Arch. math. Logik 15 (1972), 129—145.

BEWEISTHEORETISCHE CHARAKTERISIERUNG EINER ERWEITERUNG DER GRZEGORCZYK-HIERARCHIE*

Von HELMUT SCHWICHTENBERG in Münster/Westfalen

Wir betrachten die folgende Hierarchie von Klassen rekursiver Funktionen: Für $\alpha < \varepsilon_0$ sei $\mathfrak{E}_\alpha$ der elementare Abschluß von F_α mit $F_0(a) := 2^a$, $F_{\alpha+1}(a) := F_\alpha^a(a)$, $F_\lambda(a) := F_{\lambda[a]}(a)$ (F_α^a a-te Iterierte von F_α, $\lambda[a]$ a-tes Glied einer kanonisch gewählten Fundamentalfolge für λ). Für diese Funktionenklassen sind eine Reihe von Charakterisierungen bekannt (s. [8] und die dort angegebene Literatur); insbesondere ergibt sich, daß $\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathfrak{E}_\alpha$ für $\lambda = \omega$ (ω^ω, ε_0) die Klasse der primitiv rekursiven (mehrfach rekursiven, ε_0-rekursiven oder ordinal rekursiven) Funktionen ist. Wir geben hier eine weitere, beweistheoretische Charakterisierung der $\mathfrak{E}_\alpha$ für $\omega \leqq \alpha < \omega^\omega$.

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist ein Ergebnis von Kreisel [5], daß nämlich die in der klassischen Zahlentheorie Z beweisbar totalen Funktionen (etwa im Sinne von $\vdash \exists y\, T(k_e, x, y)$, T Kleene's T-Prädikat) mit den ε_0-rekursiven Funktionen zusammenfallen. Kino gab in [4] einen Beweis dieses Resultats, in dem sie (in einer Richtung) auf einen formalen Beweis für $\exists y\, T(k_e, k_m, y)$ Gentzen's Reduktionsverfahren aus [2] anwendete und mit Hilfe von Gentzen's Ordinalzahlzuordnung zu formalen Beweisen zeigte, daß das Reduktionsverfahren abbricht und auf einen Beweis führt, aus dem sich ein n mit $T(k_e, k_m, k_n)$ leicht ablesen läßt. Es liegt nun nahe, nach einem Zusammenhang zwischen der Größe der zugeordneten Ordinalzahlen, die man als Kompliziertheitsmaß für Beweise in Z auffassen kann, und den Niveaus der $\mathfrak{E}_\alpha$-Hierarchie zu suchen. Gentzen's Ordinalzahlzuordnung erweist sich jedoch dafür als ungeeignet.

Wir betrachten hier gewisse Teilsysteme der intuitionistischen Zahlentheorie, die sich als intuitionistische Sequenzenkalküle mit implikations- und negationsfreien Formeln formalisieren lassen. Eine leichte Modifikation des Gentzen'schen Reduktionsverfahrens ergibt auch in diesem Fall ein Berechnungsverfahren für Beispiele zu formal bewiesenen Existenzsätzen. Die spezielle Form der Kalküle gestattet dann eine verfeinerte Zuordnung von Ordinalzahlen $< \omega_3 := \omega^{\omega^\omega}$ zu Beweisen, die im folgenden Sinne zu der $\mathfrak{E}_\alpha$-Hierarchie paßt: Von den betrachteten formalen Systemen sei ein beliebiges fest gewählt. $\mathfrak{B}_\alpha$ bestehe aus allen Funktionen, die darin beweisbar total (s. §1) sind mit einer dem Beweis zugeordneten Ordinalzahl $< \omega^{\alpha+1}$. Dann ist $\mathfrak{B}_\alpha = \mathfrak{E}_\alpha$ für $\omega \leqq \alpha < \omega^\omega$, und $\bigcup_{\alpha<\omega} \mathfrak{B}_\alpha$ besteht aus den primitiv rekursiven Funktionen. Weiter ergibt sich als Korollar, daß eine Funktion n-fach rekursiv ist genau dann, wenn sie beweisbar total ist mit höchstens n übereinander-

* Eingegangen am 6. 9. 1971.

liegenden Induktionen im Beweisbaum; insbesondere fällt also die Klasse aller beweisbar totalen Funktionen mit der Klasse der mehrfach rekursiven Funktionen zusammen.

Im §1 beschreiben wir die betrachteten formalen Systeme und zeigen, daß jede mehrfach rekursive Funktion darin beweisbar total ist. Für Ableitungen abgeschlossener Existenzformeln definieren wir im §2 einen Reduktionsschritt, und zwar weitgehend parallel zu Gentzen's [2]; Kenntnisse dieser Arbeit werden hier vorausgesetzt. Im §3 wird eine Zuordnung von Ordinalzahlen zu Ableitungen angegeben und damit gezeigt, daß stets endlich viele der Reduktionsschritte aus §2 auf eine Ableitung führen, aus der sich ein Beispiel der abgeleiteten Existenzformel leicht ablesen läßt. Im §4 schließlich werden einerseits die Ordinalzahlen ermittelt, die den Totalitätsbeweisen aus §1 für die Funktionen aus $\mathfrak{E}_\alpha$ $(\alpha < \omega^\omega)$ zugeordnet sind, andererseits wird das Reduktionsverfahren aus §2 als Berechnungsverfahren interpretiert und – unter Verwendung von Sätzen aus [8] und [9] – seine Kompliziertheit im Sinne der $\mathfrak{E}_\alpha$-Hierarchie bestimmt. Das liefert dann leicht die oben angegebenen Resultate.

§1. Wir beschreiben zunächst die hier betrachteten formalen Systeme. Es handelt sich um intuitionistische Sequenzenkalküle (nach Gentzen [1]) mit implikations- und negationsfreien Formeln, die Konstanten für die Null, die Nachfolgerfunktion und zahlentheoretische Prädikate enthalten und über eine Induktionsregel verfügen. Wir zeigen dann, daß in geeigneten solchen Systemen alle mehrfach rekursiven Funktionen beweisbar total sind.

Grundzeichen sind $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$, $\rightarrow$, abzählbar viele Variable $x, y, z, \ldots$, eine Individuenkonstante 0 (für die Zahl Null), eine einstellige Funktionskonstante N (für die Nachfolgerfunktion) und mindestens abzählbar viele Prädikatenkonstante $P, Q, R, \ldots$. Jeder Prädikatenkonstanten sei eindeutig ein zahlentheoretisches Prädikat zugeordnet; wir setzen voraus, daß für jedes primitiv rekursive Prädikat eine Prädikatenkonstante zur Verfügung steht. *Terme* t, *Primformeln* und *Formeln* $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ werden wie üblich definiert, Formeln jedoch ohne Implikationen und Negationen, also nur mit den logischen Zeichen $\vee$, $\vee$, $\forall$, $\exists$. *Sequenzen* sind Zeichenreihen der Form $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \rightarrow \psi$ mit $n \geqq 0$; die Folge $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ heißt *Antezedens*, ψ *Sukzedens* der Sequenz. Im Fall eines leeren Antezedens schreiben wir für die Sequenz $\rightarrow \psi$ auch kurz ψ. Endliche (evtl. leere) Folgen von Formeln bezeichnen wir mit $\Gamma, \Delta, \ldots$. Freies Vorkommen von Variablen in Formeln wird wie üblich definiert; $\mathfrak{F}(\varphi)$ sei die Menge der in φ frei vorkommenden Variablen und $\mathfrak{F}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) := \mathfrak{F}(\varphi_1) \cup \cdots \cup \mathfrak{F}(\varphi_n)$. φ heißt *abgeschlossen*, wenn $\mathfrak{F}(\varphi) = \emptyset$. $\varphi_{x_1, \ldots, x_n}[t_1, \ldots, t_n]$ bezeichne die Formel, die aus φ entsteht, wenn alle freien Vorkommen von $x_1, \ldots, x_n$ simultan durch $t_1, \ldots, t_n$ ersetzt werden. Wir verwenden die Bezeichnung $\varphi_{x_1, \ldots, x_n}[t_1, \ldots, t_n]$ nur dann, wenn kein freies Vorkommen eines x_i in φ im Wirkungsbereich eines Quantors steht, dessen Variable in t_i vorkommt. Die Terme 0, N0, NN0, ... nennen wir *Zahlterme* und bezeichnen sie mit $k_0, k_1, k_2, \ldots$; man beachte, daß jeder abgeschlossene Term ein Zahlterm ist.

Axiome

(1) logische. $\varphi \to \varphi$.

