=1}^{t} M[\mathfrak{p}_i]$, und für das Ideal $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_t$ folgt nach (1.2, a) $M[\mathfrak{a}]=M'$, so daß insbesondere $\mathfrak{a}V=0$ und $\mathfrak{a}B$ radikalvoll ist. In der exakten Folge $\operatorname{Tor}_1^R(M/B, R/\mathfrak{a})\to B\bigotimes_R R/\mathfrak{a}\to M\bigotimes_R R/\mathfrak{a}$ ist das erste Glied artinsch und das dritte nach (1.2, d) isomorph zu M', so daß mit $\operatorname{Ass}(B/\mathfrak{a}B)$ auch $\operatorname{Ass}(M/\mathfrak{a}B)$ endlich ist.

Mit $U=P(B)$ ist U_*/U halbartinsch und radikalvoll, außerdem $U_*/U_*\cap B$ artinsch, also nach ([10] Lemma 2.1) sogar U_*/U artinsch. Der zerfallende Epim. $M/\mathfrak{a}B\to M/U_*$ zeigt, daß auch $\operatorname{Ass}(M/U_*)$ endlich ist, also auch $\operatorname{Ass}(M/U)$ wie behauptet.

(b) Aus $\mathfrak{b}M\subset U$ folgt auch $\mathfrak{b}=\operatorname{Ann}_R(M/U)$. Falls nun U direkter Summand in M ist, d.h. M/U sockelfrei und (herv) mit nur endlich vielen assoziierten Primidealen, folgt nach (1.2, a) sofort $\dim(R/\mathfrak{b})=1$. Umgekehrt ist $\bar{M}=M/\mathfrak{b}M$ nach (1.2, d) stets ein sockelfreier (herv) Modul über dem Ring $R/\mathfrak{b}$, und wenn dieser die Dimension 1 hat, ist nach (2.3) jeder radikalvolle Untermodul von $\bar{M}$ direkter Summand, insbesondere $\bar{U}\subset^{\oplus}\bar{M}$, also $U\subset^{\oplus}M$.

Mit der Beschreibung der Inklusion $\operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{Koass}(M)$ in (1.3) erhält man unmittelbar:

Folgerung 2.7. *Sei M sockelfrei und halb-einfach-radikalvoll, $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M)$. Für jeden artinschen Faktormodul M/B mit $\operatorname{Ann}_R(M/B) = \mathfrak{q}$ gilt dann: Genau dann ist $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M)$, wenn $P(B)$ direkter Summand in M ist.*

Satz 2.8. *Für einen sockelfreien, halb-einfach-radikalvollen Modul M sind äquivalent:*

(i) *Jeder radikalvolle Untermodul von M ist direkter Summand.*

(ii) $\operatorname{Ass}(M) = \operatorname{Koass}(M)$.

(iii) $\operatorname{Ass}(M)$ *ist lokalendlich, d.h. für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R ist die Menge $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M) \mid \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}\}$ endlich.*

Beweis. Bei (i $\to$ ii) ist nach der letzten Folgerung nichts mehr zu zeigen. Ist bei (ii $\to$ i) U ein radikalvoller Untermodul von M, so folgt für jedes maximale Element V_0 in der Menge $\{V \subset M \mid V \cap U = 0\}$, daß $U_1 = V_0 \oplus U$ radikalvoll und M/U_1 halbartinsch ist. Wäre $U_1 \neq M$, folgte mit einem $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M/U_1)$ nach Voraussetzung $\dim(R/\mathfrak{q}) = 1$, in $\bar{M} = M/\mathfrak{q}M$ also (siehe den Beweis von 2.6, b) $\bar{U}_1 \subset^{\oplus} \bar{M}$. Darin ist das direkte Komplement halbartinsch und sockelfrei, d.h. Null, $\bar{U}_1 = \bar{M}$ bedeutet, daß M/U_1 $\mathfrak{q}$-teilbar ist, und das ist unmöglich.

