JOURNAL OF ALGEBRA 168, 877–902 (1994)

Die globale Transformation eines lokalen Ringes

HELMUT ZÖSCHINGER

Mathematisches Institut der Universität München, 8 München 2, Theresienstrasse 39, Deutschland

Communicated by Melvin Hochster

Received February 20, 1992

EINLEITUNG

Sei R ein kommutativer, noetherscher, lokaler Ring, dessen maximales Ideal $\mathfrak{m}$ ein reguläres Element enthält, so daß der totale Quotientenring K verschieden von R ist. Für jeden R-Modul M und jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R sei $L_{\mathfrak{a}}(M) = \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a}^i)$. Speziell für $M = K/R$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ heißt der Unterring T, definiert durch $T/R = L_{\mathfrak{m}}(K/R)$, die *globale Transformation* von R. Die Frage, wann T endlich oder ganz über R ist, wurde von Nishimura ([8 und 9]) und anderen Autoren (siehe [2, 3, 7, und 10]) ausführlich untersucht, und die meisten der dort angegebenen Kriterien beziehen sich auf die assoziierten bzw. minimalen Primideale der Vervollständigung $\hat{R}$. Unser Ziel ist es, die Struktur von T als R-Modul näher zu beschreiben und durch die Angabe von $\operatorname{Koass}(T)$ die Abweichung von der Endlichkeit bzw. Ganzheit zu präzisieren.

Dazu berechnen wir als erstes $P(T)$, den größten radikalvollen Untermodul von T. Nach (1.5) ist

$$P(T) = \bigoplus_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R) \\ \dim(R/\mathfrak{p}) = 1}} L_{\mathfrak{p}}(K),$$

und im vollständigen Fall (es genügt nach (1.9), daß R Faktorring eines lokalen Cohen–Macaulay-Ringes ist) ist weiter $T/P(T)$ endlich erzeugt. Damit können wir, auch im allgemeinen Fall, zeigen, daß für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R äquivalent sind:

(i) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(T) \setminus \{\mathfrak{m}\}$.

(ii) $\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap R$ für ein $\mathscr{P} \in \operatorname{Ass}(\hat{R})$ mit $\dim(\hat{R}/\mathscr{P}) = 1$.

(iii) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R)$, und die globale Transformation des Ringes $R/\mathfrak{p}$ ist nicht endlich erzeugt.

(iv) $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(E/U)$, wobei E die injektive Hülle von $k = R/\mathfrak{m}$ und U ein maximaler radikalvoller Untermodul von E ist.

0021-8693/94 $6.00
Copyright © 1994 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

Weil T genau dann endlich erzeugt ist, wenn $\mathrm{Koass}(T) = \{\mathfrak{m}\}$ ist, erhält man daraus einige der altbekannten Kriterien für die Endlichkeit von T über R.

Ist $B = R' \cap T$ der ganze Abschluß von R in T, so ist die Größe von T/B wieder ein Maß dafür, wie weit T von der Ganzheit über R abweicht. In (3.3) geben wir einen Ring D zwischen B und K an mit der Eigenschaft

$$D/B \oplus T/B = K/B,$$

weiter eine Zerlegung

$$T/B = \bigoplus_{\substack{\mathscr{M} \in \mathrm{Max}(B) \\ h(\mathscr{M}) = 1}} L_{\mathscr{M}}(K/B),$$

in der alle Summanden als R-Moduln unzerlegbar sind. Die erste Zerlegung bedeutet, daß T eine im Sinne von Matlis [6] komplementierte Ringerweiterung von B ist, mit deren Hilfe wir in (3.12) alle regulären (maximalen) Ideale des Ringes T berechnen (für die nicht-regulären maximalen Ideale siehe (2.10)). Außerdem zeigt sie, daß die ringtheoretische Bedingung "T ist ganz über R" äquivalent ist mit der modultheoretischen Bedingung "T ist als R-Modul klein in K" (3.4). Die zweite Zerlegung liefert mehrere Beschreibungen der Elemente von $\mathrm{Koass}(T/B)$. Nach (3.6) sind für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R äquivalent:

(i) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(T/B)$.

(ii) $\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap R$ für ein $\mathscr{P} \in \mathrm{Min}(\hat{R})$ mit $\dim(\hat{R}/\mathscr{P}) = 1$.

(iii) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$, und die globale Transformation des Ringes $R/\mathfrak{p}$ ist nicht ganz über $R/\mathfrak{p}$.

(iv) $\mathfrak{p} = (\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{M}^i) \cap R$ für ein $\mathscr{M} \in \mathrm{Max}(B)$ mit $h(\mathscr{M}) = 1$.

Zusätzlich sind die Summanden $L_{\mathscr{M}}(K/B)$ in der zweiten Zerlegung als B-Moduln von besonders einfacher Gestalt (siehe 3.7), aber auch als R-Moduln haben sie noch die Eigenschaft, daß jeder echte R-Untermodul von $L_{\mathscr{M}}(K/B)$ endlich erzeugt ist.

0. Bezeichnungen und Grundtatsachen

Für jeden kommutativen Ring A sei $\Omega(A)$ die Menge seiner maximalen Ideale und $\Omega^1(A)$ die Menge aller maximalen Ideale der Höhe 1. Ein A-Modul M heißt *radikalvoll*, wenn M keinen maximalen Untermodul besitzt, *einfach-radikalvoll*, wenn M radikalvoll $\neq 0$ ist und keinen echten radikalvollen Untermodul besitzt. Für einen beliebigen A-Modul M be-

zeichnen wir mit $P(M)$ die Summe aller radikalvollen Untermoduln, und dann heißt $M/P(M)$ der *reduzierte Anteil* von M. Ein Untermodul U von M heißt *klein* in M, wenn für jeden Untermodul X von M gilt: Aus $X + U = M$ folgt $X = M$. Falls die Menge $\{X \subset M | X + U = M\}$ ein minimales Element X_0 hat, heißt X_0 ein *Komplement* von U in M. (Wir werden in (2.8) zeigen, daß $P(T)$ stets ein Komplement in K hat, nicht aber T.) Die Nichtnullteiler von A heißen auch die regulären Elemente von A, und ein A-Modul M heißt *torsionsfrei* (*teilbar*), wenn für jedes reguläre Element $a \in A$ die Multiplikation mit a: $M \to M$ injektiv (surjektiv) ist. Für ein beliebiges Ideal I von A sei $M[I] = \mathrm{Ann}_M(I) = \{x \in M | Ix = 0\}$ und $L_I(M) = \sum_{i=1}^{\infty} M[I^i]$, außerdem $H_I(M) = \bigcap_{i=1}^{\infty} I^i M$. Enthält I ein reguläres Element a, so heißt I regulär.

Sei ab jetzt R ein kommutativer, noetherscher, lokaler Ring mit regulärem maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Vervollständigung $\hat{R}$. Dann ist jeder teilbare R-Modul M radikalvoll (d.h. $\mathfrak{m}M = M$) und jeder torsionsfreie R-Modul M sockelfrei (d.h. $M[\mathfrak{m}] = 0$). Ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R heißt *koassoziiert* zu M, wenn es einen Untermodul U von M gibt, so daß M/U artinsch und $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(M/U)$ ist. Die Grundtatsachen über die Menge $\mathrm{Koass}(M)$ aller koassoziierten Primideale sind in ([12, Abschnitt 2; 13, Lemma 3.1]) zusammengestellt. Insbesondere ist M genau dann Null (teilbar, radikalvoll), wenn $\mathrm{Koass}(M) = \varnothing$ ist ($\bigcup \mathrm{Koass}(M)$ kein reguläres Element enthält, $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Koass}(M)$ ist). M heißt *Minimax-Modul*, wenn M einen endlich erzeugten Untermodul M_0 besitzt, so daß M/M_0 artinsch ist. Ist R zusätzlich vollständig, so ist dieser endlich erzeugte Untermodul M_0 bekanntlich linear-kompakt, so daß auch M linear-kompakt ist, in jeder Erweiterung ein Komplement hat und schließlich der reduzierte Anteil $M/P(M)$ endlich erzeugt ist (siehe [12, p. 122]).

Die im folgenden wichtigsten Teilmengen von $\mathrm{Spec}(R)$ sind $Y := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R) | \dim(R/\mathfrak{p}) = 1\}$ und $Y_0 := Y \cap \mathrm{Min}(R)$.

1. Die Struktur von $P(T)$

Weil $(K/R)[\mathfrak{m}] \cong \mathrm{Ext}_R^1(R/\mathfrak{m}, R)$ endlich erzeugt, also $T/R = L_{\mathfrak{m}}(K/R)$ nach Matlis artinsch ist (siehe [5, p. 40]), ist T ein Minimax-Modul, so daß wir die Ergebnisse von [13] auf $P(T)$ und $\mathrm{Koass}(P(T))$ anwenden können, ebenso auf $P(B)$ und $\mathrm{Koass}(P(B))$.

Lemma 1.1. *Für jeden Minimax-Untermodul U von K gilt:*

(a) $P(U) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i U$.

(b) *$P(U)$ ist teilbar und liegt in T.*

(c) $\mathrm{Ass}(P(U)) = \mathrm{Koass}(P(U))$.

Beweis. (a) Allgemeiner gilt für jeden sockelfreien Minimax-Modul M, daß $P(M) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i M$ ist: Wegen $\bigcup \mathrm{Ass}(M) \subsetneqq \mathfrak{m}$ gibt es ein $r \in \mathfrak{m}$ mit $M[r] = 0$, und weil in der absteigenden Folge $M \supset rM \supset r^2M \supset \cdots$ fast alle Faktoren endlich erzeugt sind, sind wegen $M[r] = 0$ sogar alle M/r^nM endlich erzeugt ($n \geq 1$), so daß für $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} r^nM$ folgt $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i(M/N) = 0$. Wieder wegen $M[r] = 0$ ist $rN = N$, also N radikalvoll, so daß in $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i M \subset N \subset P(M)$ Gleichheit gilt.

(b) Zeigen wir zunächst, daß $(U + T)/T$ beschränkt ist, d.h. ein reguläres Element $s \in R$ existiert mit $sU \subset T$. Zum Beweis sei $U_0 = \sum_{i=1}^{n} R(r_i/s)$ ein endlich erzeugter Untermodul von U, so daß U/U_0 artinsch ist, und dann leistet s das Gewünschte: Die Multiplikation mit s induziert, wegen $sU_0 \subset R$, einen Epimorphismus $U/U_0 \to sU/sU \cap R$, so daß auch $(sU + R)/R$ artinsch ist, d.h. $sU + R \subset T$ wie behauptet.

Aus dem Beweis von (c) folgt, daß jedes reguläre Element auf $P(U)$ surjektiv operiert, d.h. $P(U)$ teilbar ist. Speziell mit dem oben gewählten s folgt $P(U) = sP(U) \subset T$.

(c) Allgemeiner gilt für jeden radikalvollen, sockelfreien Minimax-Modul M, daß $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Koass}(M)$ ist: Für jedes $r \in R$ sind in der absteigenden Folge $M \supset rM \supset r^2M \supset \cdots$ fast alle Faktoren endlich erzeugt und natürlich radikalvoll, also Null; ebenso sind in der aufsteigenden Folge $M[r] \subset M[r^2] \subset \cdots$ fast alle Faktoren artinsch und natürlich sockelfrei, also wieder Null, so daß insgesamt $M[r^n] \oplus r^nM = M$ folgt für ein $n \geq 1$. Insbesondere ist $M[r] = 0$ äquivalent mit $rM = M$, d.h. $\bigcup \mathrm{Ass}(M) = \bigcup \mathrm{Koass}(M)$. Genauso gilt für die Ideale $\mathfrak{a} = \bigcap \mathrm{Ass}(M)$ und $\mathfrak{b} = \bigcap \mathrm{Koass}(M)$, daß $M[\mathfrak{a}^m] = M[\mathfrak{a}^{m+1}] = \cdots = M$ ist und $\mathfrak{b}^mM = \mathfrak{b}^{m+1}M = \cdots = 0$ für ein $m \geq 1$, also $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)} = \mathfrak{b}$. Nach ([13, Lemma 1.1.e]) gilt auch $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, und damit folgt die Behauptung.

FOLGERUNG 1.2. *Jeder radikalvolle Untermodul von T/R ist teilbar.*

Beweis. Sei X ein R-Modul zwischen R und T, so daß X/R radikalvoll ist. Falls R vollständig ist, hat die Menge $\{N \subset X | N + R = X\}$ ein minimales Element N_0, für dieses Komplement N_0 folgt nach Voraussetzung $\mathfrak{m}N_0 = N_0$, also $P(X) + R = X$, und weil $P(X)$ nach (1.1.b) teilbar ist, gilt das auch für X/R.—Im allgemeinen Fall betrachte man $\hat{R} \otimes_R X/R$ als $\hat{R}$-Untermodul von $\hat{R} \otimes_R T/R$, und weil $\hat{R} \otimes_R T$ die globale Transformation des Ringes $\hat{R}$ ist (siehe etwa [7, p. 76]), ist nach dem ersten Fall $\hat{R} \otimes_R X/R$ als $\hat{R}$-Modul teilbar, also auch X/R als R-Modul. (Wir haben dabei benützt, daß jeder halbartinsche R-Modul M, d.h. $L_{\mathfrak{m}}(M) = M$, eine natürliche $\hat{R}$-Struktur trägt, bzgl. der $M \to \hat{R} \otimes_R M$ ein Isomorphismus ist.)

LEMMA 1.3. (a) $\mathrm{Koass}_R(K) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | \mathfrak{p}$ *ist nicht regulär*$\}$.

(b) *Die maximalen radikalvollen Untermoduln von K entsprechen genau den Elementen von* $Y = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R) | \dim(R/\mathfrak{p}) = 1\}$.

Beweis. (a) Sei S die Menge aller regulären Elemente von R, also $K = R_S$. Allein aus $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(K/U)$, für einen beliebigen R-Untermodul U von K, folgt $\mathfrak{p}K \neq K$, d.h. $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Ist umgekehrt $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, gilt im Integritätsring $\bar{R} = R/\mathfrak{p}$ für die multiplikative Teilmenge $\bar{S} = \{\bar{s} | s \in S\}$, daß $0 \notin \bar{S}$ und $\bar{\mathfrak{m}} \cap \bar{S} \neq \emptyset$ ist. Weil $\bar{R}_{\bar{S}} \cong K/\mathfrak{p}K$ als Ring semilokal ist, folgt nach ([14, Satz 4.5]) $\mathrm{Koass}_{\bar{R}}(\bar{R}_{\bar{S}}) = \{\bar{\mathfrak{q}} | \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$ und $\bar{\mathfrak{q}} \cap \bar{S} = \emptyset\}$, d.h. $\mathrm{Koass}_R(K/\mathfrak{p}K) = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R) | \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset\}$, insbesondere $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}_R(K)$.

(b) Sei A ein maximaler radikalvoller Untermodul von K (d.h. A radikalvoll $\neq K$, und zwischen A und K liegt kein weiterer radikalvoller R-Modul). Dann ist A teilbar, denn für jedes reguläre Element $s \in R$ gilt $A \subset (1/s)A \subsetneqq K$, also $sA = A$. Für den einfach-radikalvollen, torsionsfreien R-Modul K/A ist also nach ([13, Lemma 4.1.c]) $\mathfrak{p} := \mathrm{Ann}_R(K/A)$ ein Primideal mit $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$, und weil $\mathfrak{p}K \neq K$, also $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ ist, folgt auch $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$, d.h. $\mathfrak{p} \in Y$. Weil sowohl $\mathfrak{p}K$ als auch A ein Ideal im Ring K ist, das erste sogar ein maximales, gilt $\mathfrak{p}K = A$.

Umgekehrt folgt für jedes $\mathfrak{p} \in Y$, daß $A := \mathfrak{p}K$ ein maximaler radikalvoller Untermodul von K ist: Natürlich ist A radikalvoll $\neq K$, und ist X ein weiterer radikalvoller Untermodul mit $A \subsetneqq X \subset K$, wird X/A über dem 1-dim. Integritätsring $R/\mathfrak{p}$ sogar teilbar, muß also mit dem Quotientenkörper $K/\mathfrak{p}K$ von $R/\mathfrak{p}$ übereinstimmen, d.h. es ist $X = K$. Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R gilt $\mathrm{Ann}_R(K/\mathfrak{a}K) = \mathfrak{a}K \cap R$, hier also $\mathrm{Ann}_R(K/A) = \mathfrak{p}$.

Bemerkung. Aus (2.5) folgt, daß die Elemente von $Y_0 = Y \cap \mathrm{Min}(R)$ gerade den maximalen radikalvollen Untermoduln von K entsprechen, die zusätzlich ein Komplement in K haben (siehe auch 2.10).

LEMMA 1.4. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal* $\neq R$ *mit* $\dim(R/\mathfrak{a}) \leq 1$, *so gilt*:

(a) $K[\mathfrak{a}]$ *und* $L_{\mathfrak{a}}(K)$ *sind radikalvolle Minimax-Moduln mit* $\mathrm{Koass}(K[\mathfrak{a}]) = \mathrm{Koass}(L_{\mathfrak{a}}(K)) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R) | \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$.

(b) $L_{\mathfrak{a}}(K) = \bigoplus_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R) \\ \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}}} L_{\mathfrak{p}}(K)$.

Beweis. (a) Für jedes Ideal $\mathfrak{b}$ von R ist $K[\mathfrak{b}] = \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{b}) \cdot K$ ein teilbarer Untermodul von K mit $\mathrm{Ass}(K[\mathfrak{b}]) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(K) | \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}\}$, worin man die erste Bedingung durch $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ ersetzen kann. Ist jetzt $\mathfrak{a}$ wie angegeben, wird $M_1 = K[\mathfrak{a}]$ über dem Ring $\bar{R} = R/\mathfrak{a}$, dessen Dimension ≤ 1 ist, nach ([13, Beispiel 1.4]) zu einem Minimax-Modul, und das ist

M_1 dann auch über R. Mit (1.1.c) folgt $\mathrm{Koass}(M_1) = \mathrm{Ass}(M_1) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R) | \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$.

Für jedes Ideal $\mathfrak{b}$ von R wird $L_{\mathfrak{b}}(K)$ durch eine Potenz von $\mathfrak{b}$ annuliert, denn aus $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{b}^e) = \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{b}^{e+1}) = \cdots$ folgt $K[\mathfrak{b}^e] = K[\mathfrak{b}^{e+1}] = \cdots = L_{\mathfrak{b}}(K)$. Die Aussagen über $M_2 = L_{\mathfrak{a}}(K)$ sind daher ein Spezialfall des vorhergehenden.

(b) Für jeden der auftretenden Summanden gilt $\mathrm{Koass}(L_{\mathfrak{p}}(K)) = \{\mathfrak{p}\} = \mathrm{Ass}(L_{\mathfrak{p}}(K))$, und aus der zweiten Gleichheit folgt für jedes $0 \neq x \in L_{\mathfrak{p}}(K)$, daß $\sqrt{\mathrm{Ann}_R(x)} = \mathfrak{p}$ ist. Damit ist die angegebene Summe direkt, denn wäre in $x_1 + \cdots + x_n = 0$ (alle $x_i \in L_{\mathfrak{p}_i}(K)$) ein $x_j \neq 0$, folgte aus

$$\bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \mathrm{Ann}_R(x_i) \subset \mathrm{Ann}_R(x_j) \quad \text{und} \quad \sqrt{\mathrm{Ann}_R(x_j)} = \mathfrak{p}_j,$$

daß $\mathrm{Ann}_R(x_k) \subset \mathfrak{p}_j$ wäre für ein $k \neq j$, also $\mathfrak{p}_k \subset \mathfrak{p}_j$, d.h. der Widerspruch $\mathfrak{p}_k = \mathfrak{p}_j$.

Klar ist die rechte Seite $U = \bigoplus L_{\mathfrak{p}}(K)$ enthalten in $L_{\mathfrak{a}}(K)$, und zur Gleichheit genügt es $L_{\mathfrak{a}}(K/U) = 0$ zu zeigen. Wäre $L_{\mathfrak{a}}(K/U) \neq 0$, gäbe es ein $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(K/U)$ mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, und weil U teilbar, also K/U torsionsfrei ist, folgte $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$. Mit $\bar{K} = K/L_{\mathfrak{p}}(K)$ ist dann $\mathrm{Ass}(\bar{K})$ endlich und $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(\bar{K})$ unmöglich (wegen $\bar{K}[\mathfrak{p}] = 0$), entsprechend $\mathrm{Koass}(\bar{U})$ endlich und $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}(\bar{U})$ unmöglich (wegen $\mathfrak{p}\bar{U} = \bar{U}$), und aus $\mathfrak{p} \not\subset \bigcup \mathrm{Ass}(\bar{K}) \cup \bigcup \mathrm{Koass}(\bar{U})$ folgt, daß es ein $r \in \mathfrak{p}$ gibt mit $\bar{K}[r] = 0$, $r\bar{U} = \bar{U}$. Aus beidem folgt $(\bar{K}/\bar{U})[r] = 0$, $(K/U)[\mathfrak{p}] = 0$ im Widerspruch zu $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(K/U)$.

Satz 1.5. (a) $P(T) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Y} L_{\mathfrak{p}}(K)$.

(b) $\mathrm{Koass}(P(T)) = Y$.

Beweis. (a) Mit $\mathfrak{z} := \bigcap Y$ zeigen wir im

1. *Schritt*, daß $P(T) = L_{\mathfrak{z}}(K)$ ist. Weil $L_{\mathfrak{z}}(K)$ nach (1.4.a) ein radikalvoller Minimax-Modul ist, gilt $L_{\mathfrak{z}}(K) \subset P(T)$ nach (1.1.b). Zur Umkehrung benützen wir ([13, Lemma 1.1.e und Satz 1.2]), wonach $\mathrm{Ass}(P(T)) \subset Y$ und $\bigcap \mathrm{Ass}(P(T)) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(P(T))}$ ist. Aus beidem folgt $\mathfrak{z}^e \subset \mathrm{Ann}_R(P(T))$ für ein $e \geq 1$, also $P(T) \subset L_{\mathfrak{z}}(K)$. Mit (1.4.b) folgt im

2. *Schritt* die angegebene Zerlegung: Falls $Y = \varnothing$, ist $\mathfrak{z} = R$ und $P(T) = 0$. Falls $Y \neq \varnothing$, ist $\dim(R/\mathfrak{z}) = 1$ und $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R) | \mathfrak{z} \subset \mathfrak{p}\} = Y$.

(b) Folgt unmittelbar aus (a), denn für jeden der direkten Summanden ist nach (1.4.a) $\mathrm{Koass}(L_{\mathfrak{p}}(K)) = \{\mathfrak{p}\}$.

Bemerkungen. (1) Im vollständigen Fall ist $T/P(T)$ endlich erzeugt, also T selbst genau dann endlich erzeugt, wenn $P(T) = 0$, d.h. nach (1.5)

$Y = \emptyset$ ist. Im allgemeinen Fall erhält man so, durch Übergang zu $\hat{R} \otimes_R T$, einen neuen Beweis für das Ergebnis von Nishimura ([9, Proposition 2.3.2]): Genau dann ist T endlich über R, wenn die Vervollständigung $\hat{R}$ kein assoziiertes Primideal der Kohöhe 1 besitzt.

(2) Ein R-Modul M heißt *koprimär*, wenn $M \neq 0$ ist und für jedes $r \in R$ entweder $rM = M$ oder $r^e M = 0$ ist für ein $e \geq 1$. In diesem Fall ist $\mathfrak{q} = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$ ein Primideal, und M heißt dann $\mathfrak{q}$-koprimär. Aus (1.4.a) folgt sofort, daß für jedes $\mathfrak{p} \in Y$ der Modul $L_{\mathfrak{p}}(K)$ $\mathfrak{p}$-koprimär ist, also die Darstellung in (1.5.a) eine sogenannte *Koprimärzerlegung von* $P(T)$ ist. Allgemeiner weiß man, daß jeder radikalvolle Minimax-Modul eine Koprimärzerlegung besitzt ([15, Folgerung 2.6]).

Mit (1.5) und der Formel $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathscr{P} \cap R \mid \mathscr{P} \in \mathrm{Koass}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R M)\}$, die nach ([14, Proposition 3.3]) für jeden R-Modul M gilt, können wir jetzt $\mathrm{Koass}(T)$ berechnen:

SATZ 1.6. *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R sind äquivalent:*

(i) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(T) \setminus \{\mathfrak{m}\}$.

(ii) $\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap R$ *für ein* $\mathscr{P} \in \mathrm{Ass}(\hat{R})$ *mit* $\dim(\hat{R}/\mathscr{P}) = 1$.

(iii) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$, *und die globale Transformation des Ringes* $R/\mathfrak{p}$ *ist nicht endlich erzeugt.*

(iv) $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(E/U)$, *wobei E die injektive Hülle von $k = R/\mathfrak{m}$ und U ein maximaler radikalvoller Untermodul von E ist.*

Beweis. (i $\to$ ii) Es ist $\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap R$ für ein $\mathscr{P} \in \mathrm{Koass}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R T)$, außerdem $\mathscr{P} \neq \mathfrak{m}\hat{R}$. Weil $\hat{R} \otimes_R T$ die globale Transformation von $\hat{R}$ und der reduzierte Anteil endlich erzeugt ist, folgt $\mathscr{P} \in \mathrm{Koass}_{\hat{R}}(P(\hat{R} \otimes_R T))$, also nach (1.5.b) $\mathscr{P} \in \mathrm{Ass}(\hat{R})$ und $\dim(\hat{R}/\mathscr{P}) = 1$.

(ii $\to$ i) Wieder nach (1.5.b) folgt $\mathscr{P} \in \mathrm{Koass}_{\hat{R}}(P(\hat{R} \otimes_R T))$, also nach ([12, Lemma 2.1.b]) $\mathscr{Q} \subset \mathscr{P}$ für ein $\mathscr{Q} \in \mathrm{Koass}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R T)$. Wegen $\mathscr{P} \neq \mathfrak{m}\hat{R}$ folgt $\mathscr{Q} = \mathscr{P}$, also $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(T)$ und natürlich $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$.

