Dokumente zur Geschichte der Mathematik

Im Auftrag der
Deutschen Mathematiker-Vereinigung
herausgegeben von Winfried Scharlau

Band 1
Richard Dedekind
Vorlesung über Differential- und Integralrechnung

Band 2
Rudolf Lipschitz
Briefwechsel mit
Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker, Weierstraß

Band 3
Erich Hecke
Analysis und Zahlentheorie

Band 4
Karl Weierstraß
Einleitung in die Theorie
der analytischen Funktionen

Band 5
Mathematische Institute in Deutschland
1800 - 1945

Band 6
Ein Jahrhundert Mathematik
1890 - 1990
Festschrift zum Jubiläum der DMV

Dokumente zur Geschichte der Mathematik

Band 6

Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990

Festschrift zum Jubiläum der DMV

herausgegeben von
Gerd Fischer, Friedrich Hirzebruch,
Winfried Scharlau und Willi Törnig

Deutsche Mathematiker-Vereinigung

Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig / Wiesbaden

Prof. Dr. *Winfried Scharlau*
Mathematisches Institut der Universität Münster

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Verlagsgruppe Bertelsmann International.

Satz: Zechnersche Buchdruckerei, Speyer
Reproarbeiten: Schütte & Behling, Berlin
Druck: Lengericher Handelsdruckerei, Lengerich
Buchbinderische Verarbeitung: Hunke und Schröder, Iserlohn
Printed in Germany

ISBN 3-528-06326-2

Inhaltsverzeichnis

Über die Entwicklung der Funktionentheorie in Deutschland von 1890 bis 1990

Dieter Gaier

Zur Geschichte der Konvexgeometrie und der Geometrie der Zahlen

Peter Manfred Gruber

Wahrscheinlichkeitstheorie

Ulrich Krengel

Zur Entwicklung der angewandten Analysis und mathematischen Physik in den letzten hundert Jahren

Rolf Leis

Vom Hilbertschen Basissatz bis zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen

Gerhard O. Michler

Algebraische Zahlentheorie

Jürgen Neukirch

Erich Hecke und die Rolle der L-Reihen in der Zahlentheorie

Samuel J. Patterson

Quadratische Formen

Albrecht Pfister

Algebraische Topologie

Hans-Werner Henn und Dieter Puppe

Mathematische Logik

Kurt Schütte und Helmut Schwichtenberg

Geschichte der analytischen Zahlentheorie seit 1890

Wolfgang Schwarz

Mathematische Statistik

Hermann Witting

Mathematische Logik

Kurt Schütte und Helmut Schwichtenberg

Einführung

Kurz vor der Gründung der DMV waren die „*Grundlagen der Arithmetik*" (1884) von FREGE und „*Was sind und was sollen die Zahlen?*" (1888) von DEDEKIND erschienen. Bald darauf folgten die „*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*" (1895-97) von CANTOR. Hiermit begann eine systematische Grundlagenforschung der Mathematik und zugleich die Entwicklung der transfiniten Mengenlehre. Voraussetzung für die mathematischen Grundlagenuntersuchungen war die hauptsächlich von FREGE und von PEANO geschaffene Systematik einer exakten mathematischen Logik.

Wir skizzieren in diesem Artikel zunächst die Grundlegung der modernen mathematischen Logik und beschreiben dann die verschiedenen Richtungen (Logizismus, Beweistheorie und Intuitionismus), die in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts zur Begründung der Mathematik eingeschlagen wurden. Anschließend kehren wir zur Mengenlehre zurück, die zwar schon vor der Jahrhundertwende begründet, aber erst später in völlig formalisierter Weise mit den Methoden der mathematischen Logik behandelt wurde. Weiterhin berichten wir hauptsächlich über Ergebnisse, die von deutschen Logikern auf anderen Teilgebieten der mathematischen Logik erzielt wurden, insbesondere in der Rekursionstheorie, in der Modelltheorie, in Anwendungen auf die Algebra, in der Nichtstandard-Analysis und im Zusammenhang mit der Informatik. Dieser kurze Bericht kann natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben.

Für ihre Hilfe bei der Abfassung dieses Berichts möchten wir H.-D. Donder, H. Osswald, A. Prestel und M. Ziegler herzlich danken.

1 Die Grundlegung der modernen mathematischen Logik

Die formale Logik, die bereits ARISTOTELES in exakter Weise begründet hatte, war zwar von der Scholastik in verschiedenen Richtungen weiterentwickelt worden, wurde aber erst in der Mitte des vorigen Jahrhunderts in mathematischer Weise völlig neu geschaffen, und zwar zunächst in Analogie zur Algebra ohne jegliche Bezugnahme auf die vorhergegangenen Behandlungsweisen der Logik. Die mathematische Logik begann mit der Entwicklung einer Booleschen Algebra, die eine Formalisierung der Aussagenlogik und verwandter mathematischer Strukturen liefert, aber noch nicht die volle Ausdrucksfähigkeit der modernen mathematischen Logik besitzt.

Die weiterführenden Begriffsbildungen, die der heutigen mathematischen Logik zugrunde liegen, wurden in Deutschland hauptsächlich von GOTTLOB FREGE (1848–1925) eingeführt und in klarer Weise zur Anwendung gebracht. In seiner „*Begriffsschrift*" (1879) hat FREGE erstmalig eine lange Reihe logischer Formeln in streng formaler Weise aus wenigen Axiomen abgeleitet. Hierbei tritt im Unterschied zu den Formalisierungen, die in Analogie zur Algebra durchgeführt wurden, die fundamentale Bedeutung der Implikation klar in Erscheinung. Die Fregeschen Axiomenschemata

$$A \to (B \to A) \quad \text{und} \quad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

der Implikation liefern nämlich zusammen mit der Schlußregel des modus ponens ein fundamentales System der Logik, das sich durch Hinzunahme von sehr einfachen und naheliegenden Axiomen zur vollen klassischen Aussagenlogik erweitern läßt.

GOTTLOB FREGE
geb.: 08. 11. 1848 in Wismar
gest.: 26. 07. 1925 in Bad Kleinen

Die Werke von FREGE enthalten eine Fülle von damals völlig neuartigen Einsichten, insbesondere bezüglich des Unterschiedes von Variablen und Konstanten, des Begriffs der logischen Funktion und des Quantors sowie der Einführung von Kennzeichnungstermen. Hierzu hatte FREGE eine ausdrucksvolle logische Systematik geschaffen, mit der er eine Grundlegung der gesamten Mathematik in Angriff nahm. Seine Grundlagenuntersuchungen der Mathematik gehören dem von ihm begründeten Logizismus an, den wir im nächsten Abschnitt besprechen werden.

Die von FREGE verwendete Begriffsschrift, die zwar in klarer Weise die logischen Beziehungen veranschaulicht, konnte sich jedoch nicht durchsetzen, weil sie im Unterschied zu allen üblichen Schreibweisen zweidimensional ist. Daher schloß sich die später in der mathematischen Logik verwendete Symbolik nicht an FREGE, sondern im wesentlichen an die von G. PEANO eingeführte Symbolik an.

Es ist erstaunlich, daß die bahnbrechenden Arbeiten von FREGE zunächst überhaupt nicht beachtet wurden. Der Hauptgrund war wohl, daß die von FREGE verwendete zweidimensionale Symbolik allgemein abgelehnt und häufig mißverstanden wurde. Es hat seit dem Erscheinen der Begriffsschrift zwanzig Jahre gedauert, bis man auf FREGE aufmerksam wurde, und es hat weitere zwanzig Jahre gedauert, bis die strenge Exaktheit der FREGEschen Arbeiten in der mathematischen Logik wieder erreicht wurde. Es war BERTRAND RUSSELL, der zuerst die Bedeutung FREGES erkannte und ausdrücklich erklärte, daß ihm die Ideen von FREGE sehr wertvoll seien.

Ein weiterer erfolgreicher Logiker dieser Zeit war in Deutschland LEOPOLD LÖWENHEIM (1878–1957). Er verfaßte mehrere Arbeiten über Eliminations- und Reduktionsverfahren im Rahmen der Algebra der Logik von ERNST SCHRÖDER. 1915 bewies LÖWENHEIM als erster den als *Satz von Löwenheim und Skolem* bekannten Fundamentalsatz der Logik, der besagt, daß jede Theorie in der Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe, die ein Modell hat, bereits ein abzählbares Modell hat. LÖWENHEIM bewies diesen Satz unter Bezugnahme auf eine höhere Prädikatenlogik, während TH. SKOLEM denselben Satz 1920 allein im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe bewies.

2 Der Logizismus

Die Fortschritte, die gegen Ende des vorigen Jahrhunderts in der mathematischen Logik erzielt waren, reizten dazu, nun eine Grundlegung der Mathematik mit den Methoden der mathematischen Logik zu unternehmen. Der von FREGE begründete Logizismus war der Ansicht, daß sich die gesamte Mathematik allein in der reinen Logik entwickeln läßt. Die Tatsache, daß das Unendlichkeitsaxiom in der Mathematik unentbehrlich ist, war für den Logizismus kein Einwand gegen seine These, weil der Übergang von der Denkbarkeit eines unbeschränkten Iterationsprozesses zur Denkbarkeit einer unendlichen Gesamtheit als rein logisch empfunden wurde, wie es ja auch in der Schrift „*Was sind und was sollen die Zahlen?*“ von DEDEKIND zum Ausdruck kommt.

FREGE hat in seinen Büchern „*Die Grundlagen der Arithmatik*" (1884) und „*Grundgesetze der Arithmetik*" (1893-1904) die Mathematik in voller Ausführlichkeit mit reiner Logik zu begründen versucht. Sein Aufbau der Mathematik ist jedoch, da er völlig typenfrei ist, den logischen Antinomien ausgesetzt, insbesondere der RUSSELLschen Antinomie der Menge aller Mengen, die nicht sich selbst als Element enthalten. FREGE hat, nachdem dies bemerkt wurde, selbst eingesehen, daß sein Unternehmen gescheitert ist. Immerhin sind seine Untersuchungen in mancherlei Hinsicht sehr instruktiv gewesen.