(ii $\to$ iii) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist nach (1.5, a) $M_{\mathfrak{m}}$ als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul wieder sockelfrei und (herv), und mit der bereits bewiesenen Äquivalenz (i $\leftrightarrow$ ii) und (1.5, b) folgt auch $\operatorname{Ass}(M_{\mathfrak{m}}) = \operatorname{Koass}(M_{\mathfrak{m}})$. Weil die Mengen $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M) \mid \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}\}$ und $\operatorname{Ass}(M_{\mathfrak{m}})$ gleich viel Elemente haben, können wir also R *lokal* annehmen und müssen zeigen, daß $\operatorname{Ass}(M)$ endlich ist: Jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ ist sogar minimal über $\operatorname{Ann}_R(M)$, denn mit $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_0$ minimal über $\operatorname{Ann}_R(M)$ folgt $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Att}(M)$, also nach (2.4, d) $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Koass}(M)$, nach Voraussetzung $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Ass}(M)$, $\dim(R/\mathfrak{p}_0) = 1$, $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$. (iii $\to$ ii) Jedes $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M)$ hat nach (2.4, c) eine Darstellung $\mathfrak{q} = \bigcap \mathfrak{p}_\lambda$, so daß jedes $\mathfrak{p}_\lambda \in \operatorname{Ass}(M)$ in einem $\mathfrak{m}_i$ liegt $(1 \leqq i \leqq k)$. Weil nach Voraussetzung unter jedem $\mathfrak{m}_i$ nur endlich viele $\mathfrak{p}_\lambda$ liegen, folgt $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n$ mit $\mathfrak{p}_j \in \operatorname{Ass}(M)$, also bereits $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M)$.

Bemerkung 1. Man kann leicht einen Modul M wie im Satz angeben, bei dem $\operatorname{Ass}(M)$ zwar lokalendlich, aber nicht endlich ist. Sei dazu A ein kommutativer noetherscher Ring und $R = A[[X]]$. Für jedes maximale Ideal I von A ist dann $\mathfrak{p} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R \mid \text{alle } a_i \in I \right\}$ ein Primideal in R mit $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$, und über $\mathfrak{p}$ liegt nur ein maximales Ideal, nämlich $\mathfrak{p} + (X)$. Mit paarweise verschiedenen $I_1, I_2, \ldots$ und dazugehörigen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ ist dann $M = \coprod_{n=1}^{\infty} \kappa(\mathfrak{p}_n)$ das gewünschte Beispiel, denn klar ist $\operatorname{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\}$ unendlich, für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ aber $|\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M) \mid \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}\}| \leqq 1$.

Bemerkung 2. Bei halbeinfachen Moduln ist wohlbekannt, daß jeder echte Untermodul einen einfachen Untermodul enthält und in einem maximalen Untermodul enthalten ist. Für einen sockelfreien (herv) Modul M sind die entsprechenden Aussagen nicht mehr richtig, denn man kann zeigen, daß die Bedingungen von

Satz (2.8) weiter äquivalent sind zu (iv): Jeder radikalvolle Untermodul $\neq 0$ von M enthält einen (erv) Untermodul, (v): Jeder radikalvolle Untermodul $U \neq M$ liegt in einem radikalvollen Untermodul A von M, so daß M/A (erv) ist.

Im Rest dieses Abschnittes betrachten wir jetzt Eigenschaften des sockelfreien (herv) Moduls M, die schon die Endlichkeit von $\mathrm{Ass}(M)$ erzwingen. Dabei spielt für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ der Untermodul $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M)\cdot M$ eine Rolle (siehe auch 3.6). Er ist stets in $M[\mathfrak{a}]$ enthalten, aber selbst wenn M (herv) ist, braucht nicht $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M)\cdot M + \mathfrak{a}M = M$ zu gelten.

Lemma 2.9. *Für einen Modul M und ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *sind äquivalent:*

(a) $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M)\cdot M + \mathfrak{a}M = M$.

(b) $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M) = \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}^2 M)$ *und aus* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(M)$, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(M)$ *folgt* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$.

Beweis. ($\mathrm{a} \to \mathrm{b}$) Schon aus $M[\mathfrak{a}] + \mathfrak{a}M = M$ folgt $\mathfrak{a}M = \mathfrak{a}^2 M$. Wäre im zweiten Teil $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, folgte $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M) \subset \mathfrak{p}$, also $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M) + \mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}$, also nach Voraussetzung $\mathfrak{q}M = M$, und das ist unmöglich. ($\mathrm{b} \to \mathrm{a}$) Angenommen, M ist nicht durch das Ideal $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M) + \mathfrak{a}$ teilbar, so gibt es ein $\mathfrak{q}_0 \in \mathrm{Att}(M)$ mit $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M) + \mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}_0$. Wählt man ein Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}_0$ minimal über $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M)$, folgt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(\mathfrak{a}M)$, also auch $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(M)$, und die zweite Bedingung liefert $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Andererseits ist $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(\bar{r})$ mit $\bar{r} \in R/\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M)$, insbesondere $a\bar{r} = 0$, $ar \in \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M)$ für alle $a \in \mathfrak{a}$, d.h. $r \in \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}^2 M)$. Mit der ersten Bedingung folgt $r \in \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M)$, d.h. der Widerspruch $\bar{r} = 0$.

