BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1990

MÜNCHEN 1991

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Inhaltsübersicht

I. Summare zu den Vorträgen in den Sitzungen

II. Wissenschaftliche Arbeiten

Moduln mit Koprimärzerlegung

Von **Helmut Zöschinger**

Vorgelegt von Otto Forster in der Sitzung vom 15. Dezember 1989

Einleitung

Sei R ein kommutativer Ring. Ein R-Modul M heißt *koprimär,* wenn $M \neq 0$ ist und wenn für jedes $x \in R$ entweder $x M = M$ oder $x^e M = 0$ ist für ein $e \geqq 1$. M heißt *darstellbar,* wenn M Summe von endlich vielen koprimären Untermoduln ist. Eine Darstellung $M = U_1 + \ldots + U_n$, in der alle U_i koprimär sind, heißt nach Kirby [2] eine *Koprimärzerlegung,* nach MacDonald [3] auch eine Sekundärdarstellung von M. Beide Autoren untersuchen die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Darstellung – analog zur klassischen Noether-Lasker-Theorie der Primärzerlegung von noetherschen Moduln. Sie zeigen insbesondere, daß jeder artinsche Modul darstellbar ist. Nach Sharp ([4] Theorem 2.3) ist über einem noetherschen Ring auch jeder injektive Modul darstellbar.

Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, über einem noetherschen Ring R weitere Klassen darstellbarer Moduln anzugeben und sie im 1-dimensionalen Fall vollständig zu beschreiben. Dabei erweisen sich die beiden folgenden Reduktionen als sehr nützlich:

(1.5) *Sei M ein R-Modul und $P(M)$ der radikalvolle Anteil von M (d.h. der größte Untermodul von M, der keine maximalen Untermoduln besitzt). Genau dann ist M darstellbar, wenn $P(M)$ darstellbar ist und wenn es ein Ideal $\mathfrak{b}$ von R gibt, so daß $R/\mathfrak{b}$ artinsch ist und $\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{b}) + P(M) = M$.*

(1.7) *Sei M ein R-Modul und S eine multiplikative Teilmenge von R, so daß alle Elemente von S bijektiv auf M operieren. Genau dann ist M als R-Modul darstellbar, wenn M_S als R_S-Modul darstellbar ist.*

Obwohl beide Aussagen einfach zu beweisen sind, liefern sie eine Fülle bisher nicht bekannter Beispiele, und die zweite erlaubt die Behandlung aller R-Moduln von endlicher Goldie-Dimension:

(2.4) *Ein R-Modul M von endlicher Goldie-Dimension ist genau dann darstellbar, wenn auf jedem Faktormodul von M die Nichtnullteiler bijektiv operieren.*

Insbesondere ist jeder radikalvolle Minimax-Modul darstellbar. Mit Hilfe der Menge $\mathrm{Att}(M) = \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p}$ ist Annullator eines Faktormoduls von $M \}$ erhält man folgendes hinreichende Kriterium:

(3.2) *Sei M ein R-Modul, so daß* $\mathrm{Att}(M)$ *diskret ist (d.h. aus* $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ *in* $\mathrm{Att}(M)$ *stets folgt* $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$*). Dann ist M darstellbar.*

Mit ihm folgt, daß im Falle $\dim(R) \leqq 1$ jeder radikalvolle R-Modul darstellbar ist, also in der obigen Aussage (1.5) nur mehr die Existenz des Ideales $\mathfrak{b}$ gefordert werden muß. In diesem Falle ist auch die Klasse aller darstellbaren R-Moduln gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen (für ein Gegenbeispiel bei $\dim(R) > 1$ siehe 3.5).

Jeder darstellbare R-Modul besitzt nach ([3] p. 34) eine Kompositionsreihe mit koprimären Faktoren, und für die Charakterisierung dieser (im Fall $\dim(R) > 1$ schwächeren) Eigenschaft erinnern wir an folgende Begriffe: Für jeden R-Modul M ist $\mathrm{Koass}(M) = \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p}$ ist Annullator eines *artinschen* Faktormoduls von $M \}$ (siehe [7] p. 16), und für jede Gabriel-Topologie $\mathfrak{G}$ auf R (siehe [5] p. 146) ist $H_{\mathfrak{G}}(M) = \cap \{ \mathfrak{a} M \mid \mathfrak{a} \in \mathfrak{G} \}$. Damit zeigen wir in

(4.2) *Für einen R-Modul* $M \neq 0$ *sind äquivalent:*

(i) *M besitzt eine Folge von Untermoduln* $0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq M_n = M$*, in der alle Faktoren* M_i/M_{i-1} *koprimär sind.*

(ii) $\mathrm{Koass}(M)$ *ist endlich, und für jedes Ideal* $\mathfrak{a}$ *von R ist die absteigende Folge* $M \supset \mathfrak{a} M \supset \mathfrak{a}^2 M \supset \mathfrak{a}^3 M \supset \ldots$ *stationär.*

(iii) *Zu jeder Gabriel-Topologie* $\mathfrak{G}$ *auf R gibt es ein* $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$ *mit* $H_{\mathfrak{G}}(M) = \mathfrak{b} M$.

Die in (ii) auftretende absteigende Kettenbedingung spielt in der ganzen Arbeit eine zentrale Rolle, und abschließend beschreiben wir im Falle $\dim(R) \leqq 1$ alle R-Moduln, die ihr genügen.

R ist stets ein kommutativer noetherscher Ring. Die modultheoretischen Bezeichnungen sind so, wie sie in ([7] p. 2–3) vereinbart wurden.

1. Grundtatsachen über koprimäre und darstellbare Moduln

Für jeden R-Modul M gilt $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Att}(M)$, und wir zeigen in (1.4, a), daß bei darstellbaren Moduln beide Mengen übereinstimmen. Weil jeder Primdivisor des Ideales $\mathrm{Ann}_R(M)$ ein Element von $\mathrm{Att}(M)$ ist, gilt $\cap\, \mathrm{Att}(M) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$, während für $\mathfrak{a} = \cap\, \mathrm{Koass}(M)$ im allgemeinen nur $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i M = 0$ ist. Mit Hilfe der Menge $\mathrm{Att}(M)$ lassen sich die koprimären R-Moduln sehr einfach beschreiben:

Lemma 1.1. *Für einen R-Modul M und ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R sind äquivalent:*

(i) *M ist $\mathfrak{p}$-koprimär.*

(ii) *$\mathrm{Att}(M) = \{\mathfrak{p}\}$.*

(iii) *$\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$ und $\mathfrak{p}^e M = 0$ für ein $e \geqq 1$.*

Beweis. (i $\rightarrow$ ii) Für jeden koprimären Modul M ist $\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$ ein Primideal, sagen wir $\mathfrak{p}$, und M heißt dann $\mathfrak{p}$-*koprimär*. Ist nun $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(M)$, $\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}_R(M/U)$, folgt $\mathrm{Ann}_R(M) \subset \mathfrak{q}$ und $x\, M \neq M$ für alle $x \in \mathfrak{q}$, also $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. (ii $\rightarrow$ iii) Nur die zweite Aussage ist noch zu zeigen, und die folgt aus $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$. (iii $\rightarrow$ i) Für jeden R-Modul N gilt $\cup\, \mathrm{Koass}(N) = \{x \in R \mid x\, N \neq N\}$, so daß hier aus $x\, M \neq M$ stets folgt $x^e M = 0$, also M koprimär ist und $\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)} = \mathfrak{p}$.

Folgerung 1.2. *Sei M ein R-Modul und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Dann gilt: (a) Ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Element von $\mathrm{Att}(M)$, so sind die Faktormoduln $M/\mathfrak{p}^i M$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ alle $\mathfrak{p}$-koprimär. (b) Ist U ein Untermodul von M, so daß U und M/U $\mathfrak{p}$-koprimär sind, so ist auch M $\mathfrak{p}$-koprimär. (c) Ist M die injektive Hülle von $R/\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R, so gilt für $U = M[\mathfrak{a}] = \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a})$: Genau dann ist U $\mathfrak{p}$-koprimär, wenn $\mathfrak{p}$ ein minimaler Primdivisor von $\mathfrak{a}$ ist.*

Beweis. (a) folgt sofort mit (ii), ebenso (b) wegen $\mathrm{Att}(M) \subset \mathrm{Att}(U) \cup \mathrm{Att}(M/U)$. Bei (c) ist $U \cong \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, M)$, also nach dem Beweis von ([7] Folgerung 3.3) $\mathrm{Att}(U) = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$, so daß $\mathrm{Att}(U) = \{\mathfrak{p}\}$ äquivalent ist mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ und $h(\mathfrak{p}/\mathfrak{a}) = 0$.

Die nächste Folgerung wurde für den Spezialfall $A = R$ von Sharp in ([4] Theorem 2.3) bewiesen:

Folgerung 1.3. *Ist M ein injektiver und A ein endlich erzeugter R-Modul, so ist $\mathrm{Hom}_R(A, M)$ darstellbar.*

Beweis. Bei $A \neq 0$ kann man irreduzible Faktoren A/A_i wählen, so daß $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = 0$ ist, und der Monomorphismus $A \to \prod_{i=1}^{n} (A/A_i)$ induziert einen Epimorphismus $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_R(A/A_i, M) \to \mathrm{Hom}_R(A, M)$. Für jedes $H_i = \mathrm{Hom}_R(A/A_i, M)$ ist wieder nach ([7] Folgerung 3.3) $\mathrm{Att}(H_i) = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(A/A_i) \mid M[\mathfrak{q}] \neq 0\}$, wegen $|\mathrm{Ass}(A/A_i)| = 1$ also $|\mathrm{Att}(H_i)| \leqq 1$, d.h. nach dem Lemma H_i Null oder koprimär. Damit ist $\prod_{i=1}^{n} H_i$ darstellbar, also auch der Faktormodul $\mathrm{Hom}_R(A, M)$.

