Arch. Math., Vol. 62, 292–299 (1994) 0003-889X/94/6204-0292 $ 3.10/0

Der Krull'sche Durchschnittssatz für kleine Untermoduln

Von

HELMUT ZÖSCHINGER

Einleitung. Sei R ein kommutativer Ring, M ein R-Modul und U ein Untermodul von M. Bekanntlich heißt U *klein* in M, wenn aus $X + U = M$ (X ein Untermodul von M) stets folgt $X = M$. Eine naheliegende Verallgemeinerung des Lemmas von Nakayama besagt: Ist U endlich erzeugt und $U \subset \mathrm{Ra}(M) =$ Durchschnitt aller maximalen Untermoduln von M, so ist U klein in M. Die erste Bedingung – U endlich erzeugt – ist jedoch nicht notwendig. Z.B. zeigen wir in Abschnitt 3 dieser Arbeit für jeden noetherschen Integritätsring R mit Quotientenkörper $K \neq R$, daß R' (der ganze Abschluß von R in K) als R-Modul klein in K ist, aber es ist wohlbekannt, daß R' nicht endlich erzeugt sein muß. Trotzdem möchte man für einen kleinen Untermodul U gewisse Endlichkeitsbedingungen herleiten, und das uns bisher bestmögliche Ergebnis ist der folgende Durchschnittssatz:

Ist R ein noetherscher Integritätsring, M ein torsionsfreier R-Modul und U ein kleiner Untermodul von M, so folgt $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i U = 0$ für jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq R$.

Aus ihm folgt insbesondere, daß über einem noetherschen lokalen Ring R jeder *flache* kleine Untermodul U doch schon endlich erzeugt ist. Als Hauptanwendung geben wir in Abschnitt 2 die Bestimmung aller koassoziierten Primideale eines flachen R-Moduls F, d.h. der $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, zu denen es einen artinschen Faktormodul A von F gibt mit $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(A)$. Speziell für $F = \hat{R}$, die Vervollständigung eines noetherschen lokalen Ringes $(R, \mathfrak{m})$, erhalten wir:

$$\mathrm{Koass}(\hat{R}) = \{\mathfrak{m}\} \cup \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid R/\mathfrak{p} \text{ ist } \textit{nicht} \text{ vollständig}\}.$$

1. Der Durchschnittssatz. Stets sei in dieser Arbeit R ein kommutativer noetherscher Ring. Weil R auch nicht-lokal sein darf, müssen wir den Begriff „endlich erzeugt" verallgemeinern: Ein R-Modul M heißt *koatomar*, wenn jeder echte Untermodul von M in einem maximalen Untermodul enthalten ist. Nach [3] ist das äquivalent damit, daß alle $\mathfrak{m}$-Komponenten $L_{\mathfrak{m}}(M) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{m}^i)$ durch eine Potenz von $\mathfrak{m}$ annulliert werden und daß der sockelfreie Anteil $M/L(M)$, mit $L(M) := \oplus L_{\mathfrak{m}}(M)$, lokal endlich erzeugt ist. Dual heißt M *halbartinsch*, wenn jeder echte Untermodul von M einen einfachen Untermodul enthält, und das ist äquivalent mit $L(M) = M$.

Lemma 1.1. *Ist $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Integritätsring, so besitzt jeder torsionsfreie R-Modul M einen Untermodul M_1 derart, daß $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i M_1 = 0$ und M/M_1 halbartinsch ist.*

Beweis. Ist K der Quotientenkörper von R, so können wir gleich $K \neq R$ annehmen. Im Spezialfall $M = K$ gibt es nach Chevalley (siehe [1] Theorem 258) einen diskreten Bewertungsring $(V, \mathscr{M})$ zwischen R und K mit $\mathscr{M} \cap R = \mathfrak{m}$, und aus $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{M}^i = 0$ folgt sofort $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i V = 0$. Weiter gibt es, weil K/V als V-Modul artinsch ist, zu jedem $x \in K$ ein $e \geqq 1$ mit $\mathscr{M}^e x \subset V$, es folgt $\mathfrak{m}^e \bar{x} = 0$ für $\bar{x} \in K/V$, so daß K/V als R-Modul halbartinsch ist. – Ist M nur torsionsfrei $\neq 0$, hat die injektive Hülle Q von M die Gestalt $Q \cong K^{(I)}$, also einen Untermodul $Q_1 \cong V^{(I)}$, und weil $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i Q_1 = 0$ sowie Q/Q_1 halbartinsch ist, leistet $M_1 = Q_1 \cap M$ das Gewünschte.

Satz 1.2. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ lokal, M ein flacher R-Modul und U ein kleiner Untermodul von M. Dann gilt*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i U \subset N M,$$

wobei N das Nilradikal von R sei.