Ein zweiter Versuch zur Begründung der Mathematik in der reinen Logik wurde in dem umfangreichen Werk „*Principia Mathematica*" (1910-1913) von BERTRAND RUSSELL und ALFRED NORTH WHITEHEAD unternommen. Hier wurde, um die logischen Antinomien auszuschließen, eine verzweigte Typenlogik zugrunde gelegt. Das heißt, daß hier jedes Prädikat, in dem gewisse Quantoren auftreten, einem höheren Typ zugerechnet wird als die Typen der in ihm auftretenden Quantoren, so daß ein Objekt, das unter Bezugnahme auf eine gewisse Gesamtheit definiert ist, nicht selbst dieser Gesamtheit zugerechnet wird. Ein derartiges System ist völlig konstruktiv. Es vermeidet nicht nur die bekannten logischen Antinomien, sondern ist sogar nachweisbar widerspruchsfrei.

In dieser verzweigten Typenlogik läßt sich jedoch nicht die klassische Mathematik entwickeln. Man erhält hier anstatt des klassischen Begriffs der reellen Zahl eine Hierarchie von reellen Zahlen verschiedener Ordnungen. Daher konnte in den *Principia Mathematica* die klassische Mathematik nur durch Hinzunahme eines Reduzibilitätsaxioms gewonnen werden. Dieses Axiom besagt im wesentlichen, daß jedes Prädikat, dessen Bedeutungsbereich eine Menge von Grundobjekten ist, extensional äquivalent einem entsprechenden Prädikat kleinsten Typs ist. Hierdurch wird jedoch der konstruktive Ansatz der verzweigten Typenlogik aufgehoben, so daß nach Hinzunahme des Reduzibilitätsaxioms keine Garantie mehr für die Widerspruchsfreiheit des Systems besteht.

Daraufhin haben verschiedene Logiker, insbesondere CHWISTEK und RAMSEY bemerkt, daß es einfacher und völlig ausreichend sei, anstatt der verzweigten Typenlogik eine einfache Typenlogik, die kein Reduzibilitätsaxiom benötigt, zugrunde zu legen. In der einfachen Typenlogik wird nur zwischen Grundobjekten, Mengen von Grundobjekten, Mengen von Mengen usw. unterschieden, aber keine Typenverzweigung zwischen verschiedenen Mengen von Grundobjekten vorgenommen. Man kann zwar bisher nicht beweisen, daß eine Formalisierung der klassischen Mathematik im Rahmen der einfachen Typenlogik widerspruchsfrei ist, vermeidet aber bereits in der einfachen Typenlogik die bekannten logischen Antinomien, so daß die Benutzung der einfachen Typenlogik nicht problematischer als der in den *Principia Mathematica* eingeschlagene Weg ist.

Die vom Logizismus unternommenen Versuche, die Mathematik in der reinen Logik zu begründen, konnten jedenfalls ihr Ziel nicht erreichen, haben aber die Weiterentwicklung der mathematischen Logik wesentlich gefördert. So sind die *Principia Mathematica* für mehrere Jahrzehnte das wichtigste Lehrbuch der mathematischen Logik geworden. Es hatte ja sonst keine so vollständige und aufschlußreiche Systematik der mathematischen Logik gegeben, wie sie in den *Principia Mathematica* zur Darstellung gekommen ist.

3 Die Grundlagenkrise der Mathematik

Die Besinnung auf die Grundlagen der Mathematik, die vom Logizismus ausgegangen war, hatte darauf aufmerksam gemacht, daß die bisherige Mathematik durchaus nicht so unproblematisch ist, wie es bis dahin im allgemeinen angenommen wurde. Schon viel früher hatten bereits KRONECKER und POINCARÉ Einwände gegen die indirekten Beweisführungen in der Mathematik erhoben. Nun war es vor allem L. E. J. BROUWER, der das den indirekten Beweisen zugrunde liegende *tertium non datur* entschieden ablehnte.

Ein zweiter Einwand richtete sich gegen die imprädikative Verwendung des Begriffs der reellen Zahl. Man erhält ja die Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen nur dadurch, daß man die obere Grenze einer beliebigen nach oben beschränkten Mengen reeller Zahlen unter Bezugnahme auf die Gesamtheit der reellen Zahlen, also in imprädikativer Weise definiert. Auf die Problematik dieses Verfahrens hat HERMANN WEYL in seinem Buch *„Das Kontinuum“* (1918) hingewiesen mit der Erklärung, daß man die Theorie der reellen Zahlen unter Verlust der Vollständigkeitseigenschaft erheblich einschränken müsse, um ihre Exaktheit sicherzustellen.

Aufgrund dieser gegen die bisherige Mathematik erhobenen Einwände sprach man in den zwanziger und dreißiger Jahren von einer Grundlagenkrise der Mathematik, nachdem 1921 in der Mathematischen Zeitschrift ein Aufsatz von HERMANN WEYL erschienen war mit dem Titel *„Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik“*.

Es wurden nun zur Neubegründung der Mathematik zwei verschiedene Richtungen eingeschlagen, nämlich die des Intuitionismus von L. E. J. BROUWER und die der Beweistheorie von DAVID HILBERT, die damals als Formalismus bezeichnet wurde.

HILBERT hatte es jedoch stets abgelehnt, als Formalist bezeichnet zu werden, denn es kam ihm ja nicht darauf an, bedeutungslose Formalismen zu entwikkeln, sondern die klassische Mathematik in streng formaler Weise als widerspruchsfrei und somit als mathematisch bedeutungsvoll sicherzustellen. Wir wollen uns, wie er sagte, nicht aus dem Paradies vertreiben lassen, das uns CANTOR beschert hat.

4. Die Hilbertsche Beweistheorie

HILBERTS Auffassung von der Mathematik, die ihm schon lange vor der sogenannten Grundlagenkrise der Mathematik völlig klar war, kommt in einem Brief, den er 1899 an GOTTLOB FREGE schrieb, deutlich zum Ausdruck. In diesem Brief heißt es:

> Sie schreiben: Aus der Tatsache der Axiome folgt, daß sie einander nicht widersprechen. Es hat mich sehr interessiert, gerade diesen Satz bei Ihnen zu lesen, da ich nämlich, solange ich über solche Dinge denke, schreibe und vortrage, immer gerade umgekehrt sage: Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht widersprechen, mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definierten Dinge.

Man könnte für diese Auffassung von HILBERT den Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik anführen, der allerdings damals noch nicht vorlag. Nach diesem Satz hat ja jede Theorie im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe, wenn sie widerspruchsfrei ist, ein Modell, so daß die Objekte, die durch die Axiome der betreffenden Theorie definiert sind, tatsächlich existieren.

Es war nun das Ziel der Hilbertschen Beweistheorie, die einzelnen Teile der klassischen Mathematik in vollformalisierter Gestalt als widerspruchsfrei nachzuweisen. Hierzu hat man nicht nur die Objekte, sondern auch die Aussagemöglichkeiten, Axiome und Schlußregeln der mathematischen Theorie formal zu fixieren, um in einer metamathematischen Untersuchung ihre Widerspruchsfreiheit nachweisen zu können. Die Metamathematik oder Beweistheorie, deren Untersuchungsobjekt die als widerspruchsfrei nachzuweisende formalisierte mathematische Theorie ist, sollte sich nach dem ursprünglichen Plan von HILBERT auf eine sehr elementare Untersuchungsmethode beschränken, die HILBERT als finit bezeichnete, nämlich auf die kombinatorische Behandlung von zwar beliebig umfangreichen, aber stets als endlich anzusehenden Zeichenfiguren.

In der Hilbertschen Metamathematik wird nicht wie im Logizismus der Versuch unternommen, die natürlichen Zahlen in der reinen Logik zu entwickeln, weil dies viel zu aufwendig und durchaus nicht elementar wäre. Es wird vielmehr ein sehr elementarer Teil der Arithmetik bereits der Metamathematik zugrunde gelegt. Man kann ja die nichtnegativen ganzen Zahlen in einer sehr einfachen Weise durch sogenannte Ziffern repräsentieren, nämlich nach folgender induktiven Definition:

(z1) Das Symbol 0 ist eine Ziffer.
(z2) Ist z eine Ziffer, so ist auch z' (der Nachfolger von z) eine Ziffer.

Bei derartigen induktiven Definitionen ist es vielfach üblich eine weitere Definitionsregel hinzuzufügen, die besagt, daß die Menge der Ziffern die kleinste Menge mit den Eigenschaften (z1) und (z2) ist. Die Hinzunahme einer solchen Regel wäre hier nicht nur überflüssig, sondern sogar irreführend, da sie auf den allgemeinen Mengenbegriff Bezug nimmt, von dem in der Metamathematik überhaupt keine Rede ist. Ziffern sind nach ihrer induktiven Definition genau diejenigen Zeichen oder Zeichenreihen, die sich durch Anwendungen der Regeln (z1) und (z2) ergeben, wobei in jedem Fall natürlich nur endlich viele Anwendungen dieser Regeln in Betracht kommen. Für diese Ziffern gilt definitionsgemäß das Prinzip der vollständigen Induktion. Man braucht hierfür in der Metamathematik kein Axiom. Erst bei der Formalisierung eines weniger elementaren Teils der Mathematik wird ein Axiom oder Axiomenschema der vollständigen Induktion benötigt.

Die ersten Widerspruchsfreiheitsbeweise für Teile der Mathematik wurden nach einer Idee von HILBERT in den Jahren 1924–25 von WILHELM ACKERMANN durchgeführt, und zwar für quantorenfreie Formalisierungen von mathematischen Theorien, die anstelle der Axiome und Schlußregeln für Quantoren nur das Axiomenschema $A(t) \rightarrow A(\varepsilon_x A(x))$ für beliebige Terme t haben.

