

Dokumente zur Geschichte der Mathematik

Im Auftrag der
Deutschen Mathematiker-Vereinigung
herausgegeben von Winfried Scharlau

Band 1

Richard Dedekind

Vorlesung über Differential- und Integralrechnung

Band 2

Rudolf Lipschitz

Briefwechsel mit

Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker, Weierstraß

Band 3

Erich Hecke

Analysis und Zahlentheorie

Band 4

Karl Weierstraß

Einleitung in die Theorie
der analytischen Funktionen

Band 5

Mathematische Institute in Deutschland
1800 – 1945

Band 6

Ein Jahrhundert Mathematik

1890 – 1990

Festschrift zum Jubiläum der DMV

Dokumente zur Geschichte der Mathematik

Band 6

Ein Jahrhundert Mathematik 1890 – 1990

Festschrift zum Jubiläum der DMV

herausgegeben von

Gerd Fischer, Friedrich Hirzebruch,
Winfried Scharlau und Willi Törnig

Deutsche Mathematiker-Vereinigung

Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig / Wiesbaden

Prof. Dr. *Winfried Scharlau*
Mathematisches Institut der Universität Münster

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Verlagsgruppe Bertelsmann International.

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1990



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Satz: Zehnersche Buchdruckerei, Speyer

Reproarbeiten: Schütte & Behling, Berlin

Druck: Lengericher Handelsdruckerei, Lengerich

Buchbinderische Verarbeitung: Hunke und Schröder, Iserlohn

Printed in Germany

ISBN 3-528-06326-2



Inhaltsverzeichnis

Vorwort	XI
--------------------------	----

Fachverband – Institut – Staat

Norbert Schappacher unter Mitwirkung von Martin Kneser

Einführung	1
1 Gründung der DMV	4
2 FELIX KLEIN und die Anwendungen der Mathematik	9
3 Folgen des Nationalsozialismus für die Mathematik an den Universitäten	17
4 „Nationalismus versus Internationalismus“	50
5 Ausblicke	71
Quellen- und Literaturverzeichnis	77

Diskrete Mathematik

Martin Aigner

Einführung	83
1 Ideen zur Abzählung	85
2 Graphentheorie	91
3 Ideen zur Existenz	95
4 Ideen zur Optimierung	102
5 Ausblick	110
Anmerkungen	111
Literaturverzeichnis	111

Kurzer Abriss der Geschichte der Informatik 1890–1990

Friedrich L. Bauer

1 Informatik und Mathematik	113
2 Die Situation von 1890	115
3 Die ersten 45 Jahre: Im Banne mechanischer und elektromechanischer Geräte	118

4 Der Umbruch zwischen 1935 und 1960: Universelle Maschinen, elektronische Realisierungen	129
5 Die letzten 30 Jahre: Die Informatik formiert sich	142
6 Ausblick: Die Informatik einerseits, die Mikroelektronik andererseits be- dingen sich gegenseitig	145

Partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung

Josef Bemelmans, Stefan Hildebrandt, Wolf von Wahl

I Die Quellen der Theorie	149
II Die Grundlegung der modernen Theorie	159
III Die Ausgestaltung der modernen Theorie	187
IV Ein Beispiel für die modernen Methoden	209
Literaturverzeichnis	221

Grundlagen der Geometrie

Walter Benz

Einführung	231
1 Inzidenz	237
2 Anordnung, Kongruenz	253
3 Geometrische Strukturen	261
Literaturverzeichnis	265

Numerik

Lothar Collatz

Einführung	269
1 Zeit bis etwa 1920	270
2 Zeit von etwa 1920 bis zum Zweiten Weltkrieg	275
3 Zeit von etwa 1935 bis etwa 1945	286
4 Zeit nach dem Zweiten Weltkrieg	292
5 Einige weitere, teils neue Gebiete der Numerischen Mathematik	302
Literatur	319

Differentialgeometrie

Peter Dombrowski

Einführung	323
1 Zur Entwicklung einiger Grundbegriffe und Probleme der Differentialgeometrie	327
2 Kurven und Flächen in euklidischen Räumen	338
Anmerkungen	352
Literaturverzeichnis	356

Über die Entwicklung der Funktionentheorie in Deutschland von 1890 bis 1990

Dieter Gaier

Einführung	361
1 Zur Grundlegung der Funktionentheorie	365
2 Der Riemannsche Abbildungssatz	367
3 Normale Funktionenfamilien und Verwandtes	372
4 Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete	374
5 Die Methode der extremalen Länge	379
6 Quasikonforme Abbildungen	383
7 Im Einheitskreis schlichte Funktionen	387
8 Potenzreihen an der Konvergenzgrenze – Summierung	391
9 Werteverteilung in \mathbb{D}	397
10 Werteverteilung in \mathbb{C}	402
11 Darstellungssätze – Approximation im Komplexen	407
12 Konstruktive Gesichtspunkte	410
Zeittafel	416
Literaturverzeichnis	417
Biographische Hinweise auf die in der Zeittafel genannten deutschen Funktionentheoretiker	419

Zur Geschichte der Konvexgeometrie und der Geometrie der Zahlen

Peter Manfred Gruber

Einführung	421
1 Das Altertum	422
2 Die Neuzeit bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts	425
3 Das 19. Jahrhundert bis vor die Jahrhundertwende	428
4 Die systematische Phase um die Wende zum 20. Jahrhundert	431
5 Die weitere Entwicklung im 20. Jahrhundert	441
6 Schlußbemerkungen	452
Literaturverzeichnis	452

Wahrscheinlichkeitstheorie

Ulrich Krengel

Einführung	457
1 CZUBERS Bericht	458
2 Schritte auf dem Weg zur Axiomatik KOLMOGOROWS	459
3 Die Kontroverse um VON MISES' Axiomatik	461
4 Anstöße aus der Physik	466
5 Nichtaxiomatische Beiträge vor 1945	470

6 WOLFGANG DOEBLIN und HARRY REUTER	477
7 Der Neubeginn	479
8 Versicherungsmathematik	484
9 Stochastik auf der Schule	485
10 Lehren	487
11 Ergänzende biographische Angaben	488
Literaturverzeichnis	488

Zur Entwicklung der angewandten Analysis und mathematischen Physik in den letzten hundert Jahren

Rolf Leis

Einführung	491
1 Das Dirichletsche Prinzip	497
2 Integralgleichungen	500
3 Direkte Bestimmung des Minimums	508
4 Darstellung linearer Operatoren	514
5 Anfangsrandwertaufgaben und Streutheorie	519
6 Nichtlineare Probleme	526
Literaturverzeichnis	531

Vom Hilbertschen Basissatz bis zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen

Gerhard O. Michler

Einführung	537
1 Entstehung der abstrakten Algebra	540
2 Berliner Schule	547
3 Anwendungen der „Modernen Algebra“ in anderen Gebieten der Mathematik	557
4 Darstellungstheorie endlicher Gruppen und endlich-dimensionaler Algebren	561
5 Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen	570
Literaturverzeichnis	580

Algebraische Zahlentheorie

Jürgen Neukirch

Einleitung	587
I Das Reziprozitätsgesetz	588
II Klassenkörpertheorie	594
III Die Langlands-Vermutung	601
IV Etale Topologie der algebraischen Zahlkörper	617
Literatur	628

ERICH HECKE und die Rolle der L -Reihen in der Zahlentheorie

Samuel J. Patterson

1 Dirichletsche Reihen und Zahlentheorie	629
2 Komplexe Multiplikation elliptischer Funktionen	635
3 Linearität und Modulformen	640
4 Automorphe Formen und abelsche Varietäten	645
5 Neuere Entwicklungen	649
Literaturverzeichnis	652

Quadratische Formen

Albrecht Pfister

Einführung	657
1 1890–1920: MINKOWSKI und HILBERT	658
2 1920–1945: HASSE, SIEGEL und WITT	659
3 1945–1965: EICHLER und KNESER	663
4 1965–1990: Der Aufschwung der algebraischen Theorie	666
Literaturverzeichnis	670

Algebraische Topologie

Hans-Werner Henn und Dieter Puppe

1 Von den Anfängen bis zum Zweiten Weltkrieg	674
2 Vom Zweiten Weltkrieg bis zur Gegenwart	687
Anmerkungen	709
Literaturverzeichnis	710

Mathematische Logik

Kurt Schütte und Helmut Schwichtenberg

Einführung	717
1 Grundlegung der modernen mathematischen Logik	718
2 Der Logizismus	719
3 Die Grundlagenkrise der Mathematik	721
4 Die Hilbertsche Beweistheorie	722
5 Der Intuitionismus	727
6 Die Mengenlehre	728
7 Die Rekursionstheorie	732
8 Die Modelltheorie	738

Geschichte der analytischen Zahlentheorie seit 1890*Wolfgang Schwarz*

Einführung	741
1 Die Zeit vor 1890	742
2 Das letzte Jahrzehnt des 19. Jahrhunderts	745
3 Das Jahrzehnt 1900 bis 1910	747
4 Die Jahre 1910 bis 1930	751
5 Das Jahrzehnt 1930 bis 1940	760
6 Das Jahrzehnt 1940 bis 1950	763
7 Das Jahrzehnt 1950 bis 1960	767
8 Das Jahrzehnt 1960 bis 1970	771
9 Die Jahre ab 1971	775
Anmerkungen	778
Literaturverzeichnis	779

Mathematische Statistik*Hermann Witting*

Vorbemerkung	781
1 Anfänge der Mathematischen Statistik: F. GALTON und K. PEARSON	781
2 Die kontinentale und die englische Schule	784
3 Die Entwicklung im deutschsprachigen Raum von 1920 bis 1933	791
4 Grundlegung der Mathematischen Statistik: J. NEYMAN und A. WALD	797
5 Die Mathematische Statistik im deutschsprachigen Raum von 1933 bis ca. 1955	802
6 Das Wiederaufleben der Mathematischen Statistik nach 1955	806
7 Schlußbemerkung	810
Anmerkungen	811
Literaturverzeichnis	812

Bildnachweis	816
-------------------------------	-----

Personenregister	817
-----------------------------------	-----

Mathematische Logik

Kurt Schütte und Helmut Schwichtenberg

Einführung

Kurz vor der Gründung der DMV waren die „*Grundlagen der Arithmetik*“ (1884) von FREGE und „*Was sind und was sollen die Zahlen?*“ (1888) von DEDEKIND erschienen. Bald darauf folgten die „*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*“ (1895–97) von CANTOR. Hiermit begann eine systematische Grundlagenforschung der Mathematik und zugleich die Entwicklung der transfiniten Mengenlehre. Voraussetzung für die mathematischen Grundlagenuntersuchungen war die hauptsächlich von FREGE und von PEANO geschaffene Systematik einer exakten mathematischen Logik.

Wir skizzieren in diesem Artikel zunächst die Grundlegung der modernen mathematischen Logik und beschreiben dann die verschiedenen Richtungen (Logizismus, Beweistheorie und Intuitionismus), die in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts zur Begründung der Mathematik eingeschlagen wurden. Anschließend kehren wir zur Mengenlehre zurück, die zwar schon vor der Jahrhundertwende begründet, aber erst später in völlig formalisierter Weise mit den Methoden der mathematischen Logik behandelt wurde. Weiterhin berichten wir hauptsächlich über Ergebnisse, die von deutschen Logikern auf anderen Teilgebieten der mathematischen Logik erzielt wurden, insbesondere in der Rekursionstheorie, in der Modelltheorie, in Anwendungen auf die Algebra, in der Nichtstandard-Analysis und im Zusammenhang mit der Informatik. Dieser kurze Bericht kann natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben.

Für ihre Hilfe bei der Abfassung dieses Berichts möchten wir H.-D. Donder, H. Osswald, A. Prestel und M. Ziegler herzlich danken.

1 Die Grundlegung der modernen mathematischen Logik

Die formale Logik, die bereits ARISTOTELES in exakter Weise begründet hatte, war zwar von der Scholastik in verschiedenen Richtungen weiterentwickelt worden, wurde aber erst in der Mitte des vorigen Jahrhunderts in mathematischer Weise völlig neu geschaffen, und zwar zunächst in Analogie zur Algebra ohne jegliche Bezugnahme auf die vorhergegangenen Behandlungsweisen der Logik. Die mathematische Logik begann mit der Entwicklung einer Booleschen Algebra, die eine Formalisierung der Aussagenlogik und verwandter mathematischer Strukturen liefert, aber noch nicht die volle Ausdrucksfähigkeit der modernen mathematischen Logik besitzt.

Die weiterführenden Begriffsbildungen, die der heutigen mathematischen Logik zugrunde liegen, wurden in Deutschland hauptsächlich von GOTTLOB FREGE (1848–1925) eingeführt und in klarer Weise zur Anwendung gebracht. In seiner „*Begriffsschrift*“ (1879) hat FREGE erstmalig eine lange Reihe logischer Formeln in streng formaler Weise aus wenigen Axiomen abgeleitet. Hierbei tritt im Unterschied zu den Formalisierungen, die in Analogie zur Algebra durchgeführt wurden, die fundamentale Bedeutung der Implikation klar in Erscheinung. Die Fregeschen Axiomenschemata

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad \text{und} \quad (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

der Implikation liefern nämlich zusammen mit der Schlußregel des modus ponens ein fundamentales System der Logik, das sich durch Hinzunahme von sehr einfachen und naheliegenden Axiomen zur vollen klassischen Aussagenlogik erweitern läßt.



GOTTLOB FREGE
geb.: 08. 11. 1848 in Wismar
gest.: 26. 07. 1925 in Bad Kleinen

Die Werke von FREGE enthalten eine Fülle von damals völlig neuartigen Einsichten, insbesondere bezüglich des Unterschiedes von Variablen und Konstanten, des Begriffs der logischen Funktion und des Quantors sowie der Einfüh-

rung von Kennzeichnungstermen. Hierzu hatte FREGE eine ausdrucksvolle logische Systematik geschaffen, mit der er eine Grundlegung der gesamten Mathematik in Angriff nahm. Seine Grundlagenuntersuchungen der Mathematik gehören dem von ihm begründeten Logizismus an, den wir im nächsten Abschnitt besprechen werden.

Die von FREGE verwendete Begriffsschrift, die zwar in klarer Weise die logischen Beziehungen veranschaulicht, konnte sich jedoch nicht durchsetzen, weil sie im Unterschied zu allen üblichen Schreibweisen zweidimensional ist. Daher schloß sich die später in der mathematischen Logik verwendete Symbolik nicht an FREGE, sondern im wesentlichen an die von G. PEANO eingeführte Symbolik an.

Es ist erstaunlich, daß die bahnbrechenden Arbeiten von FREGE zunächst überhaupt nicht beachtet wurden. Der Hauptgrund war wohl, daß die von FREGE verwendete zweidimensionale Symbolik allgemein abgelehnt und häufig mißverstanden wurde. Es hat seit dem Erscheinen der Begriffsschrift zwanzig Jahre gedauert, bis man auf FREGE aufmerksam wurde, und es hat weitere zwanzig Jahre gedauert, bis die strenge Exaktheit der FREGESchen Arbeiten in der mathematischen Logik wieder erreicht wurde. Es war BERTRAND RUSSELL, der zuerst die Bedeutung FREGES erkannte und ausdrücklich erklärte, daß ihm die Ideen von FREGE sehr wertvoll seien.

Ein weiterer erfolgreicher Logiker dieser Zeit war in Deutschland LEOPOLD LÖWENHEIM (1878–1957). Er verfaßte mehrere Arbeiten über Eliminations- und Reduktionsverfahren im Rahmen der Algebra der Logik von ERNST SCHRÖDER. 1915 bewies LÖWENHEIM als erster den als *Satz von Löwenheim und Skolem* bekannten Fundamentalsatz der Logik, der besagt, daß jede Theorie in der Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe, die ein Modell hat, bereits ein abzählbares Modell hat. LÖWENHEIM bewies diesen Satz unter Bezugnahme auf eine höhere Prädikatenlogik, während TH. SKOLEM denselben Satz 1920 allein im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe bewies.

2 Der Logizismus

Die Fortschritte, die gegen Ende des vorigen Jahrhunderts in der mathematischen Logik erzielt waren, reizten dazu, nun eine Grundlegung der Mathematik mit den Methoden der mathematischen Logik zu unternehmen. Der von FREGE begründete Logizismus war der Ansicht, daß sich die gesamte Mathematik allein in der reinen Logik entwickeln läßt. Die Tatsache, daß das Unendlichkeitsaxiom in der Mathematik unentbehrlich ist, war für den Logizismus kein Einwand gegen seine These, weil der Übergang von der Denkbarkeit eines unbeschränkten Iterationsprozesses zur Denkbarkeit einer unendlichen Gesamtheit als rein logisch empfunden wurde, wie es ja auch in der Schrift „*Was sind und was sollen die Zahlen?*“ von DEDEKIND zum Ausdruck kommt.

FREGE hat in seinen Büchern „*Die Grundlagen der Arithmetik*“ (1884) und „*Grundgesetze der Arithmetik*“ (1893–1904) die Mathematik in voller Ausführlichkeit mit reiner Logik zu begründen versucht. Sein Aufbau der Mathematik ist jedoch, da er völlig typenfrei ist, den logischen Antinomien ausgesetzt, insbesondere der RUSSELLSchen Antinomie der Menge aller Mengen, die nicht sich selbst als Element enthalten. FREGE hat, nachdem dies bemerkt wurde, selbst eingesehen, daß sein Unternehmen gescheitert ist. Immerhin sind seine Untersuchungen in mancherlei Hinsicht sehr instruktiv gewesen.

Ein zweiter Versuch zur Begründung der Mathematik in der reinen Logik wurde in dem umfangreichen Werk „*Principia Mathematica*“ (1910–1913) von BERTRAND RUSSELL und ALFRED NORTH WHITEHEAD unternommen. Hier wurde, um die logischen Antinomien auszuschließen, eine verzweigte Typenlogik zugrunde gelegt. Das heißt, daß hier jedes Prädikat, in dem gewisse Quantoren auftreten, einem höheren Typ zugerechnet wird als die Typen der in ihm auftretenden Quantoren, so daß ein Objekt, das unter Bezugnahme auf eine gewisse Gesamtheit definiert ist, nicht selbst dieser Gesamtheit zugerechnet wird. Ein derartiges System ist völlig konstruktiv. Es vermeidet nicht nur die bekannten logischen Antinomien, sondern ist sogar nachweisbar widerspruchsfrei.