Beweis. Sei im *1. Schritt* R zusätzlich ein vollständiger Integritätsring. Ist E die injektive Hülle des Restklassenkörpers $R/\mathfrak{m}$ und $M^0 = \mathrm{Hom}_R(M, E)$, erhält man die exakte Folge $0 \to (M/U)^0 \xrightarrow{v^0} M^0 \xrightarrow{\iota^0} U^0 \to 0$, in der, weil R vollständig ist, v^0 ein wesentlicher Monomorphismus ist ([4] Hilfssatz 3.3), d. h. Bi v^0 groß in M^0. Also ist Kok $v^0 \cong U^0$ ein Torsionsmodul, $0 \notin \mathrm{Ass}(U^0) = \mathrm{Koass}(U)$. Weil U als Untermodul von M ebenfalls torsionsfrei ist, kann man nach (1.1) einen Untermodul U_1 von U wählen, so daß $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i U_1 = 0$ und U/U_1 halbartinsch ist. Aus $0 \notin \mathrm{Koass}(U/U_1)$ folgt nun nach ([5] Lemma 2.8, b), daß U/U_1 beschränkt ist, d. h. ein $0 \neq s \in R$ existiert mit $s U \subset U_1$. Wegen $U \cong s U$ ist also auch $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i U = 0$.

Sei im *2. Schritt* R nur noch vollständig. Mit $\mathrm{Min}(R) = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_t\}$ ist $N = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_t$, also, weil M flach ist, $N M = \bigcap_{j=1}^{t} (\mathfrak{q}_j M)$. Es genügt daher, $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i U \subset \mathfrak{q} M$ für alle $\mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(R)$ zu zeigen: Weil $\bar{R} = R/\mathfrak{q}$ ein vollständiger Integritätsring und $M/\mathfrak{q} M$ als $\bar{R}$-Modul wieder flach ist, ist der kleine Untermodul $(U + \mathfrak{q} M)/\mathfrak{q} M$ nach dem ersten Schritt in der $\bar{\mathfrak{m}}$-adischen Topologie separiert, d. h. $\bigcap_{i=1}^{\infty} (\mathfrak{m}^i U + \mathfrak{q} M)/\mathfrak{q} M = 0$, und daraus folgt die Behauptung.

Aus der soeben bewiesenen Inklusion $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i U \subset N M$ folgt auch, daß es *keinen* Monomorphismus $R \to \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i U$ gibt, denn mit $N^e = 0$, $N^{e-1} \neq 0$ ist ja $N^{e-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i U\right) = 0$.

Sei im *3. Schritt* R ein Integritätsring, aber nicht notwendig vollständig. Nach ([4] p. 60) ist $\hat{R} \underset{R}{\otimes} U$ als $\hat{R}$-Modul klein in $\hat{R} \underset{R}{\otimes} M$, so daß es nach der letzten Bemerkung keinen $\hat{R}$-Monomorphismus $f: \hat{R} \to \hat{R} \underset{R}{\otimes} U$ gibt mit $\operatorname{Bi} f \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}^i \left(\hat{R} \underset{R}{\otimes} U\right)$, wobei $\mathcal{M} = \mathfrak{m}\hat{R}$ das maximale Ideal von $\hat{R}$ sei. Es gibt also auch keinen R-Monomorphismus $g: R \to U$ mit $\operatorname{Bi} g \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i U$, und das bedeutet, weil R ein Integritätsring und U torsionsfrei war, $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i U = 0$.

Ist im *4. Schritt* R nur lokal, müssen wir wieder $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i U \subset \mathfrak{q} M$ für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min}(R)$ zeigen. Das geht jetzt wie im zweiten Schritt, denn $\bar{R} = R/\mathfrak{q}$ braucht nach dem dritten Schritt nicht mehr vollständig zu sein.

Bemerkung. Ein Untermodul U von M heißt *radikalvoll*, wenn $\operatorname{Ra}(U) = U$ ist (d. h. wenn U keine maximalen Untermoduln besitzt). Im lokalen Fall ist das äquivalent mit $\mathfrak{m} U = U$, und dann sagt der Satz: Ist M flach und U ein radikalvoller kleiner Untermodul von M, so folgt $U \subset NM$. Auf die Flachheit von M kann man dabei nicht verzichten. Ist z. B. R ein lokaler Integritätsring mit $\dim(R) \geqq 2$ und wählt man $M = E$, so folgt für jedes Primideal $0 \neq \mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{m}$, daß $U = \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{p})$ ein radikalvoller, kleiner Untermodul $\neq 0$ von M ist.