Hierbei bezeichnet $\varepsilon_x A(x)$ ein Objekt mit der Eigenschaft A, falls es ein solches gibt, andernfalls ein beliebiges Objekt. Eine derartig formalisierte Theorie erweist sich als widerspruchsfrei, wenn sich in jeder formalen Herleitung einer numerischen Formel alle ε-Terme unter Erhaltung des Herleitungszusammenhanges eliminieren lassen, weil in einer Herleitung, die keine ε-Terme enthält, keine falschen numerischen Formeln auftreten können.

ACKERMANN gelang es, ein allgemeines Verfahren zur Elimination der ε-Terme zu entwickeln. Hiermit konnte man jedoch nicht einmal die reine Zahlentheorie als widerspruchsfrei nachweisen, da man hierfür nicht beweisen konnte, daß das Ackermannsche Eliminationsverfahren stets nach endlich vielen Schritten abbricht. Ein solcher Beweis war, wie sich nach einigen Jahren herausstellte, allerdings in finiter Weise überhaupt nicht möglich.

Nachdem in Wien KURT GÖDEL 1930 in seiner Dissertation erstmalig den Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik bewiesen hatte, bewies er 1931 in seiner Habilitationsschrift *„Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme“* zwei Sätze von sensationeller Bedeutung. Der erste Satz besagt, daß jedes hinreichend starke formale System grundsätzlich unvollständig ist, das heißt, Sätze zu formulieren gestattet, die in dem System weder beweisbar noch widerlegbar sind, sofern das System nicht widerspruchsvoll ist. Der zweite Satz besagt, daß die Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems, das die rekursive Zahlentheorie und gewisse natürliche Ableitungsregeln enthält, nicht mit den Mitteln dieses Systems beweisbar ist. Aus diesem zweiten Unvollständigkeitssatz folgt insbesondere, daß die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie nicht in finiter Weise beweisbar ist, weil die finiten Methoden in der reinen Zahlentheorie enthalten sind.

Weder GÖDEL noch HILBERT haben diese neuen Erkenntnisse als eine Widerlegung des HILBERTschen Programms aufgefaßt. Beide haben hieraus nur die Konsequenz gezogen, daß der von HILBERT ursprünglich eingenommene streng finite Standpunkt zu einem allgemeineren konstruktiven Standpunkt erweitert werden müsse, um die Widerspruchsfreiheit von mathematisch bedeutungsvollen Theorien beweisen zu können.

So hat HILBERT bald nach dem Erscheinen der Gödelschen Unvollständigkeitssätze in einem Göttinger Kolloquiumsvortrag vorgeschlagen, die formalisierte vollständige Induktion, deren beweistheoretische Behandlung besonders schwierig ist, durch die konstruktive Anwendung einer Schlußregel mit unendlich vielen Prämissen zu ersetzen. Diese von HILBERT als ***unendliche Induktion*** bezeichnete Schlußregel besagt, daß auf die Allformel $(x)A(x)$ geschlossen werden darf, wenn in konstruktiver Weise $A(z)$ für jede Ziffer z hergeleitet werden kann. Diese Idee von HILBERT wurde zunächst nicht beachtet, sondern erst nach fast zwanzig Jahren aufgegriffen und ist heute für beweistheoretische Untersuchungen unentbehrlich geworden.

In Göttingen hat dann GERHARD GENTZEN zunächst in seiner Dissertation *„Untersuchungen über das logische Schließen"* (1934–35) mit seinem System des natürlichen Schließens und mit seinem Sequenzenkalkul eine sehr durchsichtige neue Systematik der Prädikatenlogik entwickelt, die sich als äußerst fruchtbar erwiesen hat und zum Allgemeingut aller Logiker geworden ist. Anschließend gelang es ihm 1936, die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie zu beweisen, und zwar mittels transfiniter Induktion bis zur kleinsten ε-Zahl ε_0. Diese transfinite Induktion überschreitet zwar den finiten Standpunkt, wie es nach GÖDEL erforderlich ist, verläuft aber in einer völlig konstruktiven Weise, so daß der Beweis von GENTZEN als ein Evidenznachweis für die reine Zahlentheorie im Sinne des erweiterten HILBERTschen Programms anzusehen ist.

GERHARD GENTZEN
geb.: 24. 11. 1909 in Greifswald (Pommern)
gest.: 04. 08. 1945 in Prag

Durch transfinite Induktion bis ε_0 konnte nun auch WILHELM ACKERMANN 1940 beweisen, daß sein Verfahren zur Elimination der ε-Terme im formalen System der reinen Zahlentheorie stets nach endlich vielen Schritten zum Abschluß kommt, womit sich ein weiterer Widerspruchsfreiheitsbeweis für die reine Zahlentheorie ergab.

Durch die Untersuchungen von GENTZEN wurde erstmals erkannt, daß sich die Beweisstärke eines formalen Systems durch eine Ordinalzahl kennzeichnen läßt. Man bezeichnet heute als die beweistheoretische Ordinalzahl eines formalen Systems der Mathematik die kleinste Ordinalzahl α mit der Eigenschaft, daß sich keine rekursive Wohlordnung vom Ordnungstyp α in dem betreffenden formalen System als wohlgeordnet beweisen läßt. Wie GENTZEN 1943 in seiner Habilitationsschrift bewies, ist ε_0 die beweistheoretische Ordinalzahl der reinen Zahlentheorie.

GERHARD GENTZEN war zuletzt Dozent an der Universität Prag und ist am Ende des Krieges in tschechischer Gefangenschaft umgekommen, nachdem sich sowohl amerikanische als auch russische Mathematiker vergeblich um seine Freilassung bemüht hatten.

Nach dem Kriege wurden in Anknüpfung an die Methoden von GENTZEN auch gewisse Teilsysteme der klassischen Analysis als widerspruchsfrei nachgewiesen, und zwar im Rahmen einer Prädikatenlogik zweiter Stufe, in der sowohl über die Grundobjekte als auch über Mengen von Grundobjekten quantifiziert wird. Die reellen Zahlen werden hier durch Mengen von Grundobjekten (natürlichen oder rationalen Zahlen) repräsentiert. Zur Mengenbildung dient das *Komprehensionsaxiom*, das bezüglich einer Formel $A(x)$ die Menge $\{x: A(x)\}$ aller Grundobjekte mit der Eigenschaft A zu bilden gestattet. Bei uneingeschränkter Verwendung dieses Komprehensionsaxioms erhält man die volle klassische Theorie der reellen Zahlen, von der nicht zu erwarten ist, daß sie sich durch einen Widerspruchsfreiheitsbeweis auf grundsätzlich einfachere Beziehungen zurückführen läßt. Durch Einschränkungen des Komprehensionsaxioms lassen sich jedoch Teilsysteme der Analysis abgrenzen, für die konstruktive Widerspruchsfreiheitsbeweise erbracht werden konnten. Auf andere Weise hat auch PAUL LORENZEN gewisse Teile der klassischen Analysis konstruktiv begründet.

Unter Verwendung der von HILBERT vorgeschlagenen unendlichen Induktion konnte auch der GENTZENsche Widerspruchsfreiheitsbeweis etwas einfacher und durchsichtiger gestaltet werden, weil sich mit Hilfe dieser Schlußregel alle Quantoren in den Herleitungen numerischer Formeln eliminieren lassen, was in dem von GENTZEN behandelten formalen System nicht allgemein möglich ist.

Durch die beweistheoretischen Untersuchungen konnte auch eine Grenze für die Prädikativität ermittelt werden. Zu Beginn der sechziger Jahre wurde nämlich von S. FEFERMAN und K. SCHÜTTE gleichzeitig und unabhängig die kleinste Ordinalzahl Γ_0 bestimmt, welche die Eigenschaft hat, daß keine Wohlordnung vom Ordnungstyp Γ_0 in prädikativer Weise als wohlgeordnet beweisbar ist. Hiermit konnte FEFERMAN den prädikativ interpretierbaren Teil der klassischen Analysis genau charakterisieren, nämlich durch Einschränkung der Komprehension auf sogenannte Δ^1_1-Formeln, in denen die Mengenquantoren nur in einer besonders schwachen Weise auftreten.

Mit der Grenze der Prädikativität ist bereits die Grenze für die Durchführbarkeit des erweiterten HILBERTschen Programms erreicht. Man hat für jedes prädikativ interpretierbare Teilsystem der Analysis einen Widerspruchsfreiheitsbeweis durch transfinite Induktion bis zu einer Ordinalzahl $< \Gamma_0$, der den Anforderungen des erweiterten HILBERTschen Programms genügt. Ein Teilsystem der Analysis, das nicht prädikativ interpretierbar ist, läßt sich aber nicht in prädikativer Weise und somit nicht im Sinne des erweiterten HILBERTschen Programms als widerspruchsfrei nachweisen.

Immerhin hat sich gezeigt, daß der prädikativ interpretierbare Teil der klassischen Analysis wesentlich umfangreicher ist als der auf arithmetische Komprehension beschränkte Teil, auf den HERMANN WEYL in seinem Buch „*Das Kontinuum*" die Analysis einzuschränken gedachte. Fast alle bisher bewiesenen fundamentalen Sätze der klassischen Analysis gehören dem prädikativ interpretierbaren Teil an.

Nachdem sich nun herausgestellt hatte, daß der klassischen Mathematik eine viel stärkere Abstraktion zugrunde liegt, als HILBERT erwartet hatte, wurden auch für wesentlich imprädikative Teile der Mathematik Widerspruchsfreiheitsbeweise durchgeführt. Diese Beweise sind allerdings nicht als Evidenznachweise im Sinne des erweiterten HILBERTschen Programms anzusehen, geben aber Aufschluß über die Beweisstärken der betreffenden formalen Systeme.