In dieser verzweigten Typenlogik läßt sich jedoch nicht die klassische Mathematik entwickeln. Man erhält hier anstatt des klassischen Begriffs der reellen Zahl eine Hierarchie von reellen Zahlen verschiedener Ordnungen. Daher konnte in den *Principia Mathematica* die klassische Mathematik nur durch Hinzunahme eines Reduzibilitätsaxioms gewonnen werden. Dieses Axiom besagt im wesentlichen, daß jedes Prädikat, dessen Bedeutungsbereich eine Menge von Grundobjekten ist, extensional äquivalent einem entsprechenden Prädikat kleinsten Typs ist. Hierdurch wird jedoch der konstruktive Ansatz der verzweigten Typenlogik aufgehoben, so daß nach Hinzunahme des Reduzibilitätsaxioms keine Garantie mehr für die Widerspruchsfreiheit des Systems besteht.

Daraufhin haben verschiedene Logiker, insbesondere CHWISTEK und RAMSEY bemerkt, daß es einfacher und völlig ausreichend sei, anstatt der verzweigten Typenlogik eine einfache Typenlogik, die kein Reduzibilitätsaxiom benötigt, zugrunde zu legen. In der einfachen Typenlogik wird nur zwischen Grundobjekten, Mengen von Grundobjekten, Mengen von Mengen usw. unterschieden, aber keine Typenverzweigung zwischen verschiedenen Mengen von Grundobjekten vorgenommen. Man kann zwar bisher nicht beweisen, daß eine Formalisierung der klassischen Mathematik im Rahmen der einfachen Typenlogik widerspruchsfrei ist, vermeidet aber bereits in der einfachen Typenlogik die bekannten logischen Antinomien, so daß die Benutzung der einfachen Typenlogik nicht problematischer als der in den *Principia Mathematica* eingeschlagene Weg ist.

Die vom Logizismus unternommenen Versuche, die Mathematik in der reinen Logik zu begründen, konnten jedenfalls ihr Ziel nicht erreichen, haben aber die Weiterentwicklung der mathematischen Logik wesentlich gefördert. So sind die *Principia Mathematica* für mehrere Jahrzehnte das wichtigste Lehrbuch der

mathematischen Logik geworden. Es hatte ja sonst keine so vollständige und aufschlußreiche Systematik der mathematischen Logik gegeben, wie sie in den *Principia Mathematica* zur Darstellung gekommen ist.

3 Die Grundlagenkrise der Mathematik

Die Besinnung auf die Grundlagen der Mathematik, die vom Logizismus ausgegangen war, hatte darauf aufmerksam gemacht, daß die bisherige Mathematik durchaus nicht so unproblematisch ist, wie es bis dahin im allgemeinen angenommen wurde. Schon viel früher hatten bereits KRONECKER und POINCARÉ Einwände gegen die indirekten Beweisführungen in der Mathematik erhoben. Nun war es vor allem L. E. J. BROUWER, der das den indirekten Beweisen zugrunde liegende *tertium non datur* entschieden ablehnte.

Ein zweiter Einwand richtete sich gegen die imprädikative Verwendung des Begriffs der reellen Zahl. Man erhält ja die Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen nur dadurch, daß man die obere Grenze einer beliebigen nach oben beschränkten Mengen reeller Zahlen unter Bezugnahme auf die Gesamtheit der reellen Zahlen, also in imprädikativer Weise definiert. Auf die Problematik dieses Verfahrens hat HERMANN WEYL in seinem Buch „*Das Kontinuum*“ (1918) hingewiesen mit der Erklärung, daß man die Theorie der reellen Zahlen unter Verlust der Vollständigkeitseigenschaft erheblich einschränken müsse, um ihre Exaktheit sicherzustellen.

Aufgrund dieser gegen die bisherige Mathematik erhobenen Einwände sprach man in den zwanziger und dreißiger Jahren von einer Grundlagenkrise der Mathematik, nachdem 1921 in der *Mathematischen Zeitschrift* ein Aufsatz von HERMANN WEYL erschienen war mit dem Titel „*Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik*“.

Es wurden nun zur Neubegründung der Mathematik zwei verschiedene Richtungen eingeschlagen, nämlich die des Intuitionismus von L. E. J. BROUWER und die der Beweistheorie von DAVID HILBERT, die damals als Formalismus bezeichnet wurde.

HILBERT hatte es jedoch stets abgelehnt, als Formalist bezeichnet zu werden, denn es kam ihm ja nicht darauf an, bedeutungslose Formalismen zu entwickeln, sondern die klassische Mathematik in streng formaler Weise als widerspruchsfrei und somit als mathematisch bedeutungsvoll sicherzustellen. Wir wollen uns, wie er sagte, nicht aus dem Paradies vertreiben lassen, das uns CANTOR beschert hat.

4. Die Hilbertsche Beweistheorie

HILBERTS Auffassung von der Mathematik, die ihm schon lange vor der sogenannten Grundlagenkrise der Mathematik völlig klar war, kommt in einem Brief, den er 1899 an GOTTLÖB FREGE schrieb, deutlich zum Ausdruck. In diesem Brief heißt es:

Sie schreiben: Aus der Tatsache der Axiome folgt, daß sie einander nicht widersprechen. Es hat mich sehr interessiert, gerade diesen Satz bei Ihnen zu lesen, da ich nämlich, solange ich über solche Dinge denke, schreibe und vortrage, immer gerade umgekehrt sage: Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht widersprechen, mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definierten Dinge.

Man könnte für diese Auffassung von HILBERT den Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik anführen, der allerdings damals noch nicht vorlag. Nach diesem Satz hat ja jede Theorie im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe, wenn sie widerspruchsfrei ist, ein Modell, so daß die Objekte, die durch die Axiome der betreffenden Theorie definiert sind, tatsächlich existieren.

Es war nun das Ziel der Hilbertschen Beweistheorie, die einzelnen Teile der klassischen Mathematik in vollformalisierter Gestalt als widerspruchsfrei nachzuweisen. Hierzu hat man nicht nur die Objekte, sondern auch die Aussagemöglichkeiten, Axiome und Schlußregeln der mathematischen Theorie formal zu fixieren, um in einer metamathematischen Untersuchung ihre Widerspruchsfreiheit nachweisen zu können. Die Metamathematik oder Beweistheorie, deren Untersuchungsobjekt die als widerspruchsfrei nachzuweisende formalisierte mathematische Theorie ist, sollte sich nach dem ursprünglichen Plan von HILBERT auf eine sehr elementare Untersuchungsmethode beschränken, die HILBERT als *finis* bezeichnete, nämlich auf die kombinatorische Behandlung von zwar beliebig umfangreichen, aber stets als endlich anzusehenden Zeichenfiguren.

In der Hilbertschen Metamathematik wird nicht wie im Logizismus der Versuch unternommen, die natürlichen Zahlen in der reinen Logik zu entwickeln, weil dies viel zu aufwendig und durchaus nicht elementar wäre. Es wird vielmehr ein sehr elementarer Teil der Arithmetik bereits der Metamathematik zugrunde gelegt. Man kann ja die nichtnegativen ganzen Zahlen in einer sehr einfachen Weise durch sogenannte Ziffern repräsentieren, nämlich nach folgender induktiven Definition:

(z1) Das Symbol 0 ist eine Ziffer.

(z2) Ist z eine Ziffer, so ist auch z' (der Nachfolger von z) eine Ziffer.

Bei derartigen induktiven Definitionen ist es vielfach üblich eine weitere Definitionsregel hinzuzufügen, die besagt, daß die Menge der Ziffern die kleinste Menge mit den Eigenschaften (z1) und (z2) ist. Die Hinzunahme einer solchen Regel wäre hier nicht nur überflüssig, sondern sogar irreführend, da sie auf den allge-

meinen Mengenbegriff Bezug nimmt, von dem in der Metamathematik überhaupt keine Rede ist. Ziffern sind nach ihrer induktiven Definition genau diejenigen Zeichen oder Zeichenreihen, die sich durch Anwendungen der Regeln (z1) und (z2) ergeben, wobei in jedem Fall natürlich nur endlich viele Anwendungen dieser Regeln in Betracht kommen. Für diese Ziffern gilt definitionsgemäß das Prinzip der vollständigen Induktion. Man braucht hierfür in der Metamathematik kein Axiom. Erst bei der Formalisierung eines weniger elementaren Teils der Mathematik wird ein Axiom oder Axiomenschema der vollständigen Induktion benötigt.

Die ersten Widerspruchsfreiheitsbeweise für Teile der Mathematik wurden nach einer Idee von HILBERT in den Jahren 1924–25 von WILHELM ACKERMANN durchgeführt, und zwar für quantorenfreie Formalisierungen von mathematischen Theorien, die anstelle der Axiome und Schlußregeln für Quantoren nur das Axiomenschema $A(t) \rightarrow A(\varepsilon_x A(x))$ für beliebige Terme t haben.

Hierbei bezeichnet $\varepsilon_x A(x)$ ein Objekt mit der Eigenschaft A , falls es ein solches gibt, andernfalls ein beliebiges Objekt. Eine derartig formalisierte Theorie erweist sich als widerspruchsfrei, wenn sich in jeder formalen Herleitung einer numerischen Formel alle ε -Terme unter Erhaltung des Herleitungszusammenhanges eliminieren lassen, weil in einer Herleitung, die keine ε -Terme enthält, keine falschen numerischen Formeln auftreten können.

ACKERMANN gelang es, ein allgemeines Verfahren zur Elimination der ε -Terme zu entwickeln. Hiermit konnte man jedoch nicht einmal die reine Zahlentheorie als widerspruchsfrei nachweisen, da man hierfür nicht beweisen konnte, daß das Ackermansche Eliminationsverfahren stets nach endlich vielen Schritten abbricht. Ein solcher Beweis war, wie sich nach einigen Jahren herausstellte, allerdings in finiter Weise überhaupt nicht möglich.

Nachdem in Wien KURT GÖDEL 1930 in seiner Dissertation erstmalig den Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik bewiesen hatte, bewies er 1931 in seiner Habilitationsschrift „*Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*“ zwei Sätze von sensationeller Bedeutung. Der erste Satz besagt, daß jedes hinreichend starke formale System grundsätzlich unvollständig ist, das heißt, Sätze zu formulieren gestattet, die in dem System weder beweisbar noch widerlegbar sind, sofern das System nicht widerspruchsvoll ist. Der zweite Satz besagt, daß die Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems, das die rekursive Zahlentheorie und gewisse natürliche Ableitungsregeln enthält, nicht mit den Mitteln dieses Systems beweisbar ist. Aus diesem zweiten Unvollständigkeitssatz folgt insbesondere, daß die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie nicht in finiter Weise beweisbar ist, weil die finiten Methoden in der reinen Zahlentheorie enthalten sind.

Weder GÖDEL noch HILBERT haben diese neuen Erkenntnisse als eine Widerlegung des HILBERTschen Programms aufgefaßt. Beide haben hieraus nur die Konsequenz gezogen, daß der von HILBERT ursprünglich eingenommene streng finite Standpunkt zu einem allgemeineren konstruktiven Standpunkt erweitert

werden müsse, um die Widerspruchsfreiheit von mathematisch bedeutungsvollen Theorien beweisen zu können.

So hat HILBERT bald nach dem Erscheinen der Gödelschen Unvollständigkeitssätze in einem Göttinger Kolloquiumsvortrag vorgeschlagen, die formalisierte vollständige Induktion, deren beweistheoretische Behandlung besonders schwierig ist, durch die konstruktive Anwendung einer Schlußregel mit unendlich vielen Prämissen zu ersetzen. Diese von HILBERT als *unendliche Induktion* bezeichnete Schlußregel besagt, daß auf die Allformel $(x)A(x)$ geschlossen werden darf, wenn in konstruktiver Weise $A(z)$ für jede Ziffer z hergeleitet werden kann. Diese Idee von HILBERT wurde zunächst nicht beachtet, sondern erst nach fast zwanzig Jahren aufgegriffen und ist heute für beweistheoretische Untersuchungen unentbehrlich geworden.

In Göttingen hat dann GERHARD GENTZEN zunächst in seiner Dissertation „*Untersuchungen über das logische Schließen*“ (1934–35) mit seinem System des natürlichen Schließens und mit seinem Sequenzenkalkül eine sehr durchsichtige neue Systematik der Prädikatenlogik entwickelt, die sich als äußerst fruchtbar erwiesen hat und zum Allgemeingut aller Logiker geworden ist. Anschließend gelang es ihm 1936, die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie zu beweisen, und zwar mittels transfiniten Induktion bis zur kleinsten ε -Zahl ε_0 . Diese transfinite Induktion überschreitet zwar den finiten Standpunkt, wie es nach GÖDEL erforderlich ist, verläuft aber in einer völlig konstruktiven Weise, so daß der Beweis von GENTZEN als ein Evidenznachweis für die reine Zahlentheorie im Sinne des erweiterten HILBERTSchen Programms anzusehen ist.



GERHARD GENTZEN

geb.: 24. 11. 1909 in Greifswald (Pommern)

gest.: 04. 08. 1945 in Prag

Durch transfinite Induktion bis ε_0 konnte nun auch WILHELM ACKERMANN 1940 beweisen, daß sein Verfahren zur Elimination der ε -Terme im formalen System der reinen Zahlentheorie stets nach endlich vielen Schritten zum Abschluß kommt, womit sich ein weiterer Widerspruchsfreiheitsbeweis für die reine Zahlentheorie ergab.

Durch die Untersuchungen von GENTZEN wurde erstmals erkannt, daß sich die Beweisstärke eines formalen Systems durch eine Ordinalzahl kennzeichnen

läßt. Man bezeichnet heute als die beweistheoretische Ordinalzahl eines formalen Systems der Mathematik die kleinste Ordinalzahl α mit der Eigenschaft, daß sich keine rekursive Wohlordnung vom Ordnungstyp α in dem betreffenden formalen System als wohlgeordnet beweisen läßt. Wie GENTZEN 1943 in seiner Habilitationsschrift bewies, ist ε_0 die beweistheoretische Ordinalzahl der reinen Zahlentheorie.

GERHARD GENTZEN war zuletzt Dozent an der Universität Prag und ist am Ende des Krieges in tschechischer Gefangenschaft umgekommen, nachdem sich sowohl amerikanische als auch russische Mathematiker vergeblich um seine Freilassung bemüht hatten.

Nach dem Kriege wurden in Anknüpfung an die Methoden von GENTZEN auch gewisse Teilsysteme der klassischen Analysis als widerspruchsfrei nachgewiesen, und zwar im Rahmen einer Prädikatenlogik zweiter Stufe, in der sowohl über die Grundobjekte als auch über Mengen von Grundobjekten quantifiziert wird. Die reellen Zahlen werden hier durch Mengen von Grundobjekten (natürlichen oder rationalen Zahlen) repräsentiert. Zur Mengenbildung dient das *Komprehensionsaxiom*, das bezüglich einer Formel $A(x)$ die Menge $\{x: A(x)\}$ aller Grundobjekte mit der Eigenschaft A zu bilden gestattet. Bei uneingeschränkter Verwendung dieses Komprehensionsaxioms erhält man die volle klassische Theorie der reellen Zahlen, von der nicht zu erwarten ist, daß sie sich durch einen Widerspruchsfreiheitsbeweis auf grundsätzlich einfachere Beziehungen zurückführen läßt. Durch Einschränkungen des Komprehensionsaxioms lassen sich jedoch Teilsysteme der Analysis abgrenzen, für die konstruktive Widerspruchsfreiheitsbeweise erbracht werden konnten. Auf andere Weise hat auch PAUL LORENZEN gewisse Teile der klassischen Analysis konstruktiv begründet.

Unter Verwendung der von HILBERT vorgeschlagenen unendlichen Induktion konnte auch der GENTZENsche Widerspruchsfreiheitsbeweis etwas einfacher und durchsichtiger gestaltet werden, weil sich mit Hilfe dieser Schlußregel alle Quantoren in den Herleitungen numerischer Formeln eliminieren lassen, was in dem von GENTZEN behandelten formalen System nicht allgemein möglich ist.

Durch die beweistheoretischen Untersuchungen konnte auch eine Grenze für die Prädikativität ermittelt werden. Zu Beginn der sechziger Jahre wurde nämlich von S. FEFERMAN und K. SCHÜTTE gleichzeitig und unabhängig die kleinste Ordinalzahl Γ_0 bestimmt, welche die Eigenschaft hat, daß keine Wohlordnung vom Ordnungstyp Γ_0 in prädikativer Weise als wohlgeordnet beweisbar ist. Hiermit konnte FEFERMAN den prädikativ interpretierbaren Teil der klassischen Analysis genau charakterisieren, nämlich durch Einschränkung der Komprehension auf sogenannte Δ_1^1 -Formeln, in denen die Mengenquantoren nur in einer besonders schwachen Weise auftreten.

Mit der Grenze der Prädikativität ist bereits die Grenze für die Durchführbarkeit des erweiterten HILBERTschen Programms erreicht. Man hat für jedes prädikativ interpretierbare Teilsystem der Analysis einen Widerspruchsfreiheitsbeweis durch transfiniten Induktion bis zu einer Ordinalzahl $< \Gamma_0$, der den Anforder-

rungen des erweiterten HILBERTSchen Programms genügt. Ein Teilsystem der Analysis, das nicht prädikativ interpretierbar ist, läßt sich aber nicht in prädikativer Weise und somit nicht im Sinne des erweiterten HILBERTSchen Programms als widerspruchsfrei nachweisen.

Immerhin hat sich gezeigt, daß der prädikativ interpretierbare Teil der klassischen Analysis wesentlich umfangreicher ist als der auf arithmetische Komprehension beschränkte Teil, auf den HERMANN WEYL in seinem Buch „*Das Kontinuum*“ die Analysis einzuschränken gedachte. Fast alle bisher bewiesenen fundamentalen Sätze der klassischen Analysis gehören dem prädikativ interpretierbaren Teil an.

Nachdem sich nun herausgestellt hatte, daß der klassischen Mathematik eine viel stärkere Abstraktion zugrunde liegt, als HILBERT erwartet hatte, wurden auch für wesentlich imprädikative Teile der Mathematik Widerspruchsfreiheitsbeweise durchgeführt. Diese Beweise sind allerdings nicht als Evidenznachweise im Sinne des erweiterten HILBERTSchen Programms anzusehen, geben aber Aufschluß über die Beweisstärken der betreffenden formalen Systeme.

Die Grundlagenkrise der Mathematik ist inzwischen überwunden. Schon 1930 hatte PAUL BERNAYS, der Mitarbeiter HILBERTS, in einer seiner philosophischen Abhandlungen erklärt:

Es erscheint als eine unberechtigte Zumutung von seiten der Philosophie an die Mathematik, daß sie ihre einfachere und leistungsfähigere Methode zugunsten einer beschwerlicheren und an Systematik zurückstehenden Methode aufgeben solle, ohne durch eine innere Nötigung dazu veranlaßt zu sein.

Diese Auffassung hat sich durchgesetzt. Es besteht mit vereinzelt Ausnahmen kein Zweifel mehr an der Exaktheit der klassischen Mathematik.

