

## DIE LASKER-BEDINGUNG FÜR NICHT ENDLICH ERZEUGTE MODULN

H. ZÖSCHINGER (München)

### Einleitung

Ist  $R$  ein kommutativer Ring, so untersuchen wir für einen  $R$ -Modul  $M$  die folgende Bedingung

- (L) Jeder Untermodul  $U$  von  $M$  besitzt eine Darstellung  $U = \bigcap_{i=1}^n V_i$ , in der jedes  $V_i$  Untermodul von  $M$  und  $M/V_i$  Null oder primär ist.

Dabei heißt ein  $R$ -Modul  $N$  *primär*, wenn  $N \neq 0$  ist und wenn jedes  $x \in R$  auf  $N$  injektiv oder nilpotent operiert. In diesem Fall ist  $\mathfrak{p} = \sqrt{\text{Ann}_R(N)}$  ein Primideal, und  $N$  heißt dann auch  $\mathfrak{p}$ -primär. Endlich erzeugte Moduln mit der Eigenschaft (L) heißen *laskersch* (siehe [1] p. 172) und werden seit langem untersucht (siehe [3] und die dort angegebene Literatur). Nicht notwendig endlich erzeugte Moduln mit der Eigenschaft (L) heißen nach Fisher "Moduln mit Primärzerlegungstheorie" und werden in [2] mit einer Reihe anderer Eigenschaften verknüpft. Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist zu zeigen, daß sie sich bei noetherschem Grundring aus zwei wohlbekanntem Bausteinen zusammensetzen, denn wir beweisen in (1.4) den folgenden

**SATZ.** *Ist  $R$  kommutativ und noethersch, so erfüllt ein  $R$ -Modul  $M$  genau dann die Bedingung (L), wenn  $M$  eine Darstellung  $M = A + B$  besitzt, in der  $A$  endlich erzeugt und  $R/\text{Ann}_R(B)$  artinsch ist.*

Man sagt,  $M$  besitze eine *Primärzerlegung*, wenn  $M = 0$  ist oder wenn es Untermoduln  $V_1, \dots, V_n$  von  $M$  gibt, so daß  $\bigcap_{i=1}^n V_i = 0$  ist und alle  $M/V_i$  primär sind. Im zweiten Teil geben wir, wieder bei noetherschem Grundring, eine Reihe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer solchen Zerlegung an (2.5). Daraus folgt im dritten Teil eine Fülle von Beispielen von Moduln mit Primärzerlegung, ihre explizite Beschreibung im Falle  $\dim(R) \leq 1$ , und schließlich in (3.6) die Struktur aller  $R$ -Moduln, die sowohl eine Primär- als auch eine Koprimärzerlegung (siehe [9]) besitzen.

*Mathematics subject classification numbers*, 1991. Primary 13C05, 13E05.

*Key words and phrases.* Primary and coprimary decomposition of modules, Laskerian modules, Artin-Rees modules.

## 1. Die Bedingung (L)

Stets sei  $R$  kommutativ und noethersch. Ist  $\mathfrak{p}$  ein Primideal von  $R$ , so ist ein  $R$ -Modul  $M$  genau dann  $\mathfrak{p}$ -primär, wenn  $\text{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$  ist und wenn es ein  $e \geq 1$  gibt mit  $\mathfrak{p}^e M = o$ . Auf die zweite Bedingung kann man nicht verzichten, d.h. aus  $|\text{Ass}(M)| = 1$  folgt i. allg. nicht, daß  $M$  primär ist:

LEMMA 1.1. *Für einen  $R$ -Modul  $M$  sind äquivalent:*

(i) *Jeder Faktormodul von  $M$  mit nur einem assoziierten Primideal ist bereits primär.*

(ii)  *$M$  ist koatomar.*

BEWEIS. (i  $\rightarrow$  ii) Ein Modul  $M$  heißt *koatomar*, wenn jeder von  $M$  verschiedene Untermodul  $U$  in einem maximalen Untermodul enthalten ist. Nun ist  $U$  von der Form  $U = \cap U_\lambda$ , wobei alle  $M/U_\lambda$  artinsch und irreduzibel sind, es folgt  $U \subset U_o \subset M$  mit  $\text{Ass}(M/U_o) = \{\mathfrak{m}\}$  für ein maximales Ideal  $\mathfrak{m}$  von  $R$ , und nach Voraussetzung gilt  $\mathfrak{m}^e(M/U_o) = o$  für ein  $e \geq 1$ . Damit hat  $M/U_o$  einen maximalen Untermodul, also auch  $M/U$ .

(ii  $\rightarrow$  i) Sei  $U$  ein Untermodul von  $M$  mit  $\text{Ass}(M/U) = \{\mathfrak{p}\}$ . Mit  $\bar{M} = M/U$  und  $\bar{M}[\mathfrak{p}^i] = \{\bar{x} \in \bar{M} | \mathfrak{p}^i \subset \text{Ann}_R(\bar{x})\}$  gilt dann  $\bar{M} = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{M}[\mathfrak{p}^i]$ , und weil nach Voraussetzung  $\bar{M}$  koatomar ist, gibt es nach ([8] Lemma 1.2) ein  $e \geq 1$  mit  $\mathfrak{p}^e \bar{M} = o$ . Also ist  $\bar{M}$   $\mathfrak{p}$ -primär. ■

FOLGERUNG 1.2. *Ist  $M$  koatomar und  $\text{Ass}(M)$  endlich, so besitzt  $M$  eine Primärzerlegung.*

BEWEIS. Bei  $M = o$  ist nichts zu zeigen. Bei  $M \neq o$  und  $\text{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$  zerlege man die injektive Hülle  $Q$  von  $M$  in  $Q = Q_1 \oplus \dots \oplus Q_n$  mit  $\text{Ass}(Q_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$  für alle  $i$ . Mit  $N_i = Q_1 \oplus \dots \oplus \hat{Q}_i \oplus \dots \oplus Q_n$  und  $V_i = M \cap N_i$  folgt dann  $\bigcap_{i=1}^n V_i = o$ ,  $\text{Ass}(M/V_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$ . Weil  $M$  koatomar war, sind dann nach dem Lemma alle  $M/V_i$  primär. ■

FOLGERUNG 1.3. *Ein halbartinscher  $R$ -Modul  $M$  besitzt genau dann eine Primärzerlegung, wenn  $R/\text{Ann}_R(M)$  artinsch ist.*