Die Grundlagenkrise der Mathematik ist inzwischen überwunden. Schon 1930 hatte PAUL BERNAYS, der Mitarbeiter HILBERTS, in einer seiner philosophischen Abhandlungen erklärt:

> Es erscheint als eine unberechtigte Zumutung von seiten der Philosophie an die Mathematik, daß sie ihre einfachere und leistungsfähigere Methode zugunsten einer beschwerlicheren und an Systematik zurückstehenden Methode aufgeben solle, ohne durch eine innere Nötigung dazu veranlaßt zu sein.

Diese Auffassung hat sich durchgesetzt. Es besteht mit vereinzelten Ausnahmen kein Zweifel mehr an der Exaktheit der klassischen Mathematik.

Den ersten Widerspruchsfreiheitsbeweis für ein wesentlich imprädikatives Teilsystem der Analysis hat in Weiterentwicklung der GENTZENschen Methoden 1967 G. TAKEUTI erbracht, und zwar für die sogenannte Π^1_1-Analysis, die äquivalent ist mit demjenigen Teilsystem der Analysis, in dem die Komprehension auf beliebige Formeln mit höchstens einem Mengenquantor eingeschränkt ist. Für dieses und einige bedeutend stärkere Teilsysteme der Analysis sowie für entsprechende Teilsysteme der Mengenlehre haben in München W. BUCHHOLZ, G. JÄGER und W. POHLERS durch Widerspruchsfreiheitsbeweise die beweistheoretischen Ordinalzahlen bestimmt.

Unter Bezugnahme auf diese beweistheoretischen Ordinalzahlen konnten H. FRIEDMAN und S.G. SIMPSON die Beweisbarkeit oder Unbeweisbarkeit gewisser kombinatorischer Sätze in verschiedenen Teilsystemen der Analysis nachweisen.

5 Der Intuitionismus

Der zur Zeit der Grundlagenkrise der Mathematik von L. E. J. Brouwer begründete Intuitionismus hatte nicht nur das *tertium non datur*, auf dem die indirekten Beweisführungen beruhen, sondern überhaupt das axiomatisch-formale Verfahren der klassischen Mathematik abgelehnt. Die Brouwersche Mathematik weicht daher sehr stark von der klassischen Mathematik ab. An die Stelle des Mengenbegriffs tritt hier der Begriff der Wahlfolge, womit sich ein völlig anderes Kontinuum als in der klassischen Mathematik ergibt. Jede Funktion reeller Zahlen ist hier stetig, und jede Operation auf einem Funktional natürlicher Zahlen ist hier bereits eindeutig bestimmt durch die Werte dieses Funktionals in einem hinreichend großen Abschnitt.

Die intuitionistische Mathematik hat sich nicht durchgesetzt, aber in mancherlei Hinsicht zu neuen Erkenntnissen geführt. Wesentliche Teile der intuitionistischen Mathematik wurden von S. C. Kleene, J. Myhill, G. Kreisel und A. S. Troelstra und anderen in einer Weise interpretiert, die auch für die klassische Mathematik bedeutungsvoll ist.

Insbesondere hat die von A. Heyting 1930 durchgeführte Formalisierung der intuitionistischen Prädikatenlogik eine fundamentale Bedeutung bekommen. Diese intuitionistische Prädikatenlogik, in der das *tertium non datur* nicht ableitbar ist, kann sowohl als ein Teilsystem als auch als eine Erweiterung der klassischen Prädikatenlogik aufgefaßt werden. Sie ist ein Teilsystem insofern, als die in ihr herleitbaren Formeln eine echte Teilmenge der in der klassischen Prädikatenlogik herleitbaren Formeln bilden. Andererseits kann die gesamte klassische Prädikatenlogik in einer Weise ausgedrückt werden, die auch in der intuitionistischen Prädikatenlogik gültig ist. Dazu hat man die Disjunktion und Existenzquantifizierung als definiert anzusehen (durch Negation und Konjunktion beziehungsweise durch Negation und den Allquantor), und man muß ferner für jedes Prädikatensymbol P das Prinzip des indirekten Beweisens

$$\forall x_1 \dots x_n (\neg\neg P x_1 \dots x_n \rightarrow P x_1 \dots x_n)$$

(auch Stabilität von P genannt) annehmen. Auf diese Weise hat man dann die klassische Prädikatenlogik mit dem in ihr gültigen *tertium non datur* in der intuitionistischen Prädikatenlogik interpretiert, die außerdem noch eine in der klassischen Prädikatenlogik nicht definierbare Disjunktion, Implikation und Existenzquantifizierung enthält. Derartige Zurückführungen von formalen Systemen der klassischen Mathematik auf entsprechende Systeme der intuitionistischen Mathematik wurden vielfach vorgenommen, insbesondere von Kurt Gödel bei der Einführung seiner Funktionale endlicher Typen (1958) und von Clifford Spector in einer Arbeit, die nach seinem frühen Tode von Georg Kreisel 1962 herausgegeben wurde unter dem Titel: „*Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics.*“ In dieser Arbeit führt Spector die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis zurück auf die Existenz von gewissen Funktionalen, die im Rahmen der intuitionistischen Mathematik durch Bar-Rekursion definiert sind. Es handelt sich hierbei um eine Rekursion, die es in der klassischen Mathematik nicht gibt, sondern nur in der intuitionistischen Mathematik aufgrund der Voraussetzung, daß jede Operation auf einem Funktional natürlicher Zahlen bereits durch die Werte dieses Funktionals in einem hinreichend großen Abschnitt bestimmt ist.

Die Bar-Rekursion höherer Typen, die von SPECTOR gebraucht wird, bedarf jedoch einer besonderen Begründung. Eine solche Begründung wurde zuerst von B. SCARPELLINI 1970 durch ein topologisches Modell für die Bar-Rekursion höherer Typen gegeben. HORST LUCKHARDT hat dann 1973 in den *Springer Lecture Notes 306* in ausführlicher Systematik eine Begründung der GÖDELschen Funktional-Interpretation und der Bar-Rekursion höherer Typen entwickelt, die im Zusammenhang mit der Arbeit von SPECTOR zwar keine Begründung der Analysis im Sinne des erweiterten HILBERTschen Programms liefert, aber als eine Begründung der klassischen Analysis im Sinne der intuitionistischen Mathematik angesehen werden kann.

6 Die Mengenlehre

Nachdem RICHARD DEDEKIND (1831–1916) in seiner Schrift „*Was sind und was sollen die Zahlen?*" 1888 die Theorie der reellen Zahlen schon in mengentheoretischer Weise begründet hatte, wurde die allgemeine Mengenlehre bereits vor der Jahrhundertwende von GEORG CANTOR (1845–1918) geschaffen. CANTOR setzte sowohl den Begriff der Kardinalzahl als auch den der Ordinalzahl ins Transfinite fort, wobei die Ordinalzahlen, die im Finiten den Kardinalzahlen entsprechen, eine viel feinere Zahlenstruktur als die Kardinalzahlen liefern. Hiermit wird die vollständige Induktion der Arithmetik zu dem viel stärkeren Beweisverfahren einer transfiniten Induktion erweitert. Die allgemeine Anwendbarkeit der transfiniten Induktion folgt aus dem Wohlordnungssatz, den ERNST ZERMELO 1904 bewies. Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem *Auswahlaxiom*, dessen Annahme zwar recht naheliegend ist, das aber zu so starken völlig unkonstruktiven Ergebnissen führt, daß seine Gültigkeit nicht unproblematisch zu sein scheint. Nach dem Wohlordnungssatz läßt sich ja unter anderen auch die Menge der reellen Zahlen wohlordnen, während man sich überhaupt nicht vorzustellen vermag, wie eine solche Wohlordnung hergestellt werden kann. Das Auswahlaxiom hat daher gewisse Kritik hervorgerufen, wird aber im allgemeinen der mathematischen Forschung zugrunde gelegt. So ist zum Beispiel das *Zornsche Lemma*, das nur mit dem Auswahlaxiom beweisbar ist, ein fundamentales Beweismittel der Algebra geworden.

Es wurde sehr bald erkannt, daß der zunächst äußerst allgemein aufgefaßte Mengenbegriff einer gewissen Einschränkung bedarf, da zum Beispiel der Begriff der Menge aller Mengen, ja schon der Begriff der Menge aller Kardinalzahlen oder der Menge aller Ordinalzahlen zu Widersprüchen führt. Man ist deshalb dazu übergegangen, beliebige Gesamtheiten nicht als Mengen, sondern als Klassen zu bezeichnen, wobei die Mengen spezielle Klassen sind und nicht jede Klasse eine Menge ist.

Daraufhin wurden Axiomatisierungen der Mengenlehre hauptsächlich von E. ZERMELO 1908, A. FRAENKEL 1925–28 und J. V. NEUMANN 1925 entwickelt.

Um die Ordinalzahlen, die sich als Äquivalenzklassen wohlgeordneter Mengen ergeben, in einem axiomatischen System der Mengenlehre nicht als echte Klassen, sondern als Mengen zu erhalten, hat man jede Ordinalzahl durch ein spezielles Element ihrer Äquivalenzklasse zu repräsentieren. Dies geschieht nach J. V. NEUMANN am einfachsten dadurch, daß man die Ordinalzahlen durch diejenigen Mengen repräsentiert, die bezüglich der $\in$-Relation wohlgeordnet sind. Die Ordinalzahlen erscheinen dann als die Mengen ihrer Vorgänger, also die Ordinalzahl 0 als die leere Menge, die Ordinalzahl 1 als die Menge, deren einziges Element die leere Menge ist, usw. Diese Charakterisierung der Ordinalzahlen als die Mengen ihrer Vorgänger ist allerdings nur für den allgemeinen Ordinalzahlenbegriff im Rahmen eines axiomatischen Systems der Mengenlehre sinnvoll. Man kann ja gewisse Ordinalzahlenabschnitte auch durch rekursiv definierte Wohlordnungsrelationen auf der Menge der natürlichen Zahlen repräsentieren. Für die in dieser Weise bezeichneten Ordinalzahlen kann natürlich keine Rede davon sein, daß sie die Mengen ihrer Vorgänger sind.