Den ersten Widerspruchsfreiheitsbeweis für ein wesentlich imprädikatives Teilsystem der Analysis hat in Weiterentwicklung der GENTZENSchen Methoden 1967 G. TAKEUTI erbracht, und zwar für die sogenannte Π_1^1 -Analysis, die äquivalent ist mit demjenigen Teilsystem der Analysis, in dem die Komprehension auf beliebige Formeln mit höchstens einem Mengenquantor eingeschränkt ist. Für dieses und einige bedeutend stärkere Teilsysteme der Analysis sowie für entsprechende Teilsysteme der Mengenlehre haben in München W. BUCHHOLZ, G. JÄGER und W. POHLERS durch Widerspruchsfreiheitsbeweise die beweistheoretischen Ordinalzahlen bestimmt.

Unter Bezugnahme auf diese beweistheoretischen Ordinalzahlen konnten H. FRIEDMAN und S. G. SIMPSON die Beweisbarkeit oder Unbeweisbarkeit gewisser kombinatorischer Sätze in verschiedenen Teilsystemen der Analysis nachweisen.

5 Der Intuitionismus

Der zur Zeit der Grundlagenkrise der Mathematik von L. E. J. BROUWER begründete Intuitionismus hatte nicht nur das *tertium non datur*, auf dem die indirekten Beweisführungen beruhen, sondern überhaupt das axiomatisch-formale Verfahren der klassischen Mathematik abgelehnt. Die BROUWERSche Mathematik weicht daher sehr stark von der klassischen Mathematik ab. An die Stelle des Mengenbegriffs tritt hier der Begriff der Wahlfolge, womit sich ein völlig anderes Kontinuum als in der klassischen Mathematik ergibt. Jede Funktion reeller Zahlen ist hier stetig, und jede Operation auf einem Funktional natürlicher Zahlen ist hier bereits eindeutig bestimmt durch die Werte dieses Funktionals in einem hinreichend großen Abschnitt.

Die intuitionistische Mathematik hat sich nicht durchgesetzt, aber in mancherlei Hinsicht zu neuen Erkenntnissen geführt. Wesentliche Teile der intuitionistischen Mathematik wurden von S. C. KLEENE, J. MYHILL, G. KREISEL und A. S. TROELSTRA und anderen in einer Weise interpretiert, die auch für die klassische Mathematik bedeutungsvoll ist.

Insbesondere hat die von A. HEYTING 1930 durchgeführte Formalisierung der intuitionistischen Prädikatenlogik eine fundamentale Bedeutung bekommen. Diese intuitionistische Prädikatenlogik, in der das *tertium non datur* nicht ableitbar ist, kann sowohl als ein Teilsystem als auch als eine Erweiterung der klassischen Prädikatenlogik aufgefaßt werden. Sie ist ein Teilsystem insofern, als die in ihr herleitbaren Formeln eine echte Teilmenge der in der klassischen Prädikatenlogik herleitbaren Formeln bilden. Andererseits kann die gesamte klassische Prädikatenlogik in einer Weise ausgedrückt werden, die auch in der intuitionistischen Prädikatenlogik gültig ist. Dazu hat man die Disjunktion und Existenzquantifizierung als definiert anzusehen (durch Negation und Konjunktion beziehungsweise durch Negation und den Allquantor), und man muß ferner für jedes Prädikaten-symbol P das Prinzip des indirekten Beweisens

$$\forall x_1 \dots x_n (\neg \neg P x_1 \dots x_n \rightarrow P x_1 \dots x_n)$$

(auch Stabilität von P genannt) annehmen. Auf diese Weise hat man dann die klassische Prädikatenlogik mit dem in ihr gültigen *tertium non datur* in der intuitionistischen Prädikatenlogik interpretiert, die außerdem noch eine in der klassischen Prädikatenlogik nicht definierbare Disjunktion, Implikation und Existenzquantifizierung enthält. Derartige Zurückführungen von formalen Systemen der klassischen Mathematik auf entsprechende Systeme der intuitionistischen Mathematik wurden vielfach vorgenommen, insbesondere von KURT GÖDEL bei der Einführung seiner Funktionale endlicher Typen (1958) und von CLIFFORD SPECTOR in einer Arbeit, die nach seinem frühen Tode von GEORG KREISEL 1962 herausgegeben wurde unter dem Titel: „*Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics.*“ In dieser Arbeit führt SPECTOR die Widerspruchsfreiheit

der klassischen Analysis zurück auf die Existenz von gewissen Funktionalen, die im Rahmen der intuitionistischen Mathematik durch Bar-Rekursion definiert sind. Es handelt sich hierbei um eine Rekursion, die es in der klassischen Mathematik nicht gibt, sondern nur in der intuitionistischen Mathematik aufgrund der Voraussetzung, daß jede Operation auf einem Funktional natürlicher Zahlen bereits durch die Werte dieses Funktionalen in einem hinreichend großen Abschnitt bestimmt ist.

Die Bar-Rekursion höherer Typen, die von SPECTOR gebraucht wird, bedarf jedoch einer besonderen Begründung. Eine solche Begründung wurde zuerst von B. SCARPELLINI 1970 durch ein topologisches Modell für die Bar-Rekursion höherer Typen gegeben. HORST LUCKHARDT hat dann 1973 in den *Springer Lecture Notes 306* in ausführlicher Systematik eine Begründung der GÖDELSchen Funktional-Interpretation und der Bar-Rekursion höherer Typen entwickelt, die im Zusammenhang mit der Arbeit von SPECTOR zwar keine Begründung der Analysis im Sinne des erweiterten HILBERTSchen Programms liefert, aber als eine Begründung der klassischen Analysis im Sinne der intuitionistischen Mathematik angesehen werden kann.

6 Die Mengenlehre

Nachdem RICHARD DEDEKIND (1831–1916) in seiner Schrift „*Was sind und was sollen die Zahlen?*“ 1888 die Theorie der reellen Zahlen schon in mengentheoretischer Weise begründet hatte, wurde die allgemeine Mengenlehre bereits vor der Jahrhundertwende von GEORG CANTOR (1845–1918) geschaffen. CANTOR setzte sowohl den Begriff der Kardinalzahl als auch den der Ordinalzahl ins Transfinite fort, wobei die Ordinalzahlen, die im Finiten den Kardinalzahlen entsprechen, eine viel feinere Zahlenstruktur als die Kardinalzahlen liefern. Hiermit wird die vollständige Induktion der Arithmetik zu dem viel stärkeren Beweisverfahren einer transfiniten Induktion erweitert. Die allgemeine Anwendbarkeit der transfiniten Induktion folgt aus dem Wohlordnungssatz, den ERNST ZERMELO 1904 bewies. Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem *Auswahlaxiom*, dessen Annahme zwar recht naheliegend ist, das aber zu so starken völlig unkonstruktiven Ergebnissen führt, daß seine Gültigkeit nicht unproblematisch zu sein scheint. Nach dem Wohlordnungssatz läßt sich ja unter anderen auch die Menge der reellen Zahlen wohlordnen, während man sich überhaupt nicht vorzustellen vermag, wie eine solche Wohlordnung hergestellt werden kann. Das Auswahlaxiom hat daher gewisse Kritik hervorgerufen, wird aber im allgemeinen der mathematischen Forschung zugrunde gelegt. So ist zum Beispiel das *Zornsche Lemma*, das nur mit dem Auswahlaxiom beweisbar ist, ein fundamentales Beweismittel der Algebra geworden.

Es wurde sehr bald erkannt, daß der zunächst äußerst allgemein aufgefaßte Mengenbegriff einer gewissen Einschränkung bedarf, da zum Beispiel der Begriff der Menge aller Mengen, ja schon der Begriff der Menge aller Kardinalzahlen oder der Menge aller Ordinalzahlen zu Widersprüchen führt. Man ist deshalb dazu übergegangen, beliebige Gesamtheiten nicht als Mengen, sondern als Klassen zu bezeichnen, wobei die Mengen spezielle Klassen sind und nicht jede Klasse eine Menge ist.

Daraufhin wurden Axiomatisierungen der Mengenlehre hauptsächlich von E. ZERMELO 1908, A. FRAENKEL 1925–28 und J. v. NEUMANN 1925 entwickelt.

Um die Ordinalzahlen, die sich als Äquivalenzklassen wohlgeordneter Mengen ergeben, in einem axiomatischen System der Mengenlehre nicht als echte Klassen, sondern als Mengen zu erhalten, hat man jede Ordinalzahl durch ein spezielles Element ihrer Äquivalenzklasse zu repräsentieren. Dies geschieht nach J. v. NEUMANN am einfachsten dadurch, daß man die Ordinalzahlen durch diejenigen Mengen repräsentiert, die bezüglich der \in -Relation wohlgeordnet sind. Die Ordinalzahlen erscheinen dann als die Mengen ihrer Vorgänger, also die Ordinalzahl 0 als die leere Menge, die Ordinalzahl 1 als die Menge, deren einziges Element die leere Menge ist, usw. Diese Charakterisierung der Ordinalzahlen als die Mengen ihrer Vorgänger ist allerdings nur für den allgemeinen Ordinalzahlenbegriff im Rahmen eines axiomatischen Systems der Mengenlehre sinnvoll. Man kann ja gewisse Ordinalzahlenabschnitte auch durch rekursiv definierte Wohlordnungsrelationen auf der Menge der natürlichen Zahlen repräsentieren. Für die in dieser Weise bezeichneten Ordinalzahlen kann natürlich keine Rede davon sein, daß sie die Mengen ihrer Vorgänger sind.

Ausführliche systematische Untersuchungen einer im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe axiomatisierten Mengenlehre wurden zuerst hauptsächlich von PAUL BERNAYS durchgeführt und im *Journal of Symbolic Logic* (1937–38 publiziert, später auch in dem gemeinsam mit A. FRAENKEL herausgegebenen Buch „*Axiomatic Set Theory*“ (1958).

Einen bedeutenden Fortschritt in der axiomatischen Mengenlehre hat KURT GÖDEL mit einem relativen Widerspruchsfreiheitsbeweis für das Auswahlaxiom



KURT GÖDEL

geb.: 28. 04. 1906 in Brünn

gest.: 14. 01. 1978 in Princeton, USA

und die *verallgemeinerte Kontinuumhypothese* erzielt. Diese Hypothese besagt, daß die Kardinalität der Potenzmenge einer jeden unendlichen Menge genau um 1 größer ist als die Kardinalität der betrachteten Ausgangsmenge. GÖDEL hat nach dem Erscheinen seiner berühmten Habilitationsschrift noch in Wien eine Vorlesung über seinen relativen Widerspruchsfreiheitsbeweis gehalten, der dann 1938 in Princeton publiziert wurde.

GÖDEL bewies, daß aus der Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems der Prädikatenlogik ersten Stufe, das die üblichen Axiome der Mengenlehre, aber weder das Auswahlaxiom noch die Kontinuumhypothese enthält, die Widerspruchsfreiheit eines entsprechenden formalen Systems mit Auswahlaxiom und verallgemeinerter Kontinuumhypothese folgt. Er hat seinen Beweis der Anschaulichkeit halber modelltheoretisch formuliert, indem er von einem Modell des gegebenen formalen Systems ausging und hieraus durch Einschränkung der Mengen auf sogenannte konstruktible Mengen ein Modell bildete, in dem außer den vorgegebenen mengentheoretischen Axiomen auch das Auswahlaxiom und die verallgemeinerte Kontinuumhypothese gilt. Der Beweis ist aber im Grunde von rein syntaktischer Natur, da hier allein aus der Widerspruchsfreiheit des gegebenen formalen Systems in konstruktiver Weise auf die Widerspruchsfreiheit des Systems der konstruktiblen Mengen geschlossen wird.

Die nächste Frage war nun, ob das Auswahlaxiom und die Kontinuumhypothese abhängig oder unabhängig von den übrigen Axiomen der Mengenlehre sind. GÖDEL hat, wie aus seinen späteren Äußerungen hervorgeht, auch in dieser Hinsicht Untersuchungen unternommen und ist wahrscheinlich der Lösung dieser Frage bereits sehr nahe gekommen, hat aber hierüber nichts veröffentlicht.

Es war dann PAUL COHEN, der 1963 als erster die *Unabhängigkeit des Auswahlaxioms und der Kontinuumhypothese* bewies. Seine Beweise verwenden eine neue Erzwingungsmethode, mit der in einer gewissen syntaktischen Weise Modelle mit den erwünschten Eigenschaften konstruiert werden. Bald darauf wurde von D. SCOTT und R. SOLOVAY eine weitere Methode für Unabhängigkeitsbeweise eingeführt, bei der den Formeln anstelle von Wahrheitswerten Werte in einer Booleschen Algebra zugeordnet werden. Diese Methode ist rein modelltheoretischer Natur und setzt die Existenz eines sehr starken Universums voraus.

Hiermit setzte eine intensive mengentheoretische Forschung ein, die eine Fülle neuer Unabhängigkeitsbeweise erbrachte und auch die Konsequenzen von stärkeren mengentheoretischen Axiomen untersucht.

RONALD JENSEN, der in Bonn bei HASENJAEGER studiert hatte, hat sehr viel zur frühen Verbreitung der Erzwingungsmethode in Deutschland beigetragen. Der Höhepunkt seiner frühen Arbeit auf diesem Gebiet war die Konstruktion eines Modells der Mengenlehre, in dem die Souslinhypothese und die allgemeine Kontinuumshypothese gelten. Die *Souslinhypothese* besagt, daß jede nichtleere vollständig und dicht geordnete Menge ohne erstes und letztes Element, in der jede disjunkte Menge von offenen Intervallen höchstens abzählbar ist, isomorph zu den reellen Zahlen ist.

Diese Hypothese war auch ein Ausgangspunkt für die erste Hauptrichtung der Forschung von JENSEN, nämlich der Untersuchung des konstruktiblen Universums L . JENSEN zeigte 1968, daß in L die Souslinhypothese falsch ist. Die Beweisanalyse führte zu dem kombinatorischen Prinzip \diamond , einer Verstärkung der Kontinuumshypothese, das inzwischen mannigfaltige Anwendungen in der allgemeinen Topologie, Algebra und kombinatorischen Mengenlehre gefunden hat. In gewisser Weise benötigt der Beweis von \diamond in L nur „grobe“ Eigenschaften dieses Universums, die im wesentlichen schon GÖDEL bekannt waren.

Schon in seiner Habilitationsschrift aus dem Jahre 1967 begann JENSEN jedoch eine neue detaillierte Untersuchung des konstruktiblen Universums. Hier wird genau die „kleinste“ Stelle in dem hierarchischen Aufbau von L untersucht, wo sich bestimmte Dinge ereignen. Dies wird heute als Feinstrukturtheorie von L bezeichnet. Mit ihrer Hilfe hat JENSEN eine fast vollständige Analyse der kombinatorischen Struktur von L durchgeführt. Die dabei destillierten Prinzipien, z. B. \square und Moräste, fanden wie \diamond vielfältige Anwendungen.

Im Jahre 1974 kehrte JENSEN nach längerer Abwesenheit aus Deutschland für einige Jahre nach Bonn zurück. Gleich am Anfang dieser Periode bewies er zwei tiefe und überraschende Stuktursätze. Aus seiner Beschäftigung mit dem singulären Kardinalzahlproblem entwickelte er den *Überdeckungssatz für L* . Grob gesprochen besagt dieser Satz, daß jedes innere Modell nahe bei L liegt oder sehr viel größer als L ist. Sein *Kodierungssatz* besagt, daß jedes abzählbare transitive Modell der Mengenlehre eine klassengenerische Erweiterung besitzt, in der alle Mengen aus einer festen reellen Zahl konstruktibel sind.

Der Überdeckungssatz für L führte zu einer neuen Entwicklung in der Theorie der inneren Modelle. Zusammen mit TONY DODD führte JENSEN das *Kernmodell K* ein, welches die Lücke zwischen L und den von KUNEN untersuchten natürlichen inneren Modellen für meßbare Kardinalzahlen füllte. Dies führte zu weiteren wichtigen Überdeckungssätzen. Außerdem zeigte sich, daß die Feinstrukturtheorie grundlegend für die Untersuchung des „vollen“ Universums V ist.

In gewisser Weise ist das Kernmodell K eine natürliche Erweiterung von L , das heißt die Elemente von K sind fast konstruktibel. In den letzten Jahren hat sich JENSEN neben anderen sehr bemüht, noch bessere „konstruktible“ Approximationen an das Universum V zu entwickeln. Dieser grundlegende Zweig der mengentheoretischen Forschung ist noch nicht am Ziel angelangt und überschneidet sich mit der Suche nach natürlichen inneren Modellen für große Kardinalzahlen. Schon jetzt ist aber deutlich, daß eine verallgemeinerte Feinstrukturtheorie grundlegend für diese Untersuchungen ist.

In Deutschland haben außerdem noch H.-D. DONDER und B. KOPPELBERG wertvolle Beiträge zur Mengenlehre geliefert.

7 Die Rekursionstheorie

Das wohl einfachste Rekursionsschema ist das der primitiven Rekursion: es definiert eine zahlentheoretische Funktion f aus gegebenen Funktionen g und h durch die Gleichungen

$$f(0, x_2, \dots, x_n) = g(x_2, \dots, x_n),$$

$$f(k + 1, x_2, \dots, x_n) = h(k, f(k, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

Dieses zunächst recht speziell aussehende Definitionsschema ist erstaunlich stark. Besonders SKOLEM hat gezeigt, daß die darauf aufgebaute sogenannte primitiv rekursive Zahlentheorie zur Formalisierung der elementaren Zahlentheorie völlig ausreicht. HILBERT hat dann die Frage gestellt, ob es überhaupt berechenbare zahlentheoretische Funktionen gibt, die nicht mehr primitiv rekursiv sind. Dieses Problem wurde 1928 von ACKERMANN gelöst: Definiert man

$$f_1(x, y) = x + y, \quad f_2(x, y) = xy, \quad f_3(x, y) = x^y$$

und allgemein $f_n(x, y)$ durch die entsprechende Fortsetzung, so ist die durch $g(n, x, y) := f_n(x, y)$ definierte Funktion offenbar berechenbar, aber aus Wachstumsgründen nicht mehr primitiv rekursiv.

Die Ausgangsfrage der Rekursionstheorie im eigentlichen Sinne ist die nach dem allgemeinen Begriff eines Algorithmus, also eines Berechnungsverfahrens, bei dem die Argumente (Eingabedaten) und die Werte (Ausgabedaten) konkrete Objekte (etwa Zeichenreihen) sind. Schon immer hat man sich in der Mathematik darum bemüht, Algorithmen zur Lösung von Problemen anzugeben. Ein frühes Beispiel ist etwa der Euklidische Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen.