Lemma 1.4. *Für jeden darstellbaren R-Modul M gilt:*

(a) *$\mathrm{Koass}(M)$ ist endlich und stimmt mit $\mathrm{Att}(M)$ überein.*

(b) *Zu jeder Zerlegung $\mathrm{Koass}(M) = X \cup Y$ gibt es einen darstellbaren Untermodul U von M mit $\mathrm{Koass}(U) = X$ und $\mathrm{Koass}(M/U) = Y$.*

(c) *Zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ von R gibt es ein $e \geqq 1$ mit $M[\mathfrak{a}^e] + \mathfrak{a}M = M$.*

(d) *Der radikalvolle Anteil $P(M)$ ist wieder darstellbar und der reduzierte Anteil $M/P(M)$ ist koatomar und halbartinsch. Außerdem ist $P(M)$ koabgeschlossen in M.*

Beweis. Für $M = 0$ sind alle Aussagen klar, so daß gleich $M \neq 0$ sei und $M = U_1 + \ldots + U_n$ eine Koprimärzerlegung von M, in der kein U_i überflüssig ist.

(a) Mit $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(U_i)}$ behaupten wir, daß $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Att}(M) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ ist. Der Epimorphismus $U_1 \times \ldots \times U_n \to M$ liefert für jedes $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(M)$, daß $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(U_j) = \{\mathfrak{p}_j\}$ ist für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, also $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Att}(M) \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$. Bei $n = 1$ ist man fertig. Bei $n \geqq 2$ gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $A_i = U_1 + \ldots + \widehat{U}_i + \ldots + U_n$, daß $M/A_i \neq 0$, also als Faktormodul von U_i ebenfalls $\mathfrak{p}_i$-koprimär ist, und es folgt $\{\mathfrak{p}_i\} = \mathrm{Koass}(M/A_i) \subset \mathrm{Koass}(M)$.

(b) Schreibt man $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k\}$ mit paarweise verschiedenen $\mathfrak{q}_i$, so ist für jedes $j \in \{1, \ldots, k\}$ der Untermodul $V_j = \Sigma\{U_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_j\}$ ebenfalls $\mathfrak{q}_j$-koprimär und $M = V_1 + \ldots + V_k$. Bei der angegebenen Zerlegung von $\mathrm{Koass}(M)$ können wir gleich $X = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s\}$ und $Y = \{\mathfrak{q}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{q}_k\}$ annehmen, und dann leistet $U = V_1 + \ldots + V_s$ das Gewünschte: Die Epimorphismen $V_1 \times \ldots \times V_s \to U$ und $V_{s+1} \times \ldots \times V_k \to M/U$ zeigen, daß $\mathrm{Koass}(U) \subset X$ und $\mathrm{Koass}(M/U) \subset Y$ ist, und darin gilt beide Male Gleichheit (wegen $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Koass}(U) \cup \mathrm{Koass}(M/U)$).

(c) Man kann gleich $\mathfrak{a}\, M \neq M$ annehmen und dann die U_i so numerieren, daß $\mathfrak{a}\, U_i \neq U_i$ ist für $i \in \{1, \ldots, s\}$ und $\mathfrak{a}\, U_i = U_i$ für die restlichen i. Es folgt $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathrm{Ann}_R(U_i)}$, also $U_i \subset M[\mathfrak{a}^e]$ für ein gemeinsames $e \geqq 1$ und alle $i \leqq s$, und daraus $M[\mathfrak{a}^e] + \mathfrak{a}\, M = M$.

(d) Sei gleich $P(M) \neq M$ und $U_1, \ldots, U_s$ nicht radikalvoll, U_i radikalvoll für alle $i > s$. Zu jedem $i \leqq s$ gibt es dann ein maximales Ideal $\mathfrak{m}_i$ und ein $e_i \geqq 1$ mit $\mathfrak{m}_i^{e_i} \cdot U_i = 0$, mit $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{m}_s^{e_s}$ folgt $U_i \subset M[\mathfrak{b}]$ für alle $i \leqq s$, mit $B = \sum_{i>s} U_i$ also $M[\mathfrak{b}] + B = M$. Weil $R/\mathfrak{b}$ artinsch ist und $P(M)/B$ durch $\mathfrak{b}$ annulliert wird, folgt bereits $B = P(M)$, also die erste Behauptung, und als Faktormodul von $M[\mathfrak{b}]$ ist auch $M/P(M)$ koatomar und halbartinsch. Ist schließlich A ein Untermodul von $P(M)$ und $P(M)/A$ klein in M/A, wird M/A als wesentliche Überdeckung von $M/P(M)$ ebenfalls koatomar, hat also nach ([6] Lemma 1.1) keine radikalvollen Untermoduln, und es folgt $P(M)/A = 0$, d. h. $P(M)$ ist koabgeschlossen in M.

Folgerung 1.5. *Ein R-Modul M ist genau dann darstellbar, wenn $P(M)$ darstellbar ist und wenn es ein Ideal $\mathfrak{b}$ von R gibt, so daß $R/\mathfrak{b}$ artinsch ist und $M[\mathfrak{b}] + P(M) = M$.*

Beweis. Ist M darstellbar, so haben wir bei $P(M) \neq M$ im letzten Teil (d) ein solches Ideal $\mathfrak{b}$ konstruiert, und bei $P(M) = M$ setze man $\mathfrak{b} = R$. Bei der Umkehrung bleibt zu zeigen, daß $N = M[\mathfrak{b}]$ darstellbar ist: Für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ ist $L_{\mathfrak{m}}(N) = \sum_{i=1}^{\infty} N[\mathfrak{m}^i]$ höchstens dann ungleich Null, wenn $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{m}$ ist, und mit $\mathfrak{m}^e + \mathfrak{b} = \mathfrak{m}^{e+1} + \mathfrak{b}$ folgt, daß $\mathfrak{m}^e \cdot L_{\mathfrak{m}}(N)$ radikalvoll, also Null ist. In der Zerlegung $N = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \Omega} L_{\mathfrak{m}}(N)$ sind also fast alle Summanden Null und die restlichen koprimär.

In dem Spezialfall, daß M reduziert, d. h. $P(M) = 0$ ist, erhält man:

Folgerung 1.6. *Ein reduzierter R-Modul M ist genau dann darstellbar, wenn $R/\mathrm{Ann}_R(M)$ artinsch ist.*

Bemerkungen zum Lemma. 1) Aus Punkt (b) folgt für einen beliebigen R-Modul M: Ist Y eine endliche Teilmenge von Koass(M), so gibt es einen Untermodul U von M mit $\mathrm{Koass}(M/U) = Y$. (Zum Beweis wähle man einen artinschen Faktormodul M/M_o mit $Y \subset \mathrm{Koass}(M/M_o)$ und wende auf ihn (b) an.) Aber für unendliche Y gilt das nicht mehr. Ist z. B. $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Integritätsring mit $\dim(R) > 1$ und $M = \coprod_{i=1}^{\infty} R/\mathfrak{m}^i$, so gibt es unendlich viele, paarweise verschiedene Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ der Höhe 1, $Y = \{ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots \}$ ist eine Teilmenge von $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Spec}(R)$, aber nach ([8] Folgerung 1.6) existiert überhaupt kein R-Modul N mit $\mathrm{Koass}(N) = Y$. Ist schließlich X eine nichtleere Teilmenge von $\mathrm{Koass}(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}$, so gibt es, weil M reduziert ist, keinen Untermodul U von M mit $\mathrm{Koass}(U) = X$.

2) Definiert man die zwei folgenden Klassen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{A}'$ von R-Moduln durch $M \in \mathscr{A} \Longleftrightarrow$ *Zu jedem Ideal* $\mathfrak{a}$ *von* R *gibt es ein* $e \geqq 1$ *mit* $M[\mathfrak{a}^e] + \mathfrak{a} M = M$, $M \in \mathscr{A}' \Longleftrightarrow$ *Zu jedem Ideal* $\mathfrak{a}$ *von* R *gibt es ein* $e \geqq 1$ *mit* $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$, so gehört nach Punkt (c) jeder darstellbare R-Modul zu $\mathscr{A}$, und natürlich ist $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$. Der Hauptvorteil der Klasse $\mathscr{A}'$ ist, daß sie gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen ist (nicht aber $\mathscr{A}$, siehe Beispiel 3.5). Genauer zeigen wir in Abschnitt 4, daß für den Ring R äquivalent sind: (i) $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$. (ii) $\mathscr{A}$ ist gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen. (iii) $\dim (R) \leqq 1$. – Ist $M \in \mathscr{A}'$, folgt aus $M[x] = 0$ auch $xM = M$, d. h. auf M operiert jeder Nichtnullteiler bijektiv.

Lemma 1.7. *Sei* M *ein* R*-Modul und* S *eine multiplikative Teilmenge von* R*, so daß alle Elemente von* S *bijektiv auf* M *operieren. Genau dann ist* M *als* R*-Modul koprimär (darstellbar), wenn* M_S *als* R_S*-Modul koprimär (darstellbar) ist.*

Beweis. Bei beliebigem S ist die Abbildung $\mathrm{Att}_{R_S}(M_S) \ni \mathscr{P} \longmapsto \mathscr{P} \cap R \in \mathrm{Att}_R(M)$ wohldefiniert und injektiv. Falls also $M_S \neq 0$ und M $\mathfrak{p}$-koprimär ist, muß nach (1.1) $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ und M_S als R_S-Modul $\mathfrak{p} R_S$-koprimär sein (siehe auch [3] p. 27). Falls aber M eine Darstellung $M = U_1 + \ldots + U_n$ mit koprimären U_i besitzt, sind in $M_S = U_{1S} + \ldots + U_{nS}$ wie eben alle U_{iS} Null oder koprimär, so daß M_S auch als R_S-Modul darstellbar ist.