Ausführliche systematische Untersuchungen einer im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe axiomatisierten Mengenlehre wurden zuerst hauptsächlich von PAUL BERNAYS durchgeführt und im *Journal of Symbolic Logic* (1937–38 publiziert, später auch in dem gemeinsam mit A. FRAENKEL herausgegebenen Buch „*Axiomatic Set Theory*" (1958).

Einen bedeutenden Fortschritt in der axiomatischen Mengenlehre hat KURT GÖDEL mit einem relativen Widerspruchsfreiheitsbeweis für das Auswahlaxiom

KURT GÖDEL
geb.: 28. 04. 1906 in Brünn
gest.: 14. 01. 1978 in Princeton, USA

und die *verallgemeinerte Kontinuumhypothese* erzielt. Diese Hypothese besagt, daß die Kardinalität der Potenzmenge einer jeden unendlichen Menge genau um 1 größer ist als die Kardinalität der betrachteten Ausgangsmenge. GÖDEL hat nach dem Erscheinen seiner berühmten Habilitationsschrift noch in Wien eine Vorlesung über seinen relativen Widerspruchsfreiheitsbeweis gehalten, der dann 1938 in Princeton publiziert wurde.

GÖDEL bewies, daß aus der Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems der Prädikatenlogik ersten Stufe, das die üblichen Axiome der Mengenlehre, aber weder das Auswahlaxiom noch die Kontinuumhypothese enthält, die Widerspruchsfreiheit eines entsprechenden formalen Systems mit Auswahlaxiom und verallgemeinerter Kontinuumhypothese folgt. Er hat seinen Beweis der Anschaulichkeit halber modelltheoretisch formuliert, indem er von einem Modell des gegebenen formalen Systems ausging und hieraus durch Einschränkung der Mengen auf sogenannte konstruktible Mengen ein Modell bildete, in dem außer den vorgegebenen mengentheoretischen Axiomen auch das Auswahlaxiom und die verallgemeinerte Kontinuumhypothese gilt. Der Beweis ist aber im Grunde von rein syntaktischer Natur, da hier allein aus der Widerspruchsfreiheit des gegebenen formalen Systems in konstruktiver Weise auf die Widerspruchsfreiheit des Systems der konstruktiblen Mengen geschlossen wird.

Die nächste Frage war nun, ob das Auswahlaxiom und die Kontinuumhypothese abhängig oder unabhängig von den übrigen Axiomen der Mengenlehre sind. GÖDEL hat, wie aus seinen späteren Äußerungen hervorgeht, auch in dieser Hinsicht Untersuchungen unternommen und ist wahrscheinlich der Lösung dieser Frage bereits sehr nahe gekommen, hat aber hierüber nichts veröffentlicht.

Es war dann PAUL COHEN, der 1963 als erster die *Unabhängigkeit des Auswahlaxioms und der Kontinuumhypothese* bewies. Seine Beweise verwenden eine neue Erzwingungsmethode, mit der in einer gewissen syntaktischen Weise Modelle mit den erwünschten Eigenschaften konstruiert werden. Bald darauf wurde von D. SCOTT und R. SOLOVAY eine weitere Methode für Unabhängigkeitsbeweise eingeführt, bei der den Formeln anstelle von Wahrheitswerten Werte in einer Booleschen Algebra zugeordnet werden. Diese Methode ist rein modelltheoretischer Natur und setzt die Existenz eines sehr starken Universums voraus.

Hiermit setzte eine intensive mengentheoretische Forschung ein, die eine Fülle neuer Unabhängigkeitsbeweise erbrachte und auch die Konsequenzen von stärkeren mengentheoretischen Axiomen untersucht.

RONALD JENSEN, der in Bonn bei HASENJAEGER studiert hatte, hat sehr viel zur frühen Verbreitung der Erzwingungsmethode in Deutschland beigetragen. Der Höhepunkt seiner frühen Arbeit auf diesem Gebiet war die Konstruktion eines Modells der Mengenlehre, in dem die Souslinhypothese und die allgemeine Kontinuumshypothese gelten. Die *Souslinhypothese* besagt, daß jede nichtleere vollständig und dicht geordnete Menge ohne erstes und letztes Element, in der jede disjunkte Menge von offenen Intervallen höchstens abzählbar ist, isomorph zu den reellen Zahlen ist.

Diese Hypothese war auch ein Ausgangspunkt für die erste Hauptrichtung der Forschung von JENSEN, nämlich der Untersuchung des konstruktiblen Universums L. JENSEN zeigte 1968, daß in L die Souslinhypothese falsch ist. Die Beweisanalyse führte zu dem kombinatorischen Prinzip $\diamond$, einer Verstärkung der Kontinuumshypothese, das inzwischen mannigfaltige Anwendungen in der allgemeinen Topologie, Algebra und kombinatorischen Mengenlehre gefunden hat. In gewisser Weise benötigt der Beweis von $\diamond$ in L nur „grobe" Eigenschaften dieses Universums, die im wesentlichen schon GÖDEL bekannt waren.

Schon in seiner Habilitationsschrift aus dem Jahre 1967 begann JENSEN jedoch eine neue detaillierte Untersuchung des konstruktiblen Universums. Hier wird genau die „kleinste" Stelle in dem hierarchischen Aufbau von L untersucht, wo sich bestimmte Dinge ereignen. Dies wird heute als Feinstrukturtheorie von L bezeichnet. Mit ihrer Hilfe hat JENSEN eine fast vollständige Analyse der kombinatorischen Struktur von L durchgeführt. Die dabei destillierten Prinzipien, z. B. $\square$ und Moräste, fanden wie $\diamond$ vielfältige Anwendungen.

Im Jahre 1974 kehrte JENSEN nach längerer Abwesenheit aus Deutschland für einige Jahre nach Bonn zurück. Gleich am Anfang dieser Periode bewies er zwei tiefe und überraschende Stuktursätze. Aus seiner Beschäftigung mit dem singulären Kardinalzahlproblem entwickelte er den *Überdeckungssatz für L*. Grob gesprochen besagt dieser Satz, daß jedes innere Modell nahe bei L liegt oder sehr viel größer als L ist. Sein *Kodierungssatz* besagt, daß jedes abzählbare transitive Modell der Mengenlehre eine klassengenerische Erweiterung besitzt, in der alle Mengen aus einer festen reellen Zahl konstruktibel sind.

Der Überdeckungssatz für L führte zu einer neuen Entwicklung in der Theorie der inneren Modelle. Zusammen mit TONY DODD führte JENSEN das *Kernmodell K* ein, welches die Lücke zwischen L und den von KUNEN untersuchten natürlichen inneren Modellen für meßbare Kardinalzahlen füllte. Dies führte zu weiteren wichtigen Überdeckungssätzen. Außerdem zeigte sich, daß die Feinstrukturtheorie grundlegend für die Untersuchung des „vollen" Universums V ist.

In gewisser Weise ist das Kernmodell K eine natürliche Erweiterung von L, das heißt die Elemente von K sind fast konstruktibel. In den letzten Jahren hat sich JENSEN neben anderen sehr bemüht, noch bessere „konstruktible" Approximationen an das Universum V zu entwickeln. Dieser grundlegende Zweig der mengentheoretischen Forschung ist noch nicht am Ziel angelangt und überschneidet sich mit der Suche nach natürlichen inneren Modellen für große Kardinalzahlen. Schon jetzt ist aber deutlich, daß eine verallgemeinerte Feinstrukturtheorie grundlegend für diese Untersuchungen ist.

In Deutschland haben außerdem noch H.-D. DONDER und B. KOPPELBERG wertvolle Beiträge zur Mengenlehre geliefert.

7 Die Rekursionstheorie

Das wohl einfachste Rekursionsschema ist das der primitiven Rekursion: es definiert eine zahlentheoretische Funktion f aus gegebenen Funktionen g und h durch die Gleichungen

$$f(0, x_2, \ldots, x_n) = g(x_2, \ldots, x_n),$$

$$f(k+1, x_2, \ldots, x_n) = h(k, f(k, x_2, \ldots, x_m), x_2, \ldots, x_n).$$

Dieses zunächst recht speziell aussehende Definitionsschema ist erstaunlich stark. Besonders SKOLEM hat gezeigt, daß die darauf aufgebaute sogenannte primitiv rekursive Zahlentheorie zur Formalisierung der elementaren Zahlentheorie völlig ausreicht. HILBERT hat dann die Frage gestellt, ob es überhaupt berechenbare zahlentheoretische Funktionen gibt, die nicht mehr primitiv rekursiv sind. Dieses Problem wurde 1928 von ACKERMANN gelöst: Definiert man

$$f_1(x, y) = x + y, \quad f_2(x, y) = xy, \quad f_3(x, y) = x^y$$

und allgemein $f_n(x, y)$ durch die entsprechende Fortsetzung, so ist die durch $g(n, x, y) := f_n(x, y)$ definierte Funktion offenbar berechenbar, aber aus Wachstumsgründen nicht mehr primitiv rekursiv.

Die Ausgangsfrage der Rekursionstheorie im eigentlichen Sinne ist die nach dem allgemeinen Begriff eines Algorithmus, also eines Berechnungsverfahrens, bei dem die Argumente (Eingabedaten) und die Werte (Ausgabedaten) konkrete Objekte (etwa Zeichenreihen) sind. Schon immer hat man sich in der Mathematik darum bemüht, Algorithmen zur Lösung von Problemen anzugeben. Ein frühes Beispiel ist etwa der Euklidische Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen.