BEWEIS. Für einen beliebigen  $R$ -Modul  $M$  sei  $L(M)$  die Summe aller artinschen Untermoduln von  $M$ , und mit  $L_{\mathfrak{m}}(M) = \sum_{i=1}^{\infty} M[\mathfrak{m}^i]$  ist dann  $L(M) = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \Omega} L_{\mathfrak{m}}(M)$ .  $M$  heißt *halbartinisch*, wenn  $M = L(M)$  ist, und besitzt jetzt  $M$  zusätzlich eine Primärzerlegung, sind fast alle  $L_{\mathfrak{m}}(M)$  Null (weil  $\text{Ass}(M)$  endlich ist), so daß wir gleich  $M = L_{\mathfrak{m}}(M)$  annehmen können. Aus  $\bigcap_{i=1}^n V_i = o$ , alle  $M/V_i$  primär, folgt dann  $\mathfrak{m}^e(M/V_i) = o$  für ein gemeinsames  $e \geq 1$  ( $1 \leq i \leq n$ ), d.h.  $\mathfrak{m}^e M = o$ , so daß  $R/\text{Ann}_R(M)$  artinsch ist. Die Umkehrung folgt sofort mit (1.2),

denn über einem Artin-Ring ist jeder Modul koatomar. ■

SATZ 1.4. Für einen  $R$ -Modul  $M$  sind äquivalent:

(i)  $M$  erfüllt die Bedingung (L).

(ii)  $M$  ist koatomar und jeder Faktormodul von  $M$  hat nur endlich viele assoziierte Primideale.

(iii)  $M$  besitzt eine Darstellung  $M = A + B$ , in der  $A$  endlich erzeugt und  $R/\text{Ann}_R(B)$  artinsch ist.

BEWEIS.

(i  $\rightarrow$  ii) Die Bedingung (L) ist äquivalent damit, daß jeder Faktormodul von  $M$  eine Primärzerlegung besitzt. Damit ist die Aussage über die assoziierten Primideale klar. Um zu zeigen, daß  $M$  koatomar ist, braucht man wie im Beweis von (1.1) nur Untermoduln  $U_o$  mit  $\text{Ass}(M/U_o) = \{\mathfrak{m}\}$  zu betrachten: Weil  $\bar{M} = M/U_o$  nach Voraussetzung eine Primärzerlegung besitzt, gilt  $\mathfrak{m}^e \bar{M} = o$  für ein  $e \geq 1$ , so daß  $\bar{M}$  einen maximalen Untermodul besitzt.

(ii  $\rightarrow$  iii) Weil auch  $B = L(M)$  koatomar ist, wird nach ([8] Lemma 1.2) jedes  $L_{\mathfrak{m}}(M)$  durch eine Potenz von  $\mathfrak{m}$  annulliert, und weil  $\text{Ass}(B)$  endlich ist, d.h. fast alle  $L_{\mathfrak{m}}(M)$  Null sind, ist sogar  $R/\text{Ann}_R(B)$  artinsch. Der sockelfreie, koatomare Faktormodul  $\bar{M} = M/B$  ist nach ([8] Lemma 3.1) lokal endlich erzeugt, und weil jeder Faktormodul von  $\bar{M}$  nur endlich viele assoziierte Primideale hat, ist  $\bar{M}$  nach ([8] Lemma 1.3) sogar endlich erzeugt, also  $M = A + B$  mit einem endlich erzeugten Untermodul  $A$  von  $M$ .

(iii  $\rightarrow$  i) Für jeden Untermodul  $U$  von  $M$  hat  $\bar{M} = M/U$  eine Primärzerlegung, denn  $\bar{M} = \bar{A} + \bar{B}$  ist koatomar und  $\text{Ass}(\bar{M})$  endlich, so daß (1.2) die Behauptung liefert. ■

BEMERKUNG 1.5. Nach ([2] Theorem 1.7) erfüllt ein Modul  $M$  genau dann die Bedingung (L), wenn für jeden Faktormodul  $X$  von  $M$  gilt: (1)  $\text{Ass}(X)$  ist endlich, (2) Ist  $|\text{Ass}(X)| = 1$ , so ist  $X$  bereits primär. Weil die zweite Bedingung nach (1.1) genau dann erfüllt ist, wenn  $M$  koatomar ist, ist unsere Äquivalenz (i  $\leftrightarrow$  ii) ein Spezialfall des Theorems von Fisher.

BEMERKUNG 1.6. Ein Modul  $M$  heißt *Artin-Rees-Modul*, wenn es zu jedem Untermodul  $U$  von  $M$ , jedem Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $R$  und jeder natürlichen Zahl  $e \geq 1$  ein  $f \geq 1$  gibt mit  $U \cap \mathfrak{a}^f M \subset \mathfrak{a}^e U$ . Aus dem Beweis von (1.1) folgt, daß jeder Artin-Rees-Modul koatomar ist. Die Umkehrung gilt jedoch i. allg. nicht, denn in ([8] p. 223) wird über  $R = \mathbb{Z}[[X]]$  ein koatomarer  $R$ -Modul  $M$  und ein Ideal  $\mathfrak{a}$  angegeben, so daß  $M = \sum_{i=1}^{\infty} M[\mathfrak{a}^i]$ , aber  $\mathfrak{a}^n M \neq o$  ist für alle  $n \geq 1$ . Zu  $U = M[\mathfrak{a}]$  und  $e = 1$  gibt es also kein  $f$  wie verlangt. Wir wissen nicht, unter welchen Zusatzbedingungen ein koatomarer Modul bereits Artin-Rees-Modul ist.

Die Äquivalenz (i  $\leftrightarrow$  iii) in (1.4) hat ihre vollkommene Entsprechung bei Moduln mit Koprimaryzerlegung. Dabei heißt eine Darstellung  $M = V_1 + \dots + V_n$  eine *Koprimaryzerlegung* von  $M$  (siehe [4], [6]), wenn alle  $V_i$  koprimary sind, d.h. jedes  $x \in R$  auf  $V_i$  surjektiv oder nilpotent operiert. Jeder Faktormodul  $M/U$  hat dann

ebenfalls eine Koprimaryzerlegung (betrachte in  $\bar{M} = \bar{V}_1 + \dots + \bar{V}_n$  die Summanden  $\neq 0$ ), nicht aber jeder Untermodul:

SATZ 1.7. Für einen  $R$ -Modul  $M$  sind äquivalent:

(i) Jeder Untermodul von  $M$  besitzt eine Koprimaryzerlegung.

(ii)  $M$  besitzt eine Darstellung  $M = A + B$ , in der  $A$  und  $R/\text{Ann}_R(B)$  artinsch sind.

BEWEIS.