Satz 1.3. *Sei R ein Integritätsring, M ein torsionsfreier R-Modul und U ein kleiner Untermodul von M. Dann gilt $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i U = 0$ für jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq R$.*

Beweis. Durch Übergang zur injektiven Hülle $Q \cong K^{(I)}$ von M können wir gleich annehmen, daß M flach ist. Angenommen, es gibt ein $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ mit $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i U \neq 0$, so gibt es einen R-Monomorphismus $g: R \to U$ mit $\operatorname{Bi} g \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i U$, und dann ist $g_{\mathfrak{m}}: R_{\mathfrak{m}} \to U_{\mathfrak{m}}$ ein $R_{\mathfrak{m}}$-Monomorphismus mit $\operatorname{Bi} g_{\mathfrak{m}} \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}^i U_{\mathfrak{m}}$, wobei $\mathcal{M} = \mathfrak{m} R_{\mathfrak{m}}$ sei. Nach ([3] Lemma 4.1) ist aber $U_{\mathfrak{m}}$ als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul klein in $M_{\mathfrak{m}}$, also nach (1.2) $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}^i U_{\mathfrak{m}} = 0$, und das ist unmöglich.

Die erste Folgerung ist eine Verallgemeinerung von (1.2) auf den nicht-lokalen Fall, die zweite wird der wesentliche Baustein im Beweis von (1.7).

Folgerung 1.4. *Sei J das Jacobson- und N das Nilradikal von R, sei M ein flacher R-Modul und U ein kleiner Untermodul von M. Dann gilt $\bigcap_{i=1}^{\infty} J^i U \subset NM$.*

Beweis. Wie im zweiten Beweisschritt von (1.2) genügt es $\bigcap_{i=1}^{\infty} J^i U \subset \mathfrak{q} M$ zu zeigen für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min}(R)$. Über dem Integritätsring $\bar{R} = R/\mathfrak{q}$ ist $M/\mathfrak{q} M$ wieder flach und $(U + \mathfrak{q} M)/\mathfrak{q} M$ ein kleiner Untermodul, außerdem $\bar{J} \neq \bar{R}$, so daß nach (1.3) $\bigcap_{i=1}^{\infty} (J^i U + \mathfrak{q} M)/\mathfrak{q} M = 0$ ist wie gewünscht. (Offenbar kann man J durch jedes Ideal $\mathfrak{a}$ ersetzen, das die Bedingung $\mathfrak{a} + \mathfrak{q} \neq R$ für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min}(R)$ erfüllt.)

Folgerung 1.5. *Sei R ohne nilpotente Elemente, M ein beliebiger R-Modul und U ein radikalvoller kleiner Untermodul von M. Dann ist U ein Torsionsmodul.*

Beweis. Ist R sogar ein Integritätsring, folgt die Behauptung sofort aus (1.3): $(U + T(M))/T(M)$ ist ein radikalvoller kleiner Untermodul von $M/T(M)$, also Null. Ist nur $N = 0$, folgt für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(U)$, daß $(U + \mathfrak{p} M)/\mathfrak{p} M$ ein radikalvoller kleiner Untermodul von $M/\mathfrak{p} M$ ist, also über dem Integritätsring $R/\mathfrak{p}$ ein Torsionsmodul, und das heißt $U_\mathfrak{p} \subset \mathrm{Ra}(M_\mathfrak{p})$. Wegen $U_\mathfrak{p} \neq 0$ kann also $R_\mathfrak{p}$ kein Körper sein, wegen $N = 0$ folgt $\mathfrak{p} \not\subseteq \cup \mathrm{Ass}(R)$, d.h. $\mathfrak{p}$ ist regulär.

Lemma 1.6. *Sei M ein R-Modul und U ein flacher Untermodul von M.*
(a) *Für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ gilt $U \cap \mathfrak{p} M = \mathfrak{p} U$.*
(b) *Für das Nilradikal N von R gilt $U \cap NM = NU$.*

Beweis. (a) Sei $u \in U \cap \mathfrak{p} M$, $u = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ mit $r_i \in \mathfrak{p}$, $x_i \in M$. Mit $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(a)$, $a \in R$, folgt $a u = 0$, wegen der Flachheit von U also $u = \sum_{j=1}^{m} t_j u_j$ mit $u_j \in U$, $t_j \in \mathfrak{p}$ für alle j. Damit ist $u \in \mathfrak{p} U$.

(b) Speziell für alle $\mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(R)$ gilt jetzt $U \cap NM \subset U \cap \mathfrak{q} M = \mathfrak{q} U$, also $U \cap NM \subset \cap \{\mathfrak{q} U \mid \mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(R)\} = NU$.