Operieren nun alle $s \in S$ bijektiv auf M, wird die obige Abbildung $\mathrm{Att}_{R_S}(M_S) \to \mathrm{Att}_R(M)$ auch surjektiv, und wieder mit (1.1) folgt die Behauptung über „koprimär". Hat aber M_S eine Darstellung $M_S = X_1 + \ldots + X_n$ mit koprimären R_S-Untermoduln X_i, folgt mit $U_i = \{ a \in M \mid \frac{a}{1} \in X_i \}$, daß $M = U_1 + \ldots + U_n$ ist, daß jedes U_i ein S-teilbarer Untermodul von M mit $U_{iS} \cong X_i$ ist, also wie eben U_i als R-Modul koprimär und damit M darstellbar ist.

Folgerung 1.8. *Jeder radikalvolle unzerlegbare* R*-Modul ist koprimär.*

Beweis. Ein Modul M heißt bekanntlich *unzerlegbar*, wenn $M \neq 0$ ist und aus $M = U_1 + U_2$ stets folgt $U_1 = M$ oder $U_2 = M$. In diesem Fall ist $\mathfrak{p} = \{ x \in R \mid x M \neq M \}$ ein Primideal und $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$, außerdem gibt es ein $\mathfrak{m} \in \Omega$ derart, daß für alle $0 \neq a \in M$ der Ring $R/\mathrm{Ann}_R(a)$ lokal mit dem einzigen maximalen Ideal $\overline{\mathfrak{m}}$ ist (siehe [7] p. 3). Damit erfüllt $S = R\backslash\mathfrak{m}$ die Voraussetzungen im Lemma, denn zu jedem $a \in M$ und $s \in S$ ist $(s) + \mathrm{Ann}_R(a) = R$, d.h. $a = r\,s\,a$ für ein $r \in R$. Ist M zusätzlich radikalvoll, zeigt die letzte Formel, daß auch M_S als R_S-Modul radikalvoll und unzerlegbar ist, mit $\mathrm{Koass}_{R_S}(M_S) = \{\mathscr{P}\}$ folgt jetzt, weil R_S lokal ist, nach ([8] Folgerung 1.3) $\mathscr{P}^e \cdot M_S = 0$, so daß M_S als R_S-Modul koprimär ist, also auch M als R-Modul.

Folgerung 1.9. *Sei M ein R-Modul von endlicher Goldie-Dimension, sei $\mathrm{Ass}(M)$ diskret und operiere auf M jeder Nichtnullteiler bijektiv. Dann gilt für jeden endlich erzeugten R-Modul A, daß $\mathrm{Hom}_R(A, M)$ darstellbar ist.*

Beweis. Jedes Element von $S = R\backslash\cup\mathrm{Ass}(M)$ operiert auf M bijektiv, also auch auf $H = \mathrm{Hom}_R(A, M)$. Nach dem Lemma genügt es zu zeigen, daß H_S als R_S-Modul artinsch ist: Klar ist auch M_S als R_S-Modul endlich-dimensional, und weil $\mathrm{Ass}(M)$ endlich und diskret ist, ist jedes $\mathscr{P} \in \mathrm{Ass}_{R_S}(M_S)$ ein maximales Ideal im Ring R_S, d.h. M_S halbartinsch. Nach Matlis ist deshalb M_S sogar artinsch, also auch $\mathrm{Hom}_{R_S}(A_S, M_S) \cong H_S$.

Folgerung 1.10. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R, M die injektive Hülle von $R/\mathfrak{p}$ und $S = R\backslash\mathfrak{p}$. Ein Untermodul U von M ist genau dann darstellbar, wenn U S-gesättigt in M ist.*

Beweis. Weil jedes $s \in S$ auf M bijektiv operiert, ist nach dem Schlangenlemma $(M/U)\,[s] \cong U/s\,U$. Allein aus $U \in \mathscr{A}'$ folgt daher, daß M/U S-torsionsfrei, d.h. U S-gesättigt in M ist, und aus dem letzteren folgt mit $A = R$ und U statt M in (1.9), daß U darstellbar ist. (Es entsprechen also die darstellbaren Untermoduln von M gerade den $R_\mathfrak{p}$-Untermoduln von $M_\mathfrak{p}$, und mit Hilfe von (1.1) sieht man jetzt sofort, daß die $\mathfrak{p}$-koprimären Untermoduln von M gerade den endlich erzeugten $R_\mathfrak{p}$-Untermoduln $\neq 0$ von $M_\mathfrak{p}$ entsprechen.)

2. Darstellbare Moduln von endlicher Goldie-Dimension

Auf jedem darstellbaren R-Modul M operieren die Nichtnullteiler bijektiv, und in Spezialfällen (siehe 1.9) ist diese Eigenschaft sogar charakteristisch. Im allgemeinen ist sie aber viel schwächer, z. B. besitzt sie über einem lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ jeder R-Modul M mit $L_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$. Definiert man die folgende Klasse $\mathscr{A}''$ von R-Moduln durch $M \in \mathscr{A}'' \Longleftrightarrow$ *Auf jedem Faktormodul von M operieren die Nichtnullteiler bijektiv,* so gilt nach der Bemerkung 2 zu (1.4) $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}''$, und das Hauptergebnis von Abschnitt 2 lautet, daß jeder Modul $M \in \mathscr{A}''$ von endlicher Goldie-Dimension bereits darstellbar ist. Zusätzlich wollen wir in (2.4) die Darstellbarkeit von M durch die Lage von M in seiner injektiven Hülle Q beschreiben. – Mit $L_x(M) = \sum_{i=1}^{\infty} M[x^i]$ gehört M genau dann zu $\mathscr{A}''$, wenn $L_x(M) + x M = M$ ist für alle $x \in R$, d. h. wenn es zu jedem $x \in R$ und $a \in M$ eine Gleichung $x^n(a - x\, b) = 0$ gibt mit $b \in M$, $n \geqq 1$. Aus dieser elementweisen Beschreibung folgt sofort, daß die Klasse $\mathscr{A}''$ gegenüber Gruppenerweiterungen und beliebigen direkten Summen abgeschlossen ist und jeder halbartinsche Modul (als Summe seiner artinschen Untermoduln) zu ihr gehört. – Auch für nichtzyklische Ideale $\mathfrak{a}$ definieren wir $L_{\mathfrak{a}}(M) = \sum_{i=1}^{\infty} M[\mathfrak{a}^i]$, und bekanntlich heißt M $\mathfrak{a}$-torsion (bzw. $\mathfrak{a}$-torsionsfrei), wenn $L_{\mathfrak{a}}(M) = M$ (bzw. $L_{\mathfrak{a}}(M) = 0$) ist.

Lemma 2.1. *Für jeden R-Modul $M \in \mathscr{A}''$ gilt:*

(a) $\cap \operatorname{Koass}(M) \subset \cap \operatorname{Ass}(M)$.

(b) *Jeder koatomare Faktormodul von M ist halbartinsch.*

(c) *Für jede Erweiterung $M \subset N$ und jedes zyklische Ideal $\mathfrak{a}$ von R gilt* $L_{\mathfrak{a}}(N/M) = (L_{\mathfrak{a}}(N) + M)/M$.

(d) *Ein Untermodul U von M gehört genau dann zu $\mathscr{A}''$, wenn für jedes zyklische Ideal $\mathfrak{a}$ von R gilt* $L_{\mathfrak{a}}(M/U) = (L_{\mathfrak{a}}(M) + U)/U$.

Beweis. (a) Zu $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$, also $R/\mathfrak{p} \cong U \subset M$, wähle man in der Menge $\{ V \subset M \mid V \cap U = 0 \}$ ein maximales Element V_0, und aus $\operatorname{Ass}(M/V_0) = \{ \mathfrak{p} \}$ folgt für jedes $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ nach Voraussetzung $s \cdot M/V_0 = M/V_0$, für jedes $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M/V_0)$ also $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, insbesondere $\cap \operatorname{Koass}(M) \subset \mathfrak{p}$.

(b) Man kann gleich M als koatomar annehmen, und wählt man zu $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ die Untermoduln U und V_o wie in (a), folgt aus Koass $(M/Vo) \subset \Omega$ speziell $\mathfrak{p} \in \Omega$.

(c) zu $\bar{a} \in L_x(N/M)$, d.h. $x^e\ a \in M$ für ein $e \geqq 1$, gibt es nach Voraussetzung eine Gleichung $x^n(x^e\ a - x^e\ b) = 0$ mit $b \in M$, $n \geqq 1$, und damit ist $a - b \in L_x(N)$, also $\bar{a} \in (L_x(N) + M)/M$.

(d) Gelte $L_\mathfrak{a}(M/U) = (L_\mathfrak{a}(M) + U)/U$ für alle zyklischen Ideale $\mathfrak{a}$. Um $U \in \mathcal{A}''$ zu zeigen, sei $x \in R$ und $a \in U$: Nach Voraussetzung gibt es eine Gleichung $x^n(a - x\ b) = 0$ mit $b \in M$, $n \geqq 1$, aus $\bar{b} \in L_x(M/U) = (L_x(M) + U)/U$ folgt $x^m(b - b_1) = 0$ mit $b_1 \in U$, $m \geqq n$, und daraus wie gewünscht $x^m(a - x\ b_1) = 0$. Die Umkehrung folgt sofort mit (c).