(2) mathematische. Alle (bei der vorausgesetzten Interpretation) wahren Sequenzen $\Gamma \to \varphi$ aus Primformeln, deren Prädikatenkonstanten primitiv rekursive Prädikate bezeichnen[1]. Beliebig viele weitere wahre Sequenzen aus Primformeln.

Regeln

(1) logische

(a) Strukturregeln

(Vd) $\dfrac{\Gamma \to \psi}{\varphi, \Gamma \to \psi}$ Verdünnung

(Zz) $\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \to \psi}{\varphi, \Gamma \to \psi}$ Zusammenziehung

(Vt) $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \to \chi}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \to \chi}$ Vertauschung

(S) $\dfrac{\Gamma \to \varphi \quad \varphi, \Delta \to \psi}{\Gamma, \Delta \to \psi}$ Schnitt

(b) Verknüpfungsregeln

$(\to \wedge)$ $\dfrac{\Gamma \to \varphi \quad \Gamma \to \psi}{\Gamma \to \varphi \wedge \psi}$ $(\vee \to)$ $\dfrac{\varphi, \Gamma \to \chi \quad \psi, \Gamma \to \chi}{\varphi \vee \psi, \Gamma \to \chi}$

$(\wedge \to)_1$ $\dfrac{\varphi, \Gamma \to \chi}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \to \psi}$ $(\wedge \to)_2$ $\dfrac{\psi, \Gamma \to \chi}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \to \chi}$ $(\to \vee)_1$ $\dfrac{\Gamma \to \varphi}{\Gamma \to \varphi \vee \psi}$ $(\to \vee)_2$ $\dfrac{\Gamma \to \psi}{\Gamma \to \varphi \vee \psi}$

$(\to \forall)$ $\dfrac{\Gamma \to \varphi}{\Gamma \to \forall x \varphi}$ falls $x \notin \mathfrak{F}(\Gamma)$ $(\exists \to)$ $\dfrac{\varphi, \Gamma \to \psi}{\exists x \varphi, \Gamma \to \psi}$ falls $x \notin \mathfrak{F}(\Gamma, \psi)$

$(\forall \to)$ $\dfrac{\varphi_x[t], \Gamma \to \psi}{\forall x \varphi, \Gamma \to \psi}$ $(\to \exists)$ $\dfrac{\Gamma \to \varphi_x[t]}{\Gamma \to \exists x \varphi}$

(2) mathematische

(Ind) $\dfrac{\varphi, \Gamma \to \varphi_x[N_x]}{\varphi_x[0], \Gamma \to \varphi_x[t]}$ falls $x \notin \mathfrak{F}(\Gamma)$ Induktion.

Die verschiedenen hier betrachteten formalen Systeme können sich also nur durch die zugelassenen Prädikatenkonstanten und mathematischen Axiome unterscheiden. Für alles folgende sei ein solches System $\mathfrak{S}$ fest gewählt.

Wir nennen eine r-stellige zahlentheoretische Funktion f (in $\mathfrak{S}$) *beweisbar total*, wenn es eine Formel φ mit genau den freien Variablen $x_1, \ldots, x_r, y$ gibt, die bzgl.

[1] Vgl. die Bemerkung am Schluß von §1.

$x_1, \ldots, x_r, y$ den Graphen von f definiert (d. h. bei der vorausgesetzten Interpretation ist $\varphi_{x_1, \ldots, x_r, y}\,[k_{m_1}, \ldots, k_{m_r}, k_n]$ genau dann wahr, wenn $f(m_1, \ldots, m_r) = n$), und für die $\exists y \varphi$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist.
Es soll jetzt gezeigt werden, daß alle mehrfach rekursiven Funktionen beweisbar total sind. Dabei gehen wir aus von folgender Darstellung der mehrfach rekursiven Funktionen ([6, 8]): Für $\alpha < \omega^\omega$ sei H_α definiert durch

$$
\begin{aligned}
&H_0(a) = a + 1\,, \\
&H_{\alpha+1}(a) = H_\alpha^a(a) \qquad (H_\alpha^a = a\text{-te Iterierte von } H_\alpha)\,, \\
&H_\lambda(a) = H_{\lambda[a]}(a)\,,
\end{aligned}
$$

wobei $\lambda[a]$, $a = 0, 1, 2, \ldots$, eine kanonisch gewählte Fundamentalfolge für die Limeszahl λ ist: Stellt man λ dar als $\omega^r a_r + \omega^{r-1} a_{r-1} + \cdots + \omega^i a_i$ mit $i > 0$, $a_i > 0$, so sei

$$\lambda[a] = \omega^r a_r + \cdots + \omega^i (a_i - 1) + \omega^{i-1} a\,.$$

Definiert man $\mathfrak{E}_\alpha$ als den Einsetzungsabschluß von $\mathfrak{E} \cup \{H_{\alpha+2}\}$, falls $\alpha < \omega$, und von $\mathfrak{E} \cup \{H_\alpha\}$, falls $\omega \leqq \alpha$, ($\mathfrak{E}$ Klasse der elementaren Funktionen)[2], so läßt sich die Klasse $\mathfrak{M}$ der mehrfach rekursiven Funktionen gewinnen als

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha < \omega^\omega} \mathfrak{E}_\alpha\,.$$

Offenbar genügt es, folgendes zu zeigen:

Behauptung 1. Jede primitiv rekursive Funktion ist beweisbar total.

Behauptung 2. Jedes H_α, $\alpha < \omega^\omega$, ist beweisbar total.

Behauptung 3. Ist $f(\mathfrak{a}) = g(h_1(\mathfrak{a}), \ldots, h_r(\mathfrak{a}))$ und sind $g, h_1, \ldots, h_r$ beweisbar total, so auch f[3].

Beweis 1: Zu jeder primitiv rekursiven Funktion f gibt es eine Prädikatenkonstante G_f, die durch den Graphen von f interpretiert wird. Wir zeigen durch Induktion über den Aufbau der primitiv rekursiven Funktionen, daß stets $\exists y G_f(x_1, \ldots, x_r, y)$ ableitbar ist. Für die Ausgangsfunktionen ist das trivial. Sei $f(\mathfrak{a}) = g(h_1(\mathfrak{a}), \ldots, h_r(\mathfrak{a}))$. Zur Vereinfachung nehmen wir $r = 2$, $\mathfrak{a} = a$ an. Man betrachte die Ableitung[4]

$$
\frac{\overset{1}{G_{h_1}(x, z_1)}\,, \quad \overset{1}{G_{h_2}(x, z_2)}\,, \quad \overset{1}{G_g(z_1, z_2, y)} \to G_f(x, y) \qquad 0}{\underset{1}{\exists z_1 G_{h_1}(x, z_1)}, \ \underset{1}{\exists z_2 G_{h_2}(x, z_2)}, \ \underset{1}{\forall z_1, z_2 \exists y G_g(z_1, z_2, y)} \to \exists y G_f(x, y) \qquad 5}
$$

[2] Die hier und in [8] definierten Funktionenklassen $\mathfrak{E}_\alpha$ stimmen überein. Dies folgt leicht aus den Resultaten von [8] und folgender Abschätzung der dort definierten Funktionen F_α durch die H_α: Es ist $F_\alpha(a) \leqq H_{\alpha+2}(a)$ für $\alpha < \omega$, $a \geqq 1$, und $F_\alpha(a) + 2 \leqq H_\alpha(a + 2)$ für $\omega \leqq \alpha$. Zum Beweis zeigt man zunächst genau wie in [8, p. 66] einfache Monotonieeigenschaften der H_α. Damit erhält man dann die Abschätzungen durch einfache Induktionen nach α.

[3] Mit kleinen Frakturbuchstaben bezeichnen wir Variablentupel.

[4] Ableitungen werden i. a. in stark abgekürzter Form mitgeteilt. — Die hier und im folgenden über oder unter Antezedensformeln und neben Sequenzen geschriebenen Ordinalzahlen werden später erklärt.