Satz 1.7. *Sei M ein R-Modul und U ein flacher kleiner Untermodul von M. Dann ist U koatomar.*

Beweis. Sei im *1. Schritt* U zusätzlich radikalvoll. Dann ist $(U + NM)/NM$ ein radikalvoller kleiner Untermodul von M/NM, also nach (1.5) ein Torsionsmodul über $\bar{R} = R/N$. Nach (1.6, b) ist aber $(U + NM)/NM \cong U/NU$ auch als $\bar{R}$-Modul flach, insbesondere torsionsfrei. Aus $U/NU = 0$ folgt $U = 0$ wie behauptet.

Ist im *2. Schritt* U nur noch flach, aber R *lokal*, so wollen wir zeigen, daß U sogar endlich erzeugt ist. Über dem Restklassenkörper $k = R/\mathfrak{m}$ hat der Vektorraum $U/\mathfrak{m} U$ eine k-Basis $(\bar{u}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, und bekanntlich sind dann die $(u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ in U R-linear unabhängig (siehe [2] p. 51), so daß $F := \oplus R u_\lambda$ ein freier Untermodul von U wird mit $F + \mathfrak{m} U = U$, $F \cap \mathfrak{m} U = \mathfrak{m} F$. Weil U klein in M ist, kann es keinen Epimorphismus von U in die injektive Hülle E von k geben, also auch keinen von F nach E, d.h. F ist endlich erzeugt. Damit ist F koabgeschlossen in U: Aus $X \subset F$, F/X klein in U/X, folgt $F/X \subset \mathrm{Ra}(U/X)$, $F \subset X + \mathfrak{m} U$, $F = X + \mathfrak{m} F$, also nach Nakayama $F/X = 0$. In flachen Moduln sind aber nach ([4] Satz 3.4) alle koabgeschlossenen Untermoduln bereits rein, so daß jetzt U/F ein flacher kleiner Untermodul von M/F ist. Nach dem ersten Schritt folgt $U/F = 0$, so daß $U = F$ endlich erzeugt ist wie behauptet.

Der *3. Schritt* ist jetzt, weil Kleinheit beim Lokalisieren nach *maximalen* Idealen erhalten bleibt ([3] Lemma 4.1), Routine: Alle $U_\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$) sind als $R_\mathfrak{m}$-Moduln nach dem zweiten Schritt endlich erzeugt, so daß jeder radikalvolle Faktormodul von U Null ist, also U koatomar.

Bemerkung. Auf die Flachheit von U kann man in (1.7) nicht verzichten. Verlangt man z. B., daß über R alle kleinen Untermoduln koatomar sind, so ist das nach [3] äquivalent damit, daß $\dim(R) \leqq 1$ ist und in allen $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$) das Nilradikal endliche Länge hat.

Folgerung 1.8. *Sei K der totale Quotientenring von R und $R \subset A \subset K$ ein Zwischenring, so daß A als R-Modul flach und klein in K ist. Dann folgt $A = R$.*

Beweis. Nach (1.7) ist A als R-Modul koatomar, und weil der Untermodul R durch kein $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ teilbar ist, gilt das nach ([3] Lemma 1.1) auch für A selbst, d. h. $R \subset A$ ist eine treuflache Ringerweiterung. Damit ist auch A/R flach, außerdem ein Torsionsmodul, also Null.

2. Die koassoziierten Primideale eines flachen Moduls. Für einen R-Modul M ist $\operatorname{Koass}(M)$ eine i. allg. echte Teilmenge von $\operatorname{Att}(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid \operatorname{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M) = \mathfrak{p}\}$, und für einen flachen R-Modul M sieht man sofort, daß $\operatorname{Att}(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid M/\mathfrak{p}M \neq 0\}$ ist. $\operatorname{Koass}(M)$ aber konnten wir in ([5] Abschnitt 4) nur für ganz spezielle flache R-Moduln berechnen, z. B. für $M = R_{\mathfrak{q}}$, falls R ein Integritätsring und $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R)$ war. Mit dem letzten Satz aus Abschnitt 1 gelingt uns diese Berechnung jetzt für alle flachen R-Moduln, und wir wollen das Ergebnis an drei Beispielen illustrieren.

Satz 2.1. *Für jeden flachen R-Modul M ist* $\operatorname{Koass}(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid M/\mathfrak{p}M \neq 0$, *und falls* $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Max}(R)$, *ist $M/\mathfrak{p}M$ nicht koatomar*$\}$.

Beweis. „$\subset$" Für jeden R-Modul M gilt: Ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$, also $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(M/U)$ und M/U artinsch, so folgt $\mathfrak{p}M \subset U$, $M/\mathfrak{p}M \neq 0$. Ist zusätzlich $M/\mathfrak{p}M$ koatomar, hat M/U als artinscher koatomarer Modul sogar endliche Länge, und es folgt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max}(R)$.