Die „Rechtsexaktheit“ von $L_\mathfrak{a}$ in Punkt (c) kann man nicht für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von R zeigen: In Beispiel (3.5) wird ein lokaler Integritätsring $(R, \mathfrak{m})$ und eine Erweiterung $M \subset N$ angegeben, in der M teilbar (also gewiß aus $\mathcal{A}''$) ist und $L_\mathfrak{m}(N) = 0$, $L_\mathfrak{m}(N/M) \neq 0$. Unter folgender Zusatzbedingung an $\mathrm{Ass}(M)$ erhält man aber:

Lemma 2.2. *Ist $M \in \mathcal{A}''$ und $\mathrm{Ass}(M)\setminus\Omega$ endlich, so gilt für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R:*
(a) *$L_\mathfrak{a}(M) + \mathfrak{a}M = M$.*
(b) *$L_\mathfrak{a}(N/M) = (L_\mathfrak{a}(N) + M)/M$ für jede Erweiterung $M \subset N$.*

Beweis. (a) folgt unmittelbar aus (b), denn mit $M_o = \mathfrak{a}\,M$ ist auch $M_o \in \mathcal{A}''$ (als Faktormodul von M'') und $\mathrm{Ass}(M_o)\setminus\Omega$ endlich, also $(L_\mathfrak{a}(M) + M_o)/M_o = L_\mathfrak{a}(M/M_o) = M/M_o$.

Beim Beweis von (b) sei im 1. Schritt sogar $\mathrm{Ass}(M)\setminus\Omega = \emptyset$, d.h. M halbartinsch. Dann gilt für jeden Untermodul U von M, daß $\mathrm{Ass}(M/L_\mathfrak{a}(M) + U) \subset \mathrm{Ass}(M/L_\mathfrak{a}(M))$, also $M/L_\mathfrak{a}(M) + U$ $\mathfrak{a}$-torsionsfrei ist, d.h. $L_\mathfrak{a}(M/U) = (L_\mathfrak{a}(M) + U)/U$. Um die entsprechende Formel für $M \subset N$ zu zeigen, sei $N_1/M = L_\mathfrak{a}(N/M)$ und V_o ein maximales Element in der Menge $\{\ V \subset N_1 \mid V \cap M = 0\ \}$. $\mathrm{Ass}(N_1/V_o) = \mathrm{Ass}(M) \subset \Omega$ zeigt, daß auch N_1/V_o halbartinsch, also nach dem vorhergehenden $L_\mathfrak{a}(N_1/V_o) + (M + V_o)/V_o = N_1/V_o$ ist. Mit $N_2/V_o = L_\mathfrak{a}(N_1/V_o)$ heißt das $N_2 + M = N_1$, und weil die kanonische Abbildung $N_2 \to N_2/V_o \times N_1/M$ injektiv ist, ist auch N_2 $\mathfrak{a}$-torsion, also $L_\mathfrak{a}(N_1) + M = N_1$.

Sei im 2. Schritt nur $M \in \mathcal{A}''$ und $\mathrm{Ass}(M)\setminus\Omega$ endlich. Für jedes $e \geqq 1$ sei $N_e/M = (N/M)\,[\mathfrak{a}^e]$, und könnten wir $L_\mathfrak{a}(N_e) + M = N_e$

zeigen, folgte aus $L_\mathfrak{a}(N) + M \supset N_e$ für alle $e \geqq 1$ auch $(L_\mathfrak{a}(N) + M)/M \supset \sum_{e=1}^{\infty} (N_e/M) = L_\mathfrak{a}(N/M)$ wie gewünscht. Statt N_e schreiben wir ab jetzt wieder N und wollen zusätzlich $\mathfrak{a}^e \cdot N/M = 0$ annehmen. Mit dem größten halbartinschen Untermodul $L(M) = \bigoplus L_\mathfrak{m}(M)$ von M ist nach Voraussetzung $\mathrm{Ass}(M/L(M))$ endlich, mit $M_1/L(M) = L_\mathfrak{a}(M/L(M))$ also auch $\mathrm{Ass}(M/M_1)$ endlich, und weil M/M_1 $\mathfrak{a}$-torsionsfrei ist, gibt es ein $x \in \mathfrak{a}$, das kein Nullteiler auf M/M_1 ist. Wegen $M \in \mathscr{A}''$ operiert x, also auch x^e bijektiv auf M/M_1, es folgt $\mathrm{Ext}_R^1(N/M, M/M_1) = 0$, und in $V/M_1 \oplus M/M_1 = N/M_1$ ist $\mathfrak{a}^e \cdot V/M_1 = 0$, also auch $V/L(M)$ $\mathfrak{a}$-torsion. Nach dem ersten Schritt ist $L_\mathfrak{a}(V) + L(M) = V$, also $L_\mathfrak{a}(V) + M = N$ wie gewünscht.

Bemerkung. Im Fall $\dim(R) \leqq 1$ ist die Zusatzbedingung an $\mathrm{Ass}(M)$ automatisch erfüllt, so daß für jeden R-Modul $M \in \mathscr{A}''$ die Punkte (a) und (b) gelten (siehe auch 3.9).

Lemma 2.3. *Ist U ein artinscher Untermodul von M und M/U darstellbar, so ist auch M darstellbar.*

Beweis. Sei zuerst M/U $\mathfrak{q}$-koprimär. Für ein Komplement V_0 von U in M, d.h. ein minimales Element in der Menge $\{ V \subset M \mid V + U = M \}$, gilt dann $\mathrm{Koass}(V_0) = \mathrm{Koass}(M/U) = \{ \mathfrak{q} \}$, insbesondere $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{q}^i V_0 = 0$. Aus $\mathfrak{q}^e \cdot M/U = 0$ folgt aber auch $\mathfrak{q}^e V_0 \subset U$, daraus $\mathfrak{q}^f V_0 = 0$ für ein $f \geqq e$, und nach (1.1) bedeutet das, daß V_0 $\mathfrak{q}$-koprimär ist, also mit U auch $V_0 + U = M$ darstellbar ist.

Ist M/U nur darstellbar, folgt mit einer Koprimärzerlegung $M/U = M_1/U + \ldots + M_n/U$, daß nach dem ersten Schritt alle M_i darstellbar sind, also auch $M = M_1 + \ldots + M_n$.

Satz 2.4. *Für einen R-Modul M von endlicher Goldie-Dimension sind äquivalent:*

(i) *M ist darstellbar.*

(ii) *$M \in \mathscr{A}''$.*

(iii) *Ist Q die injektive Hülle von M, so gilt $L_\mathfrak{a}(Q/M) = (L_\mathfrak{a}(Q) + M)/M$ für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von R.*

Beweis. (i $\to$ ii) ist klar, ebenso (ii $\to$ iii) nach (2.2, b), denn $\mathrm{Ass}(M)$ ist endlich. Weil Q als injektiver Modul zu $\mathscr{A}''$ gehört, folgt (iii $\to$ ii) nach (2.1, d), und es bleibt (ii $\to$ i) zu beweisen:

Wegen $M \in \mathscr{A}''$ operieren alle Elemente von $S = R \setminus \cup \operatorname{Ass}(M)$ auf M bijektiv, so daß es nach (1.7) genügt zu zeigen, daß M_S als R_S-Modul darstellbar ist. Klar ist M_S als R_S-Modul wieder aus $\mathscr{A}''$ und endlich-dimensional, außerdem der Ring R_S semilokal, so daß wir statt R_S wieder R schreiben und einen Induktionsbeweis über $n = \dim(R)$ führen können. Bei $n = 0$ ist M sogar artinsch. Bei $n \geqq 1$ betrachten wir zuerst $N = M/L(M)$ und $T = R \setminus \cup \operatorname{Ass}(N)$: Weil eine Primidealkette $\mathfrak{p}_o \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_n$ mit $\mathfrak{p}_n \cap T = \emptyset$ unmöglich ist (sonst wäre $\mathfrak{p}_n$ ein maximales Ideal in R und $\mathfrak{p}_n \in \mathit{Ass}(N)$), ist $\dim(R_T) < n$, also nach Induktion N_T als R_T-Modul darstellbar, so daß nach (1.7) auch $N = M/L(M)$ als R-Modul darstellbar ist. Weil aber $L(M)$ artinsch ist, folgt mit (2.3) die Darstellbarkeit von M.

Folgerung 2.5. *Sei M ein radikalvoller R-Modul, der der Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln genügt. Dann ist M darstellbar.*

Beweis. Nach ([7] Satz 2.3) ist M von endlicher Goldie-Dimension, und für jedes $x \in R$ ist die absteigende Folge $M \supset x\,M \supset x^2\,M \supset \ldots$ stationär, d.h. $M\,[x^e] + x\,M = M$ für ein $e \geqq 1$. Also ist $M \in \mathscr{A}''$, und (ii $\longrightarrow$ i) liefert die Behauptung.

Ein Modul M heißt bekanntlich *Minimax-Modul,* wenn M einen endlich erzeugten Untermodul B besitzt, so daß M/B artinsch ist. Dann sind in jeder absteigenden Folge $M \supset U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ von Untermoduln fast alle Faktoren U_i/U_{i+1} endlich erzeugt, so daß M insbesondere die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln erfüllt. Als Spezialfall von (2.5) erhält man also:

Folgerung 2.6. *Jeder radikalvolle Minimax-Modul ist darstellbar.*

3. Moduln, für die Att(M) diskret ist

Das Hauptergebnis dieses Abschnittes lautet, daß die in der Überschrift angegebenen Moduln darstellbar sind. Mit seiner Hilfe wird dann die Klasse aller darstellbaren R-Moduln im Falle $\dim(R) \leqq 1$ näher beschrieben.