Unter Verwendung der nach Induktionsvoraussetzung existierenden Ableitungen für die Antezedensformeln erhält man mit Schnitten eine Ableitung für $\exists y G_f(x, y)$. Sei $f(0, \mathfrak{b}) = g(\mathfrak{b}), f(a + 1, \mathfrak{b}) = h\,(f(a, \mathfrak{b}), a, \mathfrak{b})$. Zur Vereinfachung nehmen wir wieder $\mathfrak{b} = b$ an. Man betrachte die Ableitung

$$\dfrac{\dfrac{{}_0\,\overset{1}{G_g(y, z)} \to G_f\,(0, y, z)}{{}_1\,\underset{1}{\exists z G_g(y,z)} \to \exists z G_f(0,y,z)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{G_f\,(x, y, z)},\quad \overset{1}{G_h\,(z, x, y, u)} \to \quad G_f\,(Nx, y, u) \quad {\scriptstyle 0}}{\exists z G_f(x, y, z), \forall z, x, y\, \exists u G_h(z, x, y, u) \to \exists z G_f(Nx, y,z) \quad {\scriptstyle 5}}}{\underset{1}{\overset{1}{\exists z G_f(0,y,z)}}, \underset{\omega}{\overset{1}{\forall z,x,y\, \exists u G_h(z,x,y,u)}} \to \exists z G_f(x,y,z) \quad {\scriptstyle \omega}}}{\underset{1}{\exists z G_g(y,z)}, \underset{\omega}{\forall z,x,y\, \exists u G_h(z,x,y,u)} \to \exists z G_f(x,y,z) \quad {\scriptstyle \omega+1}}$$

Da nach Induktionsvoraussetzung wieder Ableitungen für die Antezedensformeln existieren, erhält man mit Schnitten eine Ableitung für $\exists z G_f\,(x, y, z)$.
Beweis 2: Sei

$$G_r\,(a_r, \ldots, a_0, k, a, b) :\leftrightarrow H^k_{\omega^r a_r + \ldots + \omega^0 a_0}(a) = b\,.$$

Wir zeigen zunächst, daß alle G_r primitiv rekursiv sind. Nach Definition der H_α und wegen $H_\alpha(a) \geqq a$ (Beweis durch Induktion über α) gilt

$$\begin{array}{ll} G_r\,(a_r, \ldots, a_0, k, a, b) & \\ \leftrightarrow b = a & \text{falls } k = 0\,, \\ \leftrightarrow \exists x_{x \leq b}\,(G_r(a_r, \ldots, a_0\,, k - 1, a, x) \wedge G_r(a_r, \ldots, a_0, 1, x, b)) & \text{falls } k \geqq 2\,, \\ \leftrightarrow G_r(a_r, \ldots, a_0 - 1, a, a, b) & \text{falls } k = 1, a_0 > 0\,, \\ \quad \ldots. & \\ \leftrightarrow G_r(a_r, \ldots, a_i - 1, a, 0, \ldots, 0, 1, a, b) & \text{falls } k = 1,\ a_0 = \cdots = a_{i-1} = 0, \\ \quad \ldots. & \qquad\qquad\qquad a_i > 0\,, \\ \leftrightarrow b = a + 1 & \text{falls } k = 1,\ a_0 = \cdots = a_r = 0\,. \end{array}$$

Daraus folgt, daß sich

$$\prod_{i \leqq c} P_i^{\chi_{G_r}(a_r, \ldots, a_0, k, (i)_0, (i)_1)}$$

(χ_{G_r} ist die charakteristische Funktion von G_r) durch eine $r + 3$-fache ungeschachtelte Rekursion definieren läßt, also primitiv rekursiv ist. Also ist auch G_r primitiv rekursiv. Eine zugehörige Prädikatenkonstante bezeichnen wir ebenfalls mit G_r.
Als nächstes werden Ableitungen für

$$\forall x\, \underset{\omega^{\omega^i}}{\exists y G_r}\,(\mathfrak{u}, v, \mathfrak{O}, 1, x, y) \to \exists y G_r\,(\mathfrak{u}, Nv, \mathfrak{O}, 1, x, y) \qquad {\scriptstyle \omega^{\omega^i} + r_i}$$

konstruiert, und zwar durch Induktion über die Länge i des Tupels $\mathfrak{O}$ von Nullen; 1 steht für $N0$. $i = 0$: Zunächst erhält man

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{G_r\,(\mathfrak{u}, v, w, x, z)}, \qquad \overset{1}{G_r\,(\mathfrak{u}, v, 1, z, y)} \to \quad G_r\,(\mathfrak{u}, v, Nw, x, y) \quad {\scriptstyle 0}}{\exists z G_r\,(\mathfrak{u}, v, w, x, z), \forall x\, \exists y G_r\,(\mathfrak{u}, v, 1, x, y) \to \exists z G_r\,(\mathfrak{u}, v, Nw, x, z) \quad {\scriptstyle 3}}}{\underset{1}{\overset{1}{\exists z G_r\,(\mathfrak{u}, v, 0, x, z)}}, \underset{\omega}{\overset{1}{\forall x\, \exists y G_r\,(\mathfrak{u}, v, 1, x, y)}} \to \exists z G_r\,(\mathfrak{u}, v, x, x, z) \quad {\scriptstyle \omega}}$$

Unter Verwendung der Ableitungen

$$\begin{array}{cl} G_r(\mathfrak{u}, v, 0, x, x) & 0 \\ \hline \exists z G_r(\mathfrak{u}, v, 0, x, z) & 0 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{cl} \overset{1}{G_r}(\mathfrak{u}, v, x, x, z) \to \quad G_r(\mathfrak{u}, Nv, 1, x, z) & 0 \\ \hline \underset{1}{\exists z G_r}(\mathfrak{u}, v, x, x, z) \to \exists y G_r(\mathfrak{u}, Nv, 1, x, y) & 1 \end{array}$$

ergibt sich mit Schnitten

$$\forall x\, \exists y G_r(\mathfrak{u}, v, 1, x, y) \to \exists y G_r(\mathfrak{u}, Nv, 1, x, y) \quad {\scriptstyle \omega + 1}$$

$i \Rightarrow i + 1$: Durch Fortsetzen der nach Induktionsvoraussetzung existierenden Ableitung erhält man

$$\begin{array}{cl} \overset{\omega^{\omega^i}}{\forall x\, \exists y G_r}(\mathfrak{u}, v, w, \mathfrak{O}, 1, x, y) \to \quad \exists y G_r(\mathfrak{u}, v, Nw, \mathfrak{O}, 1, x, y) & \omega^{\omega^i} + r_i \\ \hline \forall x\, \exists y G_r(\mathfrak{u}, v, w, \mathfrak{O}, 1, x, y) \to \quad \forall x\, \exists y G_r(\mathfrak{u}, v, Nw, \mathfrak{O}, 1, x, y) & \\ \hline \forall x\, \exists y G_r(\mathfrak{u}, v, 0, \mathfrak{O}, 1, x, y) \to \quad \forall x\, \exists y G_r(\mathfrak{u}, v, w, \mathfrak{O}, 1, x, y) & \\ \hline \underset{\omega^{\omega^{i+1}}}{\forall x\, \exists y G_r}(\mathfrak{u}, v, 0, \mathfrak{O}, 1, x, y) \to \forall w\, \forall x\, \exists y G_r(\mathfrak{u}, v, w, \mathfrak{O}, 1, x, y) & \omega^{\omega^{i+1}} \end{array}$$

Unter Verwendung der Ableitungen

$$\begin{array}{cl} G_r(\mathfrak{u}, v, x, \overset{1}{\mathfrak{O}}, 1, x, y) \to \quad G_r(\mathfrak{u}, Nv, 0, \mathfrak{O}, 1, x, y) & 0 \\ \hline \forall x \forall w\, \exists y G_r(\mathfrak{u}, v, \underset{1}{w}, \mathfrak{O}, 1, x, y) \to \exists y G_r(\mathfrak{u}, Nv, 0, \mathfrak{O}, 1, x, y) & 2 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{cl} \exists y G_r(\mathfrak{u}, v, \overset{1}{w}, \mathfrak{O}, 1, x, y) \to \quad \exists y G_r(\mathfrak{u}, v, w, \mathfrak{O}, 1, x, y) & 0 \\ \hline \forall w \forall x\, \exists y G_r(\mathfrak{u}, v, \underset{1}{w}, \mathfrak{O}, 1, x, y) \to \forall x \forall w\, \exists y G_r(\mathfrak{u}, v, w, \mathfrak{O}, 1, x, y) & 2 \end{array}$$

ergibt sich mit Schnitten

$$\underset{\omega^{\omega^{i+1}}}{\forall x\, \exists y G_r}(\mathfrak{u}, v, 0, \mathfrak{O}, 1, x, y) \to \exists y G_r(\mathfrak{u}, Nv, 0, \mathfrak{O}, 1, x, y) \quad {\scriptstyle \omega^{\omega^{i+1}} + 4}$$

Weiter konstruieren wir Ableitungen für

$$\exists y G_r(k_{a_r}, \ldots, k_{a_0}, 1, x, y) < \omega^{\alpha+1}, \quad \alpha := \omega^r a_r + \cdots + \omega^0 a_0,$$

und zwar durch Induktion über $s := a_r + \cdots + a_0$. $s = 0$:

$$\begin{array}{cl} G_r(\mathfrak{O}, 1, x, Nx) & 0 \\ \hline \exists y G_r(\mathfrak{O}, 1, x, y) & 0 \end{array}$$

