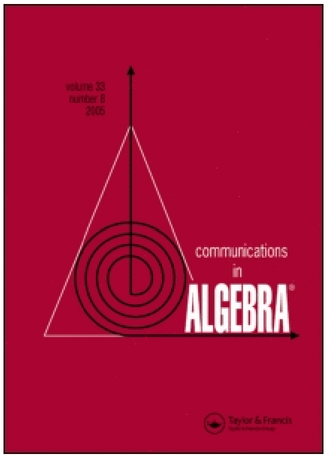

Communications in Algebra
Publication details, including instructions for authors and subscription information:
http://www.informaworld.com/smpp/title~content=t713597239

Eine dualisierung des theorems von matijevic

Zöschinger Helmut [a]
[a] Mathematisches Institut der Universität, Theresienstraße 39, München 2

Online Publication Date: 01 January 1992
To cite this Article: Helmut, Zöschinger (1992) 'Eine dualisierung des theorems von matijevic', Communications in Algebra, 20:3, 639 - 643
To link to this article: DOI: 10.1080/00927879208824363
URL: http://dx.doi.org/10.1080/00927879208824363

COMMUNICATIONS IN ALGEBRA, 20(3), 639-643 (1992)

EINE DUALISIERUNG DES THEOREMS VON MATIJEVIC

Helmut Zöschinger

Mathematisches Institut der Universität
Theresienstraße 39, D-8ooo München 2

Sei R ein kommutativer noetherscher Ring. Zu jedem R-Modul M und jedem Ideal $\mathfrak{a}$ von R sei $M[\mathfrak{a}] = \{u \in M \mid a u = 0 \text{ für alle } a \in \mathfrak{a}\}$, $L_{\mathfrak{a}}(M) = \sum_{i=1}^{\infty} M[\mathfrak{a}^i]$ und $L(M) = \oplus L_{\mathfrak{m}}(M)$, wobei $\mathfrak{m}$ alle maximalen Ideale von R durchläuft. Bekanntlich ist dann $L(M)$ die Summe aller artinschen Untermoduln von M, und M heißt <u>halbartinsch</u>, wenn $L(M) = M$ ist. Ist K der totale Quotientenring von R und schreibt man $L(K/R) = T/R$, so heißt T die <u>globale Transformation</u> von R. In Verallgemeinerung des Theorems von Krull-Akizuki zeigt Matijevic in [1] das folgende

<u>THEOREM</u> ([1] p. 5o). Ist A ein Unterring von T und $R \subset A$, so gilt für jeden Nichtnullteiler $r \in R$, daß A/rA als R-Modul endlich erzeugt ist.

Weil mit denselben Bezeichnungen A/R halbartinsch und $A[r] = 0$ ist, ist das offenbar ein Spezialfall von folgendem

<u>SATZ 1</u>. Besitze der R-Modul M einen endlich erzeugten Untermodul U, so daß M/U halbartinsch ist. Dann gilt für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R: Ist $M[\mathfrak{a}]$ endlich erzeugt, so auch $M/\mathfrak{a}M$.

Die Formulierung von Satz 1 - für den wir einen von [1] unabhängigen Beweis geben - hat den Vorteil, daß sich in ihr die modultheoretischen Begriffe dualisieren lassen: Endlich erzeugt wird zu artinsch, halbartinsch (jeder echte Untermodul umfaßt einen minimalen Untermodul) wird zu <u>koatomar</u> (jeder echte Untermodul liegt in einem maximalen Untermodul), und damit lautet unser dualer

<u>SATZ 2</u>. Besitze der R-Modul M einen koatomaren Untermodul U, so daß M/U artinsch ist. Dann gilt für jedes Ideal $\mathfrak{A}$ von R: Ist $M/\mathfrak{A}M$ artinsch, so auch $M[\mathfrak{A}]$.

Die beiden an den Modul M gestellten Endlichkeitsbedingungen lassen sich auch so beschreiben: Genau dann ist M Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen halbartinschen Modul, wenn in jeder aufsteigenden Folge $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots$ von Untermoduln von M fast alle Faktoren U_{i+1}/U_i halbartinsch sind ([4] Satz 1.2). Genau dann ist M Erweiterung eines koatomaren durch einen artinschen Modul, wenn in jeder absteigenden Folge $M \supset U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ von Untermoduln fast alle Faktoren U_i/U_{i+1} koatomar sind ([4] Satz 2.6).

Die Beweise von Satz 1 und Satz 2 werden jeweils durch ein Lemma vorbereitet:

<u>LEMMA 1</u>. Ist M halbartinsch und $M[\mathfrak{A}]$ artinsch, so gibt es ein $n \geq 1$ mit

$$M[\mathfrak{A}^n] + \mathfrak{A}M = M .$$

<u>Beweis</u>. Ist M sogar artinsch, wähle man eine Darstellung $M = V_1 + \ldots + V_k$, in der jeder Untermodul V_i kouniform, d.h. nicht Summe von zwei echten Untermoduln ist. Die nicht durch $\mathfrak{A}$ teilbaren V_i liegen dann in einem gemeinsamen $M[\mathfrak{A}^n]$, und es folgt $M[\mathfrak{A}^n] + \mathfrak{A}M = M$.