(i  $\rightarrow$  ii) Zum größten radikalvollen Untermodul  $P(M)$  gibt es nach ([9] Folgerung 1.5) ein Ideal  $\mathfrak{b}$ , so daß  $R/\mathfrak{b}$  artinsch und  $M = P(M) + M[\mathfrak{b}]$  ist. Damit leistet  $B = M[\mathfrak{b}]$  das Gewünschte, wenn wir noch zeigen, daß  $A = P(M)$  artinsch ist: Für jeden Untermodul  $U$  von  $A$ , mit  $P(U) = 0$ , ist nach demselben Zitat  $R/\text{Ann}_R(U)$  artinsch, so daß  $A$  halbartinsch ist und in  $A = \bigoplus L_{\mathfrak{m}}(A)$  fast alle Summanden Null sind. Mit  $\mathfrak{a} = \bigcap \text{Ass}(A)$  ist dann  $R/\mathfrak{a}$  artinsch, also  $\mathfrak{a}A = A$ . Angenommen,  $A$  ist nicht artinsch, so gibt es einen zyklischen Untermodul  $A_1$  mit  $\mathfrak{a}A_1 \neq 0$ . Für ein maximales Element  $V_1$  in der Menge  $\{V \subset A \mid A_1 \cap V = 0\}$  ist dann  $A/V_1$  als wesentliche Erweiterung von  $A_1$  ebenfalls artinsch, so daß  $\mathfrak{a}^2V_1 \neq 0$  ist und es einen zyklischen Untermodul  $A_2$  von  $V_1$  gibt mit  $\mathfrak{a}^2A_2 \neq 0$ . Induktiv erhält man eine direkte Summe  $U = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$ , in der jedes  $A_n$  zyklisch ist und  $\mathfrak{a}^n A_n \neq 0$ . Mit  $\mathfrak{a}' = \bigcap \text{Ass}(U)$  ist dann erst recht  $\mathfrak{a}'^n A_n \neq 0$  für alle  $n$ , insbesondere  $\mathfrak{a}' \not\subseteq \sqrt{\text{Ann}_R(U)}$ ,  $R/\text{Ann}_R(U)$  nicht artinsch, so daß  $U$  entgegen der Voraussetzung keine Koprimaryzerlegung besitzt.

(ii  $\rightarrow$  i) Mit  $\mathfrak{b} = \text{Ann}_R(B)$  ist dann  $\mathfrak{b}M = \mathfrak{b}A$  artinsch, für jeden Untermodul  $U$  von  $M$  also  $\mathfrak{b}U$  artinsch, so daß nach ([9] Lemma 2.3) mit  $U/\mathfrak{b}U$  auch  $U$  eine Koprimaryzerlegung besitzt. ■

## 2. Moduln mit Primärzerlegung

Ein Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $R$  heißt bekanntlich attachiert zu  $M$ , wenn  $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M)$  ist. Zur Beschreibung von  $\mathfrak{p}$ -primären Moduln und Moduln mit Primärzerlegung ist der duale Begriff sehr nützlich:  $\mathfrak{p}$  heiße koattachiert zu  $M$ , wenn  $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(M[\mathfrak{p}])$  ist, und die Menge aller zu  $M$  koattachierten Primideale bezeichnen wir mit  $\text{Koatt}(M)$ . Jeder Primdivisor von  $\text{Ann}_R(M)$  gehört zu  $\text{Koatt}(M)$ , und daraus folgt  $\bigcap \text{Koatt}(M) = \sqrt{\text{Ann}_R(M)}$ . Ein  $R$ -Modul  $M$  ist also genau dann  $\mathfrak{p}$ -primär, wenn  $\text{Koatt}(M) = \{\mathfrak{p}\}$  ist.

LEMMA 2.1. Besitzt der  $R$ -Modul  $M$  eine Primärzerlegung, so gilt:

(a)  $\text{Ass}(M) = \text{Koatt}(M)$ .

(b) Zu jedem Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $R$  gibt es ein  $e \geq 1$  mit  $M[\mathfrak{a}] \cap \mathfrak{a}^e M = 0$ .

(c) Auch  $M/L(M)$  besitzt eine Primärzerlegung und es gibt ein Ideal  $\mathfrak{b}$  von  $R$ , so daß  $R/\mathfrak{b}$  artinsch ist und  $L(M) \cap \mathfrak{b}M = 0$ .

BEWEIS. Sei gleich  $M \neq 0$  und in der Primärzerlegung  $\bigcap_{i=1}^n V_i = 0$  kein  $V_i$  überflüssig.

(a) Mit  $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\text{Ann}_R(M/V_i)}$  behaupten wir, daß  $\text{Ass}(M) = \text{Koatt}(M) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$  ist. Aus der Einbettung  $M \rightarrow \prod_{i=1}^n (M/V_i)$  folgt für jedes  $\mathfrak{q} \in \text{Koatt}(M)$ , daß  $\mathfrak{q} \in \text{Koatt}(M/V_j) = \{\mathfrak{p}_j\}$  ist für ein  $j$ , also  $\text{Ass}(M) \subset \text{Koatt}(M) \subset \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ . Bei  $n = 1$  sind wir fertig; bei  $n \geq 2$  gilt für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ , daß  $D_i = V_1 \cap \dots \cap \hat{V}_i \cap \dots \cap V_n$  nicht Null ist, also  $D_i$  als Untermodul von  $M/V_i$  ebenfalls  $\mathfrak{p}_i$ -primär ist, und daraus folgt  $\{\mathfrak{p}_i\} = \text{Ass}(D_i) \subset \text{Ass}(M)$ .

(b) Man kann gleich  $M[\mathfrak{a}] \neq 0$  annehmen und dann so numerieren, daß  $(M/V_i)[\mathfrak{a}] \neq 0$  ist für  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $(M/V_i)[\mathfrak{a}] = 0$  für alle  $i > s$ . Es folgt  $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\text{Ann}_R(M/V_i)}$  für alle  $i \leq s$ , also  $\mathfrak{a}^e \subset \bigcap_{i \leq s} V_i$  für ein gemeinsames  $e \geq 1$ , außerdem  $M[\mathfrak{a}] \subset \bigcap_{i > s} V_i$ , und daraus die Behauptung.