$s > 0$: Sei etwa $a_0 = \cdots = a_{i-1} = 0$, $a_i > 0$. Aus der Induktionsvoraussetzung und mit den oben konstruierten Ableitungen erhält man die gesuchte Ableitung:

$$< \omega^{\alpha+1} \quad \left.\begin{array}{c} \exists y G_r(k_{a_r}, \ldots, k_{a_i - 1}, \mathfrak{O}, 1, x, y) \\ \hline \forall x\, \exists y\, G_r(k_{a_r}, \ldots, k_{a_i - 1}, \mathfrak{O}, 1, x, y) \end{array}\right\} (*)$$

$$\frac{(*)\ \forall x \exists y G_r(k_{a_r}, \ldots, \overset{\omega^{\omega^i}}{k_{a_i-1}}, \mathfrak{O}, 1, x, y) \to \exists y G_r(k_{a_r}, \ldots, k_{a_i}, \mathfrak{O}, 1, x, y) \quad {}_{\omega^{\omega^i}+r_i}}{\exists y G_r(k_{a_r}, \ldots, k_{a_i}, \mathfrak{O}, 1, x, y) \ {}_{<\omega^{\alpha+\omega^i+1}}, \ \alpha := \omega^r a_r + \cdots + \omega^i(a_i - 1)}$$

Jetzt ergibt sich leicht, daß jedes H_α beweisbar total ist: Sei $G_{\mathrm{H}\alpha}$ eine Prädikatenkonstante, die durch den Graphen von H_α interpretiert wird. (Man beachte, daß die Graphen der H_α primitiv rekursiv sind, da alle G_r primitiv rekursiv sind). Ist $\alpha = \omega^r a_r + \cdots + \omega^0 a_0$, so erhält man aus

$$\frac{G_r(k_{a_r}, \ldots, \overset{1}{,} k_{a_0}, 1, x, y) \to \quad G_{\mathrm{H}\alpha}(x, y) \quad {}_{0}}{\exists y G_r(k_{a_r}, \ldots \underset{1}{,} k_{a_0}, 1, x, y) \to \exists y G_{\mathrm{H}\alpha}(x, y) \quad {}_{1}}$$

und der zuletzt konstruierten Ableitung durch Schnitt eine Ableitung für

$$\exists y G_{\mathrm{H}\alpha}(x, y) \quad {}_{<\omega^{\alpha+1}}$$

Beweis 3: Seien $\psi, \chi_1, \ldots, \chi_r$ Formeln, die bzgl. der Variablentupel $(z_1, \ldots, z_r, y)$, $(x_1, \ldots, x_n, z_1), \ldots, (x_1, \ldots, x_n, z_r)$ die Graphen von $g, h_1, \ldots, h_r$ definieren. Dann definiert $\varphi :\equiv \exists z_1, \ldots, z_r (\psi \wedge \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_r)$ den Graphen von f, und aus einer Ableitung von

$$\underset{<\omega}{\exists y \psi}, \underset{<\omega}{\exists z_1 \chi_1}, \ldots, \underset{<\omega}{\exists z_r \chi_r} \to \exists y \exists z_1, \ldots, z_r (\psi \wedge \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_r) \quad {}_{<\omega}$$

erhält man mit den nach Voraussetzung existierenden Ableitungen für die Antezedensformeln durch Schnitte eine Ableitung von $\exists y \varphi$.

Bemerkung: Läßt man, wie wir es getan haben, Konstanten für alle primitiv rekursiven Prädikate und alle damit formulierbaren mathematischen Axiome zu, so bilden die Axiome (genauer: ihre Kodenummern bei einer Standardkodierung) eine vollständige Π_1^0-Menge. Es ist aber leicht möglich, mit einer rekursiven, sogar primitiv rekursiven Axiomenmenge in den Totalitätsbeweisen für die mehrfach rekursiven Funktionen auszukommen. Dies ergibt sich aus dem geführten Beweis und daraus, daß es eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{E}$ gibt aus der – zusammen mit den Identitätsfunktionen $U_n^i(a_1, \ldots, a_n) = a_i$ $(1 \leq i \leq n)$ – jede elementare Funktion durch Einsetzungen definierbar ist [7].

§2. Wir kommen nun zum Beweis, daß jede (in $\mathfrak{S}$) beweisbar totale Funktion mehrfach rekursiv ist. Dazu geben wir im Anschluß an Gentzen [2] ein Verfahren an, nach dem man Ableitungen abgeschlossener Existenzformeln schrittweise vereinfachen (reduzieren) kann, bis sie schließlich eine Form annehmen, aus der sich ein Beispiel der Existenzformel unmittelbar ablesen läßt. In diesem Abschnitt definieren wir zunächst einen einzelnen Reduktionsschritt.

Gegeben sei also eine Ableitung einer abgeschlossenen Existenzformel $\exists y \varphi_0$ (wir nennen sie die Endformel der Ableitung). Der Reduktionsschritt besteht aus drei Vorbereitungsschritten und einer (oder keiner) Verknüpfungsreduktion.

Vorbereitungsschritt 1: Alle freien Variablen, die nicht Eigenvariable einer darunterstehenden Schlußfigur sind, werden durch 0 ersetzt. Siehe dazu Gentzen [2, 3.2].

Vorbereitungsschritt 2: Elimination aller Induktionen aus dem Endstück. Durch Induktion über den Aufbau der Ableitungen konstruiert man zu jeder Ableitung eine neue mit derselben Endsequenz, aber ohne Induktionen im Endstück. War die letzte Regel eine Induktion, so verwendet man die in Gentzen [2, 3.3] beschriebene Induktionsreduktion und die Induktionsvoraussetzung.

Vorbereitungsschritt 3: Elimination aller Verdünnungen und logischen Axiome aus dem Endstück. Sei m die maximale Länge (= Anzahl der Formeln) eines Antezedens einer linken Schnitt-Obersequenz im Endstück. Jeder Verdünnung im Endstück ordne man eine Zahl $(m+1)^n$ zu, wobei n die Anzahl der Schnitte unterhalb dieser Verdünnung sei. Summiert man diese Zahlen über alle Verdünnungen im Endstück, so erhält man eine der Ableitung zugeordnete Zahl, die bei jedem Schritt des in Gentzen [2, 3.42] beschriebenen Verfahrens zur Elimination von Verdünnungen im Endstück kleiner wird. Also bricht dieses Verfahren ab. Anschließend ist die Elimination der logischen Axiome trivial möglich (s. Gentzen [2, 3.42]).

Wir zeigen jetzt, daß nach diesen Vorbereitungsschritten einer der folgenden beiden Fälle vorliegen muß: Fall 1: Die Endformel $\exists y \varphi_0$ ist mit der Hauptformel einer Verknüpfungs-Schlußfigur nach ($\to \exists$) verbunden. Fall 2: Es gibt im Endstück einen Schnitt mit einem Schnittformelbund, dessen (unverzweigte) linke Seite als oberste Formel eine Hauptformel einer Verknüpfungs-Schlußfigur enthält, und in dessen rechter Seite ebenfalls eine Hauptformel einer Verknüpfungs-Schlußfigur als oberste Formel vorkommt. Einen Schnitt mit den in Fall 2 beschriebenen Eigenschaften nennen wir einen zur Verknüpfungsreduktion geeigneten Schnitt.

Zum Beweis können wir annehmen, daß der Fall 1 nicht vorliegt. Die oberste Formel des von der Endformel erzeugten Bundes steht dann in der Untersequenz einer Verknüpfungs-Schlußfigur, deren Hauptformel φ sich im Antezedens befindet. Man betrachte jetzt den von φ erzeugten Bund. Da das Antezedens der Endsequenz leer ist, gibt es einen zum Bund gehörigen Schnitt, also eine linke Seite des Bundes, die dann eine eindeutig bestimmte oberste Formel besitzt. Ist diese Formel Hauptformel einer Verknüpfungs-Schlußfigur, so hat man offenbar einen Schnitt mit den oben verlangten Eigenschaften gefunden. Andernfalls steht die betrachtete Formel in der Untersequenz einer Verknüpfungs-Schlußfigur, deren Hauptformel ψ sich im Antezedens befindet. Für ψ kann man jetzt wie eben für φ weiterschließen. Wegen der Endlichkeit der Ableitung muß dieses Verfahren abbrechen, d. h. man erhält einen zur Verknüpfungsreduktion geeigneten Schnitt.