Es hat jedoch in der Mathematik auch immer Fragestellungen gegeben, die sich einer algorithmischen Lösung widersetzt haben. Ein Beispiel ist das zehnte Problem aus der berühmten Liste, die HILBERT in seinem 1900 gehaltenen Vortrag vor dem Internationalen Mathematikerkongreß in Paris angegeben hat.

> Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlenkoeffizienten sei vorgelegt. *Man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in den ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.*

Hier haben viele erfolglose Lösungsversuche schließlich zu der Vermutung geführt, daß es überhaupt keinen Algorithmus gibt, der über die Lösbarkeit einer vorgelegten diophantischen Gleichung entscheidet; wir werden weiter unten darauf zurückkommen. Damit wird jedoch die Fragestellung auf eine andere Ebene gehoben. Es geht jetzt nicht mehr darum, einen konkreten Algorithmus anzugeben, sondern man muß sich über die allgemeine Natur von Algorithmen soweit klar werden, daß man einen Beweis für die Nichtexistenz eines Algorithmus der verlangten Art führen kann.

Ein erster Schritt in diese Richtung wurde von HERBRAND getan. In einem Brief vom 7. April 1931 an GÖDEL möchte HERBRAND eine Axiomatisierung der Arithmetik genau angeben. Er schreibt

> ... Außerdem haben wir in der Arithmetik andere Funktionen, zum Beispiel durch Rekursion definierte Funktionen, die ich mit folgenden Axiomen definieren werde. Nehmen wir an, daß wir alle die Funktionen $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{p_n})$ einer gewissen endlichen oder unendlichen Menge F definieren wollen. Jedes $f_n(x_1, \ldots)$ wird gewisse Definitionsaxiome haben. ... Diese Axiome werden folgenden Bedingungen genügen.
>
> 1. Die Definitionsaxiome von f_n enthalten, außer dem f_n, nur Funktionen von kleinerem Index.
> 2. Diese Axiome enthalten nur freie Variable und Konstanten.
> 3. Man muß mit intuitionistischen Beweisen zeigen können, daß es möglich ist, den Wert der Funktionen für jedes bestimmte Wertsystem ihrer Argumente mit diesen Axiomen eindeutig zu berechnen.
>
> Zum Beispiel haben wir folgende Beispiele:
>
> a) Die Funktionen $x + y$ und $x \cdot y$, die die Menge E_1 machen, die mit folgenden Axiomen definiert sind:
>
> $$x + 0 = x \quad x + (y + 1) = (x + y) + 1$$
> $$x \cdot 0 = 0 \quad x(y + 1) = xy + x$$

HERBRAND gibt dann unter b) die Axiome der primitiven Rekursion an und erklärt unter c), daß nach seinem allgemeinen Schema noch viele andere Funktionen definiert sein können, wobei er als Beispiel die Ackermannsche Funktion erwähnt.

Es handelt sich hier um den ersten schriftlich vorliegenden Versuch, den Begriff der rekursiven, also durch einen Algorithmus gegebenen Funktion zu definieren.

GÖDEL hat 1934 in einer Vorlesung in Princeton als „suggested by Herbrand" die folgende Definition einer rekursiven Funktion angegeben:

> If ϕ denotes an unknown function, and $\psi_1, \ldots, \psi_k$ are known functions, and if the ψ's and ϕ are substituted in one another in the most general fashions and certain pairs of the resulting equations are equated, then, if the resulting set of functional equations has one and only one solution for ϕ, ϕ is a recursive function.

GÖDEL hat diesen Definitionsversuch HERBRAND irrtümlich zugeschrieben. Denn aus dem oben auszugsweise zitierten Brief HERBRANDS an GÖDEL und aus GÖDELS Antwort vom 25. Juli 1931 (die HERBRAND, der am 27. Juli 1931 in den

Alpen tödlich verunglückt ist, nicht mehr erreicht hat) geht hervor, daß dieser Briefwechsel die einzige Kontaktaufnahme zwischen beiden war. Ferner ergibt sich aus einem Briefwechsel von GÖDEL mit J. VAN HEIJENOORT, daß GÖDEL 1934 bei der Vorbereitung der Vorlesungen in Princeton der Brief HERBRANDS nicht mehr vorlag und er sich auf sein Gedächtnis verlassen mußte.

KALMAR hat 1956 gezeigt, daß diese Definition nicht den intendierten Begriff trifft: Er hat eine algorithmisch nicht berechenbare Funktion angegeben, die sich als eindeutige Lösung eines Gleichungssystems darstellen läßt. Später haben GRZEGORCZYK, MOSTOWSKI und RYLL-NARDZEWSKI diejenigen Funktionen charakterisiert, die als eindeutige Lösungen von Gleichungssystemen auftreten. Es sind dies genau die hyperarithmetischen Funktionen, von denen weiter unten noch die Rede sein wird.

GÖDEL selbst hat schon in der Vorlesung von 1934 eine wichtige Modifikation an diesem Definitionsversuch vorgenommen. Er verlangt, daß für jedes Argumententupel der Funktionswert durch gewisse einfache formale Regeln (im wesentlichen eine Einsetzungs- und eine Ersetzungsregel) ausrechenbar sein muß. Diese Definition ist 1936 (in leicht veränderter Form) von KLEENE zur Grundlage einer ersten Ausarbeitung der Theorie der rekursiven (und der partiell-rekursiven) Funktionen gemacht worden. KLEENE bewies dort unter wesentlicher Verwendung der 1931 von GÖDEL eingeführten Technik der Numerierung von Formeln einige inzwischen klassischen Resultate: den *Substitutionssatz* (auch S-m-n-Theorem genannt), den *Rekursionssatz*, ferner - mittels des Kleeneschen Normalformensatzes - die Übereinstimmung der rekursiven Funktionen mit den sogenannten μ-rekursiven Funktionen, die aus einfachen Ausgangsfunktionen durch Anwendung der Definitionsschemata der Einsetzung, der primitiven Rekursion und des folgenden μ-Schemas erzeugt werden: Ist eine Funktion g bereits erzeugt, und hat g die Eigenschaft, daß es zu jedem $x_1, \dots, x_n$ ein y gibt mit $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$, so darf man übergehen zu der durch $f(x_1, \dots, x_n) := \mu y(g(x_1, \dots, x_n, y) = 0 :=$ das kleinste y mit $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ definierten Funktion.

Daraufhin hat A. CHURCH 1936 die heute nach ihm benannte These aufgestellt, daß der oben diskutierte Begriff der allgemeinen rekursiven Funktion und der von ihm eingeführte äquivalente Begriff der λ-definierbaren Funktion mit dem der „effektiv berechenbaren" Funktion (in einem etwas vagen intuitiven Sinn) zusammenfällt. Diese These ist heute allgemein akzeptiert. Eine wesentliche Stützung hat sie erfahren durch die von A. TURING 1937 durchgeführte Analyse der Operationen, die ein menschlicher Rechner ausführt. (Eine ähnliche Überlegung wurde gleichzeitig und unabhängig von E. POST angestellt.) Diese Analyse führte TURING auf ein abstraktes Maschinenmodell, das heute nach ihm benannt wird. Es zeigte sich, daß auch die durch solche Turing-Maschinen berechenbaren Funktionen mit den allgemein rekursiven Funktionen zusammenfallen.

Als äquivalent mit dem Begriff der allgemeinen rekursiven Funktionen erwies sich dann auch der Begriff der kombinatorisch definierbaren Funktion, der sich im Rahmen der von H. B. CURRY 1930 in seiner Göttinger Dissertation (bei HILBERT) begründeten kombinatorischen Logik ergibt. Der λ-Kalkül von CHURCH ist äquivalent mit der viel früher von CURRY entwickelten kombinatorischen Logik. Die Formeln des λ-Kalküls sind übersichtlicher als die der kombinatorischen Logik, während die kombinatorische Logik den Vorteil hat, im Unterschied zum λ-Kalkül völlig ohne gebundene Variablen auszukommen. Besonders der λ-Kalkül, aber teilweise auch die kombinatorische Logik haben Anwendungen in der Informatik gefunden.

Auch von den 1954 eingeführten Markov-Algorithmen hat sich gezeigt, daß die hiermit definierbaren Funktionen mit den allgemeinen rekursiven Funktionen zusammenfallen.

Bereits 1931 hat schon GÖDEL mit dem Begriff der in einem formalen System S entscheidungsdefiniten Relation eine Definition formuliert, von der sich herausgestellt hat, daß sie mit dem Begriff der rekursiven Relation (d. h. einer Relation, deren charakteristische Funktion rekursiv ist) zusammenfällt. Dies hat GÖDEL selbst 1946 gemerkt, nachdem er schon vorher eine gewisse Absolutheit (d. h. Unabhängigkeit von dem zugrunde liegenden System) dieses Begriffs festgestellt hatte.

Nachdem so der Begriff des Algorithmus eine befriedigende und mathematisch präzise Klärung gefunden hatte, war erstmals die Möglichkeit eröffnet, von gewissen mathematischen Problemen zu zeigen, daß sie algorithmisch *nicht* lösbar sind. Innerhalb der Theorie der rekursiven Funktionen lassen sich solche Probleme leicht angeben: KLEENE konstruierte 1936 ein Beispiel einer primitiv rekursiven Relation R derart, daß $\{n: \forall x\, R(x, n)\}$ nicht rekursiv ist. Nun hatte GÖDEL bereits 1931 ein Verfahren angegeben, das zu jedem primitiv rekursiven R eine prädikatenlogische Formel erster Stufe liefert, deren Erfüllbarkeit mit der Richtigkeit von $\forall x\, R(x, n)$ äquivalent ist. Es folgt also, daß die Menge der erfüllbaren prädikatenlogischen Formeln erster Stufe nicht rekursiv ist, das heißt nicht algorithmisch charakterisiert werden kann. Dieses Resultat wurde explizit zuerst von CHURCH formuliert.