(c) Sind alle  $M/V_i$  sockelfrei, ist es auch  $M$ , und man setze  $\mathfrak{b} = R$ . Andernfalls seien die  $M/V_1, \dots, M/V_s$  nicht sockelfrei, aber  $L(M/V_i) = 0$  für alle  $i > s$ . Mit  $\mathfrak{m}_i^e(M/V_i) = 0$  ( $1 \leq i \leq s$ ) und  $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}_1^e \dots \mathfrak{m}_s^e$  ist dann  $R/\mathfrak{b}$  artinsch und  $\mathfrak{b}M \subset \bigcap_{i \leq s} V_i$ , außerdem  $L(M) \subset \bigcap_{i > s} V_i$ , also  $L(M) \cap \mathfrak{b}M = 0$ . Aus der letzten Gleichung folgt  $L(M) = M[\mathfrak{b}]$ , so daß  $M/L(M)$  als Untermodul von  $M^m$  wieder eine Primärzerlegung hat. ■

Man kann die Aussagen (b) und (c) des Lemmas so verschärfen, daß sie sogar charakteristisch für die Existenz einer Primärzerlegung werden (siehe 2.5, Punkt (ii) und (iii)). Dazu wollen wir so viel wie möglich die Resultate aus [9] heranziehen, in dem wir einen injektiven Kogenerator  $C$  in  $R$ -Mod wählen, zu jedem  $R$ -Modul  $M$  den dualen  $M^\circ = \text{Hom}_R(M, C)$  bilden und dann Tatsachen über Koprimärzerlegungen von  $M^\circ$  in solche über Primärzerlegungen von  $M$  verwandeln. Dazu dient der folgende Hilfssatz, dessen Beweis dem Leser überlassen sei, denn die Aussagen in Punkt (a) sind wohlbekannt, und aus ihnen folgt sofort (b) und (c):

**HILFSSATZ 2.2.** *Seien  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  Ideale von  $R$  und  $M^\circ = \text{Hom}_R(M, C)$ . Dann gilt:*

- (a)  $\text{Ann}_{M^\circ}(M[\mathfrak{a}]) = \mathfrak{a} \cdot M^\circ$ ;  $(M[\mathfrak{a}])^\circ \cong M^\circ/\mathfrak{a} \cdot M^\circ$ .  
 $\text{Ann}_{M^\circ}(\mathfrak{a}M) = M^\circ[\mathfrak{a}]$ ;  $(M/\mathfrak{a}M)^\circ \cong M^\circ[\mathfrak{a}]$ .  
 (b)  $M[\mathfrak{a}] \cap \mathfrak{b}M = 0 \Leftrightarrow M^\circ[\mathfrak{b}] + \mathfrak{a} \cdot M^\circ = M^\circ$ ;  
 $M[\mathfrak{b}] + \mathfrak{a}M = M \Leftrightarrow M^\circ[\mathfrak{a}] \cap \mathfrak{b} \cdot M^\circ = 0$ .  
 (c)  $\text{Koatt}(M) = \text{Att}(M^\circ)$ ,  $\text{Att}(M^\circ) = \text{Att}(M) = \text{Koatt}(M^\circ)$ .

Als spezielle Anwendung von (a) benützen wir im folgenden, daß ein  $R$ -Modul  $M$  genau dann sockelfrei (bzw. radikalvoll) ist, wenn  $M^\circ$  radikalvoll (bzw. sockelfrei) ist. Aus (c) folgt, daß  $M$  genau dann  $\mathfrak{p}$ -primär (bzw.  $\mathfrak{p}$ -koprimär) ist, wenn  $M^\circ$   $\mathfrak{p}$ -koprimär (bzw.  $\mathfrak{p}$ -primär) ist. Zum weiteren Studium von Primärzerlegungen benötigen wir die beiden folgenden Klassen  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  von  $R$ -Moduln:

$M \in \mathfrak{B} \Leftrightarrow$  Zu jedem Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $R$  gibt es ein  $e \geq 1$  mit  $M[\mathfrak{a}] \cap \mathfrak{a}^e M = 0$ ,

$M \in \mathfrak{B}' \Leftrightarrow$  Zu jedem Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $R$  gibt es ein  $e \geq 1$  mit  $M[\mathfrak{a}^e] = [\mathfrak{a}^{e+1}]$ .

Klar ist  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}'$  (die Gleichheit ist nach (3.2) äquivalent mit  $\dim(R) \leq 1$ ), und nach (2.1,b) gehört jeder Modul mit Primärzerlegung zu  $\mathfrak{B}$ . Die Klasse  $\mathfrak{B}'$  wird in [5] ausführlich untersucht. Sie ist gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen, und ein  $R$ -Modul  $M$  ist genau dann Artin-Rees-Modul, wenn jeder Faktormodul von  $M$

zu  $\mathfrak{B}'$  gehört. (Im Falle  $\dim(R) \leq 1$  folgt also aus (3.1,a), daß jeder koatomare  $R$ -Modul bereits Artin-Rees-Modul ist.)

LEMMA 2.3. Für einen  $R$ -Modul  $M \neq 0$  sind äquivalent:

- (i)  $M$  besitzt eine Folge von Untermoduln  $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$ , in der alle Faktoren  $M_i/M_{i-1}$  primär sind.
- (ii)  $M \in \mathfrak{B}'$  und  $\text{Ass}(M)$  ist endlich.
- (iii) Zu jeder Gabriel-Topologie  $\mathfrak{G}$  auf  $R$  gibt es ein  $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$  mit  $L_{\mathfrak{G}}(M) = M[\mathfrak{b}]$ .
- (iv)  $M^\circ = \text{Hom}_R(M, C)$  besitzt eine Folge von Untermoduln  $0 = X_m \subsetneq X_{m-1} \subsetneq \dots \subsetneq X_0 = M^\circ$ , in der alle Faktoren  $X_{i-1}/X_i$  koprimär sind.

BEWEIS.

(i  $\rightarrow$  iv) In  $0 = \text{Ann}_{M^\circ}(M_n) \subsetneq \text{Ann}_{M^\circ}(M_{n-1}) \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ann}_{M^\circ}(M_0) = M^\circ$  sind alle Faktoren  $\text{Ann}_{M^\circ}(M_{i-1})/\text{Ann}_{M^\circ}(M_i) \cong (M_i/M_{i-1})^\circ$  koprimär.

(iv  $\rightarrow$  iii)  $L_{\mathfrak{G}}(M)$  ist eine Abkürzung für  $\{x \in M \mid \text{Ann}_R(x) \in \mathfrak{G}\} = \cup \{M[\mathfrak{a}] \mid \mathfrak{a} \in \mathfrak{G}\}$ . Nach ([9] Satz 4.2) gibt es nun ein  $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$  mit  $\mathfrak{b} \cdot M^\circ \subset \mathfrak{a} \cdot M^\circ$  für alle  $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$ , daraus folgt nach (2.2)  $M[\mathfrak{a}] \subset M[\mathfrak{b}]$  für alle  $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$ , d.h.  $L_{\mathfrak{G}}(M) = M[\mathfrak{b}]$ .