Im Fall 1 hat die gegebene Ableitung die Gestalt:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \dfrac{\Gamma \to (\varphi_0)_x[k_n]}{\Gamma \to \exists y\,\varphi_0} \\ \vdots \\ \exists y\,\varphi_0 \end{array}$$

Da sich daraus ein Beispiel der Existenzformel $\exists y \varphi_0$, nämlich k_n, schon unmittelbar ablesen läßt, soll der Reduktionsschritt die Ableitung nicht weiter verändern. Wir sprechen in diesem Fall von einem *unechten* Reduktionsschritt und nennen die Ableitung *irreduzibel.* (Eine Ableitung von $(\varphi_0)_x[k_n]$ ergibt sich, wenn man jede Formel des von der Endformel erzeugten Bundes durch $(\varphi_0)_x[k_n]$ ersetzt und bei dadurch entstehenden identischen Ober- und Untersequenzen je eine Sequenz streicht).

Im Fall 2 wird eine Verknüpfungsreduktion durchgeführt; wir sprechen dann von einem *echten* Reduktionsschritt und nennen die Ausgangsableitung *reduzibel.* Man wähle einen zur Verknüpfungsreduktion geeigneten Schnitt (diese Wahl läßt sich leicht eindeutig festlegen). Es sind jetzt vier Fälle zu unterscheiden, entsprechend dem äußersten logischen Zeichen der Schnittformeln. Da man in allen Fällen ganz ähnlich vorgeht, beschränken wir uns auf den Fall einer Schnittformel $\forall x \varphi$:

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\Gamma_1 \to \varphi}{\Gamma_1 \to \forall x \varphi}
\qquad
\dfrac{\overset{\sigma}{\varphi_x}[k_n], \Delta_1 \to \psi_1 \quad \beta}{\underset{\sigma}{\forall x \varphi}, \quad \Delta_1 \to \psi_1 \quad \beta + 1} \\
\vdots \\
\alpha \quad \dfrac{\overset{\varrho}{\Gamma} \to \forall x \varphi \qquad \overset{\sigma\pi + \xi}{\forall x \varphi}, \overset{\tau}{\Delta} \to \psi \quad (\beta + 1)\pi + \delta}{\underset{\varrho\sigma\pi + \varrho\xi}{\Gamma}, \underset{\tau}{\Delta} \to \psi \quad \alpha\sigma\pi + \alpha\xi + \beta\pi + \pi + \delta} \\
\vdots \\
\exists y \varphi_0
\end{array}
$$

Ist die rechte Seite des Bundes (d. h. hier und im folgenden des von den beiden Schnittformeln $\forall x \varphi$ erzeugten Bundes) verzweigt, so sei die reduzierte Ableitung

$$
\begin{array}{c}
\vdots \; {}^{x}/k_n \\
\Gamma_1 \to \varphi_x[k_n] \\
\vdots \\
\alpha \quad \dfrac{\overset{\varrho}{\Gamma} \to \varphi_x[k_n] \qquad \overset{\sigma}{\varphi_x}[k_n], \Delta_1 \to \psi_1 \quad \beta}{\dfrac{\Gamma, \Delta_1 \to \psi_1}{\Delta_1, \underset{\varrho\sigma}{\Gamma} \to \psi_1 \quad \alpha\sigma + \beta}} \\
\vdots \\
\alpha \quad \dfrac{\overset{\varrho}{\Gamma} \to \forall x \varphi \qquad \overset{\xi}{\forall x \varphi}, \overset{\tau}{\Delta}, \overset{\varrho\sigma\pi}{\Gamma} \to \psi \quad (\alpha\sigma + \beta)\pi + \delta}{\dfrac{\Gamma, \Delta, \Gamma \to \psi}{\underset{\varrho\xi + \varrho\sigma\pi}{\Gamma}, \underset{\tau}{\Delta} \to \psi \quad \alpha\xi + \alpha\sigma\pi + \beta\pi + \delta}} \\
\vdots \\
\exists y \varphi_0
\end{array}
$$

Dabei entstehe die Ableitung von $\Gamma \to \varphi_x[k_n]$ aus der Ableitung von $\Gamma \to \forall x \varphi$ innerhalb der Ausgangsableitung, indem man dort (1) alle Formeln $\forall x \varphi$ der linken Seite des betrachteten Bundes durch $\varphi_x[k_n]$ ersetzt, (2) alle freien Vorkommen von x durch k_n ersetzt – ausgenommen, falls x zufällig als Eigenvariable einer Schlußfigur auftritt, in allen über der Untersequenz dieser Schlußfigur stehenden Sequenzen – und (3) eine der dabei entstehenden beiden Sequenzen $\Gamma_1 \to \varphi_x[k_n]$ streicht. Die Ableitung von $\forall x \varphi, \Delta, \Gamma \to \psi$ erhält man, indem man an der entsprechenden Ableitung von $\forall x \varphi, \Delta \to \psi$ innerhalb der Ausgangsableitung folgende Veränderungen vormimmt: (1) Man verfolge die Hauptformel $\forall x \varphi$ in $\forall x \varphi, \Delta_1 \to \psi_1$ längs der Verbundenheiten abwärts und streiche alle diese Bundformeln, bis (einschließlich) zur Obersequenz der ersten Zusammenziehung, in der zwei Bundformeln zusammengezogen werden. Von dieser Zusammenziehung und auch von allen anderen Schlußfiguren, deren Ober- und Untersequenz dabei gleich werden, streiche man die Obersequenz. (2) In der jetzt entstandenen Sequenz $\Delta_1 \to \psi_1$ und in jeder darunter stehenden füge man Γ an das Antezedens an. (3) Unmittelbar über den Sequenzen, denen in der Ausgangsableitung Schnitt-Untersequenzen mit linker Obersequenz unter $\varphi_x[k_n], \Delta_1 \to \psi_1$ entsprechen, füge man geeignete Vertauschungen ein, welche sicherstellen, daß wieder eine korrekte Anwendung der Schnittregel vorliegt:

$$\frac{\Theta_1, \Gamma \to \chi_1 \quad \chi_1, \Theta_2 \to \chi_2}{\Theta_1, \Theta_2, \Gamma \to \chi_2} \Rightarrow \dfrac{\dfrac{\Theta_1, \Gamma \to \chi_1 \quad \chi_1, \Theta_2 \to \chi_2}{\Theta_1, \Gamma, \Theta_2 \to \chi_2}}{\Theta_1, \Theta_2, \Gamma \to \chi_2}$$

(4) Das entstehende $\Delta_1, \Gamma \to \psi_1$ leite man wie skizziert unter Verwendung der bereits konstruierten Ableitung von $\Gamma \to \varphi_x[k_n]$ her. – Den Aufbau der restlichen Teile der reduzierten Ableitung erkennt man unmittelbar aus der Skizze.

Ist die rechte Seite des Bundes unverzweigt, so konstruiert man die reduzierte Ableitung entsprechend:

$$\begin{array}{c} \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \alpha\ \dfrac{\overset{\varrho}{\Gamma \to \varphi_x[k_n]} \quad \overset{\sigma}{\varphi_x[k_n], \Delta_1 \to \psi_1}}{\dfrac{\Gamma, \Delta_1 \to \psi_1}{\underset{\varrho\sigma}{\Delta_1, \Gamma \to \psi_1}\ \ \alpha\sigma+\beta}}\ \beta \\ \vdots \\ \dfrac{\overset{\tau\ \varrho\sigma\pi}{\Delta, \Gamma \to \psi}\ \ (\alpha\sigma+\beta)\pi+\delta}{\underset{\varrho\sigma\pi\ \tau}{\Gamma, \Delta \to \psi}\ \ \alpha\sigma\pi+\beta\pi+\delta} \\ \vdots \\ \exists y \varphi_0 \end{array}$$

Dabei sei die Ableitung über $\Gamma \to \varphi_x[k_n]$ wie eben konstruiert. Die Ableitung von $\Delta, \Gamma \to \psi$ erhält man, indem man in der entsprechenden Ableitung von $\forall x \varphi, \Delta \to \psi$ innerhalb der Ausgangsableitung alle Bundformeln $\forall x \varphi$ streicht und dann wie oben beschrieben verfährt.
Damit ist die Definition eines einzelnen Reduktionsschritts an einer Ableitung einer abgeschlossenen Existenzformel beendet.