Bemerkung. Ist die Bedingung (a) erfüllt und $\mathfrak{a}M \neq M$, so kann es kein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathrm{Ann}_R(M) \subset \mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{a}$ geben (denn wie im ersten Beweisschritt führte $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M) \subset \mathfrak{p}$ zum Widerspruch).

Folgerung 2.10. *Für einen Modul M sind äquivalent:*

(α) $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M)\cdot M + \mathfrak{a}M = M$ *für alle Ideale* $\mathfrak{a}$.

(β) $\mathrm{Ann}_R(M)$ *ist ein Wurzelideal und* $\mathrm{Att}(M)$ *ist diskret.*

Beweis. ($\alpha \to \beta$) Die Anordnung von $\mathrm{Att}(M)$ ist diskret (d.h. je zwei vergleichbare Elemente stimmen schon überein), denn für jedes $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(M)$ gilt $\mathfrak{q}M \neq M$, so daß nach der letzten Bemerkung $\mathfrak{q}$ minimal über $\mathrm{Ann}_R(M)$ ist. Insbesondere ist $\mathrm{Att}(M)$ endlich, bei $M \neq 0$ also $\mathrm{Att}(M) = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n\}$, und aus $M[\mathfrak{q}_j] + \mathfrak{q}_j M = M$ für alle j folgt für das Ideal $\mathfrak{b} = \bigcap_{j=1}^{n} \mathfrak{q}_j$ auch $M[\mathfrak{b}] + \mathfrak{b}M = M$, $\mathfrak{b}M = \mathfrak{b}^2 M$. Nach ([9] S. 129) gilt aber $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{b}^i M = 0$, d.h. $\mathfrak{b}M = 0$, so daß $\mathfrak{b} = \mathrm{Ann}_R(M)$ ein Wurzelideal ist. (Wir haben in (α) nicht alle Ideale $\mathfrak{a}$, sondern nur die attachierten Primideale $\mathfrak{q}$ benutzt.) ($\beta \to \alpha$) Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ gilt, weil $\mathrm{Ann}_R(M)$ ein Wurzelideal ist, $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M) = \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}^2 M)$. Mit der Diskretheit von $\mathrm{Att}(M)$ ist dann Punkt (b) in (2.9) erfüllt, also auch (a).

Satz 2.11. *Für einen sockelfreien, halb-einfach-radikalvollen Modul M sind äquivalent:*

(i) *M ist algebraisch kompakt.*
(ii) Ass(M) *ist endlich.*
(iii) Ass$(M) = Att(M)$.
(iv) $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M)\cdot M + \mathfrak{a}M = M$ *für alle Ideale* $\mathfrak{a}$.

Beweis. Ein Modul C heißt *algebraisch kompakt*, wenn für jeden reinen Monom. $A \to B$ die induzierte Abb. $\mathrm{Hom}_R(B, C) \to \mathrm{Hom}_R(A, C)$ surjektiv ist. Für jeden Modul N zeigt dann die Adjungiertheit von Hom und $\otimes$, daß auch $N^0 = \mathrm{Hom}_R(N, C)$ algebraisch kompakt ist. Wählt man bei (ii → i) C speziell als injektiven Kogenerator, ist die kanonische Abb. $M \to M^{00}$ injektiv und M^{00} algebraisch kompakt. Im Fall $M \neq 0$ ist nach Voraussetzung $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$, also nach (1.2) auch $M^{00} \cong \prod_{i=1}^{n} \kappa(\mathfrak{p}_i)^{(I_i)}$ sockelfrei und (herv) mit nur endlich vielen assoziierten Primidealen. Nach (2.3) ist jeder radikalvolle Untermodul von M^{00} direkter Summand, so daß insbesondere M als direkter Summand algebraisch kompakt ist. Für (i → ii) verwenden wir ein Kriterium von Zimmermann für das Abspalten von direkten Summen im Produkt: $M = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} M[\mathfrak{p}]$ ist ein reiner Untermodul von $\prod M[\mathfrak{p}]$, also nach Voraussetzung schon direkter Summand. Nach ([8] Lemma 5.1) gibt es deshalb bei $M \neq 0$ eine endliche Teilmenge Y von $\mathrm{Ass}(M)$, paarweise verschiedene $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t \in \mathrm{Ass}(M)$ und $n_1, \ldots, n_t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so daß mit $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1^{n_1} \ldots \mathfrak{p}_t^{n_t}$ gilt: Für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \setminus Y$ und alle $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M)$ ist $\mathfrak{b}(M[\mathfrak{p}])$ $\mathfrak{q}$-teilbar. Insbesondere gilt für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \setminus Y$, daß $\mathfrak{b}(M[\mathfrak{p}])$ $\mathfrak{p}$-teilbar, d.h. Null ist, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{p}$ für ein $j \in \{1, \ldots, t\}$, und weil das schon $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{p}$ bedeutet, ist insgesamt $\mathrm{Ass}(M) = Y \cup \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t\}$ endlich.