(iii  $\rightarrow$  ii) Zu jeder Gabriel-Topologie  $\mathfrak{G}$  auf  $R$  gibt es ein  $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$  mit  $M[\mathfrak{a}] \subset M[\mathfrak{b}]$ , d.h. nach (2.2)  $\mathfrak{a} \cdot M^\circ \supset \mathfrak{b} \cdot M^\circ$  für alle  $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$ , so daß  $H_{\mathfrak{G}}(M^\circ) = \mathfrak{b} \cdot M^\circ$  ist. Nach ([9] Satz 4.2) bedeutet das, daß  $\text{Att}(M^\circ)$  endlich und für jedes Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $R$  die Folge  $M^\circ \supset \mathfrak{a} \cdot M^\circ \supset \mathfrak{a}^2 \cdot M^\circ \supset \dots$  stationär ist. Wieder mit (2.2) folgt, daß  $\text{Koatt}(M)$  endlich ist und  $M \in \mathfrak{B}'$ .

(ii  $\rightarrow$  i) Genau dann ist  $M \in \mathfrak{B}'$ , wenn für jedes Ideal  $\mathfrak{a}$  der Untermodul  $L_{\mathfrak{a}}(M) = \sum_{i=1}^{\infty} M[\mathfrak{a}^i]$  durch eine Potenz von  $\mathfrak{a}$  annulliert wird. In diesem Fall ist jedes  $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(M)$  Durchschnitt von assoziierten Primidealen: Speziell zu  $\mathfrak{a} = \cap \text{Ass}(M[\mathfrak{p}])$  gibt es ein  $e \geq 1$  mit  $L_{\mathfrak{a}}(M) = M[\mathfrak{a}^e]$ , aus  $M[\mathfrak{p}] \subset L_{\mathfrak{a}}(M)$  folgt  $\mathfrak{a}^e \subset \text{Ann}_R(M[\mathfrak{p}]) = \mathfrak{p}$ , also  $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ . - Ist zusätzlich  $\text{Ass}(M)$  endlich, folgt  $\text{Koatt}(M) = \text{Ass}(M)$ , so daß wir einen Induktionsbeweis über  $d = |\text{Koatt}(M)|$  führen können. Bei  $d = 1$  ist  $M$  selbst primär. Bei  $d > 1$  wähle man ein maximales Element  $\mathfrak{q}$  in  $\text{Koatt}(M)$ . Für  $M' = L_{\mathfrak{q}}(M) = M[\mathfrak{q}^e]$  folgt dann aus der Maximalität  $\text{Koatt}(M') = \{\mathfrak{q}\}$ , d.h.  $M'$  ist  $\mathfrak{q}$ -primär. Als Untermodul von  $M^m$  ist  $M/M'$  wieder aus  $\mathfrak{B}'$ , aus  $L_{\mathfrak{q}}(M/M') = 0$  folgt  $\mathfrak{q} \notin \text{Koatt}(M/M')$ , also  $\text{Koatt}(M/M') \subsetneq \text{Koatt}(M)$ , so daß es nach Induktion eine Folge  $M' = M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$  gibt mit primären  $M_i/M_{i-1}$ . ■

BEMERKUNG 2.4. Aus der Kompositionsreihe in Punkt (i) des Lemmas folgt nicht, daß  $M$  eine Primärzerlegung besitzt: Dualisiert man das Beispiel (3.5) in [9], so erhält man einen 2-dimensionalen lokalen Integritätsring  $R$  und eine exakte Folge  $0 \rightarrow R/\mathfrak{m} \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ , in der  $M$  radikalvoll und  $N$  torsionsfrei ist, also  $R/\mathfrak{m}$  und  $N$  primär, aber  $M \notin \mathfrak{B}$ .

SATZ 2.5. Für einen  $R$ -Modul  $M$  sind äquivalent:

- (i)  $M$  besitzt eine Primärzerlegung.

- (ii)  $M \in \mathfrak{B}$  und  $\text{Ass}(M)$  ist endlich.  
 (iii) Zu jeder Gabriel-Topologie  $\mathfrak{G}$  auf  $R$  gibt es ein  $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$  mit  $L_{\mathfrak{G}} \cap \mathfrak{b}M = o$ .  
 (iv)  $M^\circ = \text{Hom}_R(M, C)$  besitzt eine Koprimaryzerlegung.

BEWEIS.

(i  $\rightarrow$  iv)  $M = o$  ist klar, und bei  $M \neq o$  hat man eine Darstellung  $\bigcap_{i=1}^n V_i = o$ , in der alle  $M/V_i$  primär sind. Der Monomorphismus  $M \rightarrow \prod_{i=1}^n (M/V_i)$  wird dann zu einem Epimorphismus  $\prod_{i=1}^n (M/V_i)^\circ \rightarrow M^\circ$ , bei dem alle  $(M/V_i)^\circ$  koprimary sind, so daß auch  $M^\circ$  eine Koprimaryzerlegung besitzt.

(iv  $\rightarrow$  iii)  $M^\circ$  besitzt insbesondere eine Kompositionsreihe mit koprimary Faktoren, so daß es nach (2.3, iv  $\rightarrow$  iii) ein  $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$  gibt mit  $L_{\mathfrak{G}}(M) = M[\mathfrak{a}]$ . Dazu existiert nach ([9] Lemma 1.4,c) ein  $e \geq 1$  mit  $M^\circ[\mathfrak{a}^e] + \mathfrak{a} \cdot M^\circ = M^\circ$ , mit (2.2) folgt  $M[\mathfrak{a}] \cap \mathfrak{a}^e M = o$ , so daß  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^e$  das Gewünschte leistet.

(iii  $\rightarrow$  ii) Mit diesem  $\mathfrak{b}$  folgt  $\mathfrak{b} \cdot L_{\mathfrak{G}}(M) = o$ , d.h.  $L_{\mathfrak{G}}(M) = M[\mathfrak{b}]$ , so daß nach (2.3)  $M \in \mathfrak{B}'$  und  $\text{Ass}(M)$  endlich ist. Es ist sogar  $M \in \mathfrak{B}$ , denn zu jedem Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $R$  gibt es zur Gabriel-Topologie  $\{\mathfrak{c} \subset R \mid \mathfrak{a}^n \subset \mathfrak{c} \text{ für ein } n \geq 1\}$  nach Voraussetzung ein  $e \geq 1$  mit  $L_{\mathfrak{a}}(M) \cap \mathfrak{a}^e M = o$ , d.h.  $M[\mathfrak{a}] \cap \mathfrak{a}^e M = o$ .