Es hat jedoch in der Mathematik auch immer Fragestellungen gegeben, die sich einer algorithmischen Lösung widersetzt haben. Ein Beispiel ist das zehnte Problem aus der berühmten Liste, die HILBERT in seinem 1900 gehaltenen Vortrag vor dem Internationalen Mathematikerkongreß in Paris angegeben hat.

Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlenkoeffizienten sei vorgelegt. Man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in den ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.

Hier haben viele erfolglose Lösungsversuche schließlich zu der Vermutung geführt, daß es überhaupt keinen Algorithmus gibt, der über die Lösbarkeit einer vorgelegten diophantischen Gleichung entscheidet; wir werden weiter unten darauf zurückkommen. Damit wird jedoch die Fragestellung auf eine andere Ebene gehoben. Es geht jetzt nicht mehr darum, einen konkreten Algorithmus anzugeben, sondern man muß sich über die allgemeine Natur von Algorithmen soweit

klar werden, daß man einen Beweis für die Nichtexistenz eines Algorithmus der verlangten Art führen kann.

Ein erster Schritt in diese Richtung wurde von HERBRAND getan. In einem Brief vom 7. April 1931 an GÖDEL möchte HERBRAND eine Axiomatisierung der Arithmetik genau angeben. Er schreibt

... Außerdem haben wir in der Arithmetik andere Funktionen, zum Beispiel durch Rekursion definierte Funktionen, die ich mit folgenden Axiomen definieren werde. Nehmen wir an, daß wir alle die Funktionen $f_n(x_1, x_2, \dots, x_{p_n})$ einer gewissen endlichen oder unendlichen Menge F definieren wollen. Jedes $f_n(x_1, \dots)$ wird gewisse Definitionsaxiome haben. ... Diese Axiome werden folgenden Bedingungen genügen.

1. Die Definitionsaxiome von f_n enthalten, außer dem f_n , nur Funktionen von kleinerem Index.
2. Diese Axiome enthalten nur freie Variable und Konstanten.
3. Man muß mit intuitionistischen Beweisen zeigen können, daß es möglich ist, den Wert der Funktionen für jedes bestimmte Wertsystem ihrer Argumente mit diesen Axiomen eindeutig zu berechnen.

Zum Beispiel haben wir folgende Beispiele:

- a) Die Funktionen $x + y$ und $x \cdot y$, die die Menge E_1 machen, die mit folgenden Axiomen definiert sind:

$$\begin{array}{ll} x + 0 = x & x + (y + 1) = (x + y) + 1 \\ x \cdot 0 = 0 & x(y + 1) = xy + x \end{array}$$

HERBRAND gibt dann unter b) die Axiome der primitiven Rekursion an und erklärt unter c), daß nach seinem allgemeinen Schema noch viele andere Funktionen definiert sein können, wobei er als Beispiel die Ackermansche Funktion erwähnt.

Es handelt sich hier um den ersten schriftlich vorliegenden Versuch, den Begriff der rekursiven, also durch einen Algorithmus gegebenen Funktion zu definieren.

GÖDEL hat 1934 in einer Vorlesung in Princeton als „suggested by Herbrand“ die folgende Definition einer rekursiven Funktion angegeben:

If ϕ denotes an unknown function, and ψ_1, \dots, ψ_k are known functions, and if the ψ 's and ϕ are substituted in one another in the most general fashions and certain pairs of the resulting equations are equated, then, if the resulting set of functional equations has one and only one solution for ϕ , ϕ is a recursive function.

GÖDEL hat diesen Definitionsversuch HERBRAND irrtümlich zugeschrieben. Denn aus dem oben auszugsweise zitierten Brief HERBRANDS an GÖDEL und aus GÖDELS Antwort vom 25. Juli 1931 (die HERBRAND, der am 27. Juli 1931 in den

Alpen tödlich verunglückt ist, nicht mehr erreicht hat) geht hervor, daß dieser Briefwechsel die einzige Kontaktaufnahme zwischen beiden war. Ferner ergibt sich aus einem Briefwechsel von GÖDEL mit J. VAN HEIJENOORT, daß GÖDEL 1934 bei der Vorbereitung der Vorlesungen in Princeton der Brief HERBRANDS nicht mehr vorlag und er sich auf sein Gedächtnis verlassen mußte.

KALMAR hat 1956 gezeigt, daß diese Definition nicht den intendierten Begriff trifft: Er hat eine algorithmisch nicht berechenbare Funktion angegeben, die sich als eindeutige Lösung eines Gleichungssystems darstellen läßt. Später haben GRZEGORCZYK, MOSTOWSKI und RYLL-NARDZEWSKI diejenigen Funktionen charakterisiert, die als eindeutige Lösungen von Gleichungssystemen auftreten. Es sind dies genau die hyperarithmetischen Funktionen, von denen weiter unten noch die Rede sein wird.

GÖDEL selbst hat schon in der Vorlesung von 1934 eine wichtige Modifikation an diesem Definitionsversuch vorgenommen. Er verlangt, daß für jedes Argumententupel der Funktionswert durch gewisse einfache formale Regeln (im wesentlichen eine Einsetzungs- und eine Ersetzungsregel) ausrechenbar sein muß. Diese Definition ist 1936 (in leicht veränderter Form) von KLEENE zur Grundlage einer ersten Ausarbeitung der Theorie der rekursiven (und der partiell-rekursiven) Funktionen gemacht worden. KLEENE bewies dort unter wesentlicher Verwendung der 1931 von GÖDEL eingeführten Technik der Numerierung von Formeln einige inzwischen klassischen Resultate: den *Substitutionssatz* (auch S-m-n-Theorem genannt), den *Rekursionssatz*, ferner – mittels des Kleeneschen Normalformensatzes – die Übereinstimmung der rekursiven Funktionen mit den sogenannten μ -rekursiven Funktionen, die aus einfachen Ausgangsfunktionen durch Anwendung der Definitionsschemata der Einsetzung, der primitiven Rekursion und des folgenden μ -Schemas erzeugt werden: Ist eine Funktion g bereits erzeugt, und hat g die Eigenschaft, daß es zu jedem x_1, \dots, x_n ein y gibt mit $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$, so darf man übergehen zu der durch $f(x_1, \dots, x_n) := \mu y (g(x_1, \dots, x_n, y) = 0) :=$ das kleinste y mit $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ definierten Funktion.

Daraufhin hat A. CHURCH 1936 die heute nach ihm benannte These aufgestellt, daß der oben diskutierte Begriff der allgemeinen rekursiven Funktion und der von ihm eingeführte äquivalente Begriff der λ -definierbaren Funktion mit dem der „effektiv berechenbaren“ Funktion (in einem etwas vagen intuitiven Sinn) zusammenfällt. Diese These ist heute allgemein akzeptiert. Eine wesentliche Stützung hat sie erfahren durch die von A. TURING 1937 durchgeführte Analyse der Operationen, die ein menschlicher Rechner ausführt. (Eine ähnliche Überlegung wurde gleichzeitig und unabhängig von E. POST angestellt.) Diese Analyse führte TURING auf ein abstraktes Maschinenmodell, das heute nach ihm benannt wird. Es zeigte sich, daß auch die durch solche Turing-Maschinen berechenbaren Funktionen mit den allgemein rekursiven Funktionen zusammenfallen.

Als äquivalent mit dem Begriff der allgemeinen rekursiven Funktionen erwies sich dann auch der Begriff der kombinatorisch definierbaren Funktion, der

sich im Rahmen der von H. B. CURRY 1930 in seiner Göttinger Dissertation (bei HILBERT) begründeten kombinatorischen Logik ergibt. Der λ -Kalkül von CHURCH ist äquivalent mit der viel früher von CURRY entwickelten kombinatorischen Logik. Die Formeln des λ -Kalküls sind übersichtlicher als die der kombinatorischen Logik, während die kombinatorische Logik den Vorteil hat, im Unterschied zum λ -Kalkül völlig ohne gebundene Variablen auszukommen. Besonders der λ -Kalkül, aber teilweise auch die kombinatorische Logik haben Anwendungen in der Informatik gefunden.

Auch von den 1954 eingeführten Markov-Algorithmen hat sich gezeigt, daß die hiermit definierbaren Funktionen mit den allgemeinen rekursiven Funktionen zusammenfallen.

Bereits 1931 hat schon GÖDEL mit dem Begriff der in einem formalen System S entscheidungsdefiniten Relation eine Definition formuliert, von der sich herausgestellt hat, daß sie mit dem Begriff der rekursiven Relation (d. h. einer Relation, deren charakteristische Funktion rekursiv ist) zusammenfällt. Dies hat GÖDEL selbst 1946 gemerkt, nachdem er schon vorher eine gewisse Absolutheit (d. h. Unabhängigkeit von dem zugrunde liegenden System) dieses Begriffs festgestellt hatte.

Nachdem so der Begriff des Algorithmus eine befriedigende und mathematisch präzise Klärung gefunden hatte, war erstmals die Möglichkeit eröffnet, von gewissen mathematischen Problemen zu zeigen, daß sie algorithmisch *nicht* lösbar sind. Innerhalb der Theorie der rekursiven Funktionen lassen sich solche Probleme leicht angeben: KLEENE konstruierte 1936 ein Beispiel einer primitiv rekursiven Relation R derart, daß $\{n: \forall x R(x, n)\}$ nicht rekursiv ist. Nun hatte GÖDEL bereits 1931 ein Verfahren angegeben, das zu jedem primitiv rekursiven R eine prädikatenlogische Formel erster Stufe liefert, deren Erfüllbarkeit mit der Richtigkeit von $\forall x R(x, n)$ äquivalent ist. Es folgt also, daß die Menge der erfüllbaren prädikatenlogischen Formeln erster Stufe nicht rekursiv ist, das heißt nicht algorithmisch charakterisiert werden kann. Dieses Resultat wurde explizit zuerst von CHURCH formuliert.

Später sind dann vielfältige Verschärfungen hiervon gefunden worden: für viele syntaktisch abgegrenzte Klassen \mathcal{F} von Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe konnte man zeigen, daß die Frage nach der Erfüllbarkeit von Formeln $F \in \mathcal{F}$ unentscheidbar bzw. entscheidbar ist. An diesen Untersuchungen waren besonders HERBRAND, GÖDEL, HAO WANG, BÖRGER und GOLDFARB beteiligt. Als besonders nützlich für Unentscheidbarkeitsbeweise hat es sich herausgestellt, den Begriff der Rekursivität durch sogenannte Registermaschinen (anstelle von Turingmaschinen) zu charakterisieren. Eine Übersicht über den heutigen Stand der Kenntnisse auf diesem Gebiet findet man in dem 1985 erschienenen Buch „*Berechenbarkeit, Komplexität, Logik*“ von E. BÖRGER.

Auch für viele in der Mathematik aufgetretenen Fragestellungen konnte die algorithmische Unlösbarkeit nachgewiesen werden: Aufbauend im wesentlichen auf Vorarbeiten von JULIA ROBINSON, die sich auf Lösungen der Pellschen Glei-

chung beziehen, zeigte MATIJASEVITCH 1970 die Unentscheidbarkeit des zehnten Hilbertschen Problems. BOONE und NOVIKOV bewiesen in den fünfziger Jahren die Unentscheidbarkeit des Wortproblems der Gruppentheorie.

Der Begriff der Rekursivität läßt sich offenbar relativieren: Eine Menge A natürlicher Zahlen heißt rekursiv in einer Menge B (Schreibweise: $A \leq_T B$), wenn es eine Turingmaschine M gibt, die die Zugehörigkeit einer vorgelegten Zahl zu der Menge A entscheidet, wobei M im Verlauf der Rechnung B als „Orakel“ benutzen kann, das heißt beliebig oft Anfragen stellen kann, ob ein Zwischenergebnis zur Menge B gehört oder nicht. Die Äquivalenzklassen bezüglich der von \leq_T erzeugten Äquivalenzrelation nennt man *rekursive Grade*; Untersuchungen über ihre Struktur sind sehr schwierig und machen ein Hauptgebiet der heutigen Rekursionstheorie aus. Von besonderem Interesse sind rekursiv aufzählbare Grade, das heißt die Grade mit rekursiv aufzählbaren Repräsentanten. Eine Menge heißt *rekursiv aufzählbar*, wenn sie sich in der Form $\{n: \exists x R(x, n)\}$ mit rekursiven R definieren läßt. POST hat 1944 das Problem formuliert, ob es überhaupt rekursiv aufzählbare Grade gibt, die von $\mathbf{0}$ (dem Grad der rekursiven Mengen) und dem maximalen rekursiv aufzählbaren Grad $\mathbf{0}'$ (dessen Existenz man sich leicht überlegen kann) verschieden sind. Diese Frage wurde 1956 unabhängig voneinander von FRIEDBERG und MUCKNIK positiv beantwortet. Beide Autoren verwendeten zum Beweis eine neuartige Methode, die sogenannte *Prioritätsmethode*, die seitdem in vielerlei Hinsicht erweitert worden ist und die heute noch diesen Teil der Rekursionstheorie charakterisiert. In Deutschland hat hierzu besonders AMBOS-SPIESS wichtige Beiträge geliefert.

Bisher war von Rekursionstheorie nur über den natürlichen Zahlen die Rede gewesen. Schon früh hat man jedoch versucht, den Begriff der Rekursivität auch über anderen Bereichen zu studieren. Hier stellt sich sofort die Frage, welche Bereiche denn angemessen sind. Eine Antwort darauf haben KRIPKE und PLATEK gegeben: Sie konnten zeigen, daß die sogenannten zulässigen Ordinalzahlen oder etwas allgemeiner die Abschnitte L_α von GÖDELS Hierarchie der konstruktiblen Mengen mit einer zulässigen Ordinalzahl α geeignete Bereiche für Rekursionstheorien sind. Die kleinste zulässige Ordinalzahl oberhalb von ω ist ω_1^{CK} (CK steht für CHURCH und KLEENE), das heißt die kleinste Ordinalzahl, die nicht mehr durch eine rekursive Wohlordnung dargestellt werden kann. In der Rekursionstheorie über zulässigen Ordinalzahlen, der sogenannten *α -Rekursionstheorie*, ist es von großer Wichtigkeit, den Begriff der Endlichkeit geeignet zu verallgemeinern; darauf hat zuerst KREISEL hingewiesen. Im Fall der Rekursionstheorie über ω_1^{CK} haben KREISEL und SACKS den Endlichkeitsbegriff zum Begriff einer hyperarithmetischen, also Δ_1^1 -Teilmenge der natürlichen Zahlen verallgemeinert. Im allgemeinen Fall der α -Rekursionstheorie für zulässiges α ist der passende Endlichkeitsbegriff der eines α -rekursiven Bildes einer Ordinalzahl $< \alpha$.

Später haben insbesondere S. FRIEDMAN und SACKS versucht, Rekursionstheorie auch auf L_β mit beliebigen Limeszahlen β zu verallgemeinern. In dieser sogenannten *β -Rekursionstheorie* lassen sich die Begriffe der β -rekursiv aufzähl-

baren Menge und der β -rekursiven Funktion in natürlicher Weise definieren. Weniger naheliegend war die folgende Definition eines angemessenen Endlichkeitsbegriffs, die von W. MAASS gefunden wurde: eine Teilmenge von L_β heißt invariant endlich, wenn sie ein Element der kleinsten rekursiv invarianten Klasse von β -rekursiven beschränkten Teilmengen von L_β ist.

Schließlich ist noch über eine Verallgemeinerung der Rekursionstheorie zu berichten, in der die betrachteten Objekte nicht mehr nur Funktionen über den natürlichen Zahlen sind, sondern Funktionale oder von noch höherem Typ. In einer viel beachteten Arbeit „Über eine noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunkts“ von 1958 hat GÖDEL die eingangs betrachteten primitiv rekursiven Funktionen auf höhere Typen erweitert. Die zugehörige Theorie T hat dann die volle Stärke der Arithmetik.

Die volle Rekursionstheorie hat KLEENE auf höhere Typen erweitert. Er hat dabei grundlegende Zusammenhänge mit der Theorie der hyperarithmetischen Mengen aufgedeckt: eine Menge natürlicher Zahlen ist hyperarithmetisch genau dann, wenn sie rekursiv ist in dem Typ-2-Objekt E , das 0 oder 1 ist je nachdem ob sein Funktionsargument eine Nullstelle besitzt oder nicht. KLEENES Rekursionstheorie höherer Typen hat als Grundannahme, daß alle betrachteten Objekte total, das heißt überall definiert sein müssen. Das führt dazu, daß man unendliche Rechnungen zulassen muß. Denn wenn ein Typ-2-Objekt wie etwa das obige E als Argument in einer Rechnung auftritt, dann kann dieses Argument ja nur so benutzt werden, daß man es anwendet auf eine (nach KLEENES Grundannahme totale) Funktion, das heißt auf ein unendliches Objekt, das vorher durch die Rechnung bereitgestellt werden muß. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß die weitere Entwicklung dieser Art von Rekursionstheorie auf Fragestellungen führt, bei denen die Antwort von den zugrunde gelegten mengentheoretischen Axiomen (wie etwa $V = L$) abhängt. Genaueres hierüber findet man etwa in dem 1978 erschienenen Buch „*Recursion-Theoretic Hierarchies*“ von P. HINMAN.

Eine Rekursionstheorie höherer Typen, in der alle Rechnungen endlich sind und die deshalb von vornherein partiell definierte und stetige Objekte zugrunde legt, ist (nach Vorarbeiten von PLATEK) von D. SCOTT und YU. ERSOV entwickelt worden. Die Grundidee ist hier, die unendlichen Objekte als Limiten (genauer: Ideale) endlicher Approximationen darzustellen. Ein Funktional heißt dann rekursiv, wenn das Ideal seiner endlichen Approximationen rekursiv aufzählbar ist. Diese sogenannte *Bereichstheorie* (domain theory) ist in der Informatik von grundlegender Bedeutung, insbesondere für die Semantik von Programm Sprachen.

8 Die Modelltheorie

Neben der Beweistheorie entwickelte sich seit Beginn der zwanziger Jahre die *Modelltheorie*. In ihr steht nicht die Frage nach der Widerspruchsfreiheit eines (formalen) Axiomensystems für die Mathematik oder Teilgebiete davon im Vordergrund – diese wird, im Gegenteil, als gegeben angenommen – sondern die Untersuchung der Modelle eines solchen Axiomensystems. Ihre Wurzeln hat die Modelltheorie einerseits in der schon in Abschnitt 1 erwähnten Arbeit von LÖWENHEIM (1915) und in einer Arbeit von SKOLEM aus dem Jahr 1934, andererseits in GÖDELS Dissertation (1930). In der Arbeit von SKOLEM wird mit einer Konstruktion, die im wesentlichen die Ultraproduktkonstruktion darstellt, unter anderem gezeigt, daß es kein (formales) Axiomensystem geben kann, das die natürlichen Zahlen bis auf Isomorphie charakterisiert. Diese Methode der Konstruktion von sogenannten Nichtstandard-Modellen eines Axiomensystems stand Pate bei der Entwicklung der Nichtstandard-Analysis durch ABRAHAM ROBINSON in den sechziger Jahren. In seiner Arbeit von 1930 zeigte GÖDEL, daß die auf FREGE, WHITEHEAD, RUSSELL und HILBERT zurückgehende Formalisierung der Mathematik alle mathematischen Schlußweisen vollständig erfaßt, daß also eine Unbeweisbarkeit notwendig in einem „Gegenbeispiel“ begründet sein muß. Die Konstruktion dieses Gegenbeispiels stellt eine andere grundlegende Methode der heutigen Modelltheorie dar.