Lemma 3.1. *Sei M ein R-Modul und* $\mathfrak{p} \in \mathit{Spec}(R)$ *gleichzeitig minimales und maximales Element von Att(M). Dann gilt für* $V = \cap \{ s\,M \mid s \in R \setminus \mathfrak{p} \}$*:*

(a) *V ist der größte $\mathfrak{p}$-koprimäre Untermodul von M.*
(b) *V ist das einzige Komplement von $\mathfrak{p}\, M$ in M.*
(c) *Es gibt ein $e \geqq 1$ mit $\mathfrak{p}^e M = \mathfrak{p}^{e+1} M$, und damit ist $V = Ann_R(\mathfrak{p}^e M) \cdot M$.*

Beweis. Weil R noethersch ist, gibt es ein $e \geqq 1$ mit $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{p}^e M) = \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{p}^{e+1} M)$, und wir behaupten, daß $\mathfrak{p}$ kein Primdivisor von $\mathfrak{c} = \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{p}^e M)$ sein kann: Andernfalls hätte man $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(\bar{r})$ für ein $\bar{r} \in R/\mathfrak{c}$, aus $\bar{r} \neq 0$ folgte $r \notin \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{p}^{e+1} M)$, d.h. $r\, t \notin \mathfrak{c}$ für ein $t \in \mathfrak{p}$, und das ist unmöglich.

Ist nun $\mathfrak{p}$ minimales und maximales Element von $\mathrm{Att}(M)$, folgt $\mathfrak{c}\, M + \mathfrak{p}\, M = M$: Andernfalls hätte man ein $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(M)$ mit $\mathfrak{c} + \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, aus $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ folgte $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{p}$, so daß $\mathfrak{p}$ auch minimal über $\mathfrak{c}$ wäre im Widerspruch zur Vorbemerkung. Insbesondere erhält man aus $\mathfrak{c}\, \mathfrak{p}^e M = 0$, daß $\mathfrak{p}^e M = \mathfrak{p}^{e+1} M$ ist. $\mathfrak{c}\, M$ ist sogar ein Komplement von $\mathfrak{p}\, M$, denn aus $X \subset \mathfrak{c}\, M$, $X + \mathfrak{p}\, M = M$ folgt $\mathfrak{c}\, X = \mathfrak{c}\, M$, also $X = \mathfrak{c}\, M$, und derselbe Beweis zeigt, daß $\mathfrak{c}\, M$ das einzige Komplement von $\mathfrak{p}\, M$ ist. Wegen $\mathrm{Koass}(\mathfrak{c}\, M) = \mathrm{Koass}(M/\mathfrak{p}\, M) = \{\, \mathfrak{p} \,\}$ ist $\mathfrak{c}\, M$ nach (1.1) $\mathfrak{p}$-koprimär, insbesondere $\mathfrak{c}\, M \subset V$, und wegen $\mathfrak{c} \not\subset \mathfrak{p}$ hat man noch ein $s_0 \in \mathfrak{c} \cap R \backslash \mathfrak{p}$, so daß aus $V \subset s_0\, M \subset \mathfrak{c}\, M$ folgt $V = \mathfrak{c}\, M$ und alle drei Punkte bewiesen sind.

Satz 3.2. *Ist $Att(M)$ diskret, so ist M darstellbar. Genauer gilt bei $M \neq 0$: Sind $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k$ die paarweise verschiedenen Elemente von $Att(M)$, so ist $V_i = \cap \{\, s\, M \mid s \in R \backslash \mathfrak{q}_i \,\}$ der größte $\mathfrak{q}_i$-koprimäre Untermodul von M $(1 \leqq i \leqq k)$ und es ist $M = V_1 + \ldots + V_k$.*

Beweis. Nach (3.1, a) ist nur noch die letzte Behauptung zu zeigen, und dazu sei $M' = V_1 + \ldots + V_k$. Nach (3.1, b) gilt $V_i + \mathfrak{q}_i M = M$ für alle i, mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_k$ also $M' + \mathfrak{a}\, M = M$. Aus $\mathfrak{a} \subset \cap\, \mathrm{Att}(M) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$ folgt aber $\mathfrak{a}^n M = 0$ für ein $n \geqq 1$, also $M' = M$.

Zusatz. *Ist $Att(M)$ diskret und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R, so hat $\mathfrak{a}M$ genau ein Komplement V in M, nämlich $V = Ann_R(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i M) \cdot M$. Speziell ist $Ann_R(P(M)) \cdot M \oplus P(M) = M$.*

Beweis. Weil M darstellbar ist, gibt es ein $e \geqq 1$ mit $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$, so daß $\mathfrak{a}\, M$ und $U = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i M = \mathfrak{a}^e M$ dieselben Summanden in M haben. Mit $V = \mathrm{Ann}_R(U) \cdot M$ folgt $V + U = M$: Andernfalls hätte man ein $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(M)$ mit $\mathrm{Ann}_R(U) + \mathfrak{a}^e \subset \mathfrak{q}$, es folgte $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(U)$ (weil

$\mathfrak{q}$ minimal über $\mathrm{Ann}_R(U)$ ist) sowie $\mathfrak{q}\, U = U$, und das ist unmöglich. Für jeden weiteren Summanden X von U in M gilt aber $\mathrm{Ann}_R(U) \cdot X = \mathrm{Ann}_R(U) \cdot M$, also $V \subset X$, so daß V wie behauptet das einzige Komplement von U in M ist.

Speziell zu $P(M)$ gibt es nach (1.5) ein Ideal $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b}\, M = \mathfrak{b}^2\, M = \ldots = P(M)$, so daß nach dem vorhergehenden $V = \mathrm{Ann}_R(P(M)) \cdot M$ das einzige Komplement von $P(M)$ in M ist. Bleibt $V \cap P(M) = 0$ zu zeigen: Bei $\mathrm{P}(M) = 0$ oder $P(M) = M$ ist das klar, im nichttrivialen Fall aber wähle man die Numerierung der $\mathfrak{q}_i$ in (3.2) so, daß die $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s \in \Omega$ sind und die $\mathfrak{q}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{q}_k \notin \Omega$. Mit $A = V_1 + \ldots + V_s$ und $B = V_{s+1} + \ldots + V_k$ gilt dann $A + B = M$ und $\mathrm{Ann}_R(A) + \mathrm{Ann}_R(B) = R$, also sogar $A \oplus B = M$. Es folgt $B = P(M)$ und $\mathrm{Ann}_R(P(M)) \cdot A = V$, also auch $A = V$ wie gewünscht.

Lemma 3.3. *Sei U ein Untermodul von M, so daß U und M/U darstellbar sind. Gelte zusätzlich, daß aus $\mathfrak{p} \in Koass(U)$, $\mathfrak{q} \in Koass(M/U)$ und $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ stets folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Dann ist auch M darstellbar.*

Beweis. Sei zuerst M/U $\mathfrak{q}$-koprimär. Falls $\mathfrak{q} \notin \mathrm{Koass}(U)$, folgt mit $V = \mathrm{Ann}_R(U) \cdot M$, daß $V + U = M$ ist: Andernfalls hätte man $\mathrm{Ann}_R(U) \subset \mathfrak{q}$, dazu einen minimalen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von $\mathrm{Ann}_R(U)$ mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(U) = \mathrm{Koass}(U)$ lieferte nach Voraussetzung $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, entgegen der Annahme. Nun gibt es aber einen Epimorphismus $(M/U)^m \to \mathrm{Ann}_R(U) \cdot M$, so daß mit M/U auch V $\mathfrak{q}$-koprimär ist, also $V + U = M$ wie behauptet darstellbar. Falls $\mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}(U)$, gibt es nach (1.4, b) einen darstellbaren Untermodul U_1 von U mit $\mathrm{Koass}(U_1) = \mathrm{Koass}(U) \setminus \{\mathfrak{q}\}$, $\mathrm{Koass}(U/U_1) = \{\mathfrak{q}\}$. Nach (1.2, b) ist dann M/M_1 $\mathfrak{q}$-koprimär, aus $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(U_1)$, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ folgt stets $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, so daß wegen $\mathfrak{q} \notin \mathrm{Koass}(U_1)$ nach dem ersten Fall M wieder darstellbar ist.

Ist nun M/U darstellbar $\neq 0$, wähle man eine Koprimärzerlegung $M/U = M_1/U + \ldots + M_n/U$, in der kein M_i/U überflüssig ist. Für $\mathrm{Koass}(M_i/U) = \{\mathfrak{q}_i\}$ gilt dann $\mathfrak{q}_i \in \mathrm{Koass}(M/U)$ nach dem Beweis von (1.4, a), so daß aus $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(U)$, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}_i$ stets folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_i$. Nach dem ersten Teil sind daher alle M_i darstellbar, also auch $M = M_1 + \ldots + M_n$.

Die Zusatzbedingung im Lemma ist z. B. dann erfüllt, wenn $\mathrm{Koass}(U)$ nur aus maximalen Idealen besteht, d. h. man erhält als Spezialfall:

Folgerung 3.4. *Sei U ein Untermodul von M, so daß $R/Ann_R(U)$ artinsch und M/U darstellbar ist. Dann ist auch M darstellbar.*

Daß man ohne die Zusatzbedingung in (3.3) nicht auskommt, zeigt das folgende Beispiel 3.5. Sei R ein lokaler Integritätsring mit $\dim(R) = 2$, sei $k = R/\mathfrak{m}$ der Restklassenkörper, K der Quotientenkörper und T die globale Transformation von R, d. h. $T/R = L_{\mathfrak{m}}(K/R)$. Dann ist $\mathrm{Ext}_R^i(k, T) = 0$ für $i = 0,1$ und $\mathrm{Ext}_R^2(k, T) \neq 0$, also auch $\mathrm{Ext}_R^1(k, K/T) \neq 0$, d. h. es gibt eine nicht-zerfallende exakte Folge

$$0 \to K/T \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} k \to 0,$$

in der dann $U = Bi\,\alpha$ 0-koprimär und M/U $\mathfrak{m}$-koprimär ist. Weil aber U nicht direkter Summand, also groß in M ist, folgt aus $L_{\mathfrak{m}}(K/T) = 0$ auch $L_{\mathfrak{m}}(M) = 0$, insbesondere $M[\mathfrak{m}^e] + \mathfrak{m}M \neq M$ für alle $e \geqq 1$, so daß M nicht darstellbar ist. (Genauer ist $M \notin \mathscr{A}$, aber natürlich $M \in \mathscr{A}'$. Die Ungleichung $L_{\mathfrak{m}}(M) + \mathfrak{m}M \neq M$ und (2.2, a) zeigen überdies, daß $\mathrm{Ass}(M)$ unendlich sein muß. Tatsächlich gehört jedes Primideal der Höhe 1 zu $\mathrm{Ass}(K/T)$, und davon gibt es nach dem Krull'schen Hauptidealsatz unendlich viele).