(ii → iii) Jedes $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(M)$ ist nach (2.4, b) von der Form $\mathfrak{q} = \bigcap \mathfrak{p}_\lambda$ mit $\mathfrak{p}_\lambda \in \mathrm{Ass}(M)$, und weil Ass$(M)$ endlich ist, folgt $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M)$. (iii → iv) Für jedes $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(M)$ ist nach Voraussetzung $\dim(R/\mathfrak{q}) = 1$. Weil also Att(M) diskret ist (und bei jedem (herv) Modul der Annullator ein Wurzelideal ist), liefert (2.10) die Behauptung. (iv → ii) Jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ ist nach der Bemerkung zu (2.9) minimal über $\mathrm{Ann}_R(M)$, und davon gibt es nur endlich viele.

3. Der artinsche Fall

Ist R lokal und $\hat{R}$ die Vervollständigung, so läßt sich jeder artinsche R-Modul M in natürlicher Weise zu einem $\hat{R}$-Modul machen. Falls M (herv) ist, muß nach (1.1) $\mathrm{Ann}_{\hat{R}}(M)$ ein Wurzelideal sein, und mit Hilfe des Satzes von Krull zeigen wir als erstes, daß für spezielle artinsche Moduln diese Bedingung sogar hinreichend ist. Damit lassen sich über jedem vollständigen lokalen Ring R genügend viele Beispiele konstruieren: Zu jeder endlichen Teilmenge Y von $\mathrm{Spec}(R) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ gibt es nach (3.3) einen artinschen (herv) Modul M mit Koass$(M) = Y$. Von den drei Sätzen dieses Abschnittes gibt der erste Charakterisierungen der Eigenschaft (herv); die beiden anderen zeigen, wie sich die Frage, wann sich unsere Eigenschaft auf alle radikalvollen (bzw. koabgeschlossenen) Untermoduln von M vererbt, allein an der Menge Koass(M) entscheiden läßt.

Lemma 3.1. *Sei R lokal, M artinsch und radikalvoll und* $\mathrm{Ann}_{\hat{R}}(M)$ *ein Wurzelideal. Ist M zusätzlich irreduzibel oder unzerlegbar, so ist M bereits halb-einfach-radikalvoll.*

Beweis. Weil alle Aussagen ebenso über $\hat{R}$ gelten, können wir R vollständig annehmen, und dann entsprechen nach Matlis (siehe [5] S. 40) die Ideale von R genau den Untermoduln von E, der injektiven Hülle des Restklassenkörpers.

Falls M *irreduzibel*, d.h. der Durchschnitt von zwei Untermoduln $\neq 0$ wieder $\neq 0$ ist, nehmen wir gleich $M \subset E$ an. Daß $\mathrm{Ann}_R(M)$ ein Wurzelideal ist, bedeutet $\mathrm{Ann}_R(M) = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ mit Primidealen $\mathfrak{q}_j \neq \mathfrak{m}$, nach dem Satz von Krull also $\mathrm{Ann}_R(M) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i$ mit $\dim(R/\mathfrak{p}_i) = 1$ für alle i. In $M' = \sum_{i=1}^{\infty} E[\mathfrak{p}_i]$ ist dann jeder Summand (erv), außerdem $\mathrm{Ann}_R(M') = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i = \mathrm{Ann}_R(M)$, also $M = M'$(herv) wie behauptet.

Falls M *unzerlegbar*, d.h. die Summe von zwei Untermoduln $\neq M$ wieder $\neq M$ ist, folgt mit $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$ nach Voraussetzung $\mathrm{Ann}_R(M) = \mathfrak{p}$. Für den endlich erzeugten irreduziblen Modul $A = M^0 = \mathrm{Hom}_R(M, E)$ gilt dann $\mathrm{Ass}(A) = \{\mathfrak{p}\}$, $\mathrm{Ann}_R(A) = \mathfrak{p}$, und ein Monom. $A \to R/\mathfrak{p}$ liefert einen Epim. $(R/\mathfrak{p})^0 \to A^0$, d.h. einen Epim. $E[\mathfrak{p}] \to M$. Weil nach dem ersten Teil $E[\mathfrak{p}]$ (herv) ist, ist es (siehe die Bemerkung zu 1.5) auch der Faktormodul M.