§3. Wir ordnen induktiv über den Aufbau von Ableitungen jeder Ableitungssequenz eine Ordinalzahl zu, und zwar so, daß bei jedem echten bzw. unechten Reduktionsschritt (an einer Ableitung einer abgeschlossenen Existenzformel) die der Endsequenz zugeordnete Ordinalzahl kleiner bzw. nicht größer wird. Dies zeigt dann, daß stets endlich viele der im §2 beschriebenen Reduktionsschritte auf eine irreduzible Ableitung führen.
Aus technischen Gründen ist es notwendig, außerdem noch jeder Antezedensformel eine Ordinalzahl zuzuordnen, die wir Verzweigungszahl nennen. Die den Ableitungssequenzen zugeordneten Ordinalzahlen nennen wir Sequenzenzahlen. In der folgenden induktiven Definition sind Verzweigungszahlen über oder unter die zugehörigen Formeln, Sequenzenzahlen neben die zugehörigen Sequenzen geschrieben. Es werden nur diejenigen Verzweigungs- und Sequenzenzahlen erwähnt, die sich bei der jeweiligen Regelanwendung verändern.
Logische und mathematische Axiome erhalten die Sequenzenzahl 0; jede Antezedensformel in ihnen erhält die Verzweigungszahl 1.

(Vd)
$$\frac{\Gamma \to \psi}{\underset{1}{\varphi}, \Gamma \to \psi}$$

(Zz)
$$\frac{\overset{\varrho}{\varphi}, \overset{\sigma}{\varphi}, \Gamma \to \psi}{\underset{\varrho + \sigma}{\varphi}, \Gamma \to \psi}$$

(Vt)
$$\frac{\Gamma, \overset{\varrho}{\varphi}, \overset{\sigma}{\psi}, \Delta \to \chi}{\Gamma, \underset{\sigma}{\psi}, \underset{\varrho}{\varphi}, \Delta \to \chi}$$

(S)
$$\frac{{}^{\alpha}\,\overset{\varrho}{\Gamma} \to \varphi \qquad \overset{\sigma}{\varphi}, \Delta \to \psi\;{}^{\beta}}{\underset{\varrho\sigma}{\Gamma}, \Delta \to \psi}\;{\scriptstyle \alpha\sigma + \beta}$$

$(\to \wedge)$
$$\frac{{}^{\alpha}\,\overset{\varrho}{\Gamma} \to \varphi \qquad \overset{\sigma}{\Gamma} \to \psi\;{}^{\beta}}{\underset{\max(\varrho, \sigma)}{\Gamma} \to \varphi \wedge \psi}\;{\scriptstyle \max(\alpha, \beta)}$$

$(\wedge \to)_{1,2}$
$$\frac{\overset{\varrho}{\varphi}, \Gamma \to \chi\;{}^{\alpha}}{\underset{\varrho}{\varphi \wedge \psi}, \Gamma \to \chi}\;{\scriptstyle \alpha + 1} \qquad \frac{\overset{\varrho}{\psi}, \Gamma \to \chi\;{}^{\alpha}}{\underset{\varrho}{\varphi \wedge \psi}, \Gamma \to \chi}\;{\scriptstyle \alpha + 1}$$

(∨ →) $$\dfrac{{}^{\alpha}\ \overset{\varrho}{\varphi}, \overset{\varrho_1}{\Gamma} \to \chi \qquad \overset{\sigma}{\psi}, \overset{\sigma_1}{\Gamma} \to \chi\ {}^{\beta}}{\underset{\max(\varrho,\,\sigma)}{\varphi \vee \psi}, \underset{\max(\varrho_1,\,\sigma_1)}{\Gamma} \to \chi} \quad \max(\alpha, \beta) + 1$$

(∀→) $$\dfrac{\overset{\varrho}{\varphi_x[t]}, \Gamma \to \psi \quad {}^{\alpha}}{\underset{\varrho}{\forall x \varphi}, \ \Gamma \to \psi \quad {}^{\alpha + 1}}$$

(∃ →) $$\dfrac{\overset{\varrho}{\varphi}, \Gamma \to \psi \quad {}^{\alpha}}{\underset{\varrho}{\exists x \varphi}, \Gamma \to \psi \quad {}^{\alpha + 1}}$$

(Ind) $$\dfrac{\overset{\varrho}{\varphi}, \quad \overset{\sigma}{\Gamma} \to \varphi_x[Nx] \quad {}^{\alpha}}{\underset{\varrho^{\omega}}{\varphi_x[o]}, \underset{\sup_{n<\omega}\left(\sigma \cdot \sum_{i<n} \varrho^i\right)}{\Gamma} \to \varphi_x[t]} \quad \sup_{n<\omega}\left(\alpha \cdot \sum_{i<n} \varrho^i\right)$$

Die Regeln $(\to \vee)_{1,2}$, $(\to \forall)$, $(\to \exists)$ sind weggelassen, da sich bei ihnen die Verzweigungs- und Sequenzenzahlen nicht ändern. Die über bzw. unter Formelfolgen Γ aufgeführten Verzweigungszahlen sind z. B. in (S) wie folgt zu verstehen: Hat irgendeine Formel φ_i im Γ der Obersequenz die Verzweigungszahl ϱ, so erhält die entsprechende Formel φ_i im Γ der Untersequenz die Verzweigungszahl $\varrho\sigma$. Die vorkommenden Summen und Produkte sind stets als natürliche Summen und Produkte gemeint. ϱ^n steht hier für das n-fache natürliche Produkt von ϱ (dagegen ϱ^{ω} für die gewöhnliche Potenz; man beachte aber, daß stets gilt $\varrho^{\omega} = \sup_{\alpha < \omega} \varrho^n$).

Im Fall einer schnitt- und induktionsfreien Ableitung gibt die Sequenzenzahl einer Ableitungssequenz an, wie viele der Regeln $(\wedge \to)_{1,2}$, $(\vee \to)$, $(\forall \to)$, $(\exists \to)$ maximal auf einem Faden oberhalb der betreffenden Sequenz angewandt wurden. Den Grund für die Einführung von Verzweigungszahlen und für das angegebene Verhalten von Verweigungs- und Sequenzenzahlen bei Schnitten erkennt man am besten anhand des unten ausgeführten Beweises, daß bei einer Verknüpfungsreduktion mit Schnittformel $\forall x \varphi$ die Sequenzenzahl der Endsequenz abnimmt. Verzweigungs- und Sequenzenzahlen bei Induktionen sind so gewählt, daß bei Auflösung einer Induktion in eine Reihe von Schnitten die dann entstehenden Verzweigungs- und Sequenzenzahlen nicht größer werden.

Man erkennt leicht, daß alle auftretenden Verzweigungs- und Sequenzenzahlen stets $< \omega_3 := \omega^{\omega^{\omega}}$ sind. Liegen auf jedem Faden der Ableitung höchstens n Induktionen, so läßt sich diese Schranke verschärfen zu ω^{ω^n}.

Wir zeigen jetzt, daß jeder echte bzw. unechte Reduktionsschritt die Sequenzenzahl der Endsequenz verkleinert bzw. nicht vergrößert. Der erste Vorbereitungsschritt bestand nur aus dem Ersetzen einiger Variablen durch 0 und verändert deshalb die Verzweigungs- und Sequenzenzahlen nicht. Der zweite Vorbereitungsschritt eliminierte die Induktionen im Endstück und war durch Induktion über den Aufbau der Ableitungen definiert. Ebenfalls durch Induktion über den Aufbau der Ableitungen beweist man sofort, daß dabei die Verzweigungs- und Sequenzenzahlen der Endsequenzen nicht vergrößert werden; ist die zuletzt verwendete Regel eine Induktion, so folgt dies unmittelbar aus der (entsprechend angelegten) Definition der Verweigungs- und Sequenzenzahlen in der Induktions-Untersequenz. Im dritten Vorbereitungsschritt wurden zunächst die Verdünnungen und dann die logischen Axiome aus dem Endstück eliminiert. Daß dabei die Sequenzenzahl der Endsequenz nicht größer wird, ergibt sich bei der Elimination der Verdünnungen leicht durch Induktion über die der Ableitung zugeordnete Zahl (s. §2), und bei der Elimination der logischen Axiome ist es trivial.

Wir können nun annehmen, daß ein zur Verknüpfungsreduktion geeigneter Schnitt vorhanden ist. Zu zeigen ist, daß nach Durchführung der Verknüpfungsreduktion die der Endsequenz zugeordnete Sequenzenzahl kleiner geworden ist. Dabei beschränken wir uns wieder auf den Fall einer Schnittformel $\forall x\varphi$; die anderen Fälle lassen sich ganz ähnlich behandeln.