Später sind dann vielfältige Verschärfungen hiervon gefunden worden: für viele syntaktisch abgegrenzte Klassen $\mathscr{F}$ von Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe konnte man zeigen, daß die Frage nach der Erfüllbarkeit von Formeln $F \in \mathscr{F}$ unentscheidbar bzw. entscheidbar ist. An diesen Untersuchungen waren besonders HERBRAND, GÖDEL, HAO WANG, BÖRGER und GOLDFARB beteiligt. Als besonders nützlich für Unentscheidbarkeitsbeweise hat es sich herausgestellt, den Begriff der Rekursivität durch sogenannte Registermaschinen (anstelle von Turingmaschinen) zu charakterisieren. Eine Übersicht über den heutigen Stand der Kenntnisse auf diesem Gebiet findet man in dem 1985 erschienenen Buch „*Berechenbarkeit, Komplexität, Logik*“ von E. BÖRGER.

Auch für viele in der Mathematik aufgetretenen Fragestellungen konnte die algorithmische Unlösbarkeit nachgewiesen werden: Aufbauend im wesentlichen auf Vorarbeiten von JULIA ROBINSON, die sich auf Lösungen der Pellschen Gleichung beziehen, zeigte MATIJASEVITCH 1970 die Unentscheidbarkeit des zehnten Hilbertschen Problems. BOONE und NOVIKOV bewiesen in den fünfziger Jahren die Unentscheidbarkeit des Wortproblems der Gruppentheorie.

Der Begriff der Rekursivität läßt sich offenbar relativieren: Eine Menge A natürlicher Zahlen heißt rekursiv in einer Menge B (Schreibweise: $A \leq_T B$), wenn es eine Turingmaschine M gibt, die die Zugehörigkeit einer vorgelegten Zahl zu der Menge A entscheidet, wobei M im Verlauf der Rechnung B als „*Orakel*" benutzen kann, das heißt beliebig oft Anfragen stellen kann, ob ein Zwischenergebnis zur Menge B gehört oder nicht. Die Äquivalenzklassen bezüglich der von $\leq_T$ erzeugten Äquivalenzrelation nennt man *rekursive Grade*; Untersuchungen über ihre Struktur sind sehr schwierig und machen ein Hauptgebiet der heutigen Rekursionstheorie aus. Von besonderem Interesse sind rekursiv aufzählbare Grade, das heißt die Grade mit rekursiv aufzählbaren Repräsentanten. Eine Menge heißt *rekursiv aufzählbar*, wenn sie sich in der Form $\{n: \exists x R(x, n)\}$ mit rekursiven R definieren läßt. POST hat 1944 das Problem formuliert, ob es überhaupt rekursiv aufzählbare Grade gibt, die von $\mathbf{0}$ (dem Grad der rekursiven Mengen) und dem maximalen rekursiv aufzählbaren Grad $\mathbf{0}'$ (dessen Existenz man sich leicht überlegen kann) verschieden sind. Diese Frage wurde 1956 unabhängig voneinander von FRIEDBERG und MUCKNIK positiv beantwortet. Beide Autoren verwendeten zum Beweis eine neuartige Methode, die sogenannte *Prioritätsmethode*, die seitdem in vielerlei Hinsicht erweitert worden ist und die heute noch diesen Teil der Rekursionstheorie charakterisiert. In Deutschland hat hierzu besonders AMBOS-SPIESS wichtige Beiträge geliefert.

Bisher war von Rekursionstheorie nur über den natürlichen Zahlen die Rede gewiesen. Schon früh hat man jedoch versucht, den Begriff der Rekursivität auch über anderen Bereichen zu studieren. Hier stellt sich sofort die Frage, welche Bereiche denn angemessen sind. Eine Antwort darauf haben KRIPKE und PLATEK gegeben: Sie konnten zeigen, daß die sogenannten zulässigen Ordinalzahlen oder etwas allgemeiner die Abschnitte L_α von GÖDELS Hierarchie der konstruktiblen Mengen mit einer zulässigen Ordinalzahl α geeignete Bereiche für Rekursionstheorien sind. Die kleinste zulässige Ordinalzahl oberhalb von ω ist ω_1^{CK} (CK steht für CHURCH und KLEENE), das heißt die kleinste Ordinalzahl, die nicht mehr durch eine rekursive Wohlordnung dargestellt werden kann. In der Rekursionstheorie über zulässigen Ordinalzahlen, der sogenannten *α-Rekursionstheorie*, ist es von großer Wichtigkeit, den Begriff der Endlichkeit geeignet zu verallgemeinern; darauf hat zuerst KREISEL hingewiesen. Im Fall der Rekursionstheorie über ω_1^{CK} haben KREISEL und SACKS den Endlichkeitsbegriff zum Begriff einer hyperarithmetischen, also Δ_1^1-Teilmenge der natürlichen Zahlen verallgemeinert. Im allgemeinen Fall der α-Rekursionstheorie für zulässiges α ist der passende Endlichkeitsbegriff der eines α-rekursiven Bildes einer Ordinalzahl $< \alpha$.

Später haben insbesondere S. FRIEDMAN und SACKS versucht, Rekursionstheorie auch auf L_β mit beliebigen Limeszahlen β zu verallgemeinern. In dieser sogenannten *β-Rekursionstheorie* lassen sich die Begriffe der β-rekursiv aufzählbaren Menge und der β-rekursiven Funktion in natürlicher Weise definieren. Weniger naheliegend war die folgende Definition eines angemessenen Endlichkeitsbegriffs, die von W. MAASS gefunden wurde: eine Teilmenge von L_β heißt invariant endlich, wenn sie ein Element der kleinsten rekursiv invarianten Klasse von β-rekursiven beschränkten Teilmengen von L_β ist.

Schließlich ist noch über eine Verallgemeinerung der Rekursionstheorie zu berichten, in der die betrachteten Objekte nicht mehr nur Funktionen über den natürlichen Zahlen sind, sondern Funktionale oder von noch höherem Typ. In einer viel beachteten Arbeit „*Über eine noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunkts*" von 1958 hat GÖDEL die eingangs betrachteten primitiv rekursiven Funktionen auf höhere Typen erweitert. Die zugehörige Theorie T hat dann die volle Stärke der Arithmetik.

Die volle Rekursionstheorie hat KLEENE auf höhere Typen erweitert. Er hat dabei grundlegende Zusammenhänge mit der Theorie der hyperarithmetischen Mengen aufgedeckt: eine Menge natürlicher Zahlen ist hyperarithmetisch genau dann, wenn sie rekursiv ist in dem Typ-2-Objekt E, das 0 oder 1 ist je nachdem ob sein Funktionsargument eine Nullstelle besitzt oder nicht. KLEENES Rekursionstheorie höherer Typen hat als Grundannahme, daß alle betrachteten Objekte total, das heißt überall definiert sein müssen. Das führt dazu, daß man unendliche Rechnungen zulassen muß. Denn wenn ein Typ-2-Objekt wie etwa das obige E als Argument in einer Rechnung auftritt, dann kann dieses Argument ja nur so benutzt werden, daß man es anwendet auf eine (nach KLEENES Grundannahme totale) Funktion, das heißt auf ein unendliches Objekt, das vorher durch die Rechnung bereitgestellt werden muß. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß die weitere Entwicklung dieser Art von Rekursionstheorie auf Fragestellungen führt, bei denen die Antwort von den zugrunde gelegten mengentheoretischen Axiomen (wie etwa $V = L$) abhängt. Genaueres hierüber findet man etwa in dem 1978 erschienen Buch „*Recursion-Theoretic Hierarchies*" von P. HINMAN.

Eine Rekursionstheorie höherer Typen, in der alle Rechnungen endlich sind und die deshalb von vornherein partiell definierte und stetige Objekte zugrunde legt, ist (nach Vorarbeiten von PLATEK) von D. SCOTT und YU. ERSOV entwickelt worden. Die Grundidee ist hier, die unendlichen Objekte als Limiten (genauer: Ideale) endlicher Approximationen darzustellen. Ein Funktional heißt dann rekursiv, wenn das Ideal seiner endlichen Approximationen rekursiv aufzählbar ist. Diese sogenannte *Bereichstheorie* (domain theory) ist in der Informatik von grundlegender Bedeutung, insbesondere für die Semantik von Programmsprachen.

8 Die Modelltheorie

Neben der Beweistheorie entwickelte sich seit Beginn der zwanziger Jahre die *Modelltheorie.* In ihr steht nicht die Frage nach der Widerspruchsfreiheit eines (formalen) Axiomensystems für die Mathematik oder Teilgebiete davon im Vordergrund - diese wird, im Gegenteil, als gegeben angenommen - sondern die Untersuchung der Modelle eines solchen Axiomensystems. Ihre Wurzeln hat die Modelltheorie einerseits in der schon in Abschnitt 1 erwähnten Arbeit von LÖWENHEIM (1915) und in einer Arbeit von SKOLEM aus dem Jahr 1934, andererseits in GÖDELS Dissertation (1930). In der Arbeit von SKOLEM wird mit einer Konstruktion, die im wesentlichen die Ultraproduktkonstruktion darstellt, unter anderem gezeigt, daß es kein (formales) Axiomensystem geben kann, das die natürlichen Zahlen bis auf Isomorphie charakterisiert. Diese Methode der Konstruktion von sogenannten Nichtstandard-Modellen eines Axiomensystems stand Pate bei der Entwicklung der Nichtstandard-Analysis durch ABRAHAM ROBINSON in den sechziger Jahren. In seiner Arbeit von 1930 zeigte GÖDEL, daß die auf FREGE, WHITEHEAD, RUSSELL und HILBERT zurückgehende Formalisierung der Mathematik alle mathematischen Schlußweisen vollständig erfaßt, daß also eine Unbeweisbarkeit notwendig in einem „Gegenbeispiel" begründet sein muß. Die Konstruktion dieses Gegenbeispiels stellt eine andere grundlegende Methode der heutigen Modelltheorie dar.