Die beiden eben angesprochenen Methoden wurden in den dreißiger Jahren von A. TARSKI durch weitere ergänzt und systematisiert. TARSKI begann auch das Studium konkreter algebraischer Theorie unter modelltheoretischen Gesichtspunkten. Seine Untersuchungen erbrachten die Entscheidbarkeit einiger wesentlicher Teiltheorien der Mathematik, so zum Beispiel der Theorie der komplexen Zahlen, der Theorie der reellen Zahlen und der Theorie der euklidischen Ebene. TARSKIS geometrische Untersuchungen wurden in den sechziger Jahren in Deutschland von W. SCHWABHÄUSER fortgeführt. Er zeigte unter anderem die Entscheidbarkeit der ebenen hyperbolischen Geometrie.

In den sechziger Jahren erhielt die Modelltheorie wesentliche Impulse einerseits durch den tiefliegenden Satz von MORLEY, andererseits durch die aufsehenerregende Anwendung modelltheoretischer Methoden durch J. AX und S. KOCHEN in dem Problemkreis diophantischer Gleichungen.

Mit den Arbeiten von AX und KOCHEN eröffnete sich der Modelltheorie ein weites Feld der Anwendung – Fragen der Entscheidbarkeit und Axiomatisierbarkeit in der Algebra, speziell der Körpertheorie, bis hin zur Behandlung rein algebraischer Fragestellungen. In Deutschland lieferten insbesondere A. PRESTEL, V. WEISSPFENNING und M. ZIEGLER hierzu zahlreiche Beiträge.

Der Satz von Morley besagt, daß für eine Theorie je zwei Modelle gleicher, aber beliebiger überabzählbarer Mächtigkeit isomorph sind, falls dies schon für mindestens eine überabzählbare Mächtigkeit richtig ist. Der Beweis dieses Satzes brachte für die Modelltheorie wiederum neue Konstruktionsmethoden, die sich

für die weitere Entwicklung als grundlegend erwiesen haben. Insbesondere wurde hierdurch die sogenannte Stabilitätstheorie und damit letztlich S. SHELAHS Klassifikationsprogramm für Teiltheorien der Mathematik inspiriert. Theorien, deren Modellklasse eine Strukturtheorie ähnlich der Theorie algebraisch abgeschlossener Körper erlaubt, gelten dabei als besonders einfach (sie sind insbesondere stabil), während Theorien von Strukturen mit einer linearen Ordnung, wie zum Beispiel der reellen Zahlen, als besonders kompliziert gelten (sie sind insbesondere instabil). Beiträge hierzu lieferten in Deutschland unter anderen U. FELGNER und J. REINEKE zur Theorie der Gruppen und Ringe und M. ZIEGLER zur Theorie der Moduln.

Wie schon oben erwähnt, entwickelte in den sechziger Jahren A. ROBINSON seine Nichtstandard-Analysis, die eine späte Rechtfertigung des Rechnens mit infinitesimalen Zahlen von LEIBNIZ brachte. In gewisser Weise stellt eine Arbeit von SCHMIEDEN und LAUGWITZ von 1958 einen Vorläufer davon dar. Mit modelltheoretischen Überlegungen (Saturiertheitsprinzip) wurde gezeigt, daß man, ohne auf Widersprüche zu stoßen, die Existenz von unendlich großen und unendlich kleinen „reellen“ Zahlen annehmen kann. Dieser neue Zahlenbereich bildet wieder einen angeordneten Körper, der dieselben formalen Eigenschaften wie die üblichen reellen Zahlen hat (Transferprinzip). Das Vollständigkeitsaxiom gilt nur für die internen Mengen (Prinzip der definitorischen Abgeschlossenheit der internen Mengen). Diese drei Prinzipien der Nichtstandard-Analysis wurden auf die vielen Arten topologischer Strukturen und auf die natürlichen Zahlen angewandt. So entwickelte sich die Nichtstandard-Analysis, obwohl logischen Ursprungs, zu einem eigenständigen Teilgebiet der Mathematik. Einen besonderen Aufschwung erlebte die Nichtstandard-Analysis durch Arbeiten von LOEB, ANDERSON und KEISLER in den siebziger Jahren, in denen gezeigt wurde, daß man alle straffen Wahrscheinlichkeitsmaße als Zählmaße auffassen und deshalb stochastische Integrale (bis auf unendlich kleine Fehler) pfadweise definieren kann. In dem Buch mit dem Titel „*Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*“ (Academic Press, 1986), das S. ALBEVERIO (Bochum) zusammen mit drei Norwegern geschrieben hat, findet man einen Überblick auch über Teile der in Deutschland entstandenen Anwendungen der Nichtstandard-Analysis auf den Gebieten Mathematische Logik (Wahrscheinlichkeitslogik), Funktionalanalysis, Stochastik und Mathematische Physik.

Der topologische Übertragungsprozeß, der der Nichtstandard-Analysis zugrunde liegt, initiierte die Entwicklung der sogenannten topologischen Modelltheorie, deren Entwicklung und Anwendung in Deutschland besonders FLUM, PRESTEL und ZIEGLER vorantrieben. ROBINSON hatte 1972 die Frage gestellt, welche Logik für topologische Strukturen dieselbe Rollen spielen könnte wie die Logik erster Stufe für algebraische Strukturen. Die zu betrachtenden Strukturen haben offenbar die Form (\mathcal{M}, τ) , wobei τ eine Topologie auf der Trägermenge der erststufigen Struktur \mathcal{M} ist. Beispiele sind etwa topologische Räume (\mathcal{M} ist hier nur eine Menge), topologische Gruppen und topologische Vektorräume. Es

hat mehrere Versuche gegeben, die Frage von ROBINSON angemessen zu beantworten, und zwar durch folgende formale Systeme:

1. \mathcal{L}^{mon} , eine Version der monadischen Logik zweiter Stufe, in der die Mengenquantoren über offene Mengen laufen.
2. \mathcal{L}' ; dies ist eine Einschränkung von \mathcal{L}^{mon} , in der Mengenquantoren (die also wieder über offene Mengen laufen) nur erlaubt sind im Kontext

$$\exists X(t \in X \wedge \phi)$$

wobei X nur negativ in ϕ vorkommt, beziehungsweise im dualen Kontext

$$\forall X(t \in X \rightarrow \phi)$$

mit X nur positiv in ϕ .

3. $\mathcal{L}^{I''}$. Hier hat man die übliche Logik erster Stufe um einen n -stelligen Operator zur Bildung des Inneren erweitert.

Man kann zeigen, daß die Ausdrucksfähigkeit dieser Sprachen echt abnimmt, also $\mathcal{L}^{mon} > \mathcal{L}' > \mathcal{L}^{I''}$.

Es stellt sich die Frage, welche dieser Sprachen sich für eine topologische Modelltheorie eignet. Eine überzeugende Antwort ist im wesentlichen durch Untersuchungen von ZIEGLER gegeben worden: \mathcal{L}' (im Gegensatz zu \mathcal{L}^{mon}) erfüllt den Kompaktheitssatz (das heißt: Eine Menge von \mathcal{L}' -Sätzen hat ein topologisches Modell genau dann wenn jede endliche Teilmenge eines besitzt) und den Satz von Löwenheim-Skolem. Es gilt sogar eine Form des Lindström-Satzes für \mathcal{L}' , daß nämlich \mathcal{L}' eine maximale Logik mit diesen beiden Eigenschaften ist. Es scheint also, daß mit \mathcal{L}' eine Antwort auf die eingangs gestellte Frage von ROBINSON gefunden ist.

Für weitere wichtige Eigenschaften von \mathcal{L}' (etwa rekursive Axiomatisierbarkeit, Interpolationssatz) müssen wir auf die Literatur verweisen, etwa auf das Buch „*Topological Model Theory*“ von J. FLUM und M. ZIEGLER (*Springer Lecture Notes* 769). Dort werden auch Anwendungen behandelt, etwa die (erbliche) Unentscheidbarkeit der Theorie der T_2 -Räume und eine vollständige Axiomatisierung der Theorie des topologischen Körpers der komplexen Zahlen.

Bildnachweis

Wir danken den nachfolgenden Verlagen und Institutionen für die freundliche Genehmigung zur Reproduktion der im folgenden genannten fotografischen Abbildungen.

Seite

<p>15 MPI für Strömungs- forschung</p> <p>24 Birkhäuser</p> <p>25 Birkhäuser</p> <p>31 Marcel Dekker</p> <p>37 Teubner</p> <p>86 Birkhäuser</p> <p>94 MIT Press</p> <p>100 Academic Press</p> <p>101 Wiley</p> <p>103 North-Holland</p> <p>233 3. Bild v.o., Teubner</p> <p>271 Springer</p> <p>325 1. Bild v.o., Gauthiers-Villars</p> <p>325 2. u. 3. Bild v.o., Springer</p> <p>362 Becksche Verlags- buchhandlung</p> <p>363 oben, Teubner</p> <p>363 unten, London Mathematical Society</p> <p>433 Springer</p>	<p>440 de Gruyter</p> <p>479 The Applied Probability Trust</p> <p>492 1. u. 2. Bild v.o., Springer</p> <p>493 Springer</p> <p>555 1. u. 2. Bild v.o., Springer</p> <p>555 4. Bild, Addison-Wesley</p> <p>556 2. Bild v.o., MIT Press</p> <p>556 3. Bild v.o., de Gruyter</p> <p>707 1. Bild v.o., Springer</p> <p>707 3. Bild v.o., North-Holland</p> <p>708 2. Bild v.o., Springer</p> <p>708 3. Bild v.o., Pergamon Press</p> <p>724 North-Holland</p> <p>783 Harvard UP</p> <p>784 Springer</p> <p>785 Harvard UP</p> <p>786 Harvard UP</p> <p>788 Teubner</p> <p>790 Springer</p> <p>798 Springer</p> <p>799 Springer</p>
--	---

Des weiteren gilt unser Dank dem Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, Prof. Dr. G. Fischer, Prof. Dr. K. Jacobs und weiteren zahlreichen Privatpersonen für die Beschaffung und Bereitstellung umfangreichen Bildmaterials.

Personenregister

- A
 Abbe, E. 786
 Abel, N. H. 478, 637
 Achenwall, G. 781
 Ackermann, W. 723, 724, 732
 Adams, J. F. 684, 691, 702, 704, 707
 Adams, R. A. 512, 513
 Adem, J. 693
 Adleman, L. M. 770, 777
 Agmon, S. 158, 190, 190
 Aharoni 100
 Ahlfors, L. V. 364, 371, 379, 384, 386, 401
 Ahrens, H. 804
 Aiken, H. H. 131, 133
 Albert, A. A. 123
 Alberti 122
 Alexander, J. W. 334, 675, 676, 681, 682
 Alexander, S. N. 141
 Alexandroff, P. S. 279, 334, 353, 426, 678, 680, 707
 Alexandrov, A. D. 448, 451
 Alexandrow, A. D. 349–351
 Almgren, F. J. 205
 Alt, H. W. 195, 203
 Althoff, F. 9, 11–14
 Amdahl, G. M. 144
 Amick, C. J. 206
 Amira, B. 71
 Ammeter 485
 Anderson, O. 783, 805, 809, 811
 Anderson, T. W. 801
 Anderson 739
 André 98
 Andrews, G. E. 90, 758
 Apéry, R. 776
 Appel, K. 92
 Arason 667, 668, 669
 Archimedes 422, 423, 424
 Archipov, G. I. 773
 Aristoteles 718
 Aronhold 6
 Arthur, J. 615, 651, 652
 Artin, E. 24, 48, 49, 538, 539, 543, 544, 5572–559, 561–564, 624, 639, 643–646, 651, 760, 661, 668, 765, 772, 773,
 Artin, M. 624
 Artzy, R. 243
 Arzel, C. 508
 Ascoli, G. 508
 Ashby, W. R. 139
 Atanasoff, J. V. 131
 Atiyah, M. 690–692, 698
 Atkin, A. O. 758
 Aumann, G. 43
 Averbukh, S. 689
 Averbuch, H. T. 120
 Ax, J. 738, 772
 Axer, A. 755

 B
 Babbage, C. 116, 127
 Bachelier, L. 469
 Bachmann, F. 259
 Backlund, R. 769
 Backus, J. W. 136, 144
 Baclawski 88
 Bacon, F. 133
 Baer, R. 24, 41, 539, 560, 561, 572
 Baernstein, A. 391
 Baeza, R. 668, 669
 Baker, A. 751, 761, 768, 771, 772
 Balasubramanian 757
 Baldus 52
 Baldwin, F. S. 120
 Bambah, R. P. 444
 Banach, S. 295, 450
 Bar-Hillel, Y. 139
 Barbilian, D. 249
 Bargmann, V. 643, 650
 Barlotti, A. 245
 Barneck 24, 26
 Barner, M. 342
 Barnette, D. 442
 Barone K. 460, 461, 471, 472
 Barrat, M. 695
 Barton, R. S. 141
 Baruch 24
 Barwise, J. 147
 Bateman 470
 Baudot, E.;116,123,133
 Bauer, F. L. 133, 135
 Bauer, H. 450, 480, 481
 Baum, M. 119
 Bayes, Th. 793
 Beauclair, W. de 26
 Becker, R. 796
 Beckert, H. 188, 206, 669
 Beer, A. 501
 Behnke, H. 408
 Behrens, W. U. 796, 811
 Belinskii 386
 Bell, C. G. 87, 141
 Belopolskii, A. L. 523
 Beltrami 152
 Bergman 409
 Bergmann, S. 24, 26, 37, 70, 144
 Bernays, P. 24, 26, 70, 276, 726, 729

- Berndt, B. 758
 Bernoulli, J. 84, 338, 426, 459, 471
 Bernstein, A. 138
 Bernstein, F. 24, 26–30, 32, 33, 39, 472, 482, 484, 791, 792, 795, 811, 812
 Bernstein, S. N. 154, 155, 180, 185, 187, 197, 217, 305, 461, 793
 Bernstein 802
 Berry, C. E. 131
 Bers, L. 176, 187, 197, 371
 Bessel, F. W. 782
 Betke, U. 446
 Betti, E. 329, 352, 679
 Beukers, F. 776
 Beurling 379
 Bianchi, L. 336, 341
 Bieberbach, L. 19, 34–36, 42, 50–52, 55, 57–65, 67–69, 73, 361–363, 370, 372, 387, 395, 403, 411, 451
 Bilharz, L. 773
 Billera, L. 442
 Billing, H. 141
 Birch, B. J. 445
 Birkhoff, G. 87, 246
 Birman, M. S. 523
 Birnbaum, Z. W. 800
 Björner 88
 Blackwell, D. 801
 Blaschke, W. 49, 62–64, 67, 68, 247, 346–348, 373, 429, 431, 438, 439, 448, 449, 451, 475
 Blichfeldt, H. P. 444, 445
 Blichfeldt, H.-F. 746
 Bloch, S. 401, 402
 Blumenthal, O. 24, 26, 36, 37, 51, 52, 55, 56, 60, 70, 234, 640
 Boardman, J. 703
 Bochner, S. 24, 38, 334, 354, 409, 473
 Boda, M. 124
 Bödighheimer, C. F. 696
 Boerner 153, 396
 Bohlmann, G. 459, 460, 488
 Bohmann, J. 769
 Böhme 207, 208
 Böhmer, P. E. 463
 Bohr, H. 53, 55, 57, 60, 63, 65, 366
 Bokowski, J. 446
 Bol, G. 449
 Bolle, L. 120
 Boltzmann, L. 466, 468
 Bolyai, J. 436
 Bolyai, W. 436
 Bolza, O. 152
 Bolzano, B. 117
 Boltzmann, L. 467
 Bombieri, E. 199, 759, 764–766, 771, 772, 775
 Bonnesen, T. 449, 451
 Bonnet, O. 343, 348
 Boole, G. 87, 115
 Boone 736
 Booth, A. D. 139
 Borel, E. 128, 393, 402, 460, 461, 471, 472, 746, 778
 Börger 735
 Borgwardt 105
 Born, M. 469
 Börner 90
 Borsuk, K. 343
 Bortkiewicz, L. von 470, 471, 783, 787, 789, 792, 802
 Bose, R. C. 97, 98
 Bott, R. 691
 Böttinger, H. T. 13
 Bourbaki 75
 Bousfield 699, 701
 Branges, L. de 390
 Brauer, R. 24, 539, 540, 545, 552–554, 558, 561, 564–567, 570, 573, 644, 651
 Brauer, A. 24, 70
 Braun, H. 44
 Brent, R. P. 769, 770
 Breuer 24
 Breusch 764
 Bricard, R. 429, 436
 Brieskorn, E. 690
 Brill 6, 7
 Brillhart, J. 770
 Brillouin, L. 524
 Bröcker, L. 669
 Broggi, U. 460, 488
 Brooks, F. P. 141
 Brouwer, L. E. J. 55, 57, 60, 450, 678, 679, 682–685, 707, 721, 727
 Browder, F. E. 158, 190, 329, 333, 334
 Brown, E. H. 704, 705
 Brown, E. M. 678
 Brown, R. 468
 Brownwell, D. 772, 773, 775
 Brualdi 99
 Bruck 98
 Brückner, H. 594
 Brückner, M. 442
 Brückner 484
 Bruggesser, M. 442
 Bruin, de 86
 Brun, V. 758
 Brunn, H. 154, 431, 432
 Bruns, E. H. 488
 Bruns, H. 119, 471, 787
 Buchholz, W. 726
 Buffon, G. L. de 449
 Bühlmann, H. 485, 805
 Bundschuh, P. 761
 Bunke, O. 804
 Bunt, L. N. H. 486
 Burack, B. 124
 Burali-Forti 150, 353
 Burgess, D. A. 758
 Burkhardt, A. 119
 Burkhardt, F. 789
 Burks, A. W. 131, 132
 Burroughs, W. S. 119, 120
 Busemann 26
 Bush, V. E. 125
 C
 Caccioppoli 203
 Caffarelli 155, 199, 203, 215, 216
 Cairns, S. S. 334
 Calabi 334
 Caldern, A. 508
 Campos, F. P. 127
 Cannon, J. W. 678
 Cantelli 471
 Cantor, G. 6–8, 117, 333, 353, 717, 721, 728, 744, 791
 Carathodory, C. 38, 55, 56, 152, 153, 285, 341, 361, 362, 368–370, 373, 374, 398, 401, 403, 410, 414, 443, 439, 450, 461, 474, 482
 Cardano 459