Die Zuordnung von Verzweigungs- und Sequenzenzahlen zur Ausgangsableitung ist auf p. 137 skizziert. Dabei kommen die Verzweigungszahl $\sigma\pi + \xi$ des $\forall x\varphi$ in $\forall x\varphi, \Delta \to \psi$ und die Sequenzenzahl $(\beta + 1)\,\pi + \delta$ dieser Sequenz wie folgt zustande: Betrachten wir die Hauptformel $\forall x\varphi$ in der Sequenz $\forall x\varphi, \Delta_1 \to \psi_1$; sie hat die Verzweigungszahl σ. Geht man von ihr aus längs der Verbundenheiten abwärts, so können sich die Verzweigungszahlen nur ändern, wenn eine andere Bundformel mit einer der betrachteten zusammengezogen wird — dann wird etwas zur Verzweigungszahl hinzuaddiert — oder wenn man die linke Obersequenz eines Schnitts durchläuft — dann wird die Verzweigungszahl mit der Verzweigungszahl der rechten Schnittformel multipliziert —. Die bei der rechten Schnittformel des betrachteten Schnitts entstehende Verzweigungszahl läßt sich also schreiben in der Form $\sigma\pi + \xi$, wobei π das Produkt der Verzweigungszahlen der rechten Schnittformeln aller derjenigen Schnitte ist, deren linke Obersequenz zwischen $\forall x\varphi, \Delta_1 \to \psi_1$ und $\forall x\varphi, \Delta \to \psi$ liegt. Entsprechend ergibt sich mit demselben π die Sequenzenzahl $(\beta + 1)\,\pi + \delta$ von $\forall x\varphi, \Delta \to \psi$.

Betrachten wir nun zunächst den Fall einer verzweigten rechten Bundseite. Die dann in der reduzierten Ableitung entstehenden Verzweigungs- und Sequenzenzahlen sind auf p. 137 skizziert. Anhand der Konstruktion der Ableitung von $\forall x\varphi, \Delta, \Gamma \to \psi$ aus der Ableitung von $\forall x\varphi, \Delta \to \psi$ innerhalb der Ausgangsableitung macht man sich leicht klar, daß sich die Verzweigungs- und Sequenzenzahlen wie angegeben verändern. Damit hat sich aber auch die Sequenzenzahl von $\Gamma, \Delta \to \psi$ bei unverändert gebliebenen Verzweigungszahlen verkleinert, und diese Verkleinerung zieht sich durch bis zur Endsequenz.

Im Fall einer unverzweigten rechten Bundseite erhält man ganz entsprechend die auf p. 138 angegebenen Verzweigungs- und Sequenzenzahlen und damit eine Verkleinerung der Sequenzenzahl der Endsequenz.

§4. Wir verwenden jetzt das in §2 und §3 beschriebene Reduktionsverfahren zu einem Beweis, daß jede (in $\mathfrak{S}$) beweisbar totale Funktion mehrfach rekursiv ist.

Dabei ergibt sich dann auch ein Zusammenhang zwischen dem Niveau einer Funktion in der $\mathfrak{E}_\alpha$-Hierarchie und der erforderlichen Kompliziertheit der Beweise, wobei die Kompliziertheit gemessen wird durch die der Endsequenz zugeordnete Sequenzenzahl.

Zunächst betrachten wir noch einmal die im § 1 angegebenen Totalitätsbeweise für die Funktionen aus $\mathfrak{E}_\alpha$ und untersuchen, welche Sequenzenzahlen den jeweiligen Endsequenzen zugeordnet sind. Aus dem induktiven Beweis zu Behauptung 1 ergibt sich leicht, daß für jede primitiv rekursive Funktion f eine Ableitung von $\exists y G_f(x_1, \ldots, x_r, y)$ existiert, deren Endsequenz eine Sequenzenzahl $< \omega^\omega$ zugeordnet ist. Zum Beweis von Behauptung 2 wurden Ableitungen für $\exists y G_{\mathrm{H}_\alpha}(x, y)$ konstruiert; die dabei auftretenden Verzweigungs- und Sequenzenzahlen sind im § 1 vermerkt. Insbesondere erhält die Endsequenz eine Sequenzenzahl $< \omega^{\alpha+1}$. Behauptung 3 schließlich sagte aus, daß mit $g, h_1, \ldots, h_r$ auch das durch $f(\mathfrak{a}) = g(h_1(\mathfrak{a}), \ldots, h_r(\mathfrak{a}))$ definierte f beweisbar total ist. Aus dem Beweis ergibt sich leicht folgendes: Sind bei den Totalitätsbeweisen von $g, h_1, \ldots, h_r$ die den Endsequenzen zugeordneten Sequenzenzahlen $< \omega^{\alpha+1}$, so ist dies auch bei dem konstruierten Totalitätsbeweis für f der Fall.

Sei nun $\mathfrak{B}_\alpha$ die Klasse der in $\mathfrak{S}$ mit einer der Endsequenz zugeordneten Sequenzenzahl $< \omega^{\alpha+1}$ beweisbar totalen Funktionen[5]. Wir haben eben bewiesen, daß $\mathfrak{P} \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega} \mathfrak{B}_\alpha$ ($\mathfrak{P}$ Klasse der primitiv rekursiven Funktionen), und daß $\mathfrak{E}_\alpha \subseteq \mathfrak{B}_\alpha$ für $\omega \leqq \alpha < \omega^\omega$. Im folgenden zeigen wir die umgekehrten Inklusionen.

Wir verwenden eine fest gewählte primitiv rekursive Wohlordnung $<_3$ vom Typ ω_3 (nach Hilbert/Bernays [3, p. 361]):

$$a <_1 \ b :\leftrightarrow a < b$$
$$a <_{n+1} b :\leftrightarrow \exists i_{i \leqq a+b} ((a)_i < (b)_i \wedge \forall j_{j \leqq a+b} (i <_n j \to (a)_j = (b)_j)) \,.$$

Die einem $\alpha < \omega_3$ in $<_3$ entsprechende Zahl bezeichnen wir mit $|\alpha|$.

Mit den üblichen Methoden lassen sich Terme t, Formeln φ und Ableitungen A durch natürliche Zahlen $\ulcorner t \urcorner$, $\ulcorner \varphi \urcorner$, $\ulcorner A \urcorner$ kodieren (gödelisieren). Ohne Schwierigkeiten erreicht man dabei, daß es primitiv rekursive Funktionen Sub_r, Dek, Red, Sz gibt, die folgendes leisten: $\mathrm{Sub}_r(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner x_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner x_r \urcorner, \ulcorner k_{a_1} \urcorner, \ldots, \ulcorner k_{a_r} \urcorner) = \ulcorner A_{x_1, \ldots, x_r}[k_{a_1}, \ldots, k_{a_r}] \urcorner$, wobei $A_{x_1, \ldots, x_r}[k_{a_1}, \ldots, k_{a_r}]$ aus A dadurch entstehe, daß man in jeder Sequenz die freien Vorkommen aller derjenigen Variablen aus $x_1, \ldots, x_r$ durch die entsprechenden Zahlterme ersetzt, die nicht als Eigenvariable einer Schlußfigur auftreten, deren Untersequenz unter der betreffenden Sequenz steht. $\mathrm{Dek}(\ulcorner A \urcorner)$ ist das aus A ablesbare Beispiel der Endformel (s. §2, p. 136), falls A irreduzible Ableitung (einer abgeschlossenen Existenzformel) ist. $\mathrm{Red}(\ulcorner A \urcorner) = \ulcorner A' \urcorner$, falls A eine reduzible Ableitung ist und A' aus A durch Anwendung des im §2 definierten Reduktionsschritts entsteht. $\mathrm{Sz}(\ulcorner A \urcorner) = |\alpha|$, wobei α die der Endsequenz von A zugeordnete Sequenzenzahl ist. Weiter können wir annehmen, daß die Funktion $\lambda a \, \ulcorner k_a \urcorner$ primitiv rekursiv ist.

[5] Man könnte hier wieder mit einer primitiv rekursiven Axiomenmenge auskommen; vgl. die Bemerkung am Schluß von §1.

Sei nun $f \in \mathfrak{B}_\alpha$, f r-stellig. Dann gibt es eine Formel φ mit den freien Variablen $x_1, \ldots, x_r, y$, die bzgl. $x_1, \ldots, x_r, y$ den Graphen von f definiert und für die $\exists y \varphi$ ableitbar ist mit einer der Endsequenz zugeordneten Sequenzenzahl $< \omega^{\alpha+1}$, etwa $< \omega^\alpha k$; oBdA können wir $\alpha, k > 0$ annehmen. Wir definieren für $\lambda < \omega_3$[6]

$$\mathrm{Wert}_\lambda(a) = \begin{cases} \mathrm{Wert}_\lambda(\mathrm{Red}(a)) & \text{falls } \mathrm{Sz}(\mathrm{Red}(a)) <_3 \mathrm{Sz}(a) <_3 |\lambda|, \\ \mathrm{Dek}(a) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist dann c Kodenummer der betreffenden Ableitung von $\exists y \varphi$, so läßt sich f offenbar darstellen in der Form

$$f(a_1, \ldots, a_r) = \mathrm{Wert}_{\omega^\alpha k}(\mathrm{Sub}(c, \ulcorner x_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner x_r \urcorner, \ulcorner k_{a_1} \urcorner, \ldots, \ulcorner k_{a_r} \urcorner)).$$

Es genügt also zu zeigen, daß $\mathrm{Wert}_{\omega^\alpha k} \in \mathfrak{P}$ für $\alpha < \omega$, und $\mathrm{Wert}_{\omega^\alpha k} \in \mathfrak{E}_\alpha$ für $\omega \leqq \alpha < \omega^\omega$.