Die beiden eben angesprochenen Methoden wurden in den dreißer Jahren von A. TARSKI durch weitere ergänzt und systematisiert. TARSKI begann auch das Studium konkreter algebraischer Theorie unter modelltheoretischen Gesichtspunkten. Seine Untersuchungen erbrachten die Entscheidbarkeit einiger wesentlicher Teiltheorien der Mathematik, so zum Beispiel der Theorie der komplexen Zahlen, der Theorie der reellen Zahlen und der Theorie der euklidischen Ebene. TARSKIS geometrische Untersuchungen wurden in den sechziger Jahren in Deutschland von W. SCHWABHÄUSER fortgeführt. Er zeigte unter anderem die Entscheidbarkeit der ebenen hyperbolischen Geometrie.

In den sechziger Jahren erhielt die Modelltheorie wesentliche Impulse einerseits durch den tiefliegenden Satz von MORLEY, andererseits durch die aufsehenerregende Anwendung modelltheoretischer Methoden durch J. AX und S. KOCHEN in dem Problemkreis diophantischer Gleichungen.

Mit den Arbeiten von AX und KOCHEN eröffnete sich der Modelltheorie ein weites Feld der Anwendung - Fragen der Entscheidbarkeit und Axiomatisierbarkeit in der Algebra, speziell der Körpertheorie, bis hin zur Behandlung rein algebraischer Fragestellungen. In Deutschland lieferten insbesondere A. PRESTEL, V. WEISSPFENNING und M. ZIEGLER hierzu zahlreiche Beiträge.

Der Satz von Morley besagt, daß für eine Theorie je zwei Modelle gleicher, aber beliebiger überabzählbarer Mächtigkeit isomorph sind, falls dies schon für mindestens eine überabzählbare Mächtigkeit richtig ist. Der Beweis dieses Satzes brachte für die Modelltheorie wiederum neue Konstruktionsmethoden, die sich für die weitere Entwicklung als grundlegend erwiesen haben. Insbesondere wurde hierdurch die sogenannte Stabilitätstheorie und damit letztlich S. SHELAHS Klassifikationsprogramm für Teiltheorien der Mathematik inspiriert. Theorien, deren Modellklasse eine Strukturtheorie ähnlich der Theorie algebraisch abgeschlossener Körper erlaubt, gelten dabei als besonders einfach (sie sind insbesondere stabil), während Theorien von Strukturen mit einer linearen Ordnung, wie zum Beispiel der reellen Zahlen, als besonders kompliziert gelten (sie sind insbesondere instabil). Beiträge hierzu lieferten in Deutschland unter anderen U. FELGNER und J. REINEKE zur Theorie der Gruppen und Ringe und M. ZIEGLER zur Theorie der Moduln.

Wie schon oben erwähnt, entwickelte in den sechziger Jahren A. ROBINSON seine Nichtstandard-Analysis, die eine späte Rechtfertigung des Rechnens mit infinitesimalen Zahlen von LEIBNIZ brachte. In gewisser Weise stellt eine Arbeit von SCHMIEDEN und LAUGWITZ von 1958 einen Vorläufer davon dar. Mit modelltheoretischen Überlegungen (Saturiertheitsprinzip) wurde gezeigt, daß man, ohne auf Widersprüche zu stoßen, die Existenz von unendlich großen und unendlich kleinen „reellen" Zahlen annehmen kann. Dieser neue Zahlenbereich bildet wieder einen angeordneten Körper, der dieselben formalen Eigenschaften wie die üblichen reellen Zahlen hat (Transferprinzip). Das Vollständigkeitsaxiom gilt nur für die internen Mengen (Prinzip der definitorischen Abgeschlossenheit der internen Mengen). Diese drei Prinzipien der Nichtstandard-Analysis wurden auf die vielen Arten topologischer Strukturen und auf die natürlichen Zahlen angewandt. So entwickelte sich die Nichtstandard-Analysis, obwohl logischen Ursprungs, zu einem eigenständigen Teilgebiet der Mathematik. Einen besonderen Aufschwung erlebte die Nichtstandard-Analysis durch Arbeiten von LOEB, ANDERSON und KEISLER in den siebziger Jahren, in denen gezeigt wurde, daß man alle straffen Wahrscheinlichkeitsmaße als Zählmaße auffassen und deshalb stochastische Integrale (bis auf unendlich kleine Fehler) pfadweise definieren kann. In dem Buch mit dem Titel „*Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*" (Academic Press, 1986), das S. ALBEVERIO (Bochum) zusammen mit drei Norwegern geschrieben hat, findet man einen Überblick auch über Teile der in Deutschland entstandenen Anwendungen der Nichtstandard-Analysis auf den Gebieten Mathematische Logik (Wahrscheinlichkeitslogik), Funktionalanalysis, Stochastik und Mathematische Physik.

Der topologische Übertragungsprozeß, der der Nichtstandard-Analysis zugrunde liegt, initiierte die Entwicklung der sogenannten topologischen Modelltheorie, deren Entwicklung und Anwendung in Deutschland besonders FLUM, PRESTEL und ZIEGLER vorantrieben. ROBINSON hatte 1972 die Frage gestellt, welche Logik für topologische Strukturen dieselbe Rollen spielen könnte wie die Logik erster Stufe für algebraische Strukturen. Die zu betrachtenden Strukturen haben offenbar die Form $(\mathscr{M}, \tau)$, wobei τ eine Topologie auf der Trägermenge der erststufigen Struktur $\mathscr{M}$ ist. Beispiele sind etwa topologische Räume ($\mathscr{M}$ ist hier nur eine Menge), topologische Gruppen und topologische Vektorräume. Es hat mehrere Versuche gegeben, die Frage von ROBINSON angemessen zu beantworten, und zwar durch folgende formale Systeme:

1. $\mathscr{L}^{mon}$, eine Version der monadischen Logik zweiter Stufe, in der die Mengenquantoren über offene Mengen laufen.
2. $\mathscr{L}^{t}$; dies ist eine Einschränkung von $\mathscr{L}^{mon}$, in der Mengenquantoren (die also wieder über offene Mengen laufen) nur erlaubt sind im Kontext

   $$\exists X(t \in X \wedge \phi)$$

   wobei X nur negativ in ϕ vorkommt, beziehungsweise im dualen Kontext

   $$\forall X(t \in X \rightarrow \phi)$$

   mit X nur positiv in ϕ.
3. $\mathscr{L}^{I^n}$. Hier hat man die übliche Logik erster Stufe um einen n-stelligen Operator zur Bildung des Inneren erweitert.

Man kann zeigen, daß die Ausdrucksfähigkeit dieser Sprachen echt abnimmt, also $\mathscr{L}^{mon} > \mathscr{L}^{t} > \mathscr{L}^{I^n}$.

Es stellt sich die Frage, welche dieser Sprachen sich für eine topologische Modelltheorie eignet. Eine überzeugende Antwort ist im wesentlichen durch Untersuchungen von ZIEGLER gegeben worden: $\mathscr{L}^{t}$ (im Gegensatz zu $\mathscr{L}^{mon}$) erfüllt den Kompaktheitssatz (das heißt: Eine Menge von $\mathscr{L}^{t}$-Sätzen hat ein topologisches Modell genau dann wenn jede endliche Teilmenge eines besitzt) und den Satz von Löwenheim-Skolem. Es gilt sogar eine Form des Lindström-Satzes für $\mathscr{L}^{t}$, daß nämlich $\mathscr{L}^{t}$ eine maximale Logik mit diesen beiden Eigenschaften ist. Es scheint also, daß mit $\mathscr{L}^{t}$ eine Antwort auf die eingangs gestellte Frage von ROBINSON gefunden ist.

Für weitere wichtige Eigenschaften von $\mathscr{L}^{t}$ (etwa rekursive Axiomatisierbarkeit, Interpolationssatz) müssen wir auf die Literatur verweisen, etwa auf das Buch „*Topological Model Theory*“ von J. FLUM und M. ZIEGLER (*Springer Lecutre Notes 769*). Dort werden auch Anwendungen behandelt, etwa die (erbliche) Unentscheidbarkeit der Theorie der T_2-Räume und eine vollständige Axiomatisierung der Theorie des topologischen Körpers der komplexen Zahlen.

Bildnachweis

Wir danken den nachfolgenden Verlagen und Institutionen für die freundliche Genehmigung zur Reproduktion der im folgenden genannten fotografischen Abbildungen.

Seite
15 MPI für Strömungsforschung
24 Birkhäuser
25 Birkhäuser
31 Marcel Dekker
37 Teubner
86 Birkhäuser
94 MIT Press
100 Academic Press
101 Wiley
103 North-Holland
233 3. Bild v.o., Teubner
271 Springer
325 1. Bild v.o., Gauthiers-Villars
325 2. u. 3. Bild v.o., Springer
362 Becksche Verlagsbuchhandlung
363 oben, Teubner
363 unten, London Mathematical Society
433 Springer
440 de Gruyter
479 The Applied Probability Trust
492 1. u. 2. Bild v.o., Springer
493 Springer
555 1. u. 2. Bild v.o., Springer
555 4. Bild, Addison-Wesley
556 2. Bild v.o., MIT Press
556 3. Bild v.o., de Gruyter
707 1. Bild v.o., Springer
707 3. Bild v.o., North-Holland
708 2. Bild v.o., Springer
708 3. Bild v.o., Pergamon Press
724 North-Holland
783 Harvard UP
784 Springer
785 Harvard UP
786 Harvard UP
788 Teubner
790 Springer
798 Springer
799 Springer

Des weiteren gilt unser Dank dem Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, Prof. Dr. G. Fischer, Prof. Dr. K. Jacobs und weiteren zahlreichen Privatpersonen für die Beschaffung und Bereitstellung umfangreichen Bildmaterials.

Personenregister

I

J