„$\supset$" Ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max}(R)$ und $M/\mathfrak{p}M \neq 0$, kann man einen maximalen Untermodul U von M wählen mit $\mathfrak{p}M \subset U$, und es folgt $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(M/U)$. Ist $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Max}(R)$ und $M/\mathfrak{p}M$ nicht koatomar, kann über dem Integritätsring $\bar{R} = R/\mathfrak{p}$ der flache Modul $M/\mathfrak{p}M$ in seiner injektiven Hülle nicht klein sein (1.7), hat also einen teilbaren Faktormodul $D \neq 0$, und aus $\{0\} = \operatorname{Koass}_{\bar{R}}(D) \subset \operatorname{Koass}_{\bar{R}}(M/\mathfrak{p}M)$ folgt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$.

Folgerung 2.2. *Ist M ein flacher R-Modul und* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$ *kein maximales Ideal, so folgt* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M)$ *für jedes Primideal* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.

Folgerung 2.3. *Für einen radikalvollen flachen R-Modul M ist* $\operatorname{Koass}(M) = \operatorname{Att}(M)$.

Beispiel 2.4. Ist $(R, \mathfrak{m})$ lokal und $\hat{R}$ die Vervollständigung von R, so gilt $\operatorname{Koass}(\hat{R}) = \{\mathfrak{m}\} \cup \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid R/\mathfrak{p}$ ist *nicht* vollständig$\}$.

Beweis. Wegen $\mathfrak{m}\hat{R} \neq \hat{R}$ ist $\mathfrak{m} \in \operatorname{Koass}(\hat{R})$. Für alle Primideale $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ folgt aber die Behauptung aus (2.1): Der Kokern der kanonischen Abb. $\varphi\colon R/\mathfrak{p} \to \widehat{R/\mathfrak{p}} = \hat{R}/\mathfrak{p}\hat{R}$ ist stets radikalvoll, also $\hat{R}/\mathfrak{p}\hat{R}$ genau dann koatomar, wenn φ surjektiv, d. h. $R/\mathfrak{p}$ vollständig ist.

Bemerkungen. 1) Es ist leicht zu sehen, daß $\operatorname{Att}(\hat{R}) = \operatorname{Spec}(R)$ ist, denn allgemeiner gilt für jede treuflache Ringerweiterung $R \subset A$ und jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, daß $\mathfrak{p}A \cap R = \mathfrak{p}$, also $\operatorname{Ann}_R(A/\mathfrak{p}A) = \mathfrak{p}$ ist. 2) Mit (2.4) haben wir sogar $\operatorname{Koass}(\hat{M})$ für jeden endlich erzeugten R-Modul M berechnet: Es ist $(\hat{M})^0 \cong (\hat{R} \underset{R}{\otimes} M)^0 \cong \mathrm{Hom}_R(M, (\hat{R})^0)$, also $\mathrm{Koass}(\hat{M}) = \mathrm{Ass}((\hat{M})^0) = \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Ass}((\hat{R})^0) = \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Koass}(\hat{R})$. 3) Sei weiter R lokal. Für jeden injektiven R-Modul M ist dann M^0 flach, so daß sich $\mathrm{Koass}(M^0) = \mathrm{Ass}(M^{00})$ mit Hilfe von (2.4) und (2.3) berechnen läßt: Ist M halbartinsch, d. h. $M \cong E^{(I)}$, folgt $M^0 \cong \hat{R}^I$, also $\mathrm{Ass}(M^{00}) = \mathrm{Koass}(\hat{R})$ falls I endlich $\neq \emptyset$, $\mathrm{Ass}(M^{00}) = \mathrm{Spec}(R)$ falls I unendlich ist. Ist M sockelfrei, d. h. M^0 radikalvoll, erhält man $\mathrm{Ass}(M^{00}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid$ es gibt ein $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M)$ mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}\}$.

Beispiel 2.5. Ist S eine multiplikative Teilmenge von R, so gilt $\mathrm{Koass}(R_S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, und falls $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Max}(R)$, gibt es ein $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_0 \in \mathrm{Max}(R)$ mit $\mathfrak{m}_0 \cap S \neq \emptyset\}$.

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(R_S)$, d. h. $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Falls $\mathfrak{p} \in \mathrm{Max}(R)$, folgt sofort $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(R_S)$. Falls $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Max}(R)$, gehen wir wie im Beweis von (2.4) vor: Der Kokern der kanonischen Abb. $\varphi: R/\mathfrak{p} \to (R/\mathfrak{p})_{\bar{S}} = R_S/\mathfrak{p} R_S$ ist stets radikalvoll, also $R_S/\mathfrak{p} R_S$ genau dann koatomar, wenn φ surjektiv ist, d. h. $\bar{S}$ nur aus Einheiten besteht, d. h. $\mathfrak{m} \cap S = \emptyset$ ist für alle $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$. Mit (2.1) folgt die Behauptung.