Bemerkung. Auf die Zusatzbedingung „irreduzibel" oder „unzerlegbar" kann man i.allg. nicht verzichten: Ist N artinsch und (herv) mit einem radikalvollen Untermodul V, der nicht (herv) ist, so ist $M = N \times V$ ein artinscher radikalvoller R-Modul und $\mathrm{Ann}_{\hat{R}}(M)$ ein Wurzelideal, aber M nicht (herv).

Folgerung 3.2. *Jeder artinsche radikalvolle Modul ist wesentliche Überdeckung eines halb-einfach-radikalvollen Moduls.*

Folgerung 3.3. *Ist R lokal und vollständig, so gibt es zu jeder endlichen Teilmenge Y von* $\mathrm{Spec}(R) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ *einen artinschen halb-einfach-radikalvollen Modul M mit* $\mathrm{Koass}(M) = Y$.

Beweis. Die zweite Folgerung erhält man unmittelbar aus dem Lemma: Man kann $|Y| = 1$ annehmen, d.h. $Y = \{\mathfrak{p}\}$ mit $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, und dann leistet $M = E[\mathfrak{p}]$ das Gewünschte. Bei der ersten Folgerung ist zunächst R beliebig: Nach ([10] Satz 3.6) ist jeder artinsche Modul M wesentliche Überdeckung einer endlichen direkten Summe von unzerlegbaren Moduln, so daß wir gleich M als unzerlegbar annehmen können. Mit $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{m}\}$ wird dann M in natürlicher Weise zu einem $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$-Modul, so daß wir jetzt zusätzlich R als lokal und vollständig voraussetzen. Mit $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$ und $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(M/B)$ ist dann B klein in M und M/B nach dem Lemma (herv).

Satz 3.4. *Ist R lokal und vollständig, so sind für einen artinschen, radikalvollen Modul M äquivalent:*

(i) *M ist halb-einfach-radikalvoll.*

(ii) *M ist Summe von endlich vielen unzerlegbaren halb-einfach-radikalvollen Untermoduln.*

(iii) *$M[\mathfrak{a}] + \mathfrak{a}M = M$ für alle Ideale $\mathfrak{a}$.*

Beweis. Die Inklusion (ii $\to$ i) gilt natürlich für beliebige M und R, ebenso (i$\to$iii) nach (1.1, d).

Zeigen wir (iii $\to$ ii) durch Induktion über $n = |\mathrm{Koass}(M)|$: Bei $n=0$, d.h. $M=0$, ist nichts zu zeigen. Bei $n \geqq 1$ gilt für jedes $\mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}(M)$, daß $\mathfrak{q}M = \mathfrak{q}^2 M$, also $M' = \mathfrak{q}M$ artinsch, radikalvoll und $\mathfrak{q}$-teilbar ist, wegen $\mathfrak{q} \notin \mathrm{Koass}(M')$ also $\mathrm{Koass}(M') \subsetneqq \mathrm{Koass}(M)$. Als epimorphes Bild von M^m erfüllt M' wieder die Bedingung (iii), ist also nach Induktion Summe von endlich vielen unzerlegbaren (herv) Untermoduln.

Wir sind fertig, wenn wir einen Untermodul V_0 von M angeben können, der selbst Summe von endlich vielen unzerlegbaren (herv) Moduln ist und für den $V_0 + M' = M$ gilt. Jedes minimale Element V_0 in der Menge $\{V \subset M[\mathfrak{q}] \mid V + M' = M\}$ ist artinsch $\neq 0$, hat also eine Darstellung $V_0 = U_1 + \ldots + U_m$, in der jedes U_i unzerlegbar und koabgeschlossen in V_0 ist. War nun $\mathfrak{q}$ in der Menge $\mathrm{Koass}(M)$ maximal gewählt, leistet V_0 das Gewünschte: Nach ([10] Folgerung 3.2) ist dann nämlich $\mathrm{Koass}(V_0) = \mathrm{Koass}(M/\mathfrak{q}M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M) \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{q}\}$, also nach ([9] Lemma 2.1) auch $\mathrm{Koass}(U_i) = \{\mathfrak{q}\}$ für alle i, wegen $U_i \subset M[\mathfrak{q}]$ sogar $\mathrm{Ann}_R(U_i) = \mathfrak{q}$. Aber nach (3.1) heißt das, daß jedes U_i (herv) ist, d.h. V_0 die verlangte Gestalt hat.