(ii  $\rightarrow$  i) Wie in (2.3) können wir einen Induktionsbeweis über  $d = |\text{Koatt}(M)| = |\text{Ass}(M)|$  führen und wählen bei  $d > 1$  ein maximales Element  $\mathfrak{q}$  in  $\text{Koatt}(M)$ : Für  $M' = L_{\mathfrak{q}}(M)$  gilt wie oben  $M/M' \in \mathfrak{B}$  und  $\text{Koatt}(M/M') \subsetneq \text{Koatt}(M)$ , so daß  $M/M'$  nach Induktion eine Primärzerlegung besitzt. Zusätzlich gibt es aber ein  $e \geq 1$  mit  $M' \cap \mathfrak{a}^e M = o$ , für ein maximales Element  $V_o$  in der Menge  $\{V \subset M \mid \mathfrak{a}^e M \subset V, M' \cap V = o\}$  ist dann  $M' \rightarrow M/V_o$  ein wesentlicher Monomorphismus, also  $\text{Ass}(M/V_o) = \text{Ass}(M') = \{\mathfrak{q}\}$ , so daß  $M/V_o$  wegen  $\mathfrak{q}^e(M/V_o) = o$  sogar  $\mathfrak{q}$ -primär ist und die Einbettung  $M \rightarrow (M/V_o) \times (M/M')$  die gewünschte Primärzerlegung liefert. ■

FOLGERUNG 2.6. Ist  $\text{Koatt}(M)$  diskret, so besitzt  $M$  eine Primärzerlegung.

FOLGERUNG 2.7. Besitzt  $M$  eine Primärzerlegung und ist  $U$  ein reiner Untermodul von  $M$ , so besitzt auch  $M/U$  eine Primärzerlegung.

BEWEIS. Die erste Folgerung erhält man mit (2.2) unmittelbar aus ([9] Satz 3.2), nach dem jeder Modul  $X$ , für den  $\text{Att}(X)$  diskret ist, eine Koprimaryzerlegung besitzt. Die zweite Folgerung erhält man aus der wohlbekannteten Tatsache, daß für einen reinen Untermodul  $U$  von  $M$ , eine Gabriel-Topologie  $\mathfrak{G}$  auf  $R$  und ein Ideal  $\mathfrak{b}$  stets gilt  $L_{\mathfrak{G}}(M/U) \cap \mathfrak{b}(M/U) = ((L_{\mathfrak{G}}(M) \cap \mathfrak{b}M) + U)/U$ . ■

### 3. Beispiele

Sei  $\mathcal{P}$  die Klasse aller  $R$ -Moduln, die eine Primärzerlegung besitzen. Nach (1.2) gehört jeder koatomare  $R$ -Modul mit nur endlich vielen assoziierten Primidealen zu  $\mathcal{P}$ , nach (2.7) auch jeder flache  $R$ -Modul. Um weitere Elemente von  $\mathcal{P}$

anzugeben, greifen wir wieder auf die Ergebnisse von [9] zurück, insbesondere auf die dort untersuchten Klassen  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{A}'$ : Ein  $R$ -Modul  $M$  gehört genau dann zu  $\mathcal{A}$  (bzw.  $\mathcal{A}'$ ), wenn es zu jedem Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $R$  ein  $e \geq 1$  gibt mit  $M[\mathfrak{a}^e] + \mathfrak{a}M = M$  (bzw.  $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$ ). Ist  $C$  ein injektiver Kogenerator in  $R$ -Mod, gehört also  $M$  nach (2.2) genau dann zu  $\mathcal{A}$  (bzw.  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$ ), wenn  $M^\circ = \text{Hom}_R(M, C)$  zu  $\mathcal{B}$  (bzw.  $\mathcal{B}'$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}'$ ) gehört.

**SATZ 3.1.** *Ist  $\dim(R) \leq 1$  und  $M$  ein  $R$ -Modul, so gilt:*

- (a)  $M \in \mathcal{B}' \Leftrightarrow M \in \mathcal{B} \Leftrightarrow L(M)$  ist koatomar.
- (b)  $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow R/\text{Ann}_R(L(M))$  ist artinsch.

**BEWEIS.**

(a) Über beliebigem  $R$  gilt für  $M \in \mathcal{B}'$ , daß es zu jedem  $\mathfrak{m} \in \Omega$  ein  $e \geq 1$  gibt mit  $L_{\mathfrak{m}}(M) = M[\mathfrak{m}^e]$ , so daß in  $L(M) = \bigoplus L_{\mathfrak{m}}(M)$  alle Summanden koatomar sind, also auch  $L(M)$ . Ist umgekehrt  $L(M)$  koatomar und  $\dim(R) \leq 1$ , gibt es zu jedem  $\mathfrak{m} \in \Omega$  nach ([8] Lemma 1.2) ein  $e \geq 1$  mit  $M[\mathfrak{m}^e] = M[\mathfrak{m}^{e+1}]$ . d.h.  $\mathfrak{m}^e \cdot M^\circ = \mathfrak{m}^{e+1} \cdot M^\circ$ , so daß  $M^\circ \in \mathcal{A}' = \mathcal{A}$  ist nach ([9] Folgerung 4.5 und Satz 4.7). Aber  $M^\circ \in \mathcal{A}$  bedeutet  $M \in \mathcal{B}$ .

(b) Über beliebigem  $R$  folgt aus  $M \in \mathcal{P}$  nach (1.3), daß  $R/\text{Ann}_R(L(M))$  artinsch ist. Zur Umkehrung sei jetzt  $\dim(R) \leq 1$  und  $R/\text{Ann}_R(L(M))$  artinsch. Dann ist  $\text{Ass}(M)$  endlich und  $L(M)$  koatomar, also nach (a) sogar  $M \in \mathcal{B}$ , also nach (2.5)  $M \in \mathcal{P}$ . ■

**FOLGERUNG 3.2.** *Für den Ring  $R$  sind äquivalent:*

- (i)  $\mathcal{P}$  ist gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen.
- (ii)  $\mathcal{B}$  ist gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen.
- (iii)  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ .
- (iv)  $\dim(R) \leq 1$ .

**BEWEIS.**

(i  $\rightarrow$  iv) Nach ([9] Zusatz ( $\gamma$ ) zu 3.6) genügt es zu zeigen: Ist  $U$  ein maximaler Untermodul von  $M$  und besitzt  $U$  eine Koprämärzerlegung, so ist  $M \in \mathcal{A}$ . Aus dem ersten folgt nun, daß  $(M/U)^\circ$  durch ein  $\mathfrak{m} \in \Omega$  annulliert wird, also  $\mathfrak{m}$ -primär ist; aus dem zweiten, daß es einen Epimorphismus  $\prod_{i=1}^n V_i \rightarrow U$  mit koprimären  $V_i$  gibt.

Der Monomorphismus  $U^\circ \rightarrow \prod_{i=1}^n (V_i)^\circ$  liefert  $U^\circ \in \mathcal{P}$ , so daß nach Voraussetzung auch  $M^\circ \in \mathcal{P}$  ist, insbesondere  $M^\circ \in \mathcal{B}$ , d.h.  $M \in \mathcal{A}$ .

(iv  $\rightarrow$  iii) wurde in (3.1,a) gezeigt, (iii  $\rightarrow$  ii) ist klar, weil  $\mathcal{B}'$  stets gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen ist, und bei (ii  $\rightarrow$  i) folgt aus  $U, M/U \in \mathcal{P}$  nach Voraussetzung  $M \in \mathcal{B}$ , natürlich ist mit  $\text{Ass}(U)$  und  $\text{Ass}(M/U)$  auch  $\text{Ass}(M)$  endlich, so daß nach (2.5) auch  $M \in \mathcal{P}$  ist. (Entsprechend dem Satz 3.6 in [9] kann man die Äquivalenzen noch fortsetzen zu: (v) Jeder sockelfreie  $R$ -Modul gehört zu  $\mathcal{P}$ . (vi) Ist  $M \in \mathcal{P}$  und  $U$  ein radikalvoller Untermodul von  $M$ , so folgt auch

$M/U \in \mathcal{P}$ .) ■

LEMMA 3.3. *Ist  $M$  Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen halbartinischen Modul, so folgt  $M/L(M) \in \mathcal{P}$ .*

BEWEIS. Sei gleich  $M$  sockelfrei  $\neq 0$ ,  $U$  ein endlich erzeugter Untermodul und  $M/U$  halbartinisch. Dann ist  $\text{Ass}(M) = \text{Ass}(U) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$  mit paarweise verschiedenen  $\mathfrak{p}_i \in \text{Spec}(R) \setminus \Omega$ , und dazu gibt es wie in (1.2) Untermoduln  $V_1, \dots, V_n$  von  $M$  mit  $\bigcap_{i=1}^n V_i = 0$ ,  $\text{Ass}(M/V_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$ . Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt nun:  $\bar{M} = M/V_i$  ist sockelfrei, in  $\bar{M}[\mathfrak{p}_i] \subset \bar{M}[\mathfrak{p}_i^2] \subset \bar{M}[\mathfrak{p}_i^3] \subset \dots$  sind alle Faktoren sockelfrei und fast alle halbartinisch, d.h. fast alle Null, und aus  $\bar{M}[\mathfrak{p}_i^e] = \bar{M}$  folgt, daß  $\bar{M}$  sogar  $\mathfrak{p}_i$ -primär ist. ■

LEMMA 3.4. *Ist  $N$  ein flacher  $R$ -Modul und  $M \in \mathcal{P}$ , so folgt  $M \otimes_R N \in \mathcal{P}$ .*

BEWEIS. Weil  $-\otimes_R N$  Monomorphismen erhält, genügt es zu zeigen: Ist  $M$   $\mathfrak{p}$ -primär, so ist  $M \otimes_R N$  Null oder wieder  $\mathfrak{p}$ -primär. Dazu wähle man einen Epimorphismus  $R^{(I)} \rightarrow N$ , der ist nach Voraussetzung rein, so daß auch  $M^{(I)} \rightarrow M \otimes_R N$  ein reiner Epimorphismus ist, und daraus folgt  $\text{Koatt}(M \otimes_R N) \subset \text{Koatt}(M^{(I)}) = \text{Koatt}(M) = \{\mathfrak{p}\}$ . ■

LEMMA 3.5. *Für einen injektiven  $R$ -Modul  $M$  sind äquivalent:*

- (i)  $M \in \mathcal{P}$ .
- (ii)  $M \in \mathcal{B}'$ .
- (iii) Für alle  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$  ist  $h(\mathfrak{p}) = 0$ .

BEWEIS. (i  $\rightarrow$  ii) ist klar, und bei (ii  $\rightarrow$  iii) schreibe man  $R/\mathfrak{p} \cong U \subset M$ , wähle dazu eine injektive Hülle  $N$  von  $U$  mit  $N \subset M$ , so daß aus  $L_{\mathfrak{p}}(M) = M[\mathfrak{p}^e]$  folgt  $\mathfrak{p}^e N = 0$ . Weil  $N_{\mathfrak{p}}$  die injektive Hülle des Restklassenkörpers von  $R_{\mathfrak{p}}$  ist und durch  $(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})^e$  annulliert wird, ist dann  $R_{\mathfrak{p}}$  artinsch, d.h.  $h(\mathfrak{p}) = 0$  wie behauptet. (iii  $\rightarrow$  i) gilt wieder für jeden Modul  $M$ , denn jedes  $\mathfrak{q} \in \text{Koatt}(M)$  liegt in mindestens einem  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$ , so daß nach Voraussetzung  $h(\mathfrak{q}) = 0$  ist. Damit ist aber  $\text{Koatt}(M)$  diskret, also  $M \in \mathcal{P}$  nach (2.6). ■

Weil jeder injektive  $R$ -Modul eine Koprимärzerlegung besitzt ([7] Theorem 2.3), ist die Implikation (ii  $\rightarrow$  i) in (3.5) ein Spezialfall der folgenden Situation:

SATZ 3.6. *Für einen  $R$ -Modul  $M$  sind äquivalent:*

- (1)  $M$  besitzt eine Primär- und eine Koprимärzerlegung.
- (2)  $M$  besitzt eine Koprимärzerlegung und ist aus  $\mathcal{B}'$ .
- (3)  $M$  besitzt eine Primärzerlegung und ist aus  $\mathcal{A}'$ .

In diesem Fall ist  $\text{Ass}(M) = \text{Koass}(M)$ , und schreibt man  $\text{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$  mit paarweise verschiedenen  $\mathfrak{p}_i$ , so gibt es genau eine Zerlegung  $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ , in der  $M_i$  sowohl  $\mathfrak{p}_i$ -primär als auch  $\mathfrak{p}_i$ -koprимär ist ( $1 \leq i \leq n$ ).

BEWEIS.

(3  $\rightarrow$  1) Weil  $\text{Ass}(M)$  endlich ist, können wir einen Induktionsbeweis über  $n = |\text{Ass}(M)|$  führen. Bei  $n = 0$  ist  $M = 0$ . Bei  $n \geq 1$  wähle man ein maximales Element  $\mathfrak{p}$  in  $\text{Ass}(M)$ . Wegen  $M \in \mathcal{B}$  gibt es dazu ein  $e \geq 1$  mit  $M[\mathfrak{p}] \cap \mathfrak{p}^e M = 0$ , und daraus folgt  $M[\mathfrak{p}^e] = M[\mathfrak{p}^{e+1}]$ . Wegen  $M \in \mathcal{A}'$  gilt nach ([9] Lemma 2.2)  $L_{\mathfrak{p}}(M) + \mathfrak{p}M = M$ , d.h. zusammen  $M[\mathfrak{p}^e] \oplus \mathfrak{p}^e M = M$ . Auf  $M_1 = M[\mathfrak{p}^e]$  operiert nun jedes  $x \in R \setminus \mathfrak{p}$  injektiv (wegen  $\text{Ass}(M_1) = \{\mathfrak{p}\}$ ) und surjektiv (wegen  $M_1 \in \mathcal{A}'$ ), d.h.  $M_1$  ist sowohl  $\mathfrak{p}$ -primär als auch  $\mathfrak{p}$ -koprimär. Das Komplement  $N = \mathfrak{p}^e M$  erfüllt wieder die Bedingungen in (3), und wegen  $N[\mathfrak{p}] = 0$  ist  $\text{Ass}(N) = \text{Ass}(M) \setminus \{\mathfrak{p}\}$ . Bei  $n = 1$  sind wir also fertig, und bei  $n > 1$  gibt es nach Induktion eine Zerlegung  $N = M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ , in der jedes  $M_i$  sowohl primär als auch koprimär ist.

(2  $\rightarrow$  1) Dann ist  $M^o \in \mathcal{A}'$ , und wie im Beweis von (3.2,i  $\rightarrow$  iv) sieht man, daß  $M^o \in \mathcal{P}$  ist, also nach eben  $M^o$  eine Koprimärzerlegung besitzt. Mit (2.5) folgt  $M \in \mathcal{P}$ .

Erfülle jetzt  $M \neq 0$  die drei äquivalenten Bedingungen und sei  $\text{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ . Nach dem Beweis von (3  $\rightarrow$  1) gibt es eine Zerlegung  $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$  wie verlangt, und aus ihr folgt auch  $\text{Koass}(M) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ . Bleibt die Eindeutigkeit der  $M_i$  zu zeigen: Für jede multiplikative Teilmenge  $S$  von  $R$  sei  $H_S(M) = \cap \{sM \mid s \in S\}$ , und dann behaupten wir mit  $S_i = R \setminus \mathfrak{p}_i$ , daß

$$M_i = L_{\mathfrak{p}_i} H_{S_i}(M)$$

ist. Weil  $H_S$  und  $L_{\mathfrak{p}}$  mit direkten Summen vertauschen, ist also  $L_{\mathfrak{p}_i} H_{S_i}(M_i) = M_i$  und  $L_{\mathfrak{p}_i} H_{S_i}(M_j) = 0$  für alle  $j \neq i$  zu zeigen. Das erste ist klar (weil  $M_i$  durch alle  $x \in S_i$  teilbar ist und durch eine Potenz von  $\mathfrak{p}_i$  annulliert wird), so daß jetzt  $j \neq i$  sei: Bei  $\mathfrak{p}_j \not\subseteq \mathfrak{p}_i$  folgt mit einem  $x \in \mathfrak{p}_j \setminus \mathfrak{p}_i$ , daß  $x^e M_j = 0$  ist für ein  $e \geq 1$ , wegen  $x^e \in S_i$ ; also  $H_{S_i}(M_j) = 0$ ; bei  $\mathfrak{p}_i \not\subseteq \mathfrak{p}_j$  folgt mit einem  $x \in \mathfrak{p}_i \setminus \mathfrak{p}_j$ , daß  $M_j[x] = 0$ ,  $M_j[\mathfrak{p}_i] = 0$ , also  $L_{\mathfrak{p}_i}(M_j) = 0$  ist. ■

BEMERKUNG 1. Ist  $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$  die Zerlegung aus (3.6), so kann man aus der Darstellung  $M_i = L_{\mathfrak{p}_i} H_{S_i}(M)$  einige Folgerungen ziehen:  $M_i$  ist der größte  $\mathfrak{p}_i$ -koprimäre Untermodul von  $M$ ; war  $\mathfrak{p}_i$  ein maximales Element von  $\text{Ass}(M)$ , folgt  $M_i = L_{\mathfrak{p}_i}(M)$ ; und war  $\mathfrak{p}_i$  ein minimales Element von  $\text{Ass}(M)$ , folgt  $M_i = H_{S_i}(M)$ .

BEMERKUNG 2. Ist  $M$  selbst  $\mathfrak{p}$ -primär und  $\mathfrak{p}$ -koprimär, operiert jedes  $x \in R \setminus \mathfrak{p}$  auf  $M/\mathfrak{p}M$  bijektiv, so daß  $M/\mathfrak{p}M \cong \kappa(\mathfrak{p})^{(I)}$  ist ( $\kappa(\mathfrak{p})$  der Quotientenkörper von  $R/\mathfrak{p}$ ,  $I$  eine Indexmenge). Induktiv erhält man so eine Folge  $0 = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \dots \subsetneq U_m = M$ , deren Faktoren von der Form  $U_{k+1}/U_k \cong \kappa(\mathfrak{p})^{(I_k)}$  sind. Umgekehrt ist jeder  $R$ -Modul mit einer solchen Kompositionsreihe  $\mathfrak{p}$ -primär und  $\mathfrak{p}$ -koprimär.

## LITERATUR

- [1] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, chap.4, Hermann, Paris (1967).
- [2] J. W. FISHER, The primary decomposition theory for modules, *Pac. J. Math.* **35** (1970), 359–367. MR 43:264
- [3] W. HEINZER and D. LANTZ, The laskerian property in commutative rings, *J. Algebra.* **72** (1981), 101–114. MR 83h:13025

- [4] D. KIRBY, Coprimary decomposition of artinian modules, *J. London Math. Soc.* **6** (1973), 571–576. *MR* **47**:3372
- [5] C. P. LU, Modules satisfying acc on a certain type of colons, *Pac. J. Math.* **131** (1988), 303–318. *MR* **89c**:13022
- [6] I. G. MACDONALD, Secondary representation of modules over a commutative ring, *Symp. Math.* **11** (1973), 23–43. *MR* **49**:7252
- [7] R. Y. SHARP, Secondary representations for injective modules over commutative noetherian rings, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **20** (1976), 143–151. *MR* **54**:2639
- [8] H. ZÖSCHINGER, Koatomare Moduln, *Math. Zeitschrift* **170** (1980), 221–232. *MR* **81g**:16033
- [9] H. ZÖSCHINGER, Moduln mit Koprimärzerlegung, *Bayer. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl., S.B.* **2** (1990) 5–25.

(Eingangen am 28. September, 1990.)

MATHEMATISCHES INSTITUT  
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
8 MÜNCHEN 2  
THERESIENSTR. 39  
DEUTSCHLAND