Bemerkung. Das eben bewiesene Beispiel konnten wir in ([5] Satz 4.5) nur unter der Zusatzbedingung behandeln, daß R ein Integritätsring und der Ring R_S semilokal war. In den dort angegebenen Formeln (4.6) und (4.7) für $\mathrm{Koass}(R_{\mathfrak{q}})$ braucht also R kein Integritätsring zu sein.

Beispiel 2.6. Zu $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ gibt es höchstens zwei Typen von flachen R-Moduln M mit $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$: Falls $h(\mathfrak{p}) = 0$, ist $M \cong (R_{\mathfrak{p}})^{(I)}$ mit $I \neq \emptyset$; falls $h(\mathfrak{p}) \neq 0$, muß $\mathfrak{p} \in \mathrm{Max}(R)$ sein, $R/\mathfrak{q}$ lokal für alle Primideale $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ und $M \cong (R_{\mathfrak{p}})^n$ mit $n \geqq 1$.

Beweis. Für jeden flachen R-Modul M gilt $\cup \mathrm{Ass}(M) \subset \cup \mathrm{Koass}(M)$, denn aus $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M)$ folgt bekanntlich $M/\mathfrak{q} M \neq 0$, mit einem $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M/\mathfrak{q} M)$ also $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M)$. Ist daher $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$, operieren alle $s \in R \backslash \mathfrak{p}$ auf M nicht nur surjektiv, sondern auch injektiv, und es folgt $M \cong M_{\mathfrak{p}}$. *1. Fall* $h(\mathfrak{p}) = 0$. Dann ist der Ring $R_{\mathfrak{p}}$ artinsch und $M_{\mathfrak{p}}$ als $R_{\mathfrak{p}}$-Modul nicht nur flach, sondern sogar frei, also $M \cong (R_{\mathfrak{p}})^{(I)}$ mit $I \neq \emptyset$. *2. Fall* $h(\mathfrak{p}) \neq 0$. Mit irgendeinem Primideal $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ folgt dann nach Voraussetzung $\mathfrak{q} \notin \mathrm{Koass}(M)$, also nach (2.2) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Max}(R)$. Damit ist M als R-Modul koatomar, also auch $M_{\mathfrak{p}}$ als $R_{\mathfrak{p}}$-Modul ([3] Lemma 1.1, Folgerung), und mit einem freien $R_{\mathfrak{p}}$-Untermodul F von $M_{\mathfrak{p}}$, $F + \mathrm{Ra}(M_{\mathfrak{p}}) = M_{\mathfrak{p}}$ (siehe den zweiten Beweisschritt von (1.7)) erhält man $F = M_{\mathfrak{p}}$, also $M \cong (R_{\mathfrak{p}})^{(I)}$ mit $I \neq \emptyset$. Weil der Ring $R_{\mathfrak{p}}$ nicht artinsch ist, ist jeder koatomare freie $R_{\mathfrak{p}}$-Modul bereits endlich erzeugt ([3] Lemma 2.1, Folgerung 1), also I endlich. Weil schließlich $R_{\mathfrak{p}}$ als R-Modul koatomar, also die kanonische Abbildung $R \to R_{\mathfrak{p}}$ surjektiv ist, folgt nach ([4] Satz 1.3) für jedes Primideal $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, daß $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ das einzige maximale Ideal im Ring $R/\mathfrak{q}$ ist.

Bemerkung. Die beiden angegebenen Typen haben tatsächlich nur ein koassoziiertes Primideal: Ist $h(\mathfrak{p}) = 0$ und $I \neq \emptyset$, gilt sogar $\mathrm{Att}((R_{\mathfrak{p}})^{(I)}) = \mathrm{Att}(R_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}\}$. Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal derart, daß alle $R/\mathfrak{q}$ lokal sind ($\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$), folgt mit (2.5) sofort $\mathrm{Koass}(R_{\mathfrak{m}}) = \{\mathfrak{m}\}$.

3. Über den ganzen Abschluß von R im totalen Quotientenring K. Hauptziel dieses letzten Abschnittes ist es, für jeden noetherschen Integritätsring R mit Quotientenkörper $K \neq R$ zu zeigen: R', der ganze Abschluß von R in K, ist als R-Modul klein in K. Die

Umkehrung – Ist ein Zwischenring $R \subset A \subset K$ als R-Modul klein in K, so ist A ganz über R – gelingt uns bis jetzt nur unter der Zusatzbedingung, daß alle $A/\mathfrak{m}A$ endlich erzeugt sind ($\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$). Weil die Nullteilerfreiheit beim Übergang zu $\hat{R}_\mathfrak{m}$ i. allg. verlorengeht, wollen wir auf sie von vorneherein verzichten.