- Carleman, T. 409, 507, 508
 Carleson 392, 398
 Carlsson, G. 699, 700
 Carnap, R. 128
 Carpenter 123
 Cartan, E. 117, 150, 156,
 325, 335, 336, 339, 340,
 348, 349, 353, 354, 693
 Cartier 771
 Cassel, J. W. S. 446, 666, 667
 Cassels 746
 Catalan, E. C. 118, 345
 Cauchy, A. L. 150, 348, 361,
 365, 428, 429
 Cayley, A. C. 118, 517
 Cech 684
 Cesro 393
 Chaitin 465
 Chalk, J. 446
 Champernowne, D. G. 138
 Chandrasekhar 156
 Chappe, C. 116
 Charzynski 389
 Chern, S. 151, 247, 325, 335,
 336, 349, 350
 Chernoff, H. 801
 Chevalley, C. 335, 336, 353,
 354, 598, 632, 747
 Chomsky, N. 135
 Choquet 450
 Christodoulou, D. 531
 Christoffel 6, 354
 Chu, J. C. 141
 Chudnovsky, V. G. 775
 Chudy, J. 116
 Chung 474
 Church, A. 129, 134, 734,
 736
 Chwistek 720
 Cigler, H. 752
 Civita 206
 Clairaut 338, 343, 355
 Clark, W. A. 144
 Claus 396
 Clebsch 5, 354, 361
 Clippinger, R. F. 135
 Clunie 391
 Cohen, F. 696
 Cohen, H. 770
 Cohen, P. 730
 Cohn-Vossen, S. 24, 37, 325,
 347, 348, 448
 Collatz, L. 36
 Collins, E. 128
 Comerauer, A. 144
 Comrie, L. J. 127, 769
 Concus 164
 Connelly, R. 429
 Conrey, H. 755
 Conway, J. H. 98, 445
 Cook, S. A. 109, 136
 Cooley 108, 110
 Coombs, A. W. M. 140
 Corbato, F. J. 141
 Corput, J. G. van der 445
 Couffignal, L. 131
 Courant, R. 24, 26–30, 32,
 33, 55, 56, 65, 69, 158,
 170, 175, 178, 188, 207,
 208, 217, 271, 277, 278,
 286, 312, 362, 363,
 368–370, 375, 379, 410,
 508, 509, 514, 529
 Cournat 461
 Couturat, L. 121
 Cramr, H. 475, 484, 754,
 794, 801, 808
 Crawford, P. O. 133
 Cray, S. R. 140, 144, 366
 Crofton, M. W. 449
 Cues, N. von 742
 Curry, H. B. 129, 735
 Czuber, E. 449, 458, 459,
 788, 789
 D
 D'Alembert 470, 471
 Daboussi, H. 774
 Dafermos 158
 Dahl, O. J. 144
 Damm, A. G. 121
 Dantzig, G. H. 85, 102–105,
 109, 303, 451, 800
 Danzer, L. 444
 Darboux, G. 336
 Darwin 156
 Davenport, H. 63, 447, 746,
 761, 765, 779
 Davis, M. 774, 775
 De'Toschi, Marchese 636
 Debreu, G. 451
 Dedekind, R. 87, 117, 118,
 328, 591, 632, 650, 717,
 719, 728, 744
 Dehn, M. 24, 42, 70, 423,
 436, 442, 679, 683, 747
 Deimling 207
 Delange, H. 763, 774
 Delaunay 341
 Deligne, P. 612, 642, 648,
 652, 766, 778
 Delone, B. N. 435, 446, 447,
 451
 Dembowski 98
 Demokrit 423
 Deninger, C. 627
 Denjoy 379
 Desargues, G. 238
 Descartes, R. 338, 426, 427,
 674
 Deshouillers, J. M. 757, 773
 Deuber 96
 Deuchler, G. 788
 Deuring, M. 645, 646, 647,
 761
 Devinatz, E. 689, 706
 Diamond, H. 764
 Dickson 742
 Dieudonn, J. 666, 673, 683,
 742
 Dijkstra, E. W. 94, 135, 141
 Dilworth 94
 Dinghas, A. 363, 403, 432,
 449, 451
 Diophant 742
 DiPerna 158
 Dirichlet, P. G. L. 5, 95, 155,
 167, 168, 171, 173, 430,
 435, 630–632, 661, 743,
 744, 749
 Disney 366
 Divis, B. 779
 Dixon, J. B. 770
 Dodd, T. 731
 Dodgson, C. L. 116
 Doebelin, W. 477, 78
 Dold, A. 682, 685, 689, 697,
 700, 703
 Donder, de 153
 Donder, H.-D. 731
 Donsker 794
 Doob 465, 481, 794
 Dörge, K. 463
 Douglas, J. 177, 208, 218
 Douglass 190, 190
 Drasin 386, 405
 Dress, A. 669, 757
 Dupin, C. 344, 345
 Dvoretzky, A. 450

- Dwork, B. 747
 Dwyer 699, 700, 702
 Dyck, W. von, 7, 55, 117, 125, 332, 675
 Dyson, F. J. 761, 768
 Dziuk 195

 E
 Eberhard, V. 675
 Eckert, J. P. 131, 134
 Eckert, W. J. 127
 Edgeworth, F. Y. 783, 790, 811
 Edler, F. 430
 Edler, R. A. W. 124
 Edmonds 93, 99, 105, 110
 Edwards, D. J. 139
 Edwards, R. D. 678
 Eells 194
 Efimow, N. W. 347
 Egervary 99
 Egli, H. W. 120
 Ehrenfest, P. 124, 467
 Ehrenfest, T. 467
 Ehrenpreis 190
 Ehresmann, C. 335, 336
 Ehrhart, E. 89, 446
 Eichler, M. 33, 648, 652, 659, 661, 663–665
 Eidus, D. M. 523
 Eilenberg, S. 680, 687, 688, 693
 Einstein, A. 55, 154, 470
 Eisenstein, F. G. M. 5, 7, 630, 631, 636, 661
 Elgot, C. C. 136
 Elliott, P. D. T. A. 749, 763, 769, 774
 Ellis 461
 Ellison, F. 742
 Ellison, W. J. 742
 Elman 669, 669
 Encke 355
 Engel, A. 486
 Enneper 176
 Ennola, V. 446
 Epstein, P. 24, 43, 693
 Eratosthenes 742
 Erdős, P. 93 - 96, 100, 102, 749, 750, 752, 758, 763, 764, 767, 773–775
 Ershov, A. P. 135, 136, 138
 Ersov, Yu. 737

 Erzberger, M. 29
 Escherich 443
 Estermann, T. 759, 760
 Eudoxus 423
 Euklid 232, 348, 422, 423
 Euler, L. 84, 150, 270, 332, 338, 340, 343–345, 361, 393, 426, 427, 442, 588, 630, 636, 674, 742, 756, 776
 Everett, R. R. 133

 F
 Faber, G. 362, 389, 396, 408, 431
 Fabry 396
 Faddeeva, W. N. 114
 Fagnano, C. G. di 636
 Falkhoff, A. 144
 Faltings, G. 759, 777
 Fano, R. M. 133
 Farkas, J. 102, 103, 450
 Fary, I. 343
 Fatou 393, 399
 Fechner, G. Th. 782, 786–788
 Federer 199, 205
 Federico 674
 Fedorov, E. S. 435, 451
 Feferman, S. 725
 Feigl, G. 283
 Fejr 368, 392, 410, 414
 Feld, D. E. 119
 Feldman, N. I. 771
 Felgner, U. 739
 Feller, W. 24, 465, 473, 475, 488
 Fenchel, W. 26, 343, 451
 Fermat, P. 459, 742, 777
 Fiedler 6
 Finn 164, 197
 Fischer, E. 24, 503
 Fischer, G. 345, 355
 Fischer, J. 47
 Fisher, R. A. 783, 785, 786, 789, 790, 792, 797, 798, 801, 802, 804
 Fleming 205
 Flicker, Y. Z. 652
 Flohr, F. 342
 Flowers, T. H. 140
 Flum 739
 Focke 49

 Folkman 88, 96
 Foradori, E. 35
 Ford 101
 Forrester, J. W. 133
 Forsythe, G. 114
 Foucher de Careil, Com-
 te 674
 Fourier, J.-B.-J. 450
 Fouvry, E. 772, 777
 Fraenkel, A. 24, 729
 Frank 407
 Frchet 461
 Fredholm, I. 153, 166, 502
 Freedman, M. H. 677
 Frege, G. 115, 717–720, 722, 738
 Frehse 194, 202, 203
 Frenet 340, 354
 Freudenthal, H. 334, 486, 522
 Friedberg 736
 Friedman, A. 192, 203
 Friedman, H. 726
 Friedman, S. 736
 Friedman, W. F. 123
 Friedrichs, K. O. 24, 48, 62, 158, 175, 176, 188–190, 217, 278, 286, 492, 510, 529
 Frobenius, F. G. 11, 150, 336, 353, 354, 393, 472, 538, 539, 544, 547–549, 554, 562, 644, 760
 Fromme, T. 140
 Fuchs, W. H. J. 6, 361, 474, 750
 Fueter, R. 640
 Fujita 212, 213
 Fulkerson 99, 101, 105
 Furch, R. 235
 Fürstenberg, H. 96, 775
 Furtmüller 40, 41
 Furtwängler, Ph. 639, 646, 660

 G
 Gacs 465
 Gaier, D. 370, 375
 Gale 93, 103
 Galilei, G. 426
 Galois 478
 Galton, F. 458, 783, 784, 788
 Gani 800

- Garding, L. 158, 190, 525
Gardner, M. 123
Garnier 177
Garregno-Ostrowski 369
Garrick 412
Gauss, C. F. 154, 155, 232,
270, 327, 336, 339, 340,
345, 347, 350, 351, 353,
361, 430, 436, 444, 459,
498, 588, 629, 630, 632,
635, 636, 638, 647, 742,
743, 749, 760, 761, 782,
790, 792
Gebelein, H. 803
Geiringer, H. 24, 26, 280,
282, 286, 792, 793
Gelfand, I. M. 643
Gelfond, A. O. 762, 771
Gentzen, G. 724, 725
Geppert, H. 811
Geppert, M.-P. 802, 803, 811
Gerber 485
Gerhardt 164
Geri, P. 752
Gericke, H. 338
Gerling 436
Germain, S. 345, 777
Gershgorin, S. A. 125
Gerwin, P. 436
Giaquinta 193, 194
Gibbs, J. W. 467
Gilbarg 192
Gill, S. 134
Giorgi, de 191, 193, 199,
201–204
Girshick 801
Giusti 193, 194, 199
Givens, W. 114
Glimm, J. 529
Gluck, H. 342
Gnedenko, B. V. 457, 478,
483
Gödel, K. 109, 128, 135, 723,
724, 727, 729, 730,
733–738
Gokhberg, I. C. 508
Goldbach, C. 674
Goldfang 735
Goldfeld 761
Goldstine, H. H. 131, 132,
134
Goldston, D. A. 779
Golusin 370, 375, 388
Gomory 105
Goodman 391
Göpel, A. 637
Gordan, P. 156, 450
Gordon, I. 682
Gosset, W. S. 783, 789, 797,
805
Goßler 13
Goursat 365
Graf, U. 804
Graham 96
Gram, J. P. 769
Granville, A. 777
Grassmann, H. 6, 117, 150,
336, 352
Grauert, H. 337, 759
Graunt, J. 782
Graustein, W. C. 342
Gray 696
Green, J. 137
Greene, R. E. 349
Grell, H. 24, 41
Groemer, H. 446
Gronwall 387
Gross, W. 449, 761
Grotmeyer, K. P. 347
Grothendieck, A. 617, 620,
690, 766
Grötzsch, H. 24, 40, 41, 362,
363, 375–381, 384, 413
Grünbaum, B. 442, 451
Grunsky 36, 363, 375, 377,
378, 388, 389
Grzegorzcyk 734
Gulliver 195
Gumbel, E. J. 24, 26, 36, 45,
55, 787, 795, 802
Günther, P. 188
Güntsch, F. R. 140
Gupta, R. 773
Guthrie 119
Gutknecht 415
Gutzmer 6
Guy, K. 742
H
Haack, W. 188
Haar, A. 182, 307, 450
Haas, K. 121
Hadamard, J. 152, 158, 349,
351, 396, 399, 402, 428,
431, 500, 511, 631, 741,
745
Hadwiger, H. 429, 436, 437,
442, 446, 451
Haefliger, A. 337
Hagelin, B. 122
Hahn, H. 115, 450
Hjek 800
Hajs, G. 434, 746
Haken 92
Halász, G. 774
Halberstam, H. 761, 764, 769
Hales 96
Hall, M. 243
Hall, P. 84, 88, 98, 99
Halley, E. 782
Halmos 801
Hamann, C. 120
Hamburger 24, 70
Hamel, G. 52, 64, 67, 69, 283
Hamilton, W. R. 152, 194,
524
Hammerstein, A. 283
Hamming, R. W. 107, 133
Hanani 97
Haneke 761
Hans-Gill, R. J. 447
Hanzawa, M. 124
Harary 86
Harder 668
Hardt 204
Hardy, G. H. 69, 392, 642,
750, 751, 755–758, 762,
762, 763, 768, 775, 779
Harish-Chandra 650
Harriott, T. 133
Hart, T. P. 139
Hartley, H. O. 105, 794, 811
Hartman, P. 349
Hartmanis 109
Hartmann 67
Hartogs, F. 24, 38, 372
Hartree, D. R. 125
Hasenjaeger 730
Hasse, H. 32, 33, 37, 39, 43,
46, 50–52, 59, 65, 67, 70,
538, 539, 544, 545, 564,
639, 645, 646, 658–661,
766
Haupt 65
Hausdorff, F. 24, 33, 39, 40,
84, 396, 439, 462, 471,
472, 788
Hayes, P. J. 144
Hayman 401

- Heath-Brown, D. R. 754,
 755, 773, 776, 777, 779
 Heawood, P. J. 91
 Hebern, E. H. 121
 Hecke, E. 49, 56, 60, 63, 64,
 607, 608, 629, 633, 634,
 640–645, 647, 661, 749
 Hecke, H. 761
 Heegaard, P. 679, 680, 683
 Heegner 761
 Heesch, H. 92
 Heffter 91, 365
 Heijenoort, J. van 734
 Heil, E. 439
 Heilbronn, H. 26, 761
 Heine 6
 Heinhold, J. 810, 811
 Heins 371, 399
 Heinz, E. 188, 199, 200, 202
 Heisenberg 469
 Hellingner, E. 24, 43, 70
 Hellwig, G. 158, 188, 512
 Helly, E. 443, 450
 Helm 461
 Helmberg, G. 752
 Helmert, F. R. 786, 790, 792,
 811
 Helmholtz 11, 237
 Hempel 401, 403
 Henn, H. W. 696, 702
 Henniart, G. 650
 Henrici, P. 313, 318
 Hensel, K. 24, 63, 659, 747
 Hensley, D. 779
 Heppner, E. 774
 Herbrand, J. 128, 135, 138,
 733–735
 Herglotz, G. 27, 32, 33, 158,
 175, 179, 190, 217, 271,
 347, 349, 400, 448, 472,
 473, 488
 Hering 98
 Hermes, H. 134
 Hermite 744
 Hertz, P. 24, 26, 128
 Herzog, J. 779
 Hesse 6
 Hessenberg, G. W. 233, 240
 Heubeck 484
 Heyting, A. 727
 Heyting 334
 Hilbert, D. 8, 10, 27–29,
 36, 55–58, 109, 152, 153,
 156, 166, 168, 169, 175,
 179, 180, 182, 188,
 232–236, 240, 253, 257,
 276, 341, 348, 350, 351,
 361, 368, 370, 375, 423,
 431, 434, 436–438, 448,
 449, 451, 459, 460, 496,
 502, 503, 507–509, 512,
 514, 587, 593, 637, 639,
 658–660, 721–726, 732,
 738, 741, 744, 747, 756,
 774, 775
 Hildebrand, A. 194, 749, 774
 Hill, L. S. 123
 Hille, E. 519
 Hindman 96
 Hirschfeld, H. O. 794, 811
 Hirzebruch, F. 76, 77, 689,
 690
 Hitchcock 102
 Hjelmslev, J. 249
 Hlawka, E. 434, 445, 746,
 752, 753
 Hock, A. 761
 Hodge, W. V. D. 151, 336
 Hoefding, W. 802, 803, 805,
 811
 Hoffman, F. 105, 121
 Hofreiter, N. 434
 Hoheisel, G. 754
 Hölder, E. 153, 174, 175,
 187, 188
 Hölder, O. 185, 217, 440
 Hölder 55, 393
 Hollerith, H. 116, 117, 121,
 124
 Hooley, C. 768, 769, 773,
 773
 Hopf, E. 38, 155, 175, 180,
 181, 183, 206, 209–211,
 213–215, 218, 475–477,
 508, 526
 Hopf, H. 325, 334, 342, 350,
 426, 475, 679, 682,
 684–686
 Hopf, L. 24, 37
 Hopfenberg, A. W. H.
 von 137
 Höpfner 14
 Hopkins, H. 119
 Hopkins, M. 689, 706
 Hopkins, W. W. 119
 Hopper, G. M. 136
 Hörmander, L. 158, 190, 508,
 525
 Householder, A. S. 114
 Hove, van 153
 Howe, R. 651
 Hu 107
 Huber, P. 808
 Huffman, D. A. 107, 141
 Humbert, P. 33
 Hündorf, W. 131
 Hurd, C. C. 141
 Hurewicz 684
 Hurwitz, A. 11, 13, 139, 362,
 396, 415, 641, 667, 691,
 744, 747, 778
 Huskey, H. D. 133
 Hutchinson, J. I. 769
 Huxley, D. 754
 Huygens, C. 338, 520
- I
- Ihara 648, 652
 Ikebe, T. 522
 Ikehara, S. 763
 Illieff 395
 Indlekofer, K. H. 774
 Ingham, A. E. 754, 763, 776,
 779
 Iverson, K. E. 144
 Ivic, A. 756
 Iwaniec, H. 750, 754, 772,
 773
 Iwasawa 747
- J
- Jackowski 700
 Jacob 669
 Jacobi, C. G. J. 5, 150, 171,
 342, 343, 354, 361, 630,
 637, 661
 Jacobs, K. 482, 488
 Jacquet, H. 615, 643
 Jaensch 57, 58
 Jäger, G. 726
 Jäger 194
 Jahnz, E. 120
 Janko 98
 Janov, Y. J. 136
 Jarnik, V. 779
 Jeans 156
 Jellet 347
 Jellinek-Mercedes, E. 121