Satz 3.6. *Ist $\dim(R) \leqq 1$, so gilt:*

(a) *Jeder radikalvolle R-Modul ist darstellbar.*

(b) *Ist M darstellbar und U ein Untermodul von M mit $So(M/U) = 0$, so ist auch U darstellbar.*

(c) *Ist U ein Untermodul von M, so daß U und M/U darstellbar sind, so ist auch M darstellbar.*

Beweis. (a) Ist M radikalvoll, hat jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(M)$ die Höhe Null, so daß M nach (3.2) darstellbar ist.

(b) Sei zuerst M radikalvoll und $\mathrm{So}(M/U) = 0$. Dann ist auch U radikalvoll, denn zu jedem $\mathfrak{m} \in \Omega$ gibt es ein $r \in \mathfrak{m}$ derart, daß $R/(r)$ artinsch ist, und aus $r\,M = M$, $(M/U)[r] = 0$ folgt dann $r\,U = U$, also erst recht $\mathfrak{m}U = U$. Ist aber M nur darstellbar, also $M[\mathfrak{b}] + P(M) = M$ wie in (1.5), folgt wegen $M[\mathfrak{b}] \subset U$ auch $U[\mathfrak{b}] + P(M) \cap U = U$, darin ist $P(M) \cap U$ nach dem ersten Schritt radikalvoll (also gleich $P(U)$), und mit (a) folgt die Behauptung.

(c) Wie in den Beweisen von (2.3) und (3.3) kann man gleich M/U als $\mathfrak{q}$-koprimär annehmen. Falls $\mathfrak{q} \notin \Omega$, ist die Zusatzbedingung in (3.3) erfüllt, also M darstellbar. Falls $\mathfrak{q} \in \Omega$, gibt es ein Ideal $\mathfrak{b}$, so daß $R/\mathfrak{b}$ artinsch und $P(M) = \mathfrak{b}\,M$ ist (weil das nach (1.5) für U gilt und

$\mathfrak{q}^e \cdot M/U = 0$ ist), dazu ein $r \in \mathfrak{b}$, so daß auch $R/(r)$ artinsch ist, und es folgt $P(M) = r\,M = r^2\,M$, $M[r] + P(M) = M$, also wieder mit (a) die Behauptung.

Zusatz. *Jede der drei Aussagen im Satz ist charakteristisch für* $\dim(R) \leqq 1$. *Betrachten wir zum Beweis etwas allgemeiner die folgenden drei Ringeigenschaften:* (α) *Jeder radikalvolle R-Modul gehört zu* $\mathscr{A}''$. (β) *Ist M ein injektiver R-Modul und U ein Untermodul von M mit* $So(M/U) = 0$, *so folgt* $U \in \mathscr{A}''$. (γ) *Ist M ein R-Modul, U ein maximaler Untermodul von M und U darstellbar, so folgt* $M \in \mathscr{A}$. *Dann behaupten wir, daß aus jeder von ihnen* $\dim(R) \leqq 1$ *folgt.*

Beweis. (α) Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus \Omega$ und M die injektive Hülle von $R/\mathfrak{p}$. Mit $S = R \setminus \mathfrak{p}$ ist dann M_S als R_S-Modul artinsch, d. h. M erfüllt die Minimalbedingung für S-gesättigte Untermoduln. Nach Voraussetzung ist nun jeder radikalvolle Untermodul U von M S-teilbar, d. h. S-gesättigt in M, und die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln impliziert nach ([7] Satz 2.3) $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$.

(β) Sind $\mathfrak{p}$, M und S wie in Teil (α), so ist jetzt jeder Untermodul U von M, mit $So(M/U) = 0$, nach Voraussetzung S-gesättigt in M. Aus der Minimalbedingung für Untermoduln U mit $So(M/U) = 0$ folgt aber nach ([7] Satz 1.6) $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$.

(γ) Wir zeigen im 1. Schritt für jeden darstellbaren R-Modul A: Ist $A[\mathfrak{m}] = 0$ für ein $\mathfrak{m} \in \Omega$, folgt $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, A) = 0$ für alle $i \geqq 1$. Bei $i = 1$ gilt nämlich für jede Erweiterung $A \subset B$ mit $B/A \cong R/\mathfrak{m}$, daß nach Voraussetzung $B \in \mathscr{A}$, insbesondere $B[\mathfrak{m}^e] + \mathfrak{m}\,B = B$ ist für ein $e \geqq 1$, und weil A $\mathfrak{m}$-teilbar, also schon $A = \mathfrak{m}\,B$ ist, folgt $B[\mathfrak{m}^e] \oplus A = B$ wie verlangt. Bei $i > 1$ wähle man eine injektive Hülle $A \subset Q$, für die ebenfalls $Q[\mathfrak{m}] = 0$ ist, mit $\operatorname{Ext}^1_R(R/\mathfrak{m}, A) = 0$ folgt $(Q/A)[\mathfrak{m}] = 0$, so daß für den darstellbaren Modul Q/A nach Induktion $\operatorname{Ext}^{i-1}_R(R/\mathfrak{m}, Q/A) = 0$ ist, also $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, A) = 0$ wie behauptet.

Sei im 2. Schritt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus \Omega$, M die injektive Hülle von $M_0 = R/\mathfrak{p}$ und $M_0 \subset U \subset M$ definiert durch $U/M_0 = L(M/M_0)$. Für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ ist dann $(M/U)[\mathfrak{m}] = 0$, also nach dem ersten Schritt $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M/U) = 0$ für alle $i \geqq 1$. Aus $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, U) = 0$ für alle $i \geqq 0$ folgt aber nach Foxby ([1] Corollary 1.5) $\mathfrak{m}\,U = U$. Damit ist U radikalvoll, und weil U Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen halbartinschen Modul ist, folgt nach ([7] Lemma 1.1, e) $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$.

Folgerung 3.7. *Ist $\dim(R) \leqq 1$ und M ein radikalvoller, sockelfreier R-Modul $\neq 0$, so gilt mit den Bezeichnungen von (3.2) $M = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$.*

Beweis. Auch ohne Bedingung an den Sockel gilt mit $U_i = V_1 + \ldots + \widehat{V_i} + \ldots + V_k$, daß $V_i \cap U_i$ halbartinsch ist, denn aus $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(V_i \cap U_i)$ folgt $\mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}_j \subset \mathfrak{p}$ für ein $j \neq i$, also $h(\mathfrak{p}) \neq 0$, $\mathfrak{p} \in \Omega$. Bei $\mathrm{So}(M) = 0$ ist also die Summe $M = V_1 + \ldots + V_k$ direkt.

Durch einfaches Zusammenfassen von (3.6, a) mit (3.4) und (2.2, a) erhält man schließlich die beiden folgenden Charakterisierungen:

Folgerung 3.8. *Ist $\dim(R) \leqq 1$, so ist ein R-Modul M genau dann darstellbar, wenn M einen Untermodul U besitzt, so daß $R/\mathrm{Ann}_R(U)$ artinsch und M/U radikalvoll ist.*

Folgerung 3.9. *Ist $\dim(R) \leqq 1$, so gehört ein R-Modul M genau dann zur Klasse $\mathcal{A}''$, wenn $M/L(M)$ radikalvoll ist.*

4. Die Klasse $\mathcal{A}'$

Wählt man in einem darstellbaren Modul $M \neq 0$ eine Koprimärzerlegung $M = U_1 + \ldots + U_n$ derart, daß kein U_i überflüssig ist, so erhält man mit $M_i = U_1 + \ldots + U_i$ eine Folge von Untermoduln $0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq M_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq M_n = M$, in der alle Faktoren M_i/M_{i-1} koprimär sind. Es erhebt sich die Frage, wann ein R-Modul M solch eine Kompositionsreihe mit koprimären Faktoren besitzt. Nach dem Beispiel in (3.5) braucht M nicht darstellbar zu sein, aber es ist sofort zu sehen, daß $\mathrm{Koass}(M)$ endlich ist und daß es zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ von R ein $e \geqq 1$ gibt mit $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$, d.h. $M \in \mathcal{A}'$ ist. Wir zeigen in (4.2), daß diese beiden Bedingungen auch hinreichend sind und fügen eine weitere Charakterisierung durch die Untermoduln $H_{\mathfrak{G}}(M) = \cap \{\mathfrak{a}M \mid \mathfrak{a} \in \mathfrak{G}\}$ ($\mathfrak{G}$ eine Gabriel-Topologie auf R) hinzu. Im Rest dieses Abschnittes untersuchen wir die Klasse $\mathcal{A}'$ speziell über 1-dimensionalen Ringen, zeigen, daß sie dort mit $\mathcal{A}$ übereinstimmt und geben eine explizite Beschreibung ihrer Elemente an (4.7).