Bemerkungen. 1) Wir haben bei (iii $\to$ ii) nicht alle Ideale $\mathfrak{a}$, sondern nur die koassoziierten Primideale $\mathfrak{q}$ von M benutzt. 2) Erfüllen R und M die Voraussetzungen des Satzes und ist zusätzlich $\mathrm{Koass}(M)$ diskret, bedeutet (iii) gerade, daß $\mathrm{Ann}_R(M)$ ein Wurzelideal ist. Damit ist (iii $\to$ i) eine Verallgemeinerung des Falles „M unzerlegbar" in (3.1). 3) Versucht man (i $\to$ ii) direkt zu beweisen und schreibt dazu $M = U_1 + \ldots + U_n$, alle U_i unzerlegbar, keines überflüssig, so ist zwar jedes U_i koabgeschlossen in M, braucht aber nicht (herv) zu sein. (Man kann nur zeigen, daß mindestens ein U_j (herv) ist.) 4) Die Äquivalenz (i$\leftrightarrow$ii) gilt offenbar über beliebigem R, d.h. wir haben:

Folgerung 3.5. *Jeder artinsche halb-einfach-radikalvolle Modul ist Summe von endlich vielen unzerlegbaren halb-einfach-radikalvollen Untermoduln.*

Satz 3.6. *Ist R lokal und vollständig, so sind für einen artinschen, radikalvollen Modul M äquivalent:*

(i) *Jeder koabgeschlossene Untermodul von M ist halb-einfach-radikalvoll.*

(ii) *Für jeden koabgeschlossenen Untermodul U von M ist $\mathrm{Ann}_R(U)$ ein Wurzelideal.*

(iii) $\mathrm{Ann}_R(M)$ *ist ein Wurzelideal und* $\mathrm{Koass}(M)$ *ist diskret.*

(iv) $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}M) \cdot M + \mathfrak{a}M = M$ *für alle Ideale* $\mathfrak{a}$.

Beweis. Für die Äquivalenzen (i$\leftrightarrow$ii) bzw. (iii$\leftrightarrow$iv) ist nach dem Vorhergehenden nicht mehr viel zu beweisen. Die zweite ist ein Spezialfall von (2.10), und bei der ersten ist nur (ii $\to$ i) zu zeigen. Dazu schreibe man jeden koabgeschlossenen Untermodul $A \neq 0$ in der Form $A = U_1 + \ldots + U_n$, alle U_i unzerlegbar, keines überflüssig. Jedes U_i ist dann koabgeschlossen in A, also auch in M, so daß $\mathrm{Ann}_R(U_i)$ nach Voraussetzung ein Wurzelideal ist, außerdem U_i radikalvoll. Nach (3.1) ist daher jedes U_i (herv), also auch A.

(iii $\to$ ii) Beim Induktionsbeweis über $n = |\mathrm{Koass}(M)|$ ist $n=0$ klar. Ist $n \geqq 1$ und $\mathrm{Koass}(U) = \mathrm{Koass}(M)$, folgt aus der Voraussetzung $\bigcap \mathrm{Koass}(U) = \mathrm{Ann}_R(M)$, also auch $\operatorname{Ann}_R(U)=\operatorname{Ann}_R(M)$. Ist aber $\operatorname{Koass}(U)\subsetneqq\operatorname{Koass}(M)$, folgt mit jedem $\mathfrak{q}\in\operatorname{Koass}(M)\setminus\operatorname{Koass}(U)$, daß $M'=\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathfrak{q}^i M$ artinsch und radikalvoll ist, $\operatorname{Ann}_R(M')$ ein Wurzelideal und $\operatorname{Koass}(M')\subsetneqq\operatorname{Koass}(M)$. Falls wir $U\subset M'$ zeigen können, sind wir nach Induktion fertig: U ist sogar $\mathfrak{q}$-teilbar, sonst gäbe es ein $\mathfrak{p}\in\operatorname{Koass}(U)$ mit $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{p}$, es folgte $\mathfrak{p}\in\operatorname{Koass}(M)$, also wegen der Diskretheit $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}\in\operatorname{Koass}(U)$, und das ist unmöglich.