Lemma 3.1. *Sei M ein flacher R-Modul und $U \subset M \subset L$. Genau dann ist U klein in M, wenn $(U + \mathfrak{q}L)/\mathfrak{q}L$ klein in $(M + \mathfrak{q}L)/\mathfrak{q}L$ ist für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min}(R)$.*

Beweis. „$\Rightarrow$" Ist U klein in M, so gilt für jeden Untermodul L_1 von L, daß $(U + L_1)/L_1$ klein in $(M + L_1)/L_1$ ist: Aus $L_1 \subset X \subset M + L_1$ und $X + (U + L_1) = M + L_1$ folgt $U + (X \cap M) = M$, $M \subset X$, $X = M + L_1$.

„$\Leftarrow$" Nur hier wird die Flachheit von M, d. h. (1.6, a) benützt: Aus $X + U = M$ folgt nach Voraussetzung $X + \mathfrak{q}L = M + \mathfrak{q}L$, also $X + (\mathfrak{q}L \cap M) = M$, $X + \mathfrak{q}M = M$ für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min}(R)$, $X + NM = M$, $X = M$.

Satz 3.2. *Sei R' der ganze Abschluß von R in K und M ein flacher R-Untermodul von K. Dann ist $R' \cap \operatorname{Ra}(M)$ klein in M.*

Beweis. Sei $U = R' \cap \operatorname{Ra}(M)$. Ist im *1. Schritt* R zusätzlich lokal und vollständig, gilt nach Nagata für jedes $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min}(R)$, daß $(R/\mathfrak{q})'$, der ganze Abschluß von $R/\mathfrak{q}$ in seinem Quotientenkörper $Q(R/\mathfrak{q})$, endlich erzeugt ist. In

$$(U + \mathfrak{q}K)/\mathfrak{q}K \subset (M + \mathfrak{q}K)/\mathfrak{q}K \subset K/\mathfrak{q}K \subset Q(R/\mathfrak{q})$$

ist also $(U + \mathfrak{q}K)/\mathfrak{q}K$ als Untermodul von $(R/\mathfrak{q})'$ endlich erzeugt und deshalb klein in $(M + \mathfrak{q}K)/\mathfrak{q}K$. Weil das für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min}(R)$ galt, folgt mit $L = K$ in (3.1) die Behauptung.

Sei im *2. Schritt* R nur lokal, $\hat{R}$ die Vervollständigung von R und $Q(\hat{R})$ der totale Quotientenring von $\hat{R}$. Aus

$$\hat{R} \underset{R}{\otimes} U \subset \hat{R} \underset{R}{\otimes} M \subset \hat{R} \underset{R}{\otimes} K \subset Q(\hat{R})$$

folgt dann, daß $\hat{R} \underset{R}{\otimes} M$ ein flacher $\hat{R}$-Untermodul von $Q(\hat{R})$ ist, also nach dem ersten Schritt $(\hat{R})' \cap \operatorname{Ra}\left(\hat{R} \underset{R}{\otimes} M\right)$ als $\hat{R}$-Modul klein in $\hat{R} \underset{R}{\otimes} M$ ist. Das gilt dann erst recht für den Untermodul $\hat{R} \underset{R}{\otimes} U$, so daß nach ([4] p. 60) auch U klein in M ist.

Sei im *3. Schritt* R ein Integritätsring, aber nicht notwendig lokal. Für jedes $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ ist natürlich $M_\mathfrak{m}$ ein flacher $R_\mathfrak{m}$-Untermodul von K, also nach dem zweiten Schritt $(R_\mathfrak{m})' \cap \operatorname{Ra}(M_\mathfrak{m})$ als $R_\mathfrak{m}$-Modul klein in $M_\mathfrak{m}$. Das gilt dann erst recht für den Untermodul $U_\mathfrak{m}$. Weil also $U_\mathfrak{m}$ klein in $M_\mathfrak{m}$ ist für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$, ist auch U klein in M.

Ist im *4. Schritt* R beliebig, müssen wir wieder für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min}(R)$ zeigen, daß $(U + \mathfrak{q}K)/\mathfrak{q}K$ klein in $(M + \mathfrak{q}K)/\mathfrak{q}K$ ist. Wie im ersten Schritt ist $(M + \mathfrak{q}K)/\mathfrak{q}K$ ein Untermodul von $Q(R/\mathfrak{q})$, außerdem als $R/\mathfrak{q}$-Modul flach (1.6, a) also nach dem dritten Schritt $(R/\mathfrak{q})' \cap \operatorname{Ra}((M + \mathfrak{q}K)/\mathfrak{q}K)$ klein in $(M + \mathfrak{q}K)/\mathfrak{q}K$. Das gilt auch für den Untermodul $(U + \mathfrak{q}K)/\mathfrak{q}K$, und wir sind fertig.

Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R gilt $R + \mathfrak{m}K = K$. Will man also, daß R (oder R') als R-Modul klein in K ist, muß K als R-Modul radikalvoll sein. Diese Bedingung ist nach (3.2) sogar hinreichend, denn mit $M = K$ erhält man:

Folgerung 3.3. *Sind alle maximalen Ideale von R regulär, so ist R' als R-Modul klein in K.*

Satz 3.4. *Sei $R \subset A \subset K$ ein Zwischenring, so daß A als R-Modul klein in K ist und alle $A/\mathfrak{m}A$ endlich erzeugt sind* ($\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$). *Dann folgt $A \subset R'$.*

Beweis. Wir verwenden das folgende, wohlbekannte Kriterium für Ganzheit (das dem in (3.1) bewiesenen Kriterium für Kleinheit entspricht): $a \in K$ ist genau dann ganz über R, wenn $\bar{a} \in K/\mathfrak{q}K$ ganz über $R/\mathfrak{q}$ ist für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min}(R)$.

Sei im *1. Schritt* R zusätzlich lokal und vollständig. Ist $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min}(R)$ und $\bar{R} = R/\mathfrak{q}$, so ist $(A + \mathfrak{q}K)/\mathfrak{q}K$ auch als $\bar{R}$-Modul klein in $K/\mathfrak{q}K$, also nach (1.2) in der $\bar{\mathfrak{m}}$-adischen Topologie separiert. Nach Voraussetzung ist $(A + \mathfrak{q}K)/\mathfrak{q}K$ modulo $\bar{\mathfrak{m}}$ endlich erzeugt, wegen der Vollständigkeit von $\bar{R}$ also $(A + \mathfrak{q}K)/\mathfrak{q}K$ selbst endlich erzeugt. Weil das für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min}(R)$ galt, folgt mit der Vorbemerkung $A \subset R'$.

Sei im *2. Schritt* R nur lokal, $\hat{R}$ die Vervollständigung von R und $Q(\hat{R})$ der totale Quotientenring von $\hat{R}$. In

$$\hat{R} \subset \hat{R} \underset{R}{\otimes} A \subset \hat{R} \underset{R}{\otimes} K \subset Q(\hat{R})$$

ist dann auch $\hat{R} \underset{R}{\otimes} A$ modulo $\mathcal{M} = \mathfrak{m}\hat{R}$ endlich erzeugt und als $\hat{R}$-Modul klein in $\hat{R} \underset{R}{\otimes} K$ ([4] p. 60), also nach dem ersten Schritt ganz über $\hat{R}$. Für alle $a \in A$ ist daher $\hat{R} \underset{R}{\otimes} R[a]$ endlich über $\hat{R}$, $R[a]$ endlich über R, $a \in R'$ wie behauptet.

Sei im *3. Schritt* R ein Integritätsring, aber nicht notwendig lokal. Für jedes $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ ist auch $A_{\mathfrak{m}}$ modulo $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ endlich erzeugt und als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul klein in K, so daß nach dem zweiten Schritt $A_{\mathfrak{m}} \subset (R_{\mathfrak{m}})' = (R')_{\mathfrak{m}}$ ist. Weil das für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ galt, folgt $A \subset R'$.

Ist im *4. Schritt* R beliebig, folgt für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min}(R)$, daß $(A + \mathfrak{q}K)/\mathfrak{q}K$ ein Unterring von $Q(R/\mathfrak{q})$ ist, der modulo aller $\bar{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$) endlich erzeugt und als $R/\mathfrak{q}$-Modul klein in $Q(R/\mathfrak{q})$ ist, also nach dem dritten Schritt ganz über $R/\mathfrak{q}$. Wieder mit der Vorbemerkung erhält man $A \subset R'$.

Bemerkung. Die Bedingung an alle $A/\mathfrak{m}A$ ist z. B. dann erfüllt, wenn A als R-Modul flach ist (d. h. (1.8) ist ein Spezialfall von (3.4)) oder wenn A/R halbartinsch ist.

Literaturverzeichnis

[1] I. KAPLANSKY, Topics in commutative ring theory. Chicago 1974.

[2] H. MATSUMURA, Commutative ring theory. Cambridge 1986.

[3] H. ZÖSCHINGER, Koatomare Moduln. Math. Z. **170**, 221–232, (1980).

[4] H. ZÖSCHINGER, Gelfandringe und koabgeschlossene Untermoduln. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. **3**, 43–70 (1982).

[5] H. ZÖSCHINGER, Über koassoziierte Primideale. Math Scand. **63**, 196–211, (1988).

Eingegangen am 4. 3. 1993

Anschrift des Autors:

Helmut Zöschinger
Mathematisches Institut
der Universität München
Theresienstr. 39
D-80333 München