Lemma 4.1. *Für jeden R-Modul $M \in \mathcal{A}'$ gilt:*
(a) *Jedes attachierte Primideal ist Durchschnitt von koassoziierten.*

(b) *Ist $\mathfrak{G}$ eine Gabriel-Topologie auf R und ist Koass(M) $\cap\, \mathfrak{G}$ endlich, so gibt es ein $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$ mit $H_{\mathfrak{G}}(M) = \mathfrak{b} M$.*

(c) *Ist M durch fast alle maximalen Ideale teilbar, so gibt es ein Ideal $\mathfrak{b}$ von R, so daß $R/\mathfrak{b}$ artinsch ist und $P(M) = \mathfrak{b} M$.*

Beweis. (a) Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(M)$, d. h. $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(\overline{M})$ mit $\overline{M} = M/U$. Zu $\mathfrak{a} = \cap\, \mathrm{Koass}(\overline{M})$ gibt es ein $e \geqq 1$ mit $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$, aus $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i \overline{M} = 0$ folgt $\mathfrak{a}^e \overline{M} = 0$, und in $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ gilt dann Gleichheit.

(b) Falls Koass(M) $\cap\, \mathfrak{G} = \emptyset$, gilt $\mathfrak{a} M = M$ für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$, und man kann $\mathfrak{b} = R$ wählen. Falls Koass(M) $\cap\, \mathfrak{G} = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n\}$ (paarweise verschieden), gilt nach Voraussetzung $\mathfrak{q}_i^e M = \mathfrak{q}_i^{e+1} M$ $(1 \leqq i \leqq n)$ für ein gemeinsames $e \geqq 1$, und dann leistet $\mathfrak{b} = (\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_n)^e \in \mathfrak{G}$ das Gewünschte: Klar ist $H_{\mathfrak{G}}(M) \subset \mathfrak{b} M$, und für die Inklusion $\supset$ sei $\mathfrak{a} \ni \mathfrak{G}$, $\mathfrak{a} M \neq M$. Dann ist Koass($M/\mathfrak{a} M$) $= \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\}$ mit paarweise verschiedenen $\mathfrak{p}_j \in \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n\}$, also $\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_n \subset \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_s$, außerdem $\bigcap_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/\mathfrak{a} M)}$ nach (a), also $(\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_s)^{em} \subset \mathrm{Ann}_R(M/\mathfrak{a} M)$ für ein $m \geqq 1$, und zusammen folgt $\mathfrak{b}^m M \subset \mathfrak{a} M$. Nun ist aber $\mathfrak{q}_i\, \mathfrak{b} M = \mathfrak{b} M$ für alle $1 \leqq i \leqq n$, also schließlich $\mathfrak{b}^2 M = \mathfrak{b} M$, und $\mathfrak{b} M \subset \mathfrak{a} M$ war zu zeigen.

(c) Für die Gabriel-Topologie $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{a} \subset R \mid R/\mathfrak{a}$ ist artinsch$\}$ gilt stets $P(M) \subset H_{\mathfrak{G}}(M)$. Nach Voraussetzung ist Koass(M) $\cap\, \mathfrak{G}$ endlich, also nach (b) $H_{\mathfrak{G}}(M) = \mathfrak{b} M$ für ein $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$, und weil dann $\mathfrak{b} M$ radikalvoll ist, folgt $P(M) = \mathfrak{b} M$.

Satz 4.2. *Für einen R-Modul $M \neq 0$ sind äquivalent:*

(i) *M besitzt eine Folge von Untermoduln $0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq M_n = M$, in der alle Faktoren M_i/M_{i-1} koprimär sind.*

(ii) *$M \in \mathscr{A}'$ und Koass(M) ist endlich.*

(iii) *Zu jeder Gabriel-Topologie $\mathfrak{G}$ auf R gibt es ein $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$ mit $H_{\mathfrak{G}}(M) = \mathfrak{b} M$.*

Erfüllt M diese äquivalenten Bedingungen, so ist Koass(M) $=$ Att(M), und für jedes minimale Element $\mathfrak{p}$ von Att(M) gilt, daß $V = \cap \{s M \mid s \in R \setminus \mathfrak{p}\}$ der größte $\mathfrak{p}$-koprimäre Untermodul von M ist.

Beweis. (i $\to$ ii) Jeder koprimäre Modul gehört zu $\mathscr{A}'$, und weil $\mathscr{A}'$ gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen ist, folgt $M \in \mathscr{A}'$. Mit Koass(M_i/M_{i-1}) $= \{\mathfrak{p}_i\}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ gilt auch Koass(M) $\subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$. (ii $\to$ i) Nach (4.1, a) ist Att(M) $=$ Koass(M), so daß wir einen Induktionsbeweis über $d = |\mathrm{Att}(M)|$ führen können. Bei

$d = 1$ ist M nach (1.1) selbst koprimär. Bei $d > 1$ wähle man ein maximales Element $\mathfrak{q}$ in $\mathrm{Att}(M)$, und mit $M' = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{q}^i M = \mathfrak{q}^e M$ ist dann M/M' nach (1.2, a) koprimär, während M' als Faktormodul von M^m wieder aus $\mathscr{A}'$ ist mit $\mathrm{Att}(M') \subset \mathrm{Att}(M)$. Wegen $\mathfrak{q} \notin \mathrm{Att}(M')$ ist diese Inklusion echt, so daß es nach Induktion eine Folge $0 = M_o \subsetneqq M_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq M_{n-1} = M'$ gibt mit koprimären M_i/M_{i-1}.

(ii $\rightarrow$ iii) Das ist ein Spezialfall von (4.1, b). (iii $\rightarrow$ ii) Es ist $M \in \mathscr{A}'$, denn für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ enthält die von $\mathfrak{a}$ erzeugte Gabriel-Topologie $\mathfrak{G}$ (siehe [5] p. 150) nach Voraussetzung ein Ideal $\mathfrak{b}$ mit $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i M = \mathfrak{b} M$, und mit $\mathfrak{a}^e \subset \mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$. Mittels der Abbildung $\mathrm{Spec}(R) \ni \mathfrak{p} \mapsto h(\mathfrak{p}) \in N$ sieht man, daß eine Teilmenge Y von $\mathrm{Spec}(R)$ genau dann endlich ist, wenn jede diskrete Teilmenge von Y endlich ist. Wäre also $\mathrm{Koass}(M)$ nicht endlich, gäbe es paarweise unvergleichbare $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots \in \mathrm{Koass}(M)$, und die von den $\mathfrak{p}_i$ erzeugte Gabriel-Topologie $\mathfrak{G}$ enthielte nach Voraussetzung ein Ideal $\mathfrak{b}$ mit $H_{\mathfrak{G}}(M) = \mathfrak{b} M$. Mit $(\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_m)^e \subset \mathfrak{b}$ folgte $\mathfrak{p}_{m+1} \mathfrak{b} M = \mathfrak{b} M$, also $\mathfrak{p}_{m+1} \notin \mathrm{Koass}(\mathfrak{b} M)$, $\mathfrak{p}_{m+1} \in \mathrm{Koass}(M/\mathfrak{b} M)$, daraus $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}_{m+1}$, $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_{m+1}$ für ein $i \ni \{1, \ldots, m\}$, und das ist der gewünschte Widerspruch.

Im Zusatz haben wir $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Att}(M)$ bereits bewiesen. Ist aber $\mathfrak{p}$ ein minimales Element von $\mathrm{Att}(M)$ und $S = R \setminus \mathfrak{p}$, folgt für die Gabriel-Topologie $\mathfrak{G} = \{ \mathfrak{a} \subset R \mid \mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset \}$ und $V = H_{\mathfrak{G}}(M)$, daß es ein $s_o \in S$ gibt mit $V = s_o M$. Damit ist V S-teilbar $\neq 0$, für jedes $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(V)$ ist $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$ und $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(M)$, so daß in $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ Gleichheit gilt, und $\mathrm{Att}(V) = \{ \mathfrak{p} \}$ bedeutet nach (1.1), daß V $\mathfrak{p}$-koprimär ist. Weil schließlich jeder $\mathfrak{p}$-koprimäre Untermodul von M S-teilbar ist, also in V liegt, ist alles gezeigt. (Unter der stärkeren Voraussetzung, daß M darstellbar ist, wurde die letzte Aussage über $V = \cap\, s M$ auch in ([2] p. 574 und [3] p. 31) bewiesen.)

Folgerung 4.3. *Besitzt ein R-Modul M die Minimalbedingung für alle Untermoduln der Form $U = \mathfrak{a} M$, so erfüllt M die äquivalenten Bedingungen in (4.2).*

Beweis. Um (iii) zu zeigen, wähle man in der Menge $\{ \mathfrak{a} M \mid \mathfrak{a} \in \mathfrak{G} \}$ ein minimales Element $\mathfrak{a}_o M$, und dafür folgt $H_{\mathfrak{G}}(M) = \mathfrak{a}_o M$.

Um die Klasse $\mathscr{A}'$ näher zu beschreiben, müssen wir als erstes zeigen, daß die Bedingung $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$ nicht für alle Ideale $\mathfrak{a}$ zu testen ist:

Lemma 4.4. *Für einen R-Modul M sind äquivalent:*
(i) $M \in \mathscr{A}'$.
(ii) *Zu jedem* $x \in R$ *gibt es ein* $e \geqq 1$ *mit* $x^e M = x^{e+1} M$.
(iii) *Zu jedem* $\mathfrak{p} \in Att(M)$ *gibt es ein* $e \geqq 1$ *mit* $\mathfrak{p}^e M = \mathfrak{p}^{e+1} M$.