Wir nennen eine Funktion f durch *ungeschachtelte λ-Rekursion* definierbar aus g_1, g_2, h, wenn es eine primitiv rekursive Funktion $\mathfrak{v}$ gibt, so daß für alle $a, \mathfrak{a}$

$$\begin{aligned} f(a, \mathfrak{a}) &= g_1(a, \mathfrak{a}) && \text{falls } \mathfrak{v}(a, \mathfrak{a}) = 0, \\ f(a, \mathfrak{a}) &= g_2(f(h(a, \mathfrak{a}), \mathfrak{a}), a, \mathfrak{a}) && \text{sonst} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\mathfrak{v}(a, \mathfrak{a}) <_3 |\lambda| \\ &\mathfrak{v}(a, \mathfrak{a}) \neq 0 \rightarrow \mathfrak{v}(h(a, \mathfrak{a}), \mathfrak{a}) <_3 \mathfrak{v}(a, \mathfrak{a}). \\ &\mathfrak{v}(a, \mathfrak{a}) = 0 \rightarrow \mathfrak{v}(h(a, \mathfrak{a}), \mathfrak{a}) = 0 \end{aligned}$$

Offensichtlich ist Wert_λ durch eine ungeschachtelte λ-Rekursion aus primitiv rekursiven Funktionen definierbar.

Lemma: Ist f durch ungeschachtelte λ-Rekursion aus g_1, g_2, h definiert und ist $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, so ist f primitiv rekursiv in Funktionen, die durch je eine ungeschachtelte λ_1- bzw. λ_2-Rekursion aus in g_1, g_2, h primitiv rekursiven Funktionen definierbar sind.

Beweis: Die Parameter werden weggelassen (sie bleiben stets unverändert). Sei

$$\begin{aligned} f_1(a) &= g_1(a) && \text{falls } \mathfrak{v}(a) = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{v}(a) \geqq_3 |\lambda_1| \\ f_1(a) &= g_2(f_1(h(a)), a) && \text{sonst} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_2(a) &= g_2(f_1(h(a)), a) && \text{falls } \mathfrak{v}(h(a)) <_3 |\lambda_1| \\ f_2(a) &= g_2(f_2(h(a)), a) && \text{sonst.} \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} f(a) &= f_1(a) && \text{falls } \mathfrak{v}(a) <_3 |\lambda_1| \\ f(a) &= f_2(a) && \text{sonst,} \end{aligned}$$

und f_1 ist durch ungeschachtelte λ_1-Rekursion aus in g_1, g_2, h primitiv rekursiven Funktionen definierbar. Sei weiter

$$\begin{aligned} f_2^*(a, b) &= g_2(b, a) && \text{falls } \mathfrak{v}(h(a)) <_3 |\lambda_1| \\ f_2^*(a, b) &= g_2(f_2^*(h(a), b), a) && \text{sonst} \end{aligned}$$

[6] Mit $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ bezeichnen wir Limeszahlen.

und

$$r(a) = h(a) \qquad \text{falls} \quad \mathfrak{o}(h(a)) <_3 |\lambda_1|$$

$$r(a) = r(h(a)) \qquad \text{sonst.}$$

Dann ist $f_2(a) = f_2^*(a, f_1(r(a)))$, und f_2^*, r sind durch ungeschachtelte λ_2-Rekursionen aus in g_2, h primitiv rekursiven Funktionen definierbar.
Aus dem Lemma ergibt sich, daß $\mathrm{Wert}_{\omega^\alpha k}$ primitiv rekursiv ist in Funktionen, die durch je eine ungeschachtelte ω^α-Rekursion aus primitiv rekursiven Funktionen definierbar sind.

Wir nennen eine Funktion f durch *geschachtelte λ-Rekursion* definierbar aus $g_1, \ldots, g_r$, wenn es eine primitiv rekursive Funktion $\mathfrak{o}$ gibt, so daß für alle a, $\mathfrak{a}$ gilt $\mathfrak{o}(a, \mathfrak{a}) <_3 |\lambda|$ und

$$f(a, \mathfrak{a}) = g_1(\mathfrak{a}) \qquad \text{falls} \quad \mathfrak{o}(a, \mathfrak{a}) = 0$$

$$f(a, \mathfrak{a}) = A \qquad \text{sonst,}$$

mit einem Term A, der aus $a, \mathfrak{a}, g_1, \ldots, g_r, f$ aufgebaut ist, und in dem Teilterme $f(C, B_1, \ldots, B_r)$ nur mit solchen ersten Argumenttermen C auftreten, für die im Fall $\mathfrak{o}(a, \mathfrak{a}) \neq 0$ gilt $\mathfrak{o}(C, \mathfrak{a}) <_3 \mathfrak{o}(a, \mathfrak{a})$.

Satz (Tait [9, Theorem 5]): Ist f durch ungeschachtelte ω^β-Rekursion ($\beta > 0$) aus g_1, g_2, h definiert, so ist f primitiv rekursiv in g_1, g_2, h und einer Funktion, die durch geschachtelte $\omega\beta$-Rekursion aus in g_1, g_2, h primitiv rekursiven Funktionen definierbar ist.

$\mathrm{Wert}_{\omega^\alpha k}$ ist also primitiv rekursiv in Funktionen, die durch je eine geschachtelte $\omega\alpha$-Rekursion aus primitiv rekursiven Funktionen definierbar sind. Nach Definition der Funktionenklassen $\mathfrak{R}_\alpha$ in [8] ist dann $\mathrm{Wert}_{\omega^\alpha k} \in \mathfrak{R}_\alpha$ für $\omega \leqq \alpha < \omega^\omega$, und $\mathrm{Wert}_{\omega^\alpha k} \in \bigcup_{n<\omega} \mathfrak{R}_n = \mathfrak{P}$ für $\alpha < \omega$. Mit $\mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{E}_\alpha$ [8] ergibt sich die oben formulierte Behauptung. Wir haben damit bewiesen

Satz: (i) $\bigcup_{\alpha<\omega} \mathfrak{B}_\alpha = \mathfrak{P}$

(ii) $\mathfrak{B}_\alpha = \mathfrak{E}_\alpha \quad$ für $\quad \omega \leqq \alpha < \omega^\omega$.

Korollar: Die Klasse $\mathfrak{M}_n$ der n-fach rekursiven Funktionen ($n \geqq 1$) besteht aus allen mit höchstens n übereinanderliegenden Induktionen in $\mathfrak{S}$ beweisbar totalen Funktionen.

Beweis: Nach [6] und dem Satz ist

$$\mathfrak{M}_n = \bigcup_{\alpha<\omega^n} \mathfrak{E}_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega^n} \mathfrak{B}_\alpha.$$

Die Behauptung folgt dann leicht aus der Definition von Verzweigungs- und Sequenzenzahlen und der Definition der $\mathfrak{B}_\alpha$.

LITERATUR

[1] Gentzen, G.: Untersuchungen über das logische Schließen I, II. Math. Zeitschr. **39** (1934), 176—210 und 405—431.

[2] Gentzen, G.: Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. Leipzig 1938.

[3] Hilbert, D., Bernays, P.: Grundlagen der Mathematik II. Berlin 1939.

[4] Kino, A.: On provably recursive functions and ordinal recursive functions. J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 456—476.

[5] Kreisel, G.: On the interpretation of non finitist proofs II. J. Symbolic Logic **17** (1952), 43—58.

[6] Robbin, J. W.: Subrecursive Hierarchies. Dissertation, Princeton 1965.

[7] Rödding, D.: Über die Eliminierbarkeit von Definitionsschemata in der Theorie der rekursiven Funktionen. Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen der Math. **10** (1964), 315—330.

[8] Schwichtenberg, H.: Eine Klassifikation der ε_0-rekursiven Funktionen. Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen der Math. **17** (1971), 61—74.

[9] Tait, W. W.: Nested Recursion. Math. Annalen **143** (1961), 236—250.