- Jenkins 375, 377, 381, 401
 Jensen, J. L. W. V. 441
 Jensen, R. 730, 731
 Jentzsch 396
 Jessen, B. 436, 437
 Jevons, W. S. 116, 124
 Jewett 96
 Joachimsthal 24, 26
 John, F. 26, 158, 190, 492, 497, 529, 531
 Johnson, R. B. 105, 141
 Jones, B. W. 666
 Jordan, C. 117, 333, 341, 353, 469, 675, 682, 683
 Jörgens, K. 158, 198, 492, 508, 529
 Jost 195, 209
 Julia 398
 Jürgens 333
 Jurkat 395, 776
 Jutila, M. 771
- K
- Kabat'Janski, G. A. 445
 Kac, M. 471, 497
 Kaczorowski, J. 754
 Kähler, E. 150, 174, 354
 Kahrimanian, H. G. 138
 Kakutani, S. 450
 Kalf, H. 158, 516
 Kalmar 734
 Kaluza, T. 33
 Kamae 465
 Kamke, E. 24, 48–50, 52, 54, 72–74, 286, 289, 463, 747
 Kampen, E. R. van 683, 684
 Kan 699
 Kantorovic, L. V. 102, 451
 Kaphengst, H. 136
 Kaplansky 669
 Kappos, D. A. 482, 488
 Karacuba, A. A. 773, 776
 Karamata, J. 395, 763
 Kärber, G. 796
 Karhunen 108
 Karlin 482
 Kármán, Th. von 37, 55, 70
 Karmarkar, N. 104, 146
 Karzel, H. 243
 Kaschine, S. 121
 Kasiski, F. W. 115
 Kasuga, T. 510
- Ktai, I. 767
 Kato, T. 185, 212, 213, 523, 529
 Kaul 194
 Kay, A. 144
 Kazhdan, D. A. 652
 Keisler 739
 Keller, O.-H. 434
 Kellerer, H. 805, 809
 Kellogg 185
 Kelvin, W. 125, 443, 498
 Kemeny, J. G. 144
 Kempe, A. 91, 92
 Kempermann, J. H. B. 753
 Kendall, D. 479
 Kepler, J. 338, 355, 425–427
 Kerber 90
 Kerckhoff, A. 121
 Kershner, R. B. 437
 Kersten, J. 483
 Kervaire 691
 Kesten 482
 Keynes 95
 Khachian 104
 Khinchine 468, 472, 748
 Kiefer, J. 801, 807
 Kiepert 6
 Kilburn, T. 141
 Kilby, J. St. C. 145
 Killing, W. 117
 Kirchberger, P. 443
 Kirchgässner 206
 Kirchhoff, G. 524
 Kirkman 84
 Klainerman, S. 158, 529, 531
 Kle, V. 451
 Klee 105
 Kleene, S. 128, 129, 135, 727, 734–737
 Kleiber, J. 125
 Klein, F. 2, 5–7, 9–16, 27, 57, 58, 156, 235, 271, 276, 330, 353, 361, 486, 641, 676, 744
 Kleitman 94
 Klose, A. 34, 802
 Klötzler 153
 Knapowski, S. 754
 Knebusch, M. 667, 668
 Kneser, A. 151, 152
 Kneser, H. 27, 67, 72, 335, 478, 479, 666, 677, 806, 809
- Kneser, M. 445, 446, 659, 661, 663–665, 761
 Knopp, K. 16, 50, 52, 57, 59, 60, 62, 63, 65, 67–69, 356, 362, 393, 394
 Knuth, D. E. 107, 136, 770
 Koch, H. A. 121
 Koch, H. von 502
 Kochen, S. 738, 773
 Kochmann, S. D. 696, 704
 Kodaira, K. 189, 507
 Koebe, P. 38, 362, 368, 369, 371, 372, 375, 377, 378, 387, 411, 413
 Kohn 215, 216
 Koksma 768
 Kolesnik, G. 750
 Koller, S. 802–805, 811
 Kolmogorow 460, 461, 465, 483, 682, 801
 Komls 483
 Kondrachov, V. I. 513
 König, D. 91, 99, 100, 105
 Koopmans 102
 Koppelberg, B. 731
 Korin, A. N. 430, 435, 444
 Korn, A. 175, 176, 218, 501
 Korn, W. 24, 26, 122
 Körner, O. 757, 762
 Korobov, N. M. 755
 Koszul, J. L. 336
 Kotelnikov 108
 Kottwitz, R. 652
 Kowalewskaja, S. 150
 Kowalski, R. 144
 Kracke 484
 Kraft 62
 Krahn, E. 431
 Král, J. 502
 Kramers, H. A. 524
 Krauss 13
 Krein, M. G. 508, 450
 Kreisel, G. 727, 736
 Kreyszig, E. 347
 Krickeberg, K. 480–482
 Kries, J. von 458, 488
 Kripke 736
 Kronecker, L. 5 - 7, 11, 16, 156, 333, 630, 631, 639, 641, 650, 721, 744
 Krull, W. 40, 62, 538, 539, 546, 547, 558
 Krupp, F. A. 13

- Kruskal 94, 105
 Kryha, A. von 121, 122
 Krylov 199
 Kubilius, J. 749, 763
 Kubota, T. 429, 747
 Kuga 648, 652
 Kuhn 103, 764
 Kullback, S. 123
 Kummer, E. E. 5, 6, 155,
 355, 591, 592, 630–632,
 744, 776
 Kunen 731
 Künneth, H. 680
 Kunze, W. 122
 Kupradze, V. D. 522
 Kuratowski 84, 91, 95
 Kütting, H. 485
 Kutzko 650
 Kuzmin 760
 Kuznetsov, N. V. 649
- L
- Ladyschenskaja 158, 191,
 196, 215
 Lagarias, J. C. 769
 Lagrange, J. L. 150, 427,
 444, 742
 Laguerre 262
 Lam, T. Y. 669
 Lancret 338
 Landau, E. 24, 26–28,
 31–33, 55, 58, 277, 362,
 363, 373, 391, 392, 398,
 399, 401–403, 631, 633,
 642, 659, 744, 746,
 748–750, 761, 763, 779
 Landin, P. J. 136
 Lang, S. 766, 771
 Langlands, R. P. 601, 609,
 612, 615, 643, 649, 651,
 652
 Lannes, J. 699–702
 Laplace 84, 459, 784, 793
 Lashof, R. 349, 697
 Laventieff 369
 Lavrik, A. F. 756, 764
 Lax, P. 158, 190, 270, 523,
 525, 526, 529
 Le Cam, L. 793, 800, 801,
 811
 Le Veque, W. J. 742, 752, 768
 Lebesgue, H. 153, 169, 170,
 218, 502
- Ledermann 478
 Lee, C. 442
 Leeb 96
 Leech, J. 98, 445
 Lefschetz, S. 680, 685, 686
 Legendre, A.-M. 426, 428,
 588, 630, 631, 660, 674,
 742, 744, 778
 Lehman 93
 Lehmann, E. L. 801, 808
 Lehmann, N. J. 141, 482
 Lehmann, R. S. 753, 769
 Lehmer, D. H. 123, 769
 Lehto 374
 Leibnitz, G. W. 84, 115, 118,
 119, 126, 133, 236, 270,
 338, 426, 674, 739
 Leicht 667
 Leichtweiss 439
 Leis, R. 158
 Leissner 251
 Lemaire 194
 Lenards, Ph. 47
 Lenstra, H. W. 110, 770
 Lenz, H. 245, 667
 Leontief 102
 Leopoldt, H. W. 747
 Lepage 153
 Leray 176, 186, 187, 197,
 211, 214
 Lesley 195
 Levenstein, V. I. 445
 Levi 206
 Levinson, N. 755
 Lévy, P. 465, 477, 760
 Lewi, F. W. 24, 70
 Lewis, D. 773
 Lewy, H. 24, 26, 158, 175,
 179, 180, 200, 219, 278,
 448, 351, 511, 529
 Lexis, W. 782, 784 - 786,
 788, 790, 791
 Lhuillier, S. 332, 674
 Lichtenstein, L. 24, 38,
 155–157, 170, 173–176,
 180, 181, 185, 186, 190,
 206, 219, 362, 365, 411,
 501
 Lie, S. 150, 151, 219, 262
 Liebermann, P. 345
 Liebmann, H. 24, 46, 348,
 350, 423, 448
 Liesche 237
- Lietzmann, W. 69, 486
 Linde, C. 12, 13
 Lindelöf 369, 374, 771
 Lindemann 741, 744, 775
 Linder, A. 804
 Lingenberg, R. 243
 Linnik, Y. V. 762, 765, 769,
 771
 Lionnet 748
 Lions 190, 211
 Liouville 367, 744, 750
 Lippisch 47
 Lipps, G. F. 788
 Lipschitz, R. 6, 336, 353,
 354, 501
 Lischke, N. 124
 Littlewood, J. E. 391, 394,
 395, 750, 751, 753–757,
 762, 763, 768–779
 Ljapunov, A. A. 136, 153,
 172, 173, 175
 Loeb 739
 Love 108, 457, 478
 Loewy 24
 Lomnicki 461
 Looman 365, 366
 Lorenz 667
 Löscher 392, 396
 Loschmidt 467
 Lovsz 93, 105, 110
 Löwenheim, L. 719, 738
 Löwner 388, 390
 Ludgate, P. E. 127
 Ludwig, G. 469
 Ludwig, D. 526
 Luhn, H. P. 137
 Lukacs 482
 Lukasiewicz, J. 128
 Lukoff, H. 141
 Lullus, R. 118
 Lunsberg, F. 484
 Lune, J. van der 769
 Lüneburg 98
 Lüroth 333
 Lusin 392, 399, 400
 Lüst, R. 76
- M
- Maass, H. 642, 643, 649
 Maass, W. 737
 Macbeath, A. M. 446
 Macdonald, I. G. 446
 MacFarlane, A. 116

- MacLane, S. 687, 693
MacLaurin 171
Macmahon 90
Magenes 190
Mahler, K. 26, 445, 446, 746,
747, 762, 768
Mahowald 696
Maier, H. 754
Major 483
Malgrange 190
Malmquist 406
Malysev, A. V. 447
Manegold 11, 12
Mangoldt, H. von 746, 755,
778
Mani, P. 442
Manin, J. 759
Mann, H. B. 761, 800
Mannheim, V. M. A. 115
Mapes, D. C. 769
Marbe, K. 470, 471
Margulis 102
Markov, A. 136, 458, 472,
473, 783, 788
Marquand, A. 124
Martin-Löf, P. 465
Maruhn 174
Masser 772
Masuda 215
Mathias, M. 131
Matijasevic, Y. 736, 775
Matthes, K. 483
Mattuck, A. 766
Mauborgne, J. O. 122
Mauchly, J. W. 131, 134
Mauclaire, J. 774
Max 108
Maxwell, J. C. 466, 467
Mayer, A. 6, 7, 150
Mayer, W. 680
Mazur, S. 450
McCarthy, J. 134, 136, 137
McClure 700
McEliece 107
McGibbon 695
McMullen, P. 438, 442, 446
Mecke, J. 483
Mehrtens, H. 50, 56, 69
Meissel 744, 769
Menchoff 366, 474
Menger, K. 84, 91, 99, 101,
105, 246
Mensel 37
Mergelyan 410
Merkurjev 668, 669
Meschkowski, H. 413
Metropolis, N. C. 134
Meusnier 343–345
Meyer, C. O. 171
Meyer, P. A. 482
Meyers, N. G. 510
Michael, E. 439
Middleton 108
Mikhlin, S. G. 508
Miller, H. 698–700, 705
Miller, V. S. 769, 770
Milman, D. 450
Milnor, J. 343, 678, 689, 690,
691, 697
Minding, F. 340, 346–348,
355, 448
Minkowski, H. 10, 102, 103,
154, 176, 178, 179, 262,
352, 431–434, 438,
443–445, 451, 658, 660,
661, 664, 744, 746
Minty, G. 93, 105, 451
Miranda 193
Mirsky 99
Mises, R. von 16, 24, 26, 53,
55, 156, 275, 280–282,
286, 461–464, 487, 787,
792–794, 797, 799, 802
Mitchell, S. 705
Mitsui, T. 762
Mittag-Leffler 393
Möbius, A. F. 84, 262,
330–332, 352, 353, 675
Modica, G. 193
Moivre, de 84
Molsen, K. 36
Monge, G. 150, 338, 344,
345
Monna, A. F. 747
Monro 807
Montel 372–374
Montgomery, H. L. 755, 757,
765, 773, 776, 779
Moore, G. E. 145, 696
Morava, J. 691, 692
Morawetz, C. S. 526
Mordell, L. J. 447, 642, 746,
759, 779
Moreno, C. 649
Morgenstern, O. 102, 103,
138, 451, 801
Mori 385
Morley 738
Morrey, C. B. 158, 181,
190–193, 219
Morris 366
Morrison, M. A. 770
Mosco 203
Moser, L. 111
Moser, J. 191, 192, 776
Mostowski 734
Motohashi, Y. 755
Motzkin, Th. 105, 442, 450
Moufang, R. 42–44, 233,
242
Mozzochi, C. J. 750, 754
Mucknik 736
Mueller, J. 776
Mues 407
Mukhopadhyaya, S. 342
Müller, C. 52, 188, 506, 522
Müller, D. W. 465
Müller, J. O. 24, 48
Müller, P. H. 483
Müntz 175
Münzner, H. 803, 809, 812
Murty, R. 773
Muskhelishvili, N. I. 508
Myhill, J. 727
N
Nagell, T. 773
Nakasima, M. 124
Nash 99, 100, 191
Nehari 413
Neisendorfer 695, 698
Nesetril 96
Nesterenko 772
Netto 83
Netuka, I. 502
Neugebauer, O. 24, 26, 40,
41, 53
Neumann, C. 153, 166, 492,
499, 502
Neumann, J. von 62, 65, 102,
103, 131, 132, 134, 138,
246, 247, 293, 450, 451,
468, 496, 516, 517, 729,
799
Nevalinna, R. 33, 363, 371,
386, 398, 402–404
Neveu 482
Newell, A. 135, 137–139

- Newman, D. J. 756
 Newman, M. H. A. 140, 677
 Newton, I. 170, 171, 270, 338, 520
 Neyman, J. 783, 797, 798, 801, 808
 Neymann, J. 480, 482
 Niederreiter, H. 752
 Nieman, C. W. 125
 Nirenberg, L. 155, 158, 176, 179, 190, 192, 199, 215, 216, 349, 351, 512
 Nishida 698
 Nitsche, J. C. C. 164, 176, 195, 198, 203
 Nobs 650
 Noether, E. 24, 26–28, 30, 32, 63, 84, 151, 538, 539, 542, 544–546, 552, 557, 558, 646, 679, 803
 Noether, F. 24, 26, 37, 507
 Noether, G. E. 803
 Noether, M. 6
 Noll 144
 Nomizu, K. 336
 Nomura, Y. 695
 Notbohm 700
 Novak, B. 779
 Novikoff 460, 461, 471, 472
 Novikov, S. P. 689, 703, 736
 Novoselov, E. V. 774
 Nowak, J. 125
 Noyce, R. N. 145
 Nygaard, K. 144
 Nyquist 105
- O
- O'Meara, T. 666
 Odhner, W. T. 120
 Odlyzko, A. M. 769, 776
 Ohtsuka 369
 Oikawa 381
 Oleinik, O. 526
 Oliver 700
 Oresme, N. 338
 Osenberg, W. 72
 Osgood 362, 368, 369, 372
 Osserman 195
 Ostmann, H. 756
 Ostrowski 373, 396, 403, 411, 747
- P
- Page 772
 Painlevé 55
 Paley, R. E. A. C. 461, 757
 Palm, C. 132
 Palmer 86
 Pappos von Alexandria 240
 Pappus 424
 Parker 97
 Parmalee, D. D. 115
 Pascal, B. 84, 115, 119
 Pasch, M. 231–233, 236, 253
 Patterson, S. J. 776
 Peano, G. 117, 333, 717, 719
 Pearson, D. B. 523
 Pearson, E. S. 783, 797, 798
 Pearson, K. 782–784, 793, 796
 Peaucellier, C. 124
 Peirce, C. S. 115, 124
 Perlis, A. J. 135, 137
 Perrin, J. 469
 Perron, O. 38, 52, 53, 59, 60, 62–64, 165, 167, 220, 285, 393, 434, 472
 Peschl, E. 39
 Péter, R. 136
 Petersen 108
 Peterson, F. P. 705
 Petersson, H. 641, 779
 Petri, C. A. 141
 Petrovski 192
 Petty, W. 782
 Petzval, J. 117
 Peyerimhoff, A. 776
 Pfaff, J. F. 150, 353
 Pfanzagl, J. 481, 805, 807, 808
 Pflüger 371, 384
 Philippon 775
 Phillips, E. W. 131
 Phillips, R. S. 158, 523
 Piatetski-Shapiro, I. I. 643, 651, 652
 Picard 364, 374, 402
 Pick 398
 Pickert, G. 243
 Piesch, J. 124
 Piloty, H. 132
 Piloty, R. 141
 Pinkall, U. 345
 Pinl, M. 3, 24, 40, 41
 Pinski 102
- Pintz, J. 753, 754
 Plancherel, M. 468
 Planck, M. 154, 467
 Platek 736, 737
 Platon 425
 Plaut 796
 Plemelj 153
 Plessner, A. I. 399, 400
 Plunkett 367
 Plutarch 338
 Poel, W. L. van der 141
 Pogorelov, A. V. 179, 349, 351, 448
 Pohlers, W. 726
 Poincaré, J. H. 150, 153, 156, 333, 352, 371, 431, 442, 449, 499, 641, 673, 675, 676, 678, 679, 681, 707, 721
 Poisson 459
 Pollaczek, F. 24, 26, 280, 282, 286, 474, 475, 792, 793
 Plya, G. 85, 86, 396, 431, 473, 474, 757, 762
 Pomeranch 770
 Pomerene, J. H. 141
 Pommerenke 369, 370, 391
 Pompeiu 439
 Ponce, G. 529
 Pontrjagin, L. S. 336, 688
 Popken 746, 762
 Port 474
 Pösch, H. 126
 Pöschl, T. 24, 48, 405
 Possel, R. de 354, 375
 Post, E. L. 128, 734, 736
 Pöttker 484
 Poulsen 450
 Powers, J. 121
 Prachar, K. 764
 Prager 24, 26
 Prandtl, L. 14–16, 70, 72, 271, 272, 275
 Pratt 790
 Prawitz, D. 138
 Prestel, A. 669, 738, 739
 Priddy, S. 697, 698
 Prim 94
 Pringsheim, A. 21, 362, 365, 392
 Prinz, D. G. 139
 Priwalow 399, 400