Ist M nur halbartinsch, gilt $L_{\mathfrak{A}}(M/U) = (L_{\mathfrak{A}}(M) + U)/U$ für jeden Untermodul U von M (denn mit $M/L_{\mathfrak{A}}(M)$ ist auch $M/L_{\mathfrak{A}}(M) + U$ $\mathfrak{A}$-torsionsfrei), insbesondere $L_{\mathfrak{A}}(M) + \mathfrak{A}M = M$. War zusätzlich $M[\mathfrak{A}]$ artinsch, ist es nach ([2] Proposition 3) auch $M' = L_{\mathfrak{A}}(M)$, und mit $M'[\mathfrak{A}^n] + \mathfrak{A}M' = M'$ aus dem ersten Teil folgt $M'[\mathfrak{A}^n] + \mathfrak{A}M = M$.

<u>FOLGERUNG 1</u>. Ist M halbartinsch und $M[\mathfrak{A}]$ artinsch, so gibt es zu jedem Untermodul U von M und jedem $e \geq 1$ ein $f \geq 1$ mit

$$(M/U)[\mathfrak{A}^e] \subset (M[\mathfrak{A}^f] + U)/U .$$

<u>Beweis</u>. Definiert man $U \subset M' \subset M$ durch $M'/U = (M/U)[\mathfrak{A}^e]$, so gibt es nach dem Lemma ein $f \geq 1$ mit $M'[\mathfrak{A}^f] + \mathfrak{A}M' = M'$, und aus

$M'[\mathfrak{a}^f] + \mathfrak{a}^e M' = M'$, $\mathfrak{a}^e M' \subset U$ folgt $M' \subset M[\mathfrak{a}^f] + U$. (Offenbar erhält man aus der Folgerung mit $U = \mathfrak{a}M$ und $e = 1$ das Lemma zurück.)

<u>Beweis von Satz 1</u>. Weil U und $M[\mathfrak{a}]$ endlich erzeugt sind, folgt aus der exakten Folge $M[\mathfrak{a}] \longrightarrow (M/U)[\mathfrak{a}] \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(R/\mathfrak{a}, U)$, daß auch $(M/U)[\mathfrak{a}]$ endlich erzeugt ist. Nun ist $\overline{M} = M/U$ halbartinsch, also $\overline{M}[\mathfrak{a}]$ von endlicher Länge, so daß nach dem Lemma $\overline{M}[\mathfrak{a}^n] + \mathfrak{a}\overline{M} = \overline{M}$ ist für ein $n \geq 1$. Mit $\overline{M}[\mathfrak{a}]$ ist auch $\overline{M}[\mathfrak{a}^n]$ endlich erzeugt, also auch $\overline{M}/\mathfrak{a}\overline{M} \cong M/\mathfrak{a}M + U$, also auch $M/\mathfrak{a}M$.

<u>LEMMA 2</u>. Ist M koatomar und $M/\mathfrak{a}M$ endlich erzeugt, so gibt es ein $n \geq 1$ mit

$$M[\mathfrak{a}] \cap \mathfrak{a}^n M = o \ .$$

<u>Beweis</u>. Ist M koatomar und $\mathfrak{a}$ beliebig, so ist nach ([3] Lemma 1.1) jeder Untermodul von $H_{\mathfrak{a}}(M) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i M$ $\mathfrak{a}$-teilbar. Es folgt $U \cap H_{\mathfrak{a}}(M) = H_{\mathfrak{a}}(U)$ für jeden Untermodul U von M , insbesondere $M[\mathfrak{a}] \cap H_{\mathfrak{a}}(M) = o$.

War zusätzlich $M/\mathfrak{a}M$ endlich erzeugt, d.h. $N + \mathfrak{a}M = M$ mit einem endlich erzeugten Untermodul N von M , wähle man in der Menge $\{V \subset M \mid M[\mathfrak{a}] \cap V = o\}$ ein maximales Element V_o . Als wesentliche Erweiterung von $M[\mathfrak{a}]$ ist dann $\overline{M} = M/V_o$ $\mathfrak{a}$-torsion, außerdem $\overline{M}/\overline{N}$ $\mathfrak{a}$-teilbar, also nach dem ersten Teil $\overline{M}/\overline{N} = o$, und aus $\mathfrak{a}^n \overline{M} = o$ für ein $n \geq 1$ folgt $\mathfrak{a}^n M \subset V_o$, $M[\mathfrak{a}] \cap \mathfrak{a}^n M = o$ wie gewünscht.