(ii $\to$ iii) Speziell für $U=M$ erhält man, daß $\operatorname{Ann}_R(M)$ ein Wurzelideal ist. Für den endlich erzeugten sockelfreien Modul $A=M^0=\operatorname{Hom}_R(M,E)$ müssen wir zeigen, daß $\operatorname{Ass}(A)=\operatorname{Koass}(M)$ diskret ist. A besitzt, via Matlis-Dualität, die folgende Eigenschaft

(∗) *Für jeden abgeschlossenen Untermodul A_1 von A ist* $\operatorname{Ann}_R(A/A_1)$ *ein Wurzelideal,*

und die vererbt sich auf jeden Untermodul B von A: Ist B_1 ein abgeschlossener Untermodul von B, wähle man ein maximales Element V_1 in der Menge $\{B_1\subset V\subset A\mid V\cap B=B_1\}$, und dann ist V_1 abgeschlossen in A, mit (∗) also $\operatorname{Ann}_R(A/V_1)=\bigcap\operatorname{Ass}(A/V_1)$; weiter ist die kanonische Abb. $B/B_1\to A/V_1$ ein wesentlicher Monom., so daß in $\operatorname{Ann}_R(B/B_1)\subset\bigcap\operatorname{Ass}(B/B_1)=\operatorname{Ann}_R(A/V_1)$ Gleichheit gilt. Zum Beweis, daß $\operatorname{Ass}(A)$ diskret ist, ist jetzt nur noch zu zeigen, daß für zwei Primideale $\mathfrak{p}\subsetneqq\mathfrak{q}$ der Modul $B=(R/\mathfrak{p})\times(R/\mathfrak{q})$ nicht die Eigenschaft (∗) besitzt. Wählt man ein irreduzibles Ideal $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{b}\subsetneqq\mathfrak{q}$ und $\sqrt{\mathfrak{b}}=\mathfrak{q}$ (betrachte bei $\mathfrak{p}=0$ etwa eine Primärzerlegung von $\mathfrak{q}^{(2)}$), so gibt es wegen $\mathfrak{q}\in\operatorname{Ass}(R/\mathfrak{b})$ einen Monom. $\alpha\colon R/\mathfrak{q}\to R/\mathfrak{b}$ und dazu einen Epim. $g\colon R/\mathfrak{p}\to\operatorname{Kok}\alpha$. Bildet man damit das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R/\mathfrak{q} \arrow[r] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & R/\mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R/\mathfrak{q} \arrow[r, "\alpha"] & R/\mathfrak{b} \arrow[r] & \operatorname{Kok}\alpha \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

so ist $C_1=\operatorname{Ke}f$ ein maximales Element in der Menge $\{V\subset C\mid V\cap\operatorname{Ke}\pi=0\}$, also C_1 abgeschlossen in C und natürlich $C/C_1\cong R/\mathfrak{b}$. Wegen $\mathfrak{p}C=0$ zerfällt die obere Zeile, es folgt $C\cong B$, so daß auch B einen abgeschlossenen Untermodul B_1 hat mit $B/B_1\cong R/\mathfrak{b}$. Aber $\operatorname{Ann}_R(B/B_1)=\mathfrak{b}$ ist kein Wurzelideal, also (∗) verletzt.

Bemerkung zu (iii $\to$ ii). Mit einem ähnlichen Induktionsbeweis kann man über beliebigem R für jeden Modul M zeigen: Ist $\operatorname{Ann}_R(M)$ ein Wurzelideal und $\operatorname{Att}(M)$ diskret (d.i. die Situation in 2.10), so gilt für jeden koabgeschlossenen Untermodul U von M, daß $\operatorname{Ann}_R(U)$ ein Wurzelideal ist.

Da bei einem (herv) Modul der Annullator stets ein Wurzelideal ist, erhält man aus dem Satz speziell:

Folgerung 3.7. *Ist R lokal und vollständig, so sind für einen artinschen, halb-einfach-radikalvollen Modul M äquivalent:*

(α) *Jeder koabgeschlossene Untermodul von M ist wieder halb-einfach-radikalvoll.*

(β) Koass (M) *ist diskret.*

Die Vererbung der Eigenschaft (herv) auf alle radikalvollen Untermoduln bedeutet, da es i. allg. mehr radikalvolle als koabgeschlossene Untermoduln in M gibt, eine noch strengere Bedingung an Koass (M):

Satz 3.8. *Ist R lokal und vollständig, so sind für einen artinschen, radikalvollen Modul M äquivalent:*

(i) *Jeder radikalvolle Untermodul von M ist halb-einfach-radikalvoll.*

(ii) *Für jeden radikalvollen Untermodul U von M ist* $\mathrm{Ann}_R(U)$ *ein Wurzelideal.*

(iii) $\mathrm{Ann}_R(M)$ *ist ein Wurzelideal und für alle* $\mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}\,(M)$ *gilt* $\dim(R/\mathfrak{q})=1$.