- Prüfer 334
 Prym, F. 368, 500, 511
 Puppe, D. 700
 Putnam, H. 774
- Q**
 Quetelet, A. 782
 Quevedo, L. T. 127, 132, 139
 Quillen 689, 702
- R**
 Rabin 109, 110
 Rademacher, H. 24, 26, 37, 366, 439, 474, 756, 757, 759
 Radó, F. 252
 Rado, R. 95, 100
 Radó, T. 220, 347
 Radó 177, 182, 334, 335, 368, 370
 Radon, J. 342, 443, 450, 506, 691
 Ralston, W. 526
 Ramanujan, S. 641, 642, 751, 756, 758, 763, 767, 779
 Ramsey, F. P. 84, 95, 720
 Rankin, R. A. 446, 754
 Ravenel 705
 Rayleigh, Lord 431
 Read 367
 Rechnitzer, A. 120, 127
 Reckziegel, H. 355
 Redfield 87
 Reed 158
 Reeve, J. A. 446
 Reichel 484
 Reichenbach, H. 488
 Reidemeister, K. 24, 38, 235
 Reifenberg 205
 Reincke, J. 739
 Reissner, H. J. 16
 Rellich, F. 32, 158, 175, 188, 405, 493, 513, 522
 Remak, R. 24, 26, 366, 746, 747
 Rembs, E. 347
 Remmert 408
 Remus, H. 139
 Rényi, A. 101, 102, 482, 488, 763, 765
 Reuter, G. E. H. 477 - 479
 Reye 6
- Rham, G. de 150, 336, 337
 Riccati, J. 426
 Ricci 354
 Richards, I. 779
 Richelot 6
 Richert, H. E. 749, 750, 764, 806, 808, 809, 812
 Richter, W. 480, 481, 483
 Ridout, D. 768
 Riebesell, P. 484, 486
 Riecke, E. 10
 Rieger, G. J. 748
 Riele, H. J. te 776
 Riemann, G. F. B. 11, 155, 162, 165, 167, 171, 172, 176, 237, 327-329, 336, 337, 342, 345, 352, 354, 361, 364, 368, 498, 499, 631-633, 637, 675, 678, 743, 744, 746
 Rienhardt, K. 437
 Riesel, H. 139
 Riesz, F. 154, 368, 393, 503, 515
 Ringel, G. 91, 92
 Rinow 36
 Ritz, W. 274
 Robbins, H. 801, 807
 Roberts, L. G. 141
 Robinson, A. 738, 760
 Robinson, J. A. 136, 138, 144, 735, 774, 775
 Robinson, R. M. 139
 Robinson, von 90
 Robinson 399, 739, 740
 Rochester, N. 141
 Rödl 96
 Rogers, C. A. 444, 446
 Rogosinski 24
 Roquette, P. 760, 766
 Rosenbloom, P. C. 135
 Rosenlicht 334
 Rosenthal, A. 24, 45, 46, 70, 372, 468
 Ross, D. T. 137
 Rosseland, S. 125
 Rosser, J. B. 762, 769
 Rota 88, 98, 111
 Roth, K. F. 753, 757, 761, 764, 767, 768, 775
 Roth-Ridout 747
 Rothe 24
 Rothschild 96
- Routh 415
 Royden 195
 Rudio, F. 270
 Rumely 770
 Run, C. J. 764, 775
 Runge, C. 10, 15, 16, 29, 270, 271, 274, 407
 Runge, I. 524, 796
 Rush 445
 Russell, B. 95, 719, 720, 738
 Rutishauser, H. 135, 136
 Ryll-Mardzewski 734
 Ryser 98
 Ryskov, S. S. 446
- S**
 Sachs, H. 483
 Sacks 736
 Sacksteder 349
 Saint-Venant, A. J. C. B. de 431
 Sali 779
 Sampson 194
 Samuel, A. L. 139
 Santal, L. A. 446, 449
 Sard, A. 337
 Sathe 749
 Sauer, R. 126, 132
 Savage 801
 Saxer, W. 805
 Scarpellini, B. 728
 Schäffler, O. 116, 117, 133
 Schanuel 775
 Scharlau, W. 667, 668
 Schauffler, R. 122
 Schecher, H. 137
 Schensted 90
 Scherbius, A. 121
 Schering 10
 Scherk 761
 Scheutz, P. G. 116
 Schickard, W. 119
 Schiffer 376, 389
 Schilling, E. 127
 Schinzel 761
 Schlaefeli 6
 Schläfli, L. 330, 442, 675
 Schlesinger, L. 24
 Schmetterer, L. 480, 481, 805, 809
 Schmid, H. L. 33
 Schmidt, A. 259
 Schmidt, E. 16, 36, 55, 69,

- 153, 173, 174, 205, 283,
 334, 341, 363, 403, 449,
 503, 753
 Schmidt, F. K. 62, 64, 765
 Schmidt, R. 356
 Schmidt, W. M. 446, 747,
 753, 766, 768, 776, 777
 Schmincke, U. W. 158, 516
 Schneider, R. 429
 Schneider, Th. 762, 763, 771
 Schnirelmann, L. 761
 Schnorr, C. P. 110, 465, 770
 Schöbe, W. 747
 Schoen 194
 Schoenfeld, L. 762, 769
 Schoenflies 333, 341
 Schönfinkel, M. 129
 Schönhage, A. 108, 110, 770
 Schottky 401, 413
 Schreier 661
 Schreyer, H. T. 140
 Schröder, E. M. 87, 117, 243,
 257, 258, 719
 Schrödinger, E. 53, 469, 514
 Schubert, F. T. 138
 Schulte, E. 444
 Schultze 55
 Schulz, G. 803
 Schur, A. 341
 Schur, F. 235
 Schur, I. 24, 33, 35, 52, 70,
 95, 398, 415, 538–540,
 544, 549–552, 554, 757
 Schuster 115
 Schütter, K. 725
 Schützenberger, M. P. 135
 Schwabhäuser, W. 738
 Schwartz, L. 695, 702
 Schwarz, H. A. 6, 10, 11,
 153, 165, 203, 290, 341,
 361, 368, 397, 430, 431,
 449, 499
 Schwarz, W. 764, 774
 Scott, C. A. 9
 Scott, D. S. 136, 730, 737
 Seeber, L. A. 430
 Seeber, R. E. 134
 Seely, R. 514
 Segal, G. 690, 698
 Seifert, H. 46, 47, 677, 683,
 684, 686, 708
 Selberg, A. 643, 652, 749,
 763, 764
 Selfridge, J. L. 139
 Selick, P. 696
 Selling, E. 120
 Serre, J.-P. 612, 619, 693,
 695, 699, 704, 779
 Serrin, J. 187, 197, 213, 214,
 510
 Shahidi, F. 649
 Shannon, C. E. 102,
 105–108, 124, 133, 139,
 139
 Shaw, J. C. 135, 137, 138
 Shelah, S. 96, 100, 739
 Sheldon, J. W. 133
 Shepherdson, J. C. 136
 Shestakov, V. J. 124
 Shewhart 796
 Shibata, Y. 531
 Shidlovski, A. B. 759
 Shiffman 187, 208
 Shimura, G. 640, 646–648
 Shrikhande 97
 Sidelnikov, V. M. 445
 Siebenmann, L. C. 678
 Siegel, C. L. 24, 33, 35, 39,
 42–44, 60, 445, 446, 651,
 659, 660, 661, 743, 746,
 752, 755, 757, 759–762,
 768, 772
 Sierpinski, W. 749, 750
 Simon, H. A. 137, 138, 139,
 158, 204
 Simon, M. 486
 Simons 199
 Simpson, S. G. 726
 Simpson, T. 426
 Singer, I. M. 336, 690, 692
 Sittler, F. J. 122
 Skewes, S. 753
 Skolem, T. 719, 732, 738,
 751
 Skubenko, B. F. 447
 Slagle, J. R. 138
 Slepian 105
 Sloane, N. J. A. 98, 445
 Smale, S. 451, 677
 Smirnow 139, 399
 Smith, J. 689, 706
 Smoller, J. 526
 Smoluchowski, M. 469
 Sobirov, A. S. 764
 Sobolev, S. L. 313, 446, 510
 Sobolevskij 213
 Solomon 88, 89
 Solonnikov 191, 212, 214,
 215
 Solovay, R. 730
 Sommerfeld, A. 55, 271, 524
 Sommerville, D. M. Y. 442
 Sörensen, K. 243
 Spanier, E. 682, 703
 Spearman, C. 788, 796, 812
 Spector, C. 727, 728
 Sperner, E. 68, 93, 254, 255
 Spilker, J. 774
 Spitzer 476, 482
 Sprindjuk, V. 768
 Springer, F. 57
 Springer, T. A. 666
 Spruck 199
 Srinivasan, S. 773
 Stallings, J. R. 677
 Stampacchia 191
 Stange, K. 804, 810, 812
 Stanley, R. 88 - 90, 442
 Stark, H. 761
 Stasheff, J. D. 697
 Staudt, C. von 675
 Stearns 109
 Steenrod, N. 335, 687, 688,
 693, 696, 708
 Steffen, K. 202, 204, 205
 Steiger, O. 120, 126
 Stein, C. 408, 801
 Steinbuch, K. 138
 Steiner, J. 84, 355, 429, 430
 Steinhaus 26, 461
 Steinig, J. 764
 Steinitz, E. 103, 426, 428,
 431, 439, 440, 442, 709
 Steinmetz 407
 Stepanov, A. 766
 Sternberg 24
 Stibitz, G. R. 131, 133
 Stiefel, E. 114, 304, 686
 Stiemke, E. 450
 Stigler 790
 Stirling 84
 Stolz, O. 44
 Stone, M. H. 474, 516
 Störmer, C. 272
 Strachey, C. S. 136, 139
 Strassen, V. 108, 110, 482,
 483, 770, 808
 Strauss, W. 526
 Strebel 371

- Strecker, H. 805
 Stridsberg 747
 Struwe 195, 209, 216
 Student 789, 790
 Studt, H. 121
 Stumpf, K. 458
 Sturgis, H. E. 136
 Sturmfels, B. 442
 Suck, R. 767
 Sullivan 699
 Sundstrand, O. 119
 Süß, W. 69 - 75, 235
 Süßmilch, J. P. 782
 Sydler, J. P. 436, 449, 59
 Szabo, S. 437
 Szs, O. 24, 42, 392
 Szegő, G. 24, 396, 409, 431
 Szekeres 95
 Szele 101
 Szemerédi, E. 96, 775
 Szusz, P. 760
- T
- Takagi, T. 639, 646, 598
 Takeuti, P. 726
 Taniyama, Y. 640, 646, 647, 649
 Tarry 111
 Tarski, A. 136, 738
 Tate, J. 643, 747, 766
 Taton, R. 344
 Tatum, L. 133
 Tatzuzawa, T. 756, 757, 762
 Tauber, A. 24, 394, 791, 812
 Tauschek, G. 121, 127
 Taussky-Tod, O. 313
 Taylor 369
 Tchebycheff 744, 773
 Tchudakov, N. G. 762
 Te Riele, H. J. J. 753, 769
 Teichmüller, O. 32, 33, 35, 363, 377, 378, 385, 386, 399, 403-405
 Temple, G. 291
 Tenenbaum, G. 749
 Thanigasalam 757
 Theaitetos 424
 Themas, C.-X. 115
 Theodorsen 412
 Theon 424
 Thom, R. 688, 689
- Thompson, A. J. 127
 Thomson, W. 125
 Thorup 437
 Threlfall, W. 43, 46
 Thue, A. 750, 751, 766
 Tichonow, A. N. 313
 Tietze, H. 677
 Tieze 38
 Tintner, G. 800, 805
 Tippet 792
 Titchmarsh, E. C. 755, 765, 769, 779
 Toda, H. 696, 704, 705
 Todd, J. 127, 313, 478
 Toeplitz, O. 24, 40, 70
 Tom Dieck, T. 697
 Tomi 203, 207, 208
 Tonelli, L. 169, 170, 220
 Tornier, E. 32, 33, 35, 39, 60-62, 64
 Tornier, W. H. E. 463, 464, 488
 Tóth, F. 443, 444, 451
 Trefethen 415
 Trefftz, E. 62, 284, 286
 Trinks, F. 127
 Troelstra, A. S. 727
 Trohimcuk 366, 367
 Tromba 207, 208
 Troncut 119
 Trudinger 192
 Tschebyscheff 84, 473
 Tschudakov 755
 Tschuprov, A. 783, 788, 811, 812
 Tsutsumi, Y. 531
 Tucker 103, 107
 Tukey 108, 110
 Turn, P. 96, 752, 754, 763, 770, 775
 Turing, A. M. 109, 129, 134, 134, 138, 140, 734, 769
 Turkstra 747
 Tusnady 483
 Tutte, W. T. 87, 91, 93, 99
- U
- Uhlenbeck 194
 Uhlmann, W. 480
 Ullrich 386, 403, 405
 Ulrich 62, 63
 Uralzewa 191, 196
- V
- Vahlen, K. T. 778
 Vahlen, Th. 34, 35, 42, 61, 62, 68, 69
 Valiron 398, 399, 402
 Vallée Poussin, C. J. G. N. de la 306, 307, 339, 631, 741, 745
 Valtat, R. 120, 130, 131
 Van Aardenne 753
 Van der Corput 764
 Vaughan, R. C. 755, 757, 772, 775
 Veblen, O. 335, 675, 681
 Vekua, I. N. 508, 522
 Veldkamp 252
 Velte 153, 207
 Venkov, B. A. 437
 Venn, J. 116
 Vernam, G. S. 122
 Viaris, G. de 122
 Vietoris, L. 353, 439
 Vigenre 122
 Ville, J. 464, 465
 Vinogradov, A. I. 764, 772
 Vinogradov, I. 752, 755, 757, 762
 Virtanen 374
 Vitali 373
 Volkmann, B. 768
 Volterra, V. 153, 502
 Voronoi, G. F. 431, 435, 444, 749, 750
 Voss, K. 349
- W
- Waerden, B. L. van der 38, 46, 62, 63, 84, 95, 96, 479, 646, 803, 805, 806, 812
 Wagner 91
 Wagstaff, S. 777
 Wald, A. 464, 465, 471, 798-801, 803
 Waldschmidt, M. 772, 775
 Walfisz, A. 772, 779
 Wall 689
 Wallis 84, 111
 Walsh 368, 410
 Walter, E. 804
 Walter, J. 516
 Walter, W. G. 139
 Walter 158

- Walther, A. 20, 126, 284, 286
 Wang, H. 735
 Warings 748
 Warschawski 26
 Washington, L. 777
 Watson, G. L. 342, 459, 666, 758
 Weaver, W. 139
 Weber, C. 275
 Weber, E. 744, 803
 Weber, H. 6, 10, 11, 117, 598
 Weber, W. 32, 34–36, 42, 46, 59
 Weber 361, 639, 650
 Wegner, U. 32, 46, 47, 73
 Weichold, G. 676
 Weichselberger, K. 805
 Weierstrass, K. 5, 6, 11, 16, 117, 151, 152, 156, 168, 176, 305, 341, 361, 364, 368, 372, 396, 430, 499, 745, 746, 775
 Weil, A. 446, 612, 646, 649, 666, 747, 758, 759, 766
 Weingarten, J. 350, 355
 Weinstein 24, 26
 Weisspfenning, V. 738
 Weizenbaum, J. 137
 Weizsäcker, C. F. von 469
 Welchman, W. G. 140
 Weldon, W. 783
 Weniger 62
 Wente, H. C. 202, 51
 Wentzel, G. 524
 Werner, H. 202, 309, 313
 Werner, P. 506
 Wesch, L. 47
 Weyl, 24, 26, 30, 32, 48, 53, 56, 63, 65, 55, 69, 103, 150, 151, 153, 175, 176, 178, 179, 188, 189, 211, 329, 334–337, 348, 353, 355, 362–364, 371, 448, 496, 506, 507, 511, 514, 522, 643, 644, 721, 726, 747, 752
 Wheatstone, C. 116
 Wheeler, D. J. 134
 Whitehead, A. N. 720, 738
 Whitehead, G. W. 684
 Whitehead, J. H. C. 94, 95, 335, 694, 703, 708
 Whitney, H. 91, 92, 335, 337, 342, 686, 696
 Whittaker 108
 Whyburn 367
 Widman 194
 Wiegner 194
 Wieland 36
 Wielandt 395
 Wiener, H. 234
 Wiener, N. 139, 461, 469, 476, 508, 512, 763
 Wijngaarden, A. van 144
 Wilcox, C. H. 513, 523
 Wilcoxon, F. 788
 Wilkerson 700
 Wilkes, M. V. 133
 Wilkinson, J. H. 114
 Willers, F. 24, 38, 73
 Williams 99, 100
 Wills, J. M. 446
 Wilson 97, 705
 Wilton, J. 642
 Wiman 460
 Winkler, W. 804, 809
 Winograd, S. 136
 Winter, D. T. 769
 Wintner, A. 349
 Wirsing, E. 760, 764, 767, 768, 774
 Wirth, N. E. 144
 Wirtinger 443
 Witt, E. 33, 49, 98, 659, 661–663, 667
 Witten, E. 690
 Wittgenstein 95
 Wittich 363, 386, 403–406, 412
 Wittstein, Th. 784
 Wolfart 650
 Wolfowitz, J. 471, 482, 801, 803, 807, 808
 Wolkerson 702
 Wood, B. D. 127
 Woods, A. C. 447
 Wu, H. 349
 Wulff, G. 451
 Wundt, W. 788
 Wüst, R. 158, 516
 Wüstholtz, G. 775
 Wynn-Williams, C. E. 131
 Y
 Yates 97
 Yngve, V. H. 144
 Yohe, J. M. 769
 Yosida, K. 519
 Young, A. 90, 91
 Z
 Zabrodsky 699, 702
 Zagier 761
 Zarati 700
 Zarembo, S. 511
 Zassenhaus, H. 447
 Zeeman, E. C. 677
 Zeidler, E. 206, 207
 Zemanek, H. 141, 146
 Zenodorus 424
 Zermelo, E. 24, 40, 41, 728, 729
 Zeuner, G. 784
 Ziegenbein, P. 33
 Ziegler, M. 738, 739
 Zitomirskii, O. 435
 Zolotarev, E. I. 430, 435, 444
 Zorn, M. 49
 Zuse, K. 118, 120, 124, 130–134, 136, 139, 140
 Zygmund, A. 461, 508