<u>FOLGERUNG 2</u>. Ist M koatomar und $M/\mathfrak{a}M$ endlich erzeugt, so gibt es zu jedem Untermodul U von M und jedem $e \geq 1$ ein $f \geq 1$ mit

$$U \cap \mathfrak{a}^f M \subset \mathfrak{a}^e U \ .$$

<u>Beweis</u>. Zu $\overline{M} = M/\mathfrak{a}^e U$ gibt es nach dem Lemma ein $f \geq 1$ mit $\overline{M}[\mathfrak{a}] \cap \mathfrak{a}^f \overline{M} = o$, und aus $\overline{M}[\mathfrak{a}^e] \cap \mathfrak{a}^f \overline{M} = o$, $\overline{U} \subset \overline{M}[\mathfrak{a}^e]$ folgt die Behauptung. (Wieder erhält man aus dem Spezialfall $U = M[\mathfrak{a}]$, $e = 1$ das Lemma zurück.)

<u>Beweis von Satz 2</u>. Weil M/U und $M/\mathfrak{a}M$ artinsch sind, folgt aus der exakten Folge $\mathrm{Tor}^R_1(M/U, R/\mathfrak{a}) \longrightarrow U/\mathfrak{a}U \longrightarrow M/\mathfrak{a}M$, daß auch $U/\mathfrak{a}U$ artinsch ist. Weil U koatomar, also $U/\mathfrak{a}U$ von endlicher Länge ist, gibt es nach Lemma 2 ein $n \geq 1$ mit $U[\mathfrak{a}] \cap \mathfrak{a}^n U = o$, als

Untermodul von $U/\mathfrak{r}^n U$ ist dann auch $U[\mathfrak{r}]$ von endlicher Länge, also $M[\mathfrak{r}]$ artinsch wie gewünscht.

BEMERKUNGEN. 1) Mit den Bezeichnungen des Theorems von Matijevic ist $M = A/R$ halbartinsch und $M[r]$ endlich erzeugt, nach Lemma 1 also $M[r^n] + rM = M$, d.h. $A \subset R r^{-n} + rA$ für ein $n \geq 1$. Dies ist das Kernstück des Beweises in [1].

2) Der Beweis von Lemma 2 zeigte: Ist M koatomar und $M/\mathfrak{r}M$ endlich erzeugt, so folgt für jedes maximale Element V_o in der Menge $\{V \subset M \mid M[\mathfrak{r}] \cap V = o\}$, daß M/V_o durch eine Potenz von $\mathfrak{r}$ annulliert wird. Entsprechend läßt sich mit einigen Zusatzüberlegungen zum Beweis von Lemma 1 zeigen: Ist M halbartinsch und $M[\mathfrak{r}]$ artinsch, so hat die Menge $\{V \subset M \mid V + \mathfrak{r}M = M\}$ ein minimales Element, und jedes minimale Element V_o wird durch eine Potenz von $\mathfrak{r}$ annulliert.

3) In den beiden Sätzen kann man die Voraussetzungen an M nicht ohne weiteres abschwächen. Z.B. genügt es in Satz 2 nicht, daß M/U halbartinsch ist: Ist $(R,\mathfrak{m})$ ein lokaler, 1-dimensionaler Integritätsring mit Quotientenkörper K, so ist $M = (K/R)^{(\mathbb{N})}$ halbartinsch und $M/\mathfrak{m}M = o$, aber $M[\mathfrak{m}]$ nicht artinsch. Entsprechend genügt es in Satz 1 nicht, daß U koatomar ist: Sei A ein kommutativer noetherscher Ring mit paarweise verschiedenen maximalen Idealen $I_1, I_2, I_3, \ldots$ und $R = A[[X]]$. Über $\mathfrak{P}_n = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid \text{alle } a_i \in I_n \right\}$ liegt dann nur ein maximales Ideal, nämlich $\mathfrak{m}_n = \mathfrak{P}_n + (X)$, und auch die $\mathfrak{m}_n$ sind paarweise verschieden. Es folgt $(R/\mathfrak{P}_n)_{\mathfrak{m}} = o$ für alle $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_n$, so daß der R-Modul $M = \coprod_{n=1}^{\infty} R/\mathfrak{P}_n$ lokal zyklisch, also koatomar ist. Weil $r = X$ in keinem $\mathfrak{P}_n$, aber in allen $\mathfrak{m}_n$ liegt, ist $M[r] = o$, aber M/rM nicht endlich erzeugt.

LITERATUR

1. J.R.Matijevic : Maximal ideal transforms of noetherian rings, Proc.Amer.Math.Soc. 54 (1976) 49-52.
2. E.Matlis : Modules with descending chain condition, Trans.Amer.Math.Soc. 97 (1960) 495-508.

3. H.Zöschinger : Koatomare Moduln, Math.Zeitschr. 17o (198o) 221-232.

4. ———— : Minimax-Moduln, J.Algebra 1o2 (1986) 1-32.

Received: October 1989

Revised: July 1990