(iv) *M ist Summe von endlich vielen einfach-radikalvollen Untermoduln.*

Beweis. Für die Eigenschaft (iv) wird in [10] eine Reihe von Charakterisierungen gegeben. Ein Modul M heißt dort *schwach-reduziert*, wenn jeder radikalvolle kleine Untermodul von M Null ist, und das ist, falls M artinsch und radikalvoll ist, nach ([10] Satz 4.10) äquivalent mit (iv). Natürlich vererbt sich die Eigenschaft „schwach-reduziert" auf Untermoduln, und damit ist (iv $\rightarrow$ i) bewiesen.

Weil (i $\rightarrow$ ii) klar ist, zeigen wir als nächstes (ii $\rightarrow$ iii): Für $U=M$ wird $\mathrm{Ann}_R(M)$ ein Wurzelideal, und $A=M^0$ hat jetzt die Eigenschaft

(**) *Für jeden Untermodul A' von A, mit* $\mathrm{So}\,(A/A')=0$, *ist* $\mathrm{Ann}_R(A/A')$ *ein Wurzelideal.*

Mit einem Ansatz wie in (3.6, ii $\rightarrow$ iii) zeigt man, daß sich (**) auf Untermoduln vererbt. Damit folgt $\dim(R/\mathfrak{p})=1$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,(A)=\mathrm{Koass}\,(M)$: Hätte man ein Primideal $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{m}$, wäre $B=\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ ein Untermodul von A der (**) verletzt, denn mit einem irreduziblen Ideal $\mathfrak{b}$, für das $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{b} \subsetneqq \mathfrak{q}$ und $\sqrt{\mathfrak{b}}=\mathfrak{q}$ gilt, und $B'=\mathfrak{b}/\mathfrak{p}$ folgt $\mathrm{Ass}\,(R/\mathfrak{b})=\{\mathfrak{q}\}$, also $\mathrm{So}\,(B/B')=0$, während $\mathrm{Ann}_R(B/B')=\mathfrak{b}$ kein Wurzelideal ist.

(iii $\rightarrow$ iv) Wieder nach ([10] Satz 4.10) ist zu zeigen, daß M die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln besitzt. Aber für den endlich erzeugten Modul $A=M^0$ gilt $\dim(R/\mathfrak{p})=1$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,(A)$, so daß er die Minimalbedingung für Untermoduln X mit $\mathrm{So}\,(A/X)=0$ hat, also M die verlangte Maximalbedingung.

Bemerkungen. 1) Entsprechend (3.7) läßt sich jetzt, falls R lokal und vollständig, M artinsch und (herv) ist, die Vererbung dieser Eigenschaft auf radikalvolle Untermoduln allein an Koass (M) ablesen: Es muß $\dim(R/\mathfrak{q})=1$ sein für alle $\mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}\,(M)$. 2) Punkt (i) und (iv) sind nur Aussagen über den Untermodulverband von M. Mit Hilfe der im letzten Beweisschritt benützten Maximalbedingung erhält man daher über beliebigem R:

Folgerung 3.9. *Für einen artinschen, halb-einfach-radikalvollen Modul M sind äquivalent:*

(a) *Jeder radikalvolle Untermodul von M ist wieder halb-einfach-radikalvoll.*

(b) *M erfüllt die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln.*

(c) *M ist Summe von endlich vielen einfach-radikalvollen Untermoduln.*

Literatur

1. Anderson, F.W., Fuller, K.R.: Rings and categories of modules. New York: Springer 1974
2. Bourbaki, N.: Algèbre commutative. Paris: Hermann 1967
3. Krull, W.: Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie. Math. Zeitschrift **54**, 354–387 (1951)
4. Matlis, E.: Modules with descending chain condition. Trans. Am. Math. Soc. **97**, 495–508 (1960)
5. Matlis, E.: 1-dimensional Cohen-Macaulay rings. Lect. Notes Math., vol. 327. Berlin Heidelberg New York: Springer 1973
6. Ooishi, A.: Matlis duality and the width of a module. Hiroshima Math. J. **6**, 573–587 (1976)
7. Sharp, R.Y.: Some results on the vanishing of local cohomology modules. Proc. Lond. Math. Soc. **30**, 177–195 (1975)
8. Zimmermann, W.: Rein injektive direkte Summen von Moduln. Commun. Algebra **5**, 1083–1117 (1977)
9. Zöschinger, H.: Linear-kompakte Moduln über noetherschen Ringen. Arch. Math. **41**, 121–130 (1983)
10. Zöschinger, H.: Minimax-Moduln. J. Algebra **102**, 1–32 (1986)

Eingegangen am 2. April 1986