(ii $\to$ iii) Mit dem angegebenen $\mathscr{P}$ folgt bekanntlich $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ und $\mathscr{P} \in \mathrm{Ass}(\hat{R}/\mathfrak{p}\hat{R})$. Das zweite bedeutet, daß die Vervollständigung $\widehat{R/\mathfrak{p}}$ ein assoziiertes Primideal der Kohöhe 1 besitzt, also die globale Transformation von $R/\mathfrak{p}$ nicht endlich erzeugt ist.

(iii $\to$ ii) Jetzt existiert ein $\mathscr{P} \in \mathrm{Ass}(\hat{R}/\mathfrak{p}\hat{R})$ mit $\dim(\hat{R}/\mathscr{P}) = 1$, woraus insbesondere $\mathscr{P} \cap R \in \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{p})$ folgt, d.h. $\mathscr{P} \cap R = \mathfrak{p}$. Wegen $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ gilt auch $\mathscr{P} \in \mathrm{Ass}(\hat{R})$ wie gewünscht.

(ii $\to$ iv) Aus $\mathscr{P} \in \mathrm{Ass}(\hat{R})$ folgt $\mathscr{P}E \neq E$, aus $\dim(\hat{R}/\mathscr{P}) = 1$, daß $E/\mathscr{P}E$ einen maximalen radikalvollen Untermodul $U/\mathscr{P}E$ besitzt ([5, Theorem 5.5]), und dann ist $\mathrm{Ann}_{\hat{R}}(E/U)$ ein nicht-reguläres Primideal in $\hat{R}$, das $\mathscr{P}$ umfaßt, also schon mit $\mathscr{P}$ übereinstimmt. Natürlich ist

dann U auch ein maximaler radikalvoller R-Untermodul von E und $\mathrm{Ann}_R(E/U) = \mathscr{P} \cap R = \mathfrak{p}$.

(iv $\to$ ii) Der angegebene Untermodul U ist auch ein maximaler radikalvoller $\hat{R}$-Untermodul von E, so daß $\mathscr{P} := \mathrm{Ann}_{\hat{R}}(E/U)$ nach ([13, Lemma 4.1.c]) ein Primideal ist mit $\dim(\hat{R}/\mathscr{P}) = 1$. Weil E auch als $\hat{R}$-Modul injektiv, insbesondere teilbar ist, ist $\mathscr{P}$ nicht-regulär, also $\mathscr{P} \in \mathrm{Ass}(\hat{R})$, und natürlich ist $\mathscr{P} \cap R = \mathfrak{p}$.

Bemerkung. Aus (1.6) folgt sofort, daß für den Ring R äquivalent sind:

(1) $\mathrm{Koass}(T) = \{\mathfrak{m}\}$.

(2) T ist als R-Modul endlich erzeugt.

(3) Für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ ist die globale Transformation des Ringes $R/\mathfrak{p}$ endlich erzeugt.

(4) Die injektive Hülle E des Restklassenkörpers besitzt keinen maximalen radikalvollen Untermodul.

—Die Äquivalenz (2 $\leftrightarrow$ 3) findet sich bei Grothendieck ([1, Proposition 5.11.1], siehe auch [7, Lemma 10.13]), und (1 $\leftrightarrow$ 2) ist ein Spezialfall der folgenden Aussage (siehe [14, Satz 1.2]): Jeder sockelfreie R-Modul M mit $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{m}\}$ ist endlich erzeugt.

FOLGERUNG 1.7. $\mathrm{Koass}(T) = \mathrm{Koass}(P(T)) \uplus \mathrm{Koass}(T/P(T))$.

Beweis. Für jedes Paar $U \subset M$ von R-Moduln gilt $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Koass}(U) \cup \mathrm{Koass}(M/U)$ ([12, Lemma 2.1.a]), und weil $\mathrm{Koass}(P(T)) = Y$ nach (iii $\to$ i) eine Teilmenge von $\mathrm{Koass}(T)$ ist, bleibt nur noch $Y \cap \mathrm{Koass}(\bar{T}) = \varnothing$ zu zeigen, mit $\bar{T} = T/P(T)$. Nach dem Beweis von (1.5.a) ist $P(T) = L_{\mathfrak{z}}(K)$ mit $\mathfrak{z} = \bigcap Y$, so daß auch $\bar{T}$ ein sockelfreier Minimax-Modul ist mit $\bar{T}[\mathfrak{z}] = 0$. Es folgt $\bar{T}[r] = 0$ für ein $r \in \mathfrak{z}$, so daß nach Matijevic ([4], siehe die Variante in [11, p. 47]) $\bar{T}/r\bar{T}$ endlich erzeugt ist. Für alle $\mathfrak{p} \in Y$ ist damit $\bar{T}/\mathfrak{p}\bar{T}$ endlich erzeugt, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Koass}(\bar{T})$.

FOLGERUNG 1.8. *Genau dann ist $T/P(T)$ endlich erzeugt, wenn für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R) \setminus Y$ die globale Transformation des Ringes $R/\mathfrak{p}$ endlich erzeugt ist.*

Beweis. Jeder Minimax-Modul M besitzt einen endlich erzeugten Untermodul M_0, so daß M/M_0 artinsch und radikalvoll ist. Genau dann ist also M endlich erzeugt, wenn $\mathrm{Koass}(M) \subset \{\mathfrak{m}\}$ ist. Speziell für $M = T/P(T)$ bedeutet das nach (1.7), daß $\mathrm{Koass}(T) \setminus Y \subset \{\mathfrak{m}\}$, d.h. $\mathrm{Koass}(T) \setminus \{\mathfrak{m}\} \subset Y$ ist. Die Äquivalenz (i $\leftrightarrow$ iii) in (1.6) liefert die Behauptung.

SATZ 1.9. *Ist R Faktorring eines noetherschen, lokalen Cohen–Macaulay-Ringes, so ist $T/P(T)$ endlich erzeugt.*

Beweis. Nach der letzten Folgerung genügt es zu zeigen: Ist R ein CM-Ring und $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $\dim(R/\mathfrak{q}) \geq 2$, so ist die globale Transformation des Ringes $R/\mathfrak{q}$ endlich erzeugt. Zunächst ist $T = R$, denn aus $\dim(R) \geq 2$ folgt nach Voraussetzung Tiefe$(R) \geq 2$, d.h. $(K/R)[\mathfrak{m}] \cong \operatorname{Ext}^1_R(k, R) = 0$.

1. *Fall.* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(R)$. Dann ist nach (1.6)(*iii* $\to$ *i*) die globale Transformation von $R/\mathfrak{q}$ endlich erzeugt.

2. *Fall.* $\mathfrak{q} \notin \operatorname{Ass}(R)$. Dann wähle man eine maximale R-Sequenz $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathfrak{q}$, so daß auch $\bar{R} = R/(x_1, \ldots, x_n)$ ein CM-Ring wird mit $h(\bar{\mathfrak{q}}) = 0$, $\dim(\bar{R}/\bar{\mathfrak{q}}) \geq 2$, und nach dem ersten Fall ist die globale Transformation von $\bar{R}/\bar{\mathfrak{q}} \cong R/\mathfrak{q}$ endlich erzeugt.

Im Rest dieses Abschnittes bestimmen wir den größten radikalvollen Untermodul von R' (dem ganzen Abschluß von R in K) und $B = R' \cap T$, ebenso die zugehörigen koassoziierten Primideale. Sei N das Nilradikal von R.

LEMMA 1.10. (a) $P(R') = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i R' = NK$.

(b)

$$\operatorname{Koass}(P(R')) = \left\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathfrak{p} \text{ ist nicht regulär und } R_{\mathfrak{p}} \\ \text{hat ein nilpotentes Element} \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Beweis. (a) Klar ist $NK \subset P(R') \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i R'$, so daß nur noch $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i R' \subset NK$ zu zeigen bleibt. Ist im

1. *Schritt* R sogar ein Integritätsring, gibt es nach Chevalley einen diskreten Bewertungsring $(V, \mathscr{M})$ zwischen R und K mit $\mathscr{M} \cap R = \mathfrak{m}$, und aus $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{M}^i = 0$ folgt $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i R' = 0$. Ist im

2. *Schritt* R beliebig und $\operatorname{Min}(R) = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m\}$, so folgt für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ mit der kanonischen Einbettung φ_j: $R/\mathfrak{q}_j \to K/\mathfrak{q}_j K$, daß $K/\mathfrak{q}_j K$ ein Oberring von Bi φ_j ist (d.h. im Quotientenkörper von $R/\mathfrak{q}_j$ liegt), der ganze Abschluß A_j von Bi φ_j in $K/\mathfrak{q}_j K$ also nach dem ersten Schritt bzgl. des maximalen Ideales von Bi φ_j separiert ist. Damit ist A_j auch als R-Modul bzgl. $\mathfrak{m}$ separiert, die kanonische Abbildung $K \to \prod_{j=1}^{m} K/\mathfrak{q}_j K$ liefert einen R-Homomorphismus f: $R' \to \prod_{j=1}^{m} A_j$, und weil jetzt $R'/\operatorname{Ke} f$ bzgl. $\mathfrak{m}$ separiert ist, folgt $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i R' \subset \operatorname{Ke} f \subset \bigcap_{j=1}^{m} \mathfrak{q}_j K = NK$ wie gewünscht.

(b) Aus $P(R') \cong K \otimes_R N$ folgt $\operatorname{Koass}(P(R')) = \operatorname{Koass}(K) \cap \operatorname{Supp}(N)$ nach ([13, Folgerung 3.2]), so daß mit (1.3.a) die Behauptung folgt.

Bemerkung zu (a). Ist R zusätzlich vollständig, so gilt mit den Bezeichnungen des zweiten Beweisschrittes, daß alle A_j nach Nagata endlich erzeugt sind, also auch $R'/\mathrm{Ke}\, f$. Man erhält so das wohlbekannte Ergebnis, daß im vollständigen Fall der reduzierte Anteil $R'/P(R')$ endlich erzeugt ist.

SATZ 1.11. (a) $P(B) = (\bigoplus_{\mathfrak{p} \in Y \setminus Y_0} L_{\mathfrak{p}}(K)) \oplus (\bigoplus_{\mathfrak{p} \in Y_0} \mathfrak{p} \cdot L_{\mathfrak{p}}(K))$.

(b) $\mathrm{Koass}(P(B)) = \{\mathfrak{p} \in Y | R_{\mathfrak{p}} \text{ ist kein Körper}\}$.

Beweis. (a) Als Durchschnitt von zwei teilbaren Untermoduln ist auch $P(R') \cap P(T)$ teilbar, so daß in $P(B) \subset P(R') \cap P(T)$ Gleichheit gilt. In der Zerlegung $P(B) = NK \cap (\bigoplus_{\mathfrak{p} \in Y} L_{\mathfrak{p}}(K)) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Y}(NK \cap L_{\mathfrak{p}}(K))$ müssen wir also nur noch die einzelnen Summanden studieren:

1. *Fall.* $\mathfrak{p} \in Y \setminus Y_0$. Für jedes $\mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(R)$ ist dann $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$, mit $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{p}^e) = \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{p}^{e+1}) = \cdots$ also auch $\mathfrak{p}^e \not\subset \mathfrak{q}$, $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{p}^e) \subset \mathfrak{q}$ (denn für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{a} \cap \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a})$ nilpotent), und damit $L_{\mathfrak{p}}(K) \subset \mathfrak{q}K$. Insgesamt folgt $L_{\mathfrak{p}}(K) \subset NK$.

2. *Fall.* $\mathfrak{p} \in Y_0$. Mit demselben Argument folgt jetzt wenigstens $\mathfrak{p}K \cap L_{\mathfrak{p}}(K) \subset NK$, also $\mathfrak{p}K \cap L_{\mathfrak{p}}(K) = NK \cap L_{\mathfrak{p}}(K)$. Weil der Ring $R_{\mathfrak{p}}$ artinsch ist, gilt $\mathfrak{p}^f R_{\mathfrak{p}} = 0$ für ein $f \geq 1$, d.h. $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{p}^f) \not\subset \mathfrak{p}$, daraus folgt $(\mathfrak{p} + \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{p}^f)) \cap S \neq \emptyset$ also $\mathfrak{p}K + L_{\mathfrak{p}}(K) = K$, $\mathfrak{p}K \cap L_{\mathfrak{p}}(K) = \mathfrak{p} \cdot L_{\mathfrak{p}}(K)$ wie gewünscht.

(b) Aus der eben bewiesenen Zerlegung folgt mit (1.4.a) sofort $\mathrm{Koass}(P(B)) = Y \setminus Y_0 \cup \{\mathfrak{p} \in Y_0 | \mathfrak{p} \cdot L_{\mathfrak{p}}(K) \neq 0\}$. Bleibt für jedes $\mathfrak{p} \in Y_0$ zu zeigen: Genau dann ist $\mathfrak{p} \cdot L_{\mathfrak{p}}(K) = 0$, wenn $R_{\mathfrak{p}}$ ein Körper ist. Bei $\Rightarrow$ hat man nach dem Vorhergehenden $\mathfrak{p}K \oplus L_{\mathfrak{p}}(K) = K$, also $\mathfrak{p}^2K = \mathfrak{p}K$, also erst recht $\mathfrak{p}^2R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$, d.h. schon $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = 0$. Bei $\Leftarrow$ folgt aus $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = 0$, daß $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{p}) \not\subset \mathfrak{p}$, also wie oben (mit $f = 1$) $\mathfrak{p}K \oplus K[\mathfrak{p}] = K$ ist, also $K[\mathfrak{p}] = L_{\mathfrak{p}}(K)$.

2. ÜBER DIE LAGE VON $P(T)$ IN K

Obwohl $P(T)$ im allgemeinen weder klein noch direkter Summand in K ist, existiert genau ein Komplement V von $P(T)$ in K, das wir in (2.8) berechnen. Für $P(B)$ ist die Situation einfacher: Wir zeigen in (2.9), daß sogar B als R-Modul klein in K ist.

Die ersten drei Lemmata beantworten jeweils die Frage, wann ein beliebiger teilbarer Untermodul U von K (der bekanntlich von der Form

$U = \mathfrak{a}K$ ist für ein Ideal $\mathfrak{a}$ von R) klein in K ist bzw. direkter Summand in K ist bzw. ein Komplement in K hat.

LEMMA 2.1. *Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R gilt:*

(a) *Genau dann ist $\mathfrak{a}K$ klein in K, wenn $\mathfrak{a}$ nilpotent ist.*

(b) *Genau dann ist $K[\mathfrak{a}]$ klein in K, wenn aus $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$ stets folgt $\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}} \neq 0$.*

(c) *Genau dann ist $L_{\mathfrak{a}}(K)$ klein in K, wenn $\mathfrak{a}$ in keinem minimalen Primideal liegt.*

Beweis. (a) Für einen beliebigen R-Modul M gilt nach ([12, p. 129, Folgerung 1]): Genau dann ist $\mathfrak{a}M$ klein in M, wenn $\mathfrak{a} \subset \bigcap \mathrm{Koass}(M)$ ist. Speziell für $M = K$ gilt aber nach (1.3.a) $\bigcap \mathrm{Koass}(K) = N$, und damit folgt die Behauptung.

(b) erhält man mit $K[\mathfrak{a}] = \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}) \cdot K$ und (a): Bei $\Rightarrow$ ist $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a})$ nilpotent, also $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}} \neq 0$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, und wäre bei $\Leftarrow$ $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a})$ nicht nilpotent, folgte $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}) \not\subset \mathfrak{p}$ für ein $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$, also der Widerspruch $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}} = 0$.

(c) Bei $\Rightarrow$ gibt es zu jedem $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$ ein $f \geq 1$ mit $\mathfrak{p}^f R_{\mathfrak{p}} = 0$, und weil nach Voraussetzung $K[\mathfrak{a}^f]$ klein in K ist, folgt nach (b) $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$. Bei $\Leftarrow$ sind wieder nach (b) alle $K[\mathfrak{a}^n]$ klein in K $(n \geq 1)$, also auch $L_{\mathfrak{a}}(K) = K[\mathfrak{a}^e]$.

Punkt (c) und die Darstellung $P(T) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Y} L_{\mathfrak{p}}(K)$ aus (1.5.a) liefern sofort den Spezialfall:

FOLGERUNG 2.2. *Genau dann ist $P(T)$ klein in K, wenn $Y_0 = \varnothing$ ist.*

LEMMA 2.3. *Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R sind äquivalent:*

(i) *$\mathfrak{a}K$ ist direkter Summand in K.*

(ii) $\mathfrak{a}^2K = \mathfrak{a}K$.

(iii) $K[\mathfrak{a}] \oplus \mathfrak{a}K = K$.

(iv) *$K[\mathfrak{a}]$ ist direkter Summand in K.*

(v) *Aus $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ folgt stets $\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}} = 0$.*

Beweis. (i $\to$ ii) ist klar, ebenso (ii $\to$ v), denn dann ist auch $\mathfrak{a}^2R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}$, also $\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}} = 0$. Bei (v $\to$ iii) gilt für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$, daß $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$ ist, also insgesamt $(\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}) \cap S \neq \varnothing$, $K[\mathfrak{a}] + \mathfrak{a}K = K$, $K[\mathfrak{a}] \cap \mathfrak{a}K = \mathfrak{a} \cdot K[\mathfrak{a}] = 0$. Bleibt (iv $\to$ iii) zu zeigen: Aus $X \oplus K[\mathfrak{a}] = K$ folgt mit $X = \mathfrak{b}K$, daß $(\mathfrak{b} + \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a})) \cap S \neq \varnothing$ und $\mathfrak{b} \cap \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}) = 0$ ist, es also ein $b \in \mathfrak{b}$ und ein $c \in \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a})$ gibt mit $b + c \in S$, außerdem ein $a \in \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}[a] = 0$. Damit ist auch $a + c \in S$, denn aus

$(a + c)r = 0$ folgt $abr = 0$, $br = 0$, $(b + c)ar = 0$, $ar = 0$, $cr = 0$, $(b + c)r = 0$, $r = 0$. Also ist $(\mathfrak{a} + \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a})) \cap S \neq \emptyset$, $\mathfrak{a}K \oplus K[\mathfrak{a}] = K$ wie gewünscht.

Ist $\mathfrak{q}$ ein maximales Element von $\mathrm{Ass}(R)$ und $n \geq 1$, liefert die Äquivalenz (iv $\leftrightarrow$ v) speziell für das Ideal $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}^n$: Genau dann ist $K[\mathfrak{q}^n]$ direkter Summand in K, wenn $\mathfrak{q}^n R_{\mathfrak{q}} = 0$ ist. Für die Zerlegung $P(T) = \bigoplus_{\mathfrak{q} \in Y} L_{\mathfrak{q}}(K)$ bedeutet das:

FOLGERUNG 2.4. *Genau dann ist $P(T)$ direkter Summand in K, wenn $Y_0 = Y$ ist.*

LEMMA 2.5. *Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R sind äquivalent:*

(i) *$\mathfrak{a}K$ hat ein Komplement in K.*

(ii) *Die absteigende Folge $K \supset \mathfrak{a}K \supset \mathfrak{a}^2K \supset \mathfrak{a}^3K \supset \cdots$ ist stationär.*

(iii) *Es gibt ein $e \geq 1$ mit $K[\mathfrak{a}^e] \oplus \mathfrak{a}^eK = K$.*

(iv) *$L_{\mathfrak{a}}(K)$ ist direkter Summand in K.*

(v) *Aus $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ folgt stets, daß $\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}$ nilpotent ist.*

Beweis. (i $\rightarrow$ ii) Ist X ein Komplement von $\mathfrak{a}K$ in K, folgt aus dem wesentlichen Epimorphismus $X \rightarrow K/\mathfrak{a}K$, daß $\mathrm{Koass}(X) = \mathrm{Koass}(K/\mathfrak{a}K)$ ist ([12, Lemma 2.1.c]), insbesondere $\mathfrak{a} \subset \bigcap \mathrm{Koass}(X)$. Außerdem ist X radikalvoll, also $\bigcap \mathrm{Koass}(X) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(X)}$ ([14, Folgerung 1.3]), und mit $\mathfrak{a}^n \subset \mathrm{Ann}_R(X)$ folgt $\mathfrak{a}^{n+1}K = \mathfrak{a}^nK \cdot$ (ii $\rightarrow$ iii) Aus $\mathfrak{a}^{n+1}K = \mathfrak{a}^nK$ folgt nach (2.3) $K[\mathfrak{a}^n] \oplus \mathfrak{a}^nK = K$. (iii $\rightarrow$ iv) Mit diesem e folgt $K[\mathfrak{a}^e] = K[\mathfrak{a}^{e+1}] = \cdots$, so daß $L_{\mathfrak{a}}(K) = K[\mathfrak{a}^e]$ direkter Summand in K ist. (iv $\rightarrow$ v) Bekanntlich ist $L_{\mathfrak{a}}(K) = K[\mathfrak{a}^f]$ für ein $f \geq 1$, so daß für alle $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ nach (2.3) gilt $\mathfrak{a}^f R_{\mathfrak{p}} = 0$. (v $\rightarrow$ i) Weil $\mathrm{Ass}(R)$ endlich ist, gibt es ein gemeinsames $n \geq 1$, so daß für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$, mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, gilt $(\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}})^n = 0$. Für $X := K[\mathfrak{a}^n]$ gilt also nach (2.3) $X \oplus \mathfrak{a}^nK = K$, und damit ist X ein Komplement von $\mathfrak{a}K$ in K.

Ersetzt man das Ideal $\mathfrak{a}$ in der Äquivalenz (i $\leftrightarrow$ v) durch das Ideal $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a})$, so erhält man

FOLGERUNG 2.6. *Genau dann hat $K[\mathfrak{a}]$ ein Komplement in K, wenn aus $\mathfrak{a}R_{\mathfrak{q}} = 0$ und $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ stets folgt $\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}} = 0$.*

Bemerkungen. (1) Die Bedingung in (2.6) ist nicht für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ erfüllt: Ist $\mathrm{Ass}(R) \neq \mathrm{Min}(R)$ und wählt man $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$, $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(a)$, folgt $a \cdot R_{\mathfrak{q}} = 0$, $a \cdot R_{\mathfrak{p}} \neq 0$, so daß $K[a]$ kein Komplement in K hat (obwohl a ein nilpotentes Element ist).

(2) Ist andererseits $\mathrm{Ass}(R) = \mathrm{Min}(R)$ (d.h. der Ring K artinsch), folgt aus (2.5) sofort, daß *jeder* teilbare Untermodul von K ein Komplement in K hat.

(3) Die Bedingung in (2.6) ist offensichtlich erfüllt, wenn $\mathfrak{a}$ ein Ideal $\neq R$ ist mit $\dim(R/\mathfrak{a}) \leq 1$. Wir wollen im nächsten Lemma das zugehörige Komplement explizit angeben und im anschließenden Satz den Spezialfall $P(T) = L_{\mathfrak{z}}(K)$ untersuchen.

LEMMA 2.7. (a) *Sei U ein Untermodul von K und besitze U ein Komplement X in K. Dann ist X eindeutig bestimmt, und es gibt genau einen Untermodul U_1 von U mit $X \oplus U_1 = K$.*

(b) *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal $\neq R$ mit $\dim(R/\mathfrak{a}) \leq 1$. Dann ist $\bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R) \\ \mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}} = 0}} H_{\mathfrak{p}}(K)$ das einzige Komplement von $K[\mathfrak{a}]$ in K.*

(c) *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal $\neq R$ mit $\dim(R/\mathfrak{a}) \leq 1$. Dann ist $\bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R) \\ \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}}} H_{\mathfrak{p}}(K)$ das einzige Komplement von $L_{\mathfrak{a}}(K)$ in K.*

Beweis. (a) Aus der Minimalität von X folgt, daß X teilbar ist, also von der Form $X = \mathfrak{b}K$, und dann ist auch $\mathfrak{b}^2K = \mathfrak{b}K$, also nach (2.3) $X \oplus U_1 = K$ mit $U_1 = K[\mathfrak{b}]$. Aus $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{b}) \cdot X = 0$ folgt $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{b}) \cdot K/U = 0$, also $K[\mathfrak{b}] \subset U$ wie gewünscht. Die Eindeutigkeit von U_1 ist klar, und zur Eindeutigkeit von X zeigen wir mehr:

Ist X_1 ein weiterer Untermodul von K mit $X_1 + U = K$, so folgt bereits $X \subset X_1$. Weil nämlich in $X \cap U \oplus U_1 = U$ der erste Summand klein in K ist, hat man auch $X_1 + U_1 = K$, $\mathfrak{b}(K/X_1) = 0$, $\mathfrak{b}K \subset X_1$ wie behauptet.

(b) Sei $Z = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R) | \mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}} = 0\}$. Falls $Z = \emptyset$, ist $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a})$ nilpotent, also $K[\mathfrak{a}]$ klein in K und $X = K$ das einzige Komplement. Falls $Z \neq \emptyset$, folgt mit $Z = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$, daß jedes $\mathfrak{p}_i \in Y_0$ ist, also $\mathfrak{p}_iK$ nach (2.5) ein Komplement in K hat, es daher ein gemeinsames $e \geq 1$ gibt mit $\mathfrak{p}_i^eK \oplus K[\mathfrak{p}_i^e] = K$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$. Insbesondere ist $X := \bigcap_{i=1}^m H_{\mathfrak{p}_i}(K) = (\bigcap_{i=1}^m \mathfrak{p}_i^e)K$ direkter Summand in K, aus $(\bigcap_{i=1}^m \mathfrak{p}_i^e + \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a})) \cap S \neq \emptyset$ folgt $X + K[\mathfrak{a}] = K$, und weil $\bigcap_{i=1}^m \mathfrak{p}_i^e \cap \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a})$ nilpotent ist, ist $X \cap K[\mathfrak{a}]$ klein in K, also auch klein in X. Damit ist X das (nach (a) einzige) Komplement von $K[\mathfrak{a}]$ in K.

(c) Mit $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}^f) = \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}^{f+1}) = \cdots$ ist $L_{\mathfrak{a}}(K) = K[\mathfrak{a}^f]$. Nach (b) genügt es, für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$ zu zeigen, daß $\mathfrak{a}^fR_{\mathfrak{p}} = 0$ äquivalent ist mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Klar ist $\Rightarrow$, und bei $\Leftarrow$ gibt es ein $n \geq f$ mit $\mathfrak{p}^nR_{\mathfrak{p}} = 0$, aus $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{p}^n) \not\subset \mathfrak{p}$ folgt erst recht $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{a}^n) \not\subset \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{a}^fR_{\mathfrak{p}} = 0$ wie behauptet.

SATZ 2.8. *Mit* $V := \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y_0} H_{\mathfrak{p}}(K)$ *und* $W := \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Y_0} L_{\mathfrak{p}}(K)$ *gilt*:

(a) $V \oplus W = K$.

(b) *V ist das einzige Komplement von $P(T)$ in K.*

(c) *W ist das einzige Komplement von $P(B)$ in $P(T)$.*

Beweis. (a) Schon im Beweis von (2.7.b) haben wir benützt, daß in K der Durchschnitt zweier direkter Summanden wieder direkter Summand ist. Genauer gilt für endlich viele Zerlegungen $X_i \oplus W_i = K$ $(1 \leq i \leq m)$, daß $(\bigcap_{i=1}^m X_i) \oplus (\sum_{i=1}^m W_i) = K$ ist. Weil für jedes $\mathfrak{p} \in Y_0$ nach (2.5) $H_{\mathfrak{p}}(K) \oplus L_{\mathfrak{p}}(K) = K$ ist, folgt die Behauptung.

(b) Wegen $P(T) = L_{\mathfrak{z}}(K)$ (mit $\mathfrak{z} = \bigcap Y$ wie im Beweis von 1.5.a) ist das ein Spezialfall von (2.7.c): Falls $Y_0 = \emptyset$, ist $V = K$ und $P(T)$ nach (2.2) klein in K. Falls $Y_0 \neq \emptyset$, ist $\dim(R/\mathfrak{z}) = 1$ und $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(R) | \mathfrak{z} \subset \mathfrak{p}\} = Y_0$.

(c) Mit $V_1 := \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Y \setminus Y_0} L_{\mathfrak{p}}(K)$ und $W_1 := \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Y_0} \mathfrak{p} \cdot L_{\mathfrak{p}}(K)$ zeigten wir in (1.11.a), daß $P(B) = V_1 \oplus W_1$ ist, also $W + P(B) = P(T)$. Nach (1.10.a) ist aber $P(B) \subset NK$, also $P(B)$ klein in K, $W \cap P(B)$ klein in W, d.h. W ein Komplement von $P(B)$ in $P(T)$.—Zur Eindeutigkeit von W zeigen wir im

1. *Schritt*, daß $W = L_{\mathfrak{z}_0}(K)$ ist mit $\mathfrak{z}_0 := \bigcap Y_0$. Falls $Y_0 = \emptyset$, ist $\mathfrak{z}_0 = R$ und $W = 0$. Falls $Y_0 \neq \emptyset$, ist $\dim(R/\mathfrak{z}_0) = 1$ und $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R) | \mathfrak{z}_0 \subset \mathfrak{p}\} = Y_0$, so daß (1.4.b) die Behauptung liefert. Ist im

2. *Schritt* X ein weiteres Komplement von $P(B)$ in $P(T)$, folgt aus $\operatorname{Koass}(X) = \operatorname{Koass}(P(T)/P(B)) = \operatorname{Koass}(W) = Y_0$ und $\bigcap \operatorname{Koass}(X) = \sqrt{\operatorname{Ann}_R(X)}$ ([14, Folgerung 1.3]), daß $\mathfrak{z}_0^e \subset \operatorname{Ann}_R(X)$ ist für ein $e \geq 1$, also $X \subset L_{\mathfrak{z}_0}(K) = W$, $X = W$.

Bemerkungen. (1) Die Zerlegung $V \oplus W = K$ liefert für jeden teilbaren Untermodul U von K eine Zerlegung $(V \cap U) \oplus (W \cap U) = U$. Speziell für $U = P(B)$ ist das gerade die Darstellung in (1.11.a), denn mit den in (c) eingeführten Untermoduln V_1 und W_1 ist $V \cap P(B) = V_1$, $W \cap P(B) = W_1$.

(2) Falls R Faktorring eines noetherschen, lokalen Cohen-Macaulay-Ringes ist, ist $T/P(T)$ nach (1.9) endlich erzeugt, also V auch ein Komplement von T in K. Im allgemeinen braucht aber T kein Komplement in K zu haben; die genauen Bedingungen geben wir in (3.5) an.

SATZ 2.9. *B ist als R-Modul klein in K.*

Beweis. Sei im

1. *Schritt* A ein kommutativer Ring (der weder noethersch noch lokal sein muß), in dem jedes maximale Ideal regulär ist. Sei K der totale Quotientenring von A. Dann behaupten wir:

(a) Ist M ein A-Modul zwischen A und K, M durch kein maximales Ideal von A teilbar und M/A direkter Summand in K/A, so folgt $M = A$.

(b) Ist X ein Ring zwischen A und K mit $X + A' = K$ (wobei A' der ganze Abschluß von A in K sei), so folgt $X = K$.

Mit $N/A \oplus M/A = K/A$ erhält man nämlich in (a) eine exakte Folge $0 \to A \to N \times M \to K \to 0$, für jedes $\mathscr{M} \in \Omega(A)$ also, weil K radikalvoll und flach ist, einen Isomorphismus $A/\mathscr{M} \xrightarrow{\cong} N/\mathscr{M}N \times M/\mathscr{M}M$. Aus der Voraussetzung über M folgt $N = \mathscr{M}N$ für alle $\mathscr{M} \in \Omega(A)$, d.h. N ist radikalvoll. Als wesentliche Überdeckung von N/A ist deshalb N sogar teilbar, also $N = K$, $M = A$. (Für den Fall, daß A ein Integritätsring ist, folgt (a) auch aus [6, Proposition 1.3.5]).—Unter den Voraussetzungen in (b) ist auch $C = X \cap A'$ ein Ring, in dem alle maximalen Ideale regulär sind, und weil A' als C-Modul durch kein maximales Ideal teilbar ist, folgt aus $X/C \oplus A'/C = K/C$ nach dem ersten Teil $A' = C$, $X = K$ wie behauptet.

Sei im

2. *Schritt* R wie stets ein kommutativer, noetherscher, lokaler Ring mit regulärem maximalem Ideal, und sei $B = R' \cap T$. Der artinsche R-Modul B/R hat in K/R ein Komplement X/R, und weil X/R als wesentliche Überdeckung von K/B teilbar ist, ist X sogar ein Unterring von K (siehe [5, p. 31]). Aus $X + R' = K$ folgt deshalb nach Teil (b) $X = K$, so daß B/R klein in K/R ist, also auch B klein in K.

Die Lage von $P(T)$ in K entscheidet auch über die nicht-regulären maximalen Ideale des Ringes T. Falls T ganz über R ist, sind offenbar alle maximalen Ideale von T regulär. Der nächste Satz zeigt, daß dazu nur $Y_0 = \varnothing$, d.h. $P(T)$ klein in K sein muß. Im vollständigen Fall wurde (2.10) won Kiyek, auf ganz anderem Wege, in ([3, p. 348]) bewiesen.

SATZ 2.10. *Die nicht-regulären maximalen Ideale von T entsprechen genau den Elementen von* $Y_0 = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R) \mid \dim(R/\mathfrak{p}) = 1\}$.

Beweis. Bekanntlich entsprechen (für jeden Ring zwischen R und K) die nicht-regulären Primideale $\mathfrak{P}$ von T genau den nicht-regulären Primidealen $\mathfrak{p}$ von R via $\mathfrak{P} \mapsto \mathfrak{P} \cap R$ bzw. $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}K \cap T$.

Ist nun $\mathfrak{M} \in \Omega(T)$ nicht-regulär, wird $\mathfrak{p} := \mathfrak{M} \cap R$ ein maximales Element von $\mathrm{Ass}(R)$ und $K/\mathfrak{p}K$ der Quotientenkörper von $R/\mathfrak{p}$. Weil $T/\mathfrak{M}$ ein Zwischenkörper ist, folgt $T/\mathfrak{M} \cong K/\mathfrak{p}K$, d.h. $\mathfrak{p}K + T = K$, und für

den radikalvollen Minimax-Modul $K/\mathfrak{p}K$ folgt nach ([13, Lemma 1.1.e]) $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$, d.h. $\mathfrak{p} \in Y$. Bleibt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(R)$ zu zeigen: Für $\overline{T} = T/P(T)$ zeigten wir im Beweis von (1.7), daß $\overline{T}/\mathfrak{p}\overline{T}$ endlich erzeugt ist, d.h. ein endlich erzeugter. Untermodul U von T existiert mit $U + \mathfrak{p}T + P(T) = T$. Aus $\mathfrak{p}K + T = K$ folgt damit $\mathfrak{p}K + P(T) = K$, $\mathfrak{p}K + L_{\mathfrak{p}}(K) = K$, also nach (2.5) $h(\mathfrak{p}) = 0$.

Umgekehrt gilt für jedes $\mathfrak{p} \in Y_0$, daß $\mathfrak{P} := \mathfrak{p}K \cap T$ ein Primideal der Höhe Null im Ring T ist, und wieder nach (2.5) gilt $\mathfrak{p}K + L_{\mathfrak{p}}(K) = K$, also erst recht $\mathfrak{p}K + T = K$, so daß $T/\mathfrak{P} \cong K/\mathfrak{p}K$ ein Körper ist, d.h. $\mathfrak{P} \in \Omega(T)$.

FOLGERUNG 2.11. (a) *Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{M}$ von T gilt $\mathfrak{M} \cap P(T) = \mathfrak{M} \cdot P(T)$.*

(b) $V_1 = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Y \setminus Y_0} L_{\mathfrak{p}}(K)$ *ist als T-Modul radikalvoll.*

(c) *Ist R Faktorring eines noetherschen, lokalen Cohen–Macaulay-Ringes, so gilt: Genau dann ist der Ring T noethersch, wenn $Y_0 = Y$ ist.*

Beweis. $P(T)$ ist als R-Modul teilbar, also auch ein Ideal im Ring T. Als T-Modul ist dann $P(T)$ ebenfalls teilbar (aber nicht unbedingt radikalvoll).

(a) Ist $\mathfrak{M} \in \Omega(T)$ nicht-regulär, folgte mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{M} \cap R$ im Beweis von (2.10), daß $\mathfrak{p}K + P(T) = K$, also $\mathfrak{M} + P(T) = T$ ist, und wir sind fertig. Ist aber $\mathfrak{M} \in \Omega(T)$ regulär, ist nach Matijevic [4] $T/\mathfrak{M}$ als R-Modul endlich erzeugt, insbesondere $P(T) \subset \mathfrak{M}$, und nach der Vorbemerkung gilt $\mathfrak{M} \cdot P(T) = P(T)$.

(b) Wir müssen nur noch für jedes $\mathfrak{p} \in Y \setminus Y_0$ und jedes nicht-reguläre $\mathfrak{M} \in \Omega(T)$ zeigen, daß $\mathfrak{M} \cdot L_{\mathfrak{p}}(K) = L_{\mathfrak{p}}(K)$ ist: $\mathfrak{q} = \mathfrak{M} \cap R$ ist nach (2.10) ein Element von Y_0, und aus $\mathfrak{q} \not\subset \mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{q} \cdot L_{\mathfrak{p}}(K) = L_{\mathfrak{p}}(K)$, also die Behauptung.

(c) Weil V_1 durch alle $\mathfrak{q} \in Y_0$ teilbar ist, gilt $V_1 \subset V$, wegen $V_1 \oplus W = P(T)$ also genauer $V_1 = V \cap P(T)$. Die Voraussetzung an R und (1.9) zeigen, daß jetzt nicht nur $T/V \cap T \cong K/V$, sondern sogar T/V_1 als Ring noethersch ist. Weil ein noetherscher Ring keine radikalvollen Ideale besitzt, folgt mit (b) die Behauptung.

Bemerkung zu (b). Bezeichnet $\mathfrak{J}$ das Jacobson-Radikal des Ringes T, so folgt mit (1.1.a), daß $V_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{J}^i$ ist. Insbesondere ist V_1 das größte radikalvolle Ideal des Ringes T.

3. T ALS KOMPLEMENTIERTE RINGERWEITERUNG VON B

Für ein Primideal $\mathscr{P}$ von B ist die Lokalisierung $B_{\mathscr{P}}$ im allgemeinen kein Unterring von K, und deshalb ersetzt man sie durch den "großen

Quotientenring" $B_{[\mathscr{P}]} = \{x \in K \mid$ es gibt ein $c \in B \setminus \mathscr{P}$ mit $cx \in B\}$. Mit dieser Bezeichnung definieren wir den Zwischenring

$$D := \bigcap_{\mathscr{M} \in \Omega^1(B)} B_{[\mathscr{M}]}$$

und zeigen in (3.3), daß $D/B \oplus T/B = K/B$ ist. Mit Hilfe dieser Zerlegung können wir entscheiden, wann T ein Komplement in K hat (oder sogar klein in K ist), wie die koassoziierten Primideale bzw. die radikalvollen Untermoduln des artinschen R-Moduls T/B aussehen und schließlich alle regulären Ideale des Ringes T beschreiben.

LEMMA 3.1. *Für jedes maximale Ideal $\mathscr{M}$ von B sind äquivalent*:

(i) $h(\mathscr{M}) = 1$.

(ii) $B_{[\mathscr{M}]}/B \oplus L_{\mathscr{M}}(K/B) = K/B$.

(iii) $B\colon \mathscr{M} \neq B$.

Beweis. (i $\to$ ii)

1. *Schritt*. Zu jedem $x \in K$ gibt es ein $c \in B \setminus \mathscr{M}$ und ein $e \geq 1$ mit $\mathscr{M}^e cx \subset B$: Falls $x \in B_{[\mathscr{M}]}$, folgt das unmittelbar aus der Definition des Ringes $B_{[\mathscr{M}]}$ (setze $e = 1$). Falls $x \notin B_{[\mathscr{M}]}$, folgt für $\bar{x} \in K/B$, daß $\mathscr{A} = \mathrm{Ann}_B(\bar{x})$ ein reguläres, in $\mathscr{M}$ enthaltenes Ideal, also nach Voraussetzung $\mathscr{M}$ minimal über $\mathscr{A}$ ist. Weil $\mathscr{M}$ nach Matijevic [4] endlich erzeugt ist, ist im lokalen Ring $B_{\mathscr{M}}/\mathscr{A} \cdot B_{\mathscr{M}}$ das maximale Ideal sogar nilpotent, und aus $(\mathscr{M} \cdot B_{\mathscr{M}})^e \subset \mathscr{A} \cdot B_{\mathscr{M}}$ $(e \geq 1)$ folgt $\mathscr{M}^e c \subset \mathscr{A}$ für ein $c \in B \setminus \mathscr{M}$, d.h. $\mathscr{M}^e cx \subset B$ wie behauptet.

Sei im

2. *Schritt* $U/B = L_{\mathscr{M}}(K/B)$, d.h. $U = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B\colon \mathscr{M}^n)$. Wir müssen zeigen, daß $B_{[\mathscr{M}]} \cap U = B$ und $B_{[\mathscr{M}]} + U = K$ ist. Das erste ist klar, denn zu $x \in B_{[\mathscr{M}]} \cap U$ hat man ein $c \in B \setminus \mathscr{M}$ mit $cx \in B$, weiter ein $n \geq 1$ mit $\mathscr{M}^n x \subset B$, und mit $1 - bc \in \mathscr{M}^n$ folgt $x - bcx \in B$, $x \in B$. Für's zweite zeigen wir $(K/B_{[\mathscr{M}]} + U)_{\mathscr{P}} = 0$ für alle $\mathscr{P} \in \mathrm{Spec}(B)$: Falls $\mathscr{P} \neq \mathscr{M}$, ist bereits $(K/B_{[\mathscr{M}]})_{\mathscr{P}} = 0$, denn zu $x \in K$ wähle man c und e wie im ersten Schritt, dazu ein $b \in \mathscr{M}^e \setminus \mathscr{P}$, und damit folgt $bcx \in B$, $bx \in B_{[\mathscr{M}]}$ wie gewünscht. Falls $\mathscr{P} = \mathscr{M}$, ist bereits $(K/U)_{\mathscr{M}} = 0$, denn zu $x \in K$ kann man wieder c und e wie im ersten Schritt wählen und erhält $cx \in B\colon \mathscr{M}^e \subset U$.

(ii $\to$ iii) Für jedes reguläre Primideal $\mathscr{P}$ von B ist $B_{[\mathscr{P}]} \subsetneqq K$, denn mit einem regulären Element $b_0 \in \mathscr{P}$ ist $1/b_0 \notin B_{[\mathscr{P}]}$. Aus der angegebenen Zerlegung folgt also $L_{\mathscr{M}}(K/B) \neq 0$, d.h. $B\colon \mathscr{M} \neq B$.

(iii $\to$ i) Für jedes $\mathscr{M} \in \Omega(B)$ ist $\mathscr{M}\colon \mathscr{M} = B$, denn aus $\mathscr{M}\colon \mathscr{M} \subset T\colon \mathrm{m} = T$ und $\mathscr{M}\colon \mathscr{M} \subset B'$ (weil $\mathscr{M}$ endlich erzeugt ist) folgt $\mathscr{M}\colon \mathscr{M} \subset B' \cap$

$T = B$, also die Behauptung. (Für den Fall, daß R ein Integritätsring ist, stammt dieses Argument von Querré, siehe [11, p. 51].) Unter der Voraussetzung (iii) gibt es jetzt ein $x \in B$: $\mathscr{M}$ mit $x \notin B$, dazu nach der Vorbemerkung ein $u \in \mathscr{M}$ mit $xu \notin \mathscr{M}$. Es folgt, daß $\mathscr{M}$ minimal über Bu ist, denn zu $Bu \subset \mathscr{P} \subsetneqq \mathscr{M}$ hätte man ein $v \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{P}$, also $vx \in B$, $vxu \in \mathscr{P}$, $xu \in \mathscr{P}$, und das ist unmöglich. Bekanntlich gilt der Krull'sche Hauptidealsatz nicht nur in R, sondern auch in jeder ganzen Ringerweiterung von R, und so folgt $h(\mathscr{M}) = 1$.

FOLGERUNG 3.2. *Sei $\mathscr{P}$ ein Primideal von B und $\mathscr{P} \notin \Omega^1(B)$. Dann folgt $T \subset B_{[\mathscr{P}]}$ und $\mathscr{P}T \cap B = \mathscr{P}$.*

Beweis. Angenommen es gibt ein $x \in T$, $x \notin B_{[\mathscr{P}]}$. Für $\bar{x} \in T/B$ folgt dann $\mathrm{Ann}_B(\bar{x}) \subset \mathscr{P}$, und weil $B/\mathrm{Ann}_B(\bar{x}) \cong B\bar{x}$ als B-Modul artinsch ist, muß $\mathscr{P}$ ein maximales Ideal sein und $B/\mathscr{P}$ ein Untermodul von $B/\mathrm{Ann}_B(\bar{x})$, d.h. auch von T/B. Es folgt B: $\mathscr{P} \neq B$, also nach (3.1) der Widerspruch $\mathscr{P} \in \Omega^1(B)$.—Die zweite Behauptung erhält man jetzt aus der Rechenregel $\mathscr{P}B_{[\mathscr{P}]} \cap B = \mathscr{P}$.

SATZ 3.3. (a) $T = \bigcap_{\mathfrak{h}(\mathscr{M})>1} B_{[\mathscr{M}]}$.

(b) $T/B = \bigoplus_{\mathfrak{h}(\mathscr{M})=1} L_{\mathscr{M}}(K/B)$.

(c) $D/B \oplus T/B = K/B$.

Beweis. (a) Daß T in allen $B_{[\mathscr{M}]}$ liegt ($h(\mathscr{M}) > 1$), folgt sofort aus (3.2). Ist umgekehrt $x \in K$, $x \notin T$, folgt für $\tilde{x} \in K/T$, daß nach Definition von T der Ring $R/\mathrm{Ann}_R(\tilde{x})$ nicht artinsch ist. Die ganze Ringerweiterung $R/\mathrm{Ann}_R(\tilde{x}) \subset B/\mathrm{Ann}_B(\tilde{x})$ zeigt, daß auch der größere Ring nicht artinsch ist. Er ist aber nach Matijevic [4] noethersch, so daß es Primideale $\mathrm{Ann}_B(\tilde{x}) \subset \mathscr{P} \subsetneqq \mathscr{M} \in \Omega(B)$ geben muß und insbesondere $h(\mathscr{M}) > 1$ ist. Für alle $c \in B \setminus \mathscr{M}$ ist nun $cx \notin B$, also $x \notin B_{[\mathscr{M}]}$.

(b) Für jeden B-Modul X ist die Summe der Untermoduln $L_{\mathscr{M}}(X)$ ($\mathscr{M} \in \Omega(B)$) direkt, und falls X artinsch war, gilt sogar $X = \bigoplus L_{\mathscr{M}}(X)$. Speziell für $X = T/B$ folgt nach (3.1) $T/B = \bigoplus_{\mathfrak{h}(\mathscr{M})=1} L_{\mathscr{M}}(T/B)$, so daß nur noch $L_{\mathscr{M}}(T/B) = L_{\mathscr{M}}(K/B)$ zu zeigen ist, d.h. nach (a) $L_{\mathscr{M}}(K/B) \subset B_{[\mathscr{P}]}/B$ für alle $\mathscr{P} \in \Omega(B)$ mit $h(\mathscr{P}) > 1$: Zu $\bar{x} \in L_{\mathscr{M}}(K/B)$ gibt es ein $e \geq 1$ mit $\mathscr{M}^e x \subset B$, mit $c \in \mathscr{M}^e \setminus \mathscr{P}$ folgt insbesondere $cx \in B$, $x \in B_{[\mathscr{P}]}$ wie gewünscht.

(c) Für jeden B-Modul X gilt: Sind $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n$ paarweise verschiedene maximale Ideale von B, und ist jedes $L_{\mathscr{M}_i}(X)$ direkter Summand in X, sagen wir $U_i \oplus L_{\mathscr{M}_i}(X) = X$, so folgt $(U_1 \cap \cdots \cap U_n) \oplus (\bigoplus_{i=1}^n L_{\mathscr{M}_i}(X)) = X$. Der Beweis durch Induktion über n ist bei $n = 1$ klar, und bei $n > 1$ folgt aus $(U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1}) \oplus (\bigoplus_{i=1}^{n-1} L_{\mathscr{M}_i}(X)) = X$

zunächst $L_{\mathscr{M}_n}(X) \subset \bigcap_{i=1}^{n-1} U_i$, mit $U_n \oplus L_{\mathscr{M}_n}(X) = X$ also $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \oplus L_{\mathscr{M}_n}(X) = \bigcap_{i=1}^{n-1} U_i$, durch Addition von $\bigoplus_{i=1}^{n-1} L_{\mathscr{M}_i}(X)$ also die Behauptung.

Speziell in $X = K/B$ folgt mit (3.1.ii) für jede Teilmenge ψ von $\Omega^1(B)$: Ist $A_1/B = \bigoplus_{\mathscr{M} \in \psi} L_{\mathscr{M}}(K/B)$ und $A_2 = \bigcap_{\mathscr{M} \in \psi} B_{[\mathscr{M}]}$, so gilt $A_2/B \oplus A_1/B = K/B$. Für $\psi = \Omega^1(B)$ ist aber $A_1 = T$ nach (b) und $A_2 = D$ nach Definition.

Bemerkungen. (1) Für den Fall, daß R ein Integritätsring ist, wurde die Darstellung (a) von Nishimura in ([8, Theorem 1.6]) bewiesen. (2) Sei A ein Integritätsring mit Quotientenkörper K, A_1 ein A-Modul zwischen A und K und A_1/A direkter Summand in K/A. Dann zeigt Matlis in ([6, Proposition 1.3]), daß das direkte Komplement eindeutig bestimmt ist, d.h. genau ein A-Modul zwischen A und K existiert mit $A_2/A \oplus A_1/A = K/A$. Ähnlich kann man in unserer Situation (c) zeigen: Ist X ein weiterer R-Modul zwischen B und K mit $X/B \oplus T/B = K/B$, so folgt bereits $X = D$.

Die Zerlegung in (c) und (2.9) liefern sofort

FOLGERUNG 3.4. *Genau dann ist T als R-Modul klein in K, wenn T ganz über R ist.*

LEMMA 3.5. *Für den Ring R sind äquivalent:*

(i) *T hat ein Komplement in K.*

(ii) *$T/P(T)$ ist klein in $K/P(T)$.*

(iii) $P(T) + B = T$.

(iv) $\mathrm{Koass}_R(T/B) = Y_0$.

(v) $V \subset D$.

In diesem Fall ist V das einzige Komplement von T in K, W das einzige Komplement von B in T sowie $V + B = D$.

Beweis. (i → ii) Ist X ein Komplement von T in K, folgt nach (2.7.a) $X \oplus U_1 = K$ für einen Untermodul U_1 von T. Natürlich ist dann $U_1 \subset P(T)$, also auch $X + P(T) = K$, und weil in $X \cap T + P(T) = T$ der erste Summand klein in K ist, folgt die Behauptung. (ii → i) Nach (2.8.b) ist V das einzige Komplement von $P(T)$ in K, und unter der Bedingung (ii) kann man $P(T)$ durch T ersetzen.

(ii → iii) Aus $D + T = K$ folgt jetzt $D + P(T) = K$, durch Schneiden mit T also $B + P(T) = T$. (iii → ii) Das ist mit (2.9) klar.

(iii $\to$ iv) Mit (2.8.c) folgt jetzt $W + B = T$, und weil B klein in K ist, ist $W \to T/B$ ein wesentlicher Epimorphismus, also $\mathrm{Koass}(T/B) = \mathrm{Koass}(W) = Y_0$. (iv $\to$ iii) Angenommen es ist $P(T) + B \neq T$, so existiert ein $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(T/P(T) + B)$, und es folgt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(T/P(T)) \cap Y_0$. Das ist aber nach (1.7) unmöglich.

(iv $\to$ v) Mit $\mathfrak{z}_0 = \bigcap Y_0$ ist nach Voraussetzung $\mathfrak{z}_0 = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(T/B)}$, wegen $T/B \cong K/D$ also auch $\mathfrak{z}_0^e K \subset D$ für ein $e \geq 1$. Nach (2.8) ist aber $V \subset \mathfrak{z}_0 K$ und V direkter Summand in K, also $V \subset \mathfrak{z}_0^e K$. (v $\to$ iii) Aus $D + W = K$ folgt durch Schneiden mit T, daß $B + W = T$ ist, also erst recht $B + P(T) = T$.

Die meisten Aussagen des Zusatzes sind bereits bewiesen: In (ii $\to$ i) zeigten wir, daß V das einzige Komplement von T in K ist, in (iii $\to$ iv), daß W ein Komplement von B in T ist. Für jedes weitere Komplement X von B in T folgt wie im Beweis von (2.8.c) $\mathrm{Koass}(X) = \mathrm{Koass}(T/B) = Y_0$, $\sqrt{\mathrm{Ann}_R(X)} = \mathfrak{z}_0$, $X \subset L_{\mathfrak{z}_0}(K) = W$, also $X = W$. Die letzte Aussage erhält man aus (v) und $V + T = K$ durch Schneiden mit D.

Bemerkung. Wir werden beim Beweis des nächsten Satzes benützen, daß für jeden vollständigen Ring R die Bedingung (iv) erfüllt ist (denn $T/P(T)$ ist endlich erzeugt). Im allgemeinen hat man wenigstens $Y_0 \subset \mathrm{Koass}_R(T/B)$, denn für jedes $\mathfrak{p} \in Y_0$ ist $0 \neq (L_{\mathfrak{p}}(K) + B)/B \subset T/B$, so daß $\mathfrak{p}$ ein $\mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}(T/B)$ umfaßt ([12, Lemma 2.1.b]), wegen $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$ also schon $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ ist. Daß $Y_0 \subsetneqq \mathrm{Koass}(T/B)$ vorkommen kann, zeigt der von Grothendieck in ([1, Exemple 5.6.11]) konstruierte Integritätsring R: Aus $\dim(R) = 2$ folgt $Y = \varnothing$ (d.h. $P(T) = 0$); aus $R'/R \cong R/\mathfrak{m}$ folgt $B = R'$; aus $\Omega(B) = \{\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2\}$ mit $h(\mathscr{M}_1) = 1$, $h(\mathscr{M}_2) = 2$ folgt mit (3.3.b) $T/B \neq 0$. (Hier ist also $D = B_{\mathscr{M}_1}$ ein diskreter Bewertungsring und $T = B_{\mathscr{M}_2}$ ein noetherscher lokaler Integritätsring der Krulldimension 2.)

SATZ 3.6. *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R sind äquivalent:*

(i) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}_R(T/B)$.

(ii) $\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap R$ *für ein* $\mathscr{P} \in \mathrm{Min}(\hat{R})$ *mit* $\dim(\hat{R}/\mathscr{P}) = 1$.

(iii) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$, *und die globale Transformation des Ringes $R/\mathfrak{p}$ ist nicht ganz über $R/\mathfrak{p}$.*

Beweis. Es ist nicht nur $\hat{R} \otimes_R T$ die globale Transformation des Ringes $\hat{R}$, sondern auch $\hat{R} \otimes_R B$ der ganze Abschluß von $\hat{R}$ in $\hat{R} \otimes_R T$. Aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & R & \subset & T & \longrightarrow & T/R & \longrightarrow & 0 \\
 & & \cap & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \\
0 & \longrightarrow & \hat{R} & \longrightarrow & \hat{R} \otimes_R T & \longrightarrow & \hat{R} \otimes_R T/R & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

folgt nämlich, daß die Ringe zwischen R und T genau den Ringen zwischen $\hat{R}$ und $\hat{R} \otimes_R T$ entsprechen (via $A \mapsto \hat{R} \otimes_R A$), und damit folgt die Behauptung.—Wie im Beweis von (1.6) benützen wir weiter die Formel $\mathrm{Koass}_R(M) = \{\mathscr{P} \cap R \mid \mathscr{P} \in \mathrm{Koass}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R M)\}$ aus ([14, Proposition 3.3]).

(i → ii) Es ist $\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap R$ für ein $\mathscr{P} \in \mathrm{Koass}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R T/B)$, und nach (3.5.iv) folgt $\mathscr{P} \in Y_0(\hat{R})$, d.h. $\mathscr{P} \in \mathrm{Min}(\hat{R})$, $\dim(\hat{R}/\mathscr{P}) = 1$.

(ii → i) Wieder nach (3.5.iv) folgt $\mathscr{P} \in \mathrm{Koass}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R T/B)$, also $\mathscr{P} \cap R \in \mathrm{Koass}_R(T/B)$.

(ii → iii) Mit dem angegebenen $\mathscr{P}$ folgt bekanntlich $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$ und natürlich $\mathscr{P}/\mathfrak{p}\hat{R} \in \mathrm{Min}(\hat{R}/\mathfrak{p}\hat{R})$. Das zweite bedeutet, daß die Vervollständigung $\widehat{R/\mathfrak{p}}$ ein minimales Primideal der Kohöhe 1 besitzt, also mit der bereits bewiesenen Inklusion (ii → i) die globale Transformation von $R/\mathfrak{p}$ nicht ganz über $R/\mathfrak{p}$ ist.

(iii → ii) Nach der bereits bewiesenen Inklusion (i → ii) besitzt die Vervollständigung $\widehat{R/\mathfrak{p}}$ ein minimales Primideal der Kohöhe 1, d.h. es existiert ein $\mathscr{P} \in \mathrm{Spec}(\hat{R})$ mit $h(\mathscr{P}/\mathfrak{p}\hat{R}) = 0$ und $\dim(\hat{R}/\mathscr{P}) = 1$. Aus dem ersten folgt bekanntlich $h(\mathscr{P} \cap R/\mathfrak{p}) = 0$ und $h(\mathscr{P}) = 0$ (wegen $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$), also $\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap R$ und $\mathscr{P} \in \mathrm{Min}(\hat{R})$ wie gewünscht.

Bemerkung. Mit Hilfe des nächsten Satzes kann man diese Äquivalenzen fortsetzen zu (iv) $\mathfrak{p} = (\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{M}^i) \cap R$ für ein $\mathscr{M} \in \Omega^1(B)$. Natürlich folgen daraus wohlbekannte Kriterien dafür, daß T ganz über R ist: $\hat{R}$ enthält kein minimales Primideal der Kohöhe 1 (Nishimura [9, Proposition 2.3.1]); für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$ ist die globale Transformation von $R/\mathfrak{p}$ ganz über $R/\mathfrak{p}$ (Kiyek [3, Satz 5.3]); der Ring $B = R' \cap T$ enthält kein maximales Ideal der Höhe 1 (siehe Bemerkung 1 zu 3.3).

Nach dieser Bestimmung von $\mathrm{Koass}_R(T/B)$ wollen wir alle radikalvollen Untermoduln von T/B angeben. Dies gelingt, weil in der Zerlegung $T/B = \bigoplus_{h(\mathscr{M})=1} L_{\mathscr{M}}(K/B)$ die einzelnen Summanden sowohl als B- als auch als R-Moduln besonders einfach sind:

SATZ 3.7. *Sei $\mathscr{M} \in \Omega^1(B)$ und $N = L_{\mathscr{M}}(K/B)$.*

(a) *$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{M}^i$ ist das einzige Primideal von B, das echt in $\mathscr{M}$ liegt.*

(b) *Die einzigen B-Untermoduln von N sind*

$$0 \neq \frac{B:\mathscr{M}}{B} \subsetneqq \frac{B:\mathscr{M}^2}{B} \subsetneqq \frac{B:\mathscr{M}^3}{B} \subsetneqq \cdots \subsetneqq N,$$

und für jedes $e \geq 1$ *ist*

$$\frac{B : \mathscr{M}^e}{B} \cong B/\mathscr{M}^e.$$

(c) *N ist auch als R-Modul einfach-radikalvoll, und mit* $\mathfrak{p} = (\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{M}^i) \cap R$ *gilt* $\operatorname{Ann}_R(N) = \mathfrak{p}$, $\operatorname{Koass}_R(N) = \{\mathfrak{p}\}$.

Beweis. Aus B: $\mathscr{M} \neq B$ und $\mathscr{M}$: $\mathscr{M} = B$ (siehe (3.1)(*iii* $\to$ *i*)) folgt $\mathscr{M} \subsetneqq \mathscr{M}(B\colon \mathscr{M})$, also $\mathscr{M}(B\colon \mathscr{M}) = B$, induktiv $\mathscr{M}^e(B\colon \mathscr{M}^e) = B$ für alle $e \geq 1$. Damit sind in der Folge $\cdots \subset \mathscr{M}^2 \subset \mathscr{M} \subset B \subset B\colon \mathscr{M} \subset B\colon \mathscr{M}^2 \subset \cdots$ keine zwei Glieder gleich, genauer sind die einzelnen Faktoren als B-Moduln einfach, d.h. isomorph zu $B/\mathscr{M}$.

(a) Es genügt zu zeigen: Ist $\mathscr{A}$ ein Ideal von B, $n \geq 1$ und $\mathscr{A} \not\subset \mathscr{M}^n$, so gibt es ein $c \in B \setminus \mathscr{M}$ mit $c\mathscr{M}^{n-1} \subset \mathscr{A}$. Zum Beweis benützen wir, daß im lokalen Ring $B_{\mathscr{M}}$ das maximale Ideal zyklisch ist (mit den Bezeichnungen von (3.1)(*iii* $\to$ *i*) wird es von $u/1$ erzeugt) und $\mathscr{A} \cdot B_{\mathscr{M}} \not\subset (\mathscr{M} \cdot B_{\mathscr{M}})^n$. Es folgt $\mathscr{A} \cdot B_{\mathscr{M}} = (\mathscr{M} \cdot B_{\mathscr{M}})^j$ für ein $0 \leq j < n$, insbesondere $c\mathscr{M}^j \subset \mathscr{A}$ für ein $c \in B \setminus \mathscr{M}$.

(b) 1. *Schritt.* Zu jedem Ideal $\mathscr{A}$ mit $\mathscr{M}^e \subsetneqq \mathscr{A} \subsetneqq B$ gibt es ein $0 < f < e$ mit $\mathscr{A} = \mathscr{M}^f$; zu jedem B-Modul X mit $B \subsetneqq X \subsetneqq B\colon \mathscr{M}^e$ gibt es ein $0 < f < e$ mit $X = B\colon \mathscr{M}^f$. Die zweite Aussage läßt sich, durch Multiplikation mit $\mathscr{M}^e$, auf die erste zurückführen. Bei dieser sei jetzt $f \geq 0$ so gewählt, daß $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}^f$, aber $\mathscr{A} \not\subset \mathscr{M}^{f+1}$ ist. Nach Voraussetzung ist $f \geq 1$ und $f < e$, außerdem gibt es nach dem Beweis von (a) ein $c \in B \setminus \mathscr{M}$ mit $c\mathscr{M}^f \subset \mathscr{A}$. Aus $Bc + \mathscr{M}^{e-f} = B$ folgt $c\mathscr{M}^f + \mathscr{M}^e = \mathscr{M}^f$, also $\mathscr{M}^f \subset \mathscr{A}$ wie gewünscht.

2. *Schritt.* Jeder endlich erzeugte B-Untermodul von N wird durch eine Potenz von $\mathscr{M}$ annulliert, ist also nach dem ersten Schritt von der Form $(B\colon \mathscr{M}^n)/B$ für ein $n \geq 0$. Damit sind sogar alle B-Untermoduln von N bzgl. der Inklusion total geordnet, so daß für jeden B-Zwischenmodul $B \subset X \subsetneqq \bigcup_{i=1}^{\infty}(B\colon \mathscr{M}^i)$ gilt: Es gibt ein $e \geq 1$ mit $B\colon \mathscr{M}^e \not\subset X$, daraus folgt $X \subsetneqq B\colon \mathscr{M}^e$, also $X = B\colon \mathscr{M}^f$ mit $0 \leq f < e$.

3. *Schritt.* Für jedes $e \geq 1$ gilt jetzt: $(B\colon \mathscr{M}^e)/B$ ist nach der Vorbemerkung ein B-Modul der Länge e, wegen der Totalordnung aber auch von der Form $B/\mathscr{A}$, so daß in $\mathscr{M}^e \subset \mathscr{A}$ Gleichheit gilt.

(c) Mit $\mathscr{P} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{M}^i$ und $\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap R$ ist offenbar $\operatorname{Ann}_B(N) = \mathscr{P}$ und $\operatorname{Ann}_R(N) = \mathfrak{p}$. Außerdem gilt für jedes $b \in B \setminus \mathscr{P}$, daß $bN = N$ ist (denn aus $bN \subsetneqq N$ folgte $\mathscr{M}^e bN = 0$ für ein $e \geq 1$, d.h. der Widerspruch $\mathscr{M}^e \subset \mathscr{P}$).

Für jedes $\mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}_R(N)$ muß also $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ sein, d.h. schon $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ wie behauptet. Insbesondere gilt mit den Bezeichnungen von (1.5, Bemerkung 2): *N ist als R-Modul $\mathfrak{p}$-koprimär.*

Um zu zeigen, daß N als R-Modul einfach-radikalvoll ist, sei jetzt U/B ein radikalvoller R-Untermodul von T/B.

1. *Schritt.* U/B ist als R-Modul teilbar. Nach (1.2) ist nämlich $P(U/R) = U_1/R$ teilbar, außerdem ist U/U_1 endlich erzeugt, also $U/U_1 + B = 0$, und der Epimorphismus $U_1/R \to U/B$ liefert die Behauptung.

2. *Schritt.* U ist ein B-Modul und U/B als B-Modul teilbar. Zum Beweis sei $b = r/s \in B$: Aus $U = B + sU$, $bU = bB + rU \subset U$ folgt die erste Aussage; falls b regulär ist, aus $U = B + rU \subset B + bU$ die zweite.

3. *Schritt.* Für alle $\mathcal{N} \in \Omega(B)$ mit $h(\mathcal{N}) > 1$ ist nach (3.1) $L_{\mathcal{N}}(U/B) = 0$, und es folgt $U/B = \bigoplus_{i=1}^{k} L_{\mathcal{M}_i}(U/B)$ mit $\Omega^1(B) = \{\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_k\}$. Jedes $N_i = L_{\mathcal{M}_i}(K/B)$ ist aber nach Teil (b) als B-Modul einfach-radikalvoll, so daß entweder $L_{\mathcal{M}_i}(U/B) = 0$ oder $L_{\mathcal{M}_i}(U/B) = N_i$ ist. War insbesondere $U/B \subsetneqq N$, folgt also $U/B = 0$.

Aus dem Beweis von (c) erhält man allgemeiner

FOLGERUNG 3.8. *Jeder radikalvolle R-Untermodul $\neq 0$ von T/B hat die Form $\bigoplus_{j=1}^{s} L_{\mathcal{M}_j}(K/B)$ mit paarweise verschiedenen $\mathcal{M}_j \in \Omega^1(B)$.*

Die aus (3.7) resultierende Abbildung $\Omega^1(B) \ni \mathcal{M} \mapsto (\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}^i) \cap R \in \mathrm{Koass}_R(T/B)$ ist zwar surjektiv, aber i. allg. nicht injektiv. Bezeichnet man zu festem $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}_R(T/B)$ die Menge der Urbilder mit $\{\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_g\}$, so gilt:

FOLGERUNG 3.9. (a) *$\bigoplus_{j=1}^{g} L_{\mathcal{M}_j}(K/B)$ ist der größte $\mathfrak{p}$-koprimäre R-Untermodul von T/B.*

(b) *War $\mathfrak{p} \in Y_0$, gilt $\bigoplus_{j=1}^{g} L_{\mathcal{M}_j}(K/B) = (L_{\mathfrak{p}}(K) + B)/B$.*

Beweis. (a) Alle $L_{\mathcal{M}_j}(K/B)$ sind nach dem Beweis von (3.7.c) $\mathfrak{p}$-koprimär, also auch ihre direkte Summe. Ist umgekehrt U/B ein $\mathfrak{p}$-koprimärer R-Untermodul von T/B, folgt nach (3.8) $U/B = \bigoplus_{j=1}^{s} L_{\mathcal{N}_j}(K/B)$ mit paarweise verschiedenen $\mathcal{N}_j \in \Omega^1(B)$, und weil auch jedes $L_{\mathcal{N}_j}(K/B)$ $\mathfrak{p}$-koprimär, also $\mathrm{Koass}_R(L_{\mathcal{N}_j}(K/B)) = \{\mathfrak{p}\}$ ist, muß wieder nach (3.7.c) $(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{N}_j^i) \cap R = \mathfrak{p}$ sein, also $\mathcal{N}_j \in \{\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_g\}$.

(b) Mit $A_1/B = \bigoplus_{j=1}^{g} L_{\mathcal{M}_j}(K/B)$ und $A_2 = \bigcap_{j=1}^{g} B_{[\mathcal{M}_j]}$ gilt nach dem Beweis von (3.3.c) $A_2/B \oplus A_1/B = K/B$, und nach (3.7.c) ist $\mathrm{Ann}_R(A_1/B) = \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p}K \subset A_2$. Wegen $\mathfrak{p} \in Y_0$ ist jetzt $L_{\mathfrak{p}}(K)$ $\mathfrak{p}$-koprimär (1.4.a) und $\mathfrak{p}K + L_{\mathfrak{p}}(K) = K$ (2.5), also $L_{\mathfrak{p}}(K) \subset A_1$ und $(\mathfrak{p}K + B)/B \oplus (L_{\mathfrak{p}}(K) + B)/B = K/B$. Der zweite Summand stimmt deshalb mit A_1/B überein.

Statt nur ein $\mathfrak{p} \in Y_0$ zu nehmen, kann man auch die Menge $\psi = \{\mathscr{M} \in \Omega^1(B) | (\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{M}^i) \cap R \in Y_0\}$ betrachten, dazu $A_1/B = \bigoplus_{\mathscr{M} \in \psi} L_{\mathscr{M}}(K/B)$, $A_2 = \bigcap_{\mathscr{M} \in \psi} B_{[\mathscr{M}]}$ definieren, erhält wie im letzten Abschnitt $V \subset A_2$, $W \subset A_1$ und damit

FOLGERUNG 3.10. (a) $(V + B)/B \oplus (W + B)/B = K/B$.

(b) $(V \cap B) \oplus (W \cap B) = B$.

(c) $D \subset V + B$.

Betrachten wir zum Abschluß T und D als B-Moduln, so können wir, wieder mit Hilfe der Zerlegung $D/B \oplus T/B = K/B$, alle Ideale von B bestimmen, durch die T bzw. D teilbar ist; ebenso die regulären Ideale von B, die genau den regulären Idealen von T bzw. D entsprechen.

SATZ 3.11. *Für ein Ideal $\mathscr{A}$ von B gilt:*

(a) *Genau dann ist $\mathscr{A}T = T$, wenn $\mathscr{A}$ ein endliches Produkt von Elementen aus $\Omega^1(B)$ umfaßt.*

(b) *Genau dann ist $\mathscr{A}D = D$, wenn $\mathscr{A}$ regulär ist und in keinem Element von $\Omega^1(B)$ liegt.*

Beweis. (a) Aus $\mathscr{A}T = T$ folgt, daß $\mathscr{A}$ regulär, also der Ring $B/\mathscr{A}$ noethersch ist (Matijevic [4]). Er ist sogar artinsch, denn aus $\mathscr{A} \subset \mathscr{P} \in \operatorname{Spec}(B)$ folgt natürlich $\mathscr{P}T = T$, also nach (3.2) $\mathscr{P} \in \Omega^1(B)$. Sind jetzt $\mathscr{M}_1/\mathscr{A}, \ldots, \mathscr{M}_n/\mathscr{A}$ die maximalen Ideale von $B/\mathscr{A}$, folgt $(\bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{M}_i)^e \subset \mathscr{A}$ für ein $e \geq 1$, und wir wissen bereits, daß alle $\mathscr{M}_i$ aus $\Omega^1(B)$ sind.

Zur Umkehrung genügt es für jedes $\mathscr{M} \in \Omega^1(B)$ zu zeigen, daß $\mathscr{M}T = T$ ist: Zunächst ist die kanonische Abbildung $B/\mathscr{M} \to D/\mathscr{M}D$ ein Isomorphismus, denn aus $D \subset B_{[\mathscr{M}]}$ und $\mathscr{M}B_{[\mathscr{M}]} \cap B = \mathscr{M}$ folgt $\mathscr{M}D \cap B = \mathscr{M}$, und aus der Teilbarkeit von D/B folgt $B + \mathscr{M}D = D$. Weil man für jedes *reguläre* Ideal $\mathscr{C}$ von B einen Isomorphismus

$$(*) \qquad B/\mathscr{C} \xrightarrow{\cong} D/\mathscr{C}D \times T/\mathscr{C}T$$

hat (tensoriere die exakte Folge $0 \to B \to D \times T \to K \to 0$ mit $B/\mathscr{C}$), folgt speziell mit $\mathscr{C} = \mathscr{M}$, daß $T/\mathscr{M}T = 0$ ist wie behauptet.

(b) Aus $\mathscr{A}D = D$ folgt wieder, daß $\mathscr{A}$ regulär ist, und für alle $\mathscr{M} \in \Omega^1(B)$ zeigten wir im letzten Beweisschritt, daß $D/\mathscr{M}D \neq 0$ ist, also $\mathscr{A} \not\subset \mathscr{M}$. Sei umgekehrt $\mathscr{A}$ regulär und $\mathscr{A}D \neq D$. Mit $\mathscr{A}D \subset \mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(D)$ ist dann $\mathscr{P} = \mathfrak{P} \cap B$ ein reguläres Primideal von B und $\mathscr{P}D \neq D$, aus $(*)$ folgt $\mathscr{P}T = T$, also $\mathscr{A} \subset \mathscr{P} \in \Omega^1(B)$ wie verlangt.

FOLGERUNG 3.12. (a) *Die regulären Ideale von T entsprechen genau den regulären Idealen von B, die in keinem Element von $\Omega^1(B)$ liegen.*

(b) *Die regulären Ideale von D entsprechen genau den regulären Idealen von B, die ein endliches Produkt von Elementen aus $\Omega^1(B)$ umfassen.*

Beweis. (a) Ist $\mathfrak{a}$ ein reguläres Ideal von T, wird $\mathscr{A} := \mathfrak{a} \cap B$ ein reguläres Ideal von B, und aus $B + \mathscr{A}T = T$, $\mathfrak{a} \cap B + \mathscr{A}T = \mathfrak{a}$ folgt $\mathscr{A}T = \mathfrak{a}$. Weiter folgt aus $B/\mathscr{A} \cong T/\mathfrak{a}$ und $(*)$, daß $D/\mathscr{A}D = 0$ ist, also nach (3.11.b) $\mathscr{A}$ in keinem Element von $\Omega^1(B)$ liegt.

Ist umgekehrt $\mathscr{A}$ ein reguläres Ideal von B mit der verlangten Zusatzbedingung, erhält man mit $(*)$ und (3.11.b) den Isomorphismus $B/\mathscr{A} \cong T/\mathscr{A}T$, so daß $\mathfrak{a} := \mathscr{A}T$ ein reguläres Ideal von T ist mit $\mathfrak{a} \cap B = \mathscr{A}$.

(b) Ebenso mit der Äquivalenz aus (3.11.a).

Bemerkungen. (1) Als Spezialfälle von (3.12) erhält man:

(a) Die regulären maximalen Ideale von T entsprechen genau den maximalen Idealen $\mathscr{M}$ von B mit $h(\mathscr{M}) > 1$. (Im vollständigen Fall folgt das auch mit Kiyek [3, p. 349]; im Fall eines Integritätsringes mit Matlis [6, Proposition 1.3.3].)

(b) Jedes reguläre Primideal von D ist bereits maximales Ideal (denn es ist von der Form $\mathscr{M}D$ mit $\mathscr{M} \in \Omega^1(B)$). Allgemeiner gilt für jedes reguläre Ideal $\mathfrak{a}$ von D, daß $D/\mathfrak{a} \cong B/\mathfrak{a} \cap A$ artinsch ist.

(2) Wir haben den Ring D mit Hilfe der maximalen Ideale der Höhe 1 von B definiert. Bekanntlich ist die Abbildung $\Omega^1(R') \ni M \mapsto M \cap B \in \Omega^1(B)$ eine Bijektion (siehe Itoh [2, Corollary 2.12.4]), deren Umkehrabbildung mit unserem $D = D'$ so lautet: $\mathscr{M} \mapsto (\mathscr{M}D) \cap R'$. Damit kann man zeigen, daß $D = \bigcap_{h(M)=1}(R')_{[M]}$ und $R' + T = T' = \bigcap_{h(M)>1}(R')_{[M]}$ ist, wobei M die maximalen Ideale von R' durchläuft.

Literatur

1. A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique IV (seconde partie), *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **24** (1965).
2. S. Itoh, Z-transforms and overrings of a noetherian ring, *Hiroshima Math. J.* **10** (1980), 635–657.
3. K. H. Kiyek, Anwendung von Ideal-Transformationen, *Manuscripta math.* **34** (1981), 327–353.
4. J. R. Matijevic, Maximal ideal transforms of Noetherian rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **54** (1976), 49–52.
5. E. Matlis, 1-dimensional Cohen-Macaulay rings, *Springer Lecture Notes Math.* **327** (1973).
6. E. Matlis, Ideals of injective dimension, 1, *Michigan Math. J.* **29** (1982), 335–356.
7. S. McAdam, Asymptotic prime divisors, *Springer Lecture Notes Math.* **1023** (1983).
8. J. Nishimura, On ideal transforms of noetherian rings, I, *J. Math. Kyoto Univ.* **19** (1979), 41–46.
9. J. Nishimura, On ideal transforms of Noetherian rings, II, *J. Math. Kyoto Univ.* **20** (1980), 149–154.
10. L. J. Ratliff, Jr., Two theorems on the prime divisors of zero in completions of local domains, *Pacific J. Math.* **81** (1979), 537–545.

11. D. Rees, Lectures on the asymptotic theory of ideals, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **113** (1988).
12. H. Zöschinger, Linear-kompakte Moduln über noetherschen Ringen, *Arch. Math.* **41** (1983), 121–130.
13. H. Zöschinger, Minimax-Moduln, *J. Algebra* **102** (1986), 1–32.
14. H. Zöschinger, Über koassoziierte Primideale, *Math. Scand.* **63** (1988), 196–211.
15. H. Zöschinger, Moduln mit Koprimärzerlegung, *Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber.* **2** (1990), 5–25.