Beweis. Klar ist (i $\to$ ii) und (i $\to$ iii), und zur Umkehrung betrachten wir für einen beliebigen R-Modul M die Idealmenge $\Delta(M) = \{ \mathfrak{a} \subset R \mid$ es gibt ein $e \geqq 1$ mit $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M \}$. Für sie gelten folgende Rechenregeln, deren Beweis dem Leser überlassen sei: ① $\mathfrak{a} \in \Delta(M) \Longleftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} \in \Delta(M) \Longleftrightarrow \mathfrak{a} + \mathrm{Ann}_R(M) \in \Delta(M)$. ② $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \Delta(M) \Rightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{b}, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \in \Delta(M)$. Bei (ii $\to$ i) ist also $\mathfrak{a} \in \Delta(M)$ für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von R zu zeigen, und das geht durch Induktion über die Erzeugendenanzahl sofort mit ②. Bei (iii $\to$ i) nehmen wir $M \notin \mathscr{A}'$ an, und dann hat die Menge aller Ideale $\mathfrak{a} \notin \Delta(M)$ ein maximales Element $\mathfrak{a}_o$. Nach ① ist $\mathfrak{a}_o \subsetneqq \sqrt{\mathfrak{a}_o}$ unmöglich, in $\mathfrak{a}_o = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n$ muß dann nach ② ein $\mathfrak{p}_j$ mit $\mathfrak{a}_o$ übereinstimmen, d. h. $\mathfrak{a}_o$ ist ein Primideal. Für $\mathfrak{b}_o = \mathrm{Ann}_R(M/\mathfrak{a}_o M)$ gilt nun $\mathfrak{a}_o M = \mathfrak{b}_o M$, also auch $\mathfrak{b}_o \notin \Delta(M)$, so daß in $\mathfrak{a}_o \subset \mathfrak{b}_o$ Gleichheit folgt, und $\mathfrak{a}_o \in \mathrm{Att}(M) \setminus \Delta(M)$ steht im Widerspruch zur Voraussetzung (iii).

Zusatz. *In (iii) genügt es, alle* $\mathfrak{p} \in Att(M)$ *zu testen, die* n i c h t *minimal über* $Ann_R(M)$ *sind.*

Beweis. Ist $M \neq 0$, so zeigen wir zuerst für jeden minimalen Primdivisor $\mathfrak{q}$ von $\mathrm{Ann}_R(M)$, daß $\overline{M} = M/\mathfrak{q}M$ aus $\mathscr{A}'$ ist: Nach (4.4) ist nur $\mathfrak{p} \in \Delta(\overline{M})$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(\overline{M})$ zu zeigen, und bei $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ ist sogar $\mathfrak{p}\overline{M} = 0$, bei $\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{p}$ gilt nach Voraussetzung $\mathfrak{p}^e M = \mathfrak{p}^{e+1} M$ für ein $e \geqq 1$, also auch $\mathfrak{p}^e \overline{M} = \mathfrak{p}^{e+1} \overline{M}$.

Seien nun $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ alle minimalen Primdivisoren von $\mathrm{Ann}_R(M)$. Dann gibt es ein $m \geqq 1$ mit $(\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_n)^m \subset \mathrm{Ann}_R(M)$, und weil alle $M/\mathfrak{q}_i M$ aus $\mathscr{A}'$ sind, gilt das auch für $M/(\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_n)^m M$, d. h. für M.

Folgerung 4.5. *Sei* $dim(R) \leqq 1$, *M ein R-Modul und U ein Untermodul von M.*
(a) *Genau dann ist* $M \in \mathscr{A}'$, *wenn es zu jedem maximalen Ideal* $\mathfrak{m}$ *von R ein* $e \geqq 1$ *gibt mit* $\mathfrak{m}^e M = \mathfrak{m}^{e+1} M$.
(b) *Ist* $M \in \mathscr{A}'$ *und* $So(M/U) = 0$, so ist auch $U \in \mathscr{A}'$.

Beweis. (a) folgt unmittelbar aus dem Zusatz, und auch in (b) ist nur jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ zu testen: Es gibt ein $r \in \mathfrak{m}$, so daß $R/(r)$ artinsch ist, dazu ein $n \geqq 1$ mit $r^n M = r^{n+1} M$, und wegen $(M/U)[r^{n+1}] = 0$ folgt $r^n U = r^{n+1} U$. Weil aber $U_1 = U[r^n]$ darstellbar ist, gibt es ein $e \geqq 1$ mit $U_1[\mathfrak{m}^e] + \mathfrak{m}\, U_1 = U_1$, und aus $U_1 + r\, U = U$ folgt $U[\mathfrak{m}^e] + \mathfrak{m}\, U = U$, $\mathfrak{m}^e\, U = \mathfrak{m}^{e+1}\, U$ wie gewünscht. (Beide Aussagen sind charakteristisch für $\dim(R) \leqq 1$, wie die Zusätze (α) und (β) nach (3.6) zeigen.)

Lemma 4.6. *Sei U ein koatomarer Untermodul von M und sei $U \in \mathscr{A}'$, $M/U \in \mathscr{A}$. Dann folgt $M \in \mathscr{A}$.*

Beweis. Wir zeigen im 1. Schritt für einen beliebigen R-Modul M: Ist $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$ koatomar, so folgt bereits $M[\mathfrak{a}^e] \oplus \mathfrak{a}^e M = M$. Zum Beweis sei $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^e = (x_1, \ldots, x_m)$. Dann gibt es einen Monomorphismus $M/M[\mathfrak{b}] \to (\mathfrak{b}\, M)^m$, und weil das Ziel koatomar und $\mathfrak{b}$-teilbar ist, sind auch alle Untermoduln $\mathfrak{b}$-teilbar ([6] Lemma 1.1), insbesondere $M/M[\mathfrak{b}]$, d.h. es ist $M[\mathfrak{b}] + \mathfrak{b}\, M = M$. Auch $M[\mathfrak{b}] \cap \mathfrak{b}\, M$ ist $\mathfrak{b}$-teilbar, außerdem durch $\mathfrak{b}$ annulliert, also wie behauptet Null.

Sei im 2. Schritt $U \subset M$ wie angegeben. Zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ von R hat man ein $e \geqq 1$ mit $\mathfrak{a}^e U = \mathfrak{a}^{e+1} U$, weiter ein $f \geqq 1$ mit $(M/U)[\mathfrak{a}^f] + \mathfrak{a} \cdot M/U = M/U$, und mit $(M/U)[\mathfrak{a}^f] = M_1/U$ folgt $\mathfrak{a}^f M_1 \subset U$, $\mathfrak{a}^{e+f} M_1 = \mathfrak{a}^{e+f+1} M_1$. Nach dem ersten Schritt bedeutet das $M_1[\mathfrak{a}^{e+f}] \oplus \mathfrak{a}^{e+f} M_1 = M_1$, und Addition von $\mathfrak{a}\, M$ liefert $M_1[\mathfrak{a}^{e+f}] + \mathfrak{a}\, M = M$.

Satz 4.7. *Ist $\dim(R) \leqq 1$, so sind für einen R-Modul äquivalent:*

(i) *$M \in \mathscr{A}'$.*

(ii) *$M \in \mathscr{A}$.*

(iii) *M besitzt einen koatomaren, halbartinschen Untermodul U, so daß M/U radikalvoll ist.*

Beweis. Klar ist (ii → i), und bei (i → iii) ist nach (4.5, b) auch $L(M) \in \mathscr{A}'$. Mit $\Omega = \{\, \mathfrak{m}_i \mid i \in I \,\}$, $X_i = L_{\mathfrak{m}_i}(M)$ folgt aus $L(M) = \bigoplus_{i \in I} X_i$, daß jedes $X_i \in \mathscr{A}'$ ist, und der Beweis von (4.5, b) zeigte genauer, daß es zu jedem $i \in I$ ein $e_i \geqq 1$ gibt mit $X_i[\mathfrak{m}_i^{e_i}] + P(X_i) = X_i$. Damit ist $U = \bigoplus_{i \in I} X_i[\mathfrak{m}_i^{e_i}]$ koatomar und $L(M)/U$ radikalvoll, und weil nach (2.2, a) $M/L(M)$ radikalvoll ist, gilt das auch für M/U.

(iii → ii) Ist $U \subset M$ wie angegeben, so hat man für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ eine Zerlegung $U = L_{\mathfrak{m}}(U) \oplus U'$ und ein $e \geqq 1$ mit $\mathfrak{m}^e \cdot L_{\mathfrak{m}}(U) = 0$ ([6] Lemma 1.2), so daß wegen $\mathfrak{m}\, U' = U'$ folgt $\mathfrak{m}^e\, U = \mathfrak{m}^{e+1}\, U$. Nach (4.5, a) ist deshalb $U \in \mathscr{A}'$, nach (3.6, a) aber M/U sogar darstellbar, also nach (4.6) $M \in \mathscr{A}$ wie behauptet.

Bemerkung. Aus der Äquivalenz (i $\leftrightarrow$ ii) folgt insbesondere, daß im Falle $\dim(R) \leq 1$ die Klasse $\mathscr{A}$ gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen ist. Nach dem Zusatz (γ) bei (3.6) ist diese Eigenschaft sogar charakteristisch für $\dim(R) \leq 1$.

Literatur

[1] H.-B. Foxby: On the μ^i in a minimal injective resolution II: Math. Scand. 41 (1977) 19–44.

[2] D. Kirby: Coprimary decomposition of artinian modules: J. London Math. Soc. 6 (1973) 571–576.

[3] I. G. MacDonald: Secondary representation of modules over a commutative ring: Symp. Math. 11 (1973) 23–43.

[4] R. Y. Sharp: Secondary representations for injective modules over commutative noetherian rings: Proc. Edinb. Math. Soc. 20 (1976) 143–151.

[5] B. Stenström: Rings of quotients: Springer, Berlin (1975).

[6] H. Zöschinger: Koatomare Moduln: Math. Zeitschrift 170 (1980) 221–232.

[7] – : Minimax-Moduln: J. Algebra 102 (1986) 1–32.

[8] – : Über koassoziierte Primideale: Math. Scand. 63 (1988) 196–211.