Westfälische Wilhelms-Universität, Fachbereich Mathematik
Institut für mathematische Logik und Grundlagenforschung

Einige Anwendungen von unendlichen Termen und Wertfunktionalen

Habilitationsschrift, vorgelegt von Helmut Schwichtenberg

Münster (Westf.), 1973

Inhaltsverzeichnis

Für Diskussionen und nützliche Hinweise zu Fragen im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit bin ich den Herren Dr. H. Barendregt, Professor J. Diller, Professor S. Feferman, Professor W. Howard, Professor G. Kreisel, Professor D. Rödding und R. Statman zu großem Dank verpflichtet. Besonders anerkennen möchte ich die Hilfe von Herrn Professor Kreisel, der mein Interesse an den meisten hier behandelten Problemen erst geweckt hat.

I Elimination höherer Typenstufen in Definitionen primitiv rekursiver Funktionale mit Hilfe von transfiniten Rekursionen

Hilbert's Programm fragt nach finiten Widerspruchsfreiheitsbeweisen für formalisierte mathematische Theorien (vgl. Problem 2 in Hilbert 1900). Noch naheliegender erscheint diese Fragestellung, wenn man sie etwas erweitert (Kreisel 1965): Kann man aus einem in formalisierter Fassung vorliegenden abstrakten Beweis eines finiten Satzes (Beispiel: Beweis von $x+y=y+x$, x,y Variable für natürliche Zahlen, in einer axiomatischen Mengenlehre) stets einen finiten Beweis desselben Satzes konstruieren? Nach dem bekannten Ergebnis von Gödel ist das jedenfalls dann nicht möglich, wenn man verlangt, daß die zugelassenen finiten Methoden in der betrachteten Theorie formalisierbar sein sollen. Einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit hat schon Hilbert vorgeschlagen (in der Einleitung zu Hilbert/Bernays 1934): Gödel's Ergebnis zeige nur, "daß man für die weitergehenden Widerspruchsfreiheitsbeweise den finiten Standpunkt in einer schärferen Weise ausnutzen muß, als dies bei der Betrachtung der elementaren Formalismen erforderlich ist".
Die Bereitstellung und die Untersuchung immer stärkerer, aber noch als finit anzusehender Methoden ist deshalb ein zentrales Thema der Beweistheorie.

Für die Zahlentheorie Z erster Stufe ist Hilbert's Programm zuerst von Gentzen 1936 ausgeführt worden (s. auch Gentzen 1938): Gentzen ordnet jedem (formalen) Beweis b in Z eine Ordinalzahl $\alpha_b < \varepsilon_0$ zu und definiert ein Reduktionsverfahren für Z-Beweise, so daß bei jedem Reduktionsschritt die Endformel erhalten bleibt, aber die zugeordnete Ordinalzahl kleiner wird. Da nun Z-Beweise mit zugeordneter Ordinalzahl 0 jedenfalls keinen Widerspruch beweisen, ergibt sich durch transfinite Induktion bis α_b, daß auch b keinen Widerspruch beweist. Alles dies läßt sich formalisieren in der quantorenfreien primitiv rekursiven Arithmetik PRA erweitert um transfinite Induktionen bis zu beliebigen Ordinalzahlen $< \varepsilon_0$, oder auch (Kreisel 1959a) in der PRA erweitert um Definitionsschemata für α-Rekursionen, $\alpha < \varepsilon_0$. Aus der Widerspruchsfreiheit dieser letzten Theorie, etwa $PRA_{<\varepsilon_0}$, folgt also die Widerspruchsfreiheit von Z. Auch umgekehrt folgt aus der Widerspruchsfreiheit von Z die von $PRA_{<\varepsilon_0}$, denn $PRA_{<\varepsilon_0}$ ist Teiltheorie der konservativen (nach Hilbert/Bernays 1939) Erweiterung von Z um α-Rekursionen, $\alpha < \varepsilon_0$.

Ein anderer Widerspruchsfreiheitsbeweis für Z ist von Gödel 1958 angegeben worden, in einer Arbeit mit dem Titel "Über eine noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunkts": Gödel zeigt dort, daß sich Z interpretieren läßt in einer (natürlich wieder quantorenfreien) Erweiterung T der primitiv rekursiven Arithmetik auf Funktionale endlicher Typen. Aus der Widerspruchsfreiheit von T folgt also ebenfalls die Widerspruchsfreiheit von Z. Auch hier gilt die Umkehrung (Kreisel 1959b).

In den quantorenfreien Theorien $PRA_{<\varepsilon_0}$ und T ist also die beweistheoretische Stärke von Z auf verschiedene Weise durch Definitionsschemata zum Ausdruck gebracht: In $PRA_{<\varepsilon_0}$ durch Zulassen von α-Rekursionen, $\alpha<\varepsilon_0$, bei der Definition von Funktionen, und in T durch Erweiterung der in PRA zugelassenen Definitionsschemata der expliziten Definition und primitiven Rekursion auch auf Funktionale endlicher Typen. Es liegt nun nahe, beide Methoden zur Erweiterung einfachster Definitionsschemata direkter und in allgemeinerer Form miteinander zu vergleichen.

Daß jede in $PRA_{<\varepsilon_0}$ definierbare Funktion auch in T definierbar ist, hat zuerst Kreisel 1959c (§3.4) unter Verwendung von Gödel 1958 bewiesen. Allgemeiner zeigt Tait 1967, daß sich eine 2^{α}-Rekursion stets auf eine α-Rekursion mit einer um 1 höheren Typenstufe reduzieren läßt. In der anderen Richtung ist nur der Spezialfall in der Literatur behandelt, daß jede in T definierbare Funktion auch in $PRA_{<\varepsilon_0}$ definiert werden kann: In Tait 1965a wird bemerkt, daß dies aus Kreisel 1959b zusammen mit Gentzen 1938 folgt. Tait skizziert in derselben Arbeit einen direkten Beweis [1]. Hier soll möglichst allgemein (insbesondere

---

[1] Andere Beweise ergeben sich aus Howard 1970a , §5 und Parsons 1971.

für Funktionale anstelle von Funktionen) gezeigt werden, daß sich "Umwege" durch höhere Typenstufen stets mit Hilfe von transfiniten Rekursionen eliminieren lassen.

Es ergibt sich folgendes Resultat (genauer in 3.8): Ein Funktional F der Typenstufe $n+1$ sei definiert durch explizite Definitionen und α-Rekursionen. Die durch Rekursion eingeführten Hilfsfunktionale in dieser Definition mögen Typenstufen $\leq n+m+1$ $(m \geq 1)$ besitzen. Dann kann man eine neue Definition desselben Funktionals F finden, in der alle auftretenden Hilfsfunktionale nur noch Typenstufen $\leq n+1$ besitzen, in der aber anstelle der α-Rekursionen eine β-Rekursion mit $\beta < 2_m(\alpha \cdot \omega)$ (wobei $2_0(\xi) := \xi$, $2_{i+1}(\xi) := 2^{2_i(\xi)}$) verwendet wird.

Hiervon beweisen wir noch eine etwas allgemeinere, formale Version: T_α sei die Theorie, die aus Gödel's T (mit schwacher Extensionalität, s. Spector 1962) [2] entsteht durch Hinzufügen von α-Rekursionen. T_α^n sei die Teiltheorie von T_α, in der alle durch Rekursion eingeführten Konstanten eine Typenstufe $\leq n+1$ besitzen. Dann gibt es zu jeder Konstanten F in T_α^{n+m} $(m \geq 1)$ mit der Typenstufe $n+1$ eine Konstante F' in einem T_β^n mit $\beta < 2_m(\alpha \cdot \omega)$, so daß $Fx_1 \ldots x_k = F'x_1 \ldots x_k$ in T_β^{n+m} beweisbar ist.

Der Beweis verläuft wie folgt. Zunächst läßt sich wie in

[2] Mir ist nicht bekannt, ob man ein entsprechendes Resultat auch ohne Extensionalität bekommen kann.

Tait 1965a jedes α-rekursive Funktional F darstellen durch einen i.a. unendlichen Term t_F, d.h. einen Term, der aus Variablen (mit Typen) und Ziffern aufgebaut ist durch Anwendungen, Abstraktionen und dem Bilden von Folgen $\langle t_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ vom Typ $0 \to 0$ aus Termen t_i vom Typ 0 . Ist z.B. F vom Typ $0 \to \tau$ definiert durch eine $\prec$ -Rekursion

$$F(x) = G([F]_{\prec x}, x)$$

($\prec$ Wohlordnung der natürlichen Zahlen, $[F]_{\prec x}$ der Wertverlauf von F unterhalb x , also $[F]_{\prec x}(y) := F(y)$ falls $y \prec x$, und $:= \underset{\sim}{0}$ sonst), und ist G bereits dargestellt durch einen Term t_G , so kann man rekursiv Darstellungen t_x von $F(x)$ definieren durch

$$t_x :\equiv t_G \langle t_{xi} \rangle_{i \in \mathbb{N}} \bar{x}$$

$$\text{mit} \quad t_{xi} :\equiv \begin{cases} t_i & \text{falls } i \prec x \\ \underset{\sim}{0} & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\underset{\sim}{0} :\equiv \lambda x_1 \ldots x_k . 0$. F läßt sich dann darstellen durch $\langle t_x \rangle_{x \in \mathbb{N}}$. Dabei stehen Folgen $\langle s_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ von Termen s_i eines Typs $\sigma \neq 0$ als Abkürzung für $\lambda x x_1 \ldots x_k \, \langle s_i x_1 \ldots x_k \rangle_{i \in \mathbb{N}} x$ [3].
Man sieht leicht, daß für jedes α-rekursive Funktional F die Tiefe $|t_F|$ (definiert wie üblich) des darstellenden Terms $< \alpha \cdot \omega$ ist.

---

[3] Auf diese Möglichkeit, in einem extensionalen Kontext Folgenterme aus Termen eines Typs $\neq 0$ zu eliminieren, hat mich Richard Statman aufmerksam gemacht.

Der Rang $R(t)$ eines unendlichen Terms t sei definiert als das Supremum der Typenstufen aller Teilterme der Form λxs in einem Kontext $(\lambda xs)r$. Sei nun F ein α-rekursives Funktional der Typenstufe $n+1$, in dessen Definition alle durch Rekusion eingeführten Hilfsfunktionale Typenstufen $\leq n+m+1$ besitzen. Offenbar kann man die oben skizzierte Konstruktion eines F darstellenden unendlichen Terms t_F so festlegen, daß $R(t_F) \leq n+m+1$ ist. Wir definieren dann eine Reduktionsrelation (im wesentlichen wie in Tait 1965a , jedoch nur unter Verwendung von λ-Konversionen $(\lambda xs)r \rightarrow s_x[r]$), so daß jeder unendliche Term t vom Rang $R(t) \leq k+1$ reduzierbar ist auf ein t' mit $R(t') \leq k$ und $|t'| \leq 2^{|t|}$. Also läßt sich das obige Funktional F der Typenstufe $n+1$ darstellen durch einen unendlichen Term t_F^* vom Rang $R(t_F^*) \leq n+1$ und mit der Tiefe $|t_F^*| < 2_m(\alpha \cdot \omega)$.

Als nächstes führen wir endliche Bezeichnungen oder Nummern für unendliche Terme ein. Ihre Konstruktion ist problemlos im Fall von Variablen, Ziffern, Anwendungen und Abstraktionen. Im Fall eines Folgenterms $\langle t_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ enthält die Nummer unter anderem einen Index e einer primitiv rekursiven Funktion, die angewandt auf i eine Nummer für t_i liefert, und eine Schranke für die Tiefe von $\langle t_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$. Wir definieren dann Wertfunktionale $W_\tau^{\alpha,M}$, die folgendes leisten. Ist $\ulcorner t \urcorner$ Nummer eines abgeschlossenen unendlichen Terms t vom Typ τ der Tiefe $|t| < \alpha$, dessen sämtliche Teilterme Typen aus einer endlichen Menge M besitzen, so stellt $W_\tau^{\alpha,M} \ulcorner t^\tau \urcorner$ dasselbe mengentheoretische Funktional dar wie t^{τ}. Die Definition der $W_{\tau}^{\alpha,M}$, $\tau \in M$, erfolgt durch simultane α-Rekursion [4].

Sei nun F ein α-rekursives Funktional der Typenstufe $n+1$, in dessen Definition alle durch Rekursion eingeführten Hilfsfunktionale Typenstufen $\leq n+m+1$ $(m \geq 1)$ besitzen. Wir erhalten zunächst eine Nummer $\ulcorner t_F \urcorner$ eines unendlichen F darstellenden Terms t_F, so daß $F = W_{\tau}^{\alpha k, M} \ulcorner t_F \urcorner$ für geeignetes k und M. Entsprechend der Reduktion des Terms t_F mit $R(t_F) \leq n+m+1$ und $|t_F| < \alpha \cdot \omega$ auf einen Term t_F^* mit $R(t_F^*) \leq n+1$ und $|t_F^*| < 2_m(\alpha \cdot \omega)$ konstruieren wir eine Funktion Red^* so daß

$$F = W_{\tau}^{\alpha k, M} \ulcorner t_F \urcorner = W_{\tau}^{\beta, M_{n+1}}(Red^* \ulcorner t_F \urcorner)$$

für ein $\beta < 2_m(\alpha \cdot \omega)$ und eine Menge M_{n+1} von Typen, die nur Typenstufen $\leq n+1$ besitzen. Es zeigt sich, daß die Funktion Red^* primitiv rekursiv gewählt werden kann [5]. Da $W_{\tau}^{\beta, M_{n+1}}$ mit Hilfe einer β-Rekursion, aber ohne Hilfsfunktionale von Typenstufen $> n+1$ definiert ist, ergibt sich das gewünschte Resultat.

---

[4] Mit etwas mehr Aufwand kann man entsprechende Wertfunktionale definieren, in denen anstelle der endlichen Menge M von Typen die unendliche Menge aller Typen einer Stufe $\leq n$ zugelassen ist.

[5] Ähnlich ist es bei Kleene's Ordinalzahlbezeichnungen, wo etwa die der Ordinalzahladdition entsprechende Funktion $+_0$ primitiv rekursiv gewählt werden kann; s. Kleene 1958.

Um die oben erwähnte formale Version zu erhalten, müssen wir diesen Beweis in einem T_{β}^{n+m}, $\beta < 2_m(\alpha\cdot\omega)$, formalisieren. Die dadurch notwedig gemachten Änderungen behandeln wir in §4. So ist es z.B. in der quantorenfreien Theorie T_{β}^{n+m} nicht ohne weiteres zulässig, das Π_1^0-Prädikat " u ist Termnummer" in der Prämisse einer durch Induktion zu beweisenden Formel zu verwenden. Ein Ausweg aus dieser Schwierigkeit ergibt sich mit Hilfe des Herbrand'schen Satzes (vgl. Kreisel 1958 und Shepherdson 1965).

§1 Durch transfinite Rekursion definierte Funktionale

1.1 Typen sind 0 und mit σ,τ auch $(\sigma\to\tau)$. Die Klassen $\mathcal{F}_\tau$ der mengentheoretischen Funktionale vom Typ τ werden induktiv definiert durch $\mathcal{F}_0 := \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_{\sigma\to\tau} := \mathcal{F}_\tau^{\mathcal{F}_\sigma} := \{F^{\sigma\to\tau} \mid F^{\sigma\to\tau}\colon \mathcal{F}_\sigma \to \mathcal{F}_\tau\}$. Mehrstellige Funktionale können wie üblich auf einstellige zurückgeführt werden; z.B. läßt sich eine zweistellige Funktion auffassen als Funktional vom Typ $0\to(0\to 0)$. Wir schreiben $\tau_1\to\tau_2\to\ldots\tau_{n-1}\to\tau_n$ für $\tau_1\to(\tau_2\to\ldots(\tau_{n-1}\to\tau_n)\ldots)$. Jeder Typ τ ist eindeutig darstellbar als $\tau = \tau_1\to\tau_2\to\ldots\tau_n\to 0$, wie man durch Induktion über τ leicht beweist; $\tau_1,\ldots,\tau_n$ nennen wir Argumenttypen von τ. Wir schreiben $F^{\tau_1\to\ldots\tau_n\to\tau}(G_1^{\tau_1},\ldots,G_n^{\tau_n})$ für $F^{\tau_1\to\ldots\tau_n\to\tau}(G_1^{\tau_1})\ldots(G_n^{\tau_n})$. Typenindizes, die sich aus dem Zusammenhang ergeben oder unwichtig sind, werden im folgenden häufig weggelassen. Die Stufe $S(\tau)$ eines Typs τ wird definiert durch $S(0)=0$, $S(\sigma\to\tau) = \max(S(\sigma)+1,S(\tau))$. Zum Beispiel ist $S(0\to 0) = S(0\to(0\to 0)) = 1$, aber $S((0\to 0)\to 0) = 2$. Allgemein ist $S(\tau_1\to\ldots\tau_n\to 0) = \max(S(\tau_1),\ldots,S(\tau_n))+1$.

1.2 Definition Die Klasse der primitiv rekursiven Funktionale ist die kleinste Funktionalklasse, die

(i) die Zahl 0^0 und die Nachfolgerfunktion $N^{0\to 0}$ enthält,

(ii) abgeschlossen ist gegen explizite Definitionen

$$F^{\tau_1\to\ldots\tau_n\to 0}(x_1^{\tau_1},\ldots,x_n^{\tau_n}) = A ,$$

wobei A aus den Variablen $x_1,\ldots,x_n$ und bereits definierten Funktionalen $G_1,\ldots,G_m$ mit Anwendungen aufgebaut ist, und

(iii) abgeschlossen ist gegen primitive Rekursionen

$$F(0) = G^\tau$$
$$F(x+1) = H(F(x),x) .$$

1.3 Außer primitiven Rekursionen wollen wir auch transfinite Rekursionen betrachten. $\prec$ sei eine beliebige Wohlordnung der natürlichen Zahlen.

Definition Die Klasse der $\prec$-rekursiven Funktionale ist die kleinste Funktionalklasse mit den Eigenschaften (i) - (iii), die noch

(iv) abgeschlossen ist gegen $\prec$-Rekursionen

$$F(x) = G([F]_{\prec x},x) ,$$

wobei $[F]_{\prec x}$ der Wertverlauf von F unterhalb von x ist, also $[F]_{\prec x}(y) := F(y)$ falls $y \prec x$, und $:= \underset{\sim}{0}$ sonst.

1.4 Bemerkung Es ist bekannt, daß innerhalb der Klasse der rekursiven Funktionen die Reichweite des Schemas der $\prec$-Rekursion weder durch den Ordnungstyp noch durch die rekursionstheoretische Kompliziertheit der Relation $\prec$ festgelegt ist: Myhill 1953 und Routledge 1953 haben bewiesen, daß jede rekursive Funktion durch primitiv rekursive Operationen und nur eine Rekursion längs einer primitiv rekursiven Wohlordnung vom Ordnungstyp ω definiert werden kann. Eine Abhängigkeit der Stärke der $\prec$-Rekursion vom Ordnungstyp von $\prec$ (und nur davon) ergibt sich, wenn man sich auf Standard-Wohlordnungen $\prec$ beschränkt; dieser Begriff steht aber nur für konkrete Ordnungstypen (etwa ε_0, Γ_0) zur Verfügung. Ist $\prec$ eine Standard-Wohlordnung vom Ordnungstyp α, so spricht man statt von $\prec$-Rekursion auch von α-Rekursion.

1.5 Bemerkung Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur Funktionale, in deren Definitionsbäumen transfinite Rekursionen nur längs einer einzigen Wohlordnung $\prec$ vorkommen. Alles folgende läßt sich entsprechend auch dann durchführen, wenn Rekursionen längs verschiedener Wohlordnungen zugelassen sind.

1.6 Wir wollen die Definition der $\prec$-rekursiven Funktionale noch etwas vereinfachen. Dazu zeigen wir, daß sich unter einfachen Annahmen über $\prec$ das Schema der primitiven Rekursion

$$F(0) = G$$

$$F(x+1) = H(F(x),x)$$

reduzieren läßt auf das der $\prec$-Rekursion. Gegeben seien also G, H. Mit Hilfe einer $\prec$-Rekursion soll eine Lösung F der obigen Gleichungen definiert werden. Wir nehmen an, daß primitiv rekursive Funktionen h, h' existieren so daß

(1) $\quad x < y \quad \rightarrow \quad h(x) \prec h(y)$

(2) $\quad h'(h(x)) = x$.

Setzt man dann

$$F(x) = F_1(h(x))$$

$$F_1(y) = G_1([F_1]_{\prec y}, y)$$

$$G_1(z,y) = \begin{cases} G & \text{falls } y = h(0) \\ H(z(h(x)),x) \quad \text{mit } x := h'(y) - 1 & \text{sonst ,} \end{cases}$$

so rechnet man leicht nach, daß F das Verlangte leistet.

Unter den Annahmen (1),(2) (die wir ab jetzt voraussetzen wollen, wenn von $\prec$-rekursiven Funktionalen die Rede ist), ist also die oben angegebene Definition der $\prec$-rekursiven Funktionale zu der folgenden äquivalent: Die Klasse der $\prec$-rekursiven Funktionale ist die kleinste Funktionalklasse, die die Zahl 0 und alle primitiv rekursiven Funktionen enthält und abgeschlossen ist gegen explizite Definitionen und $\prec$-Rekursionen.

§2 Unendliche Terme Wir definieren unendliche Terme und konstruieren zu jeder Definition eines $\prec$-rekursiven Funktionals F in kanonischer Weise einen F darstellenden unendlichen Term t_F. Weiter geben wir ein Verfahren an, mit dem t_F reduziert werden kann auf einen Term t_F^*, in dem die Typenstufen der Teilterme nicht größer sind als die Typenstufe des Gesamtterms.

Die Beweise verlaufen weitgehend parallel zu Tait 1965a. Wir führen sie aus, da einerseits einige Abänderungen zweckmäßig sind, andererseits später auf Einzelheiten der Konstruktionen Bezug genommen wird.

2.1 Für jeden Typ τ mögen abzählbar unendlich viele τ-Variable (d.h. Variable des Typs τ) $x^\tau, y^\tau, z^\tau, \ldots$ zur Verfügung stehen.

Definition von (unendlichen) τ-Termen

(i) Jede τ-Variable x^τ ist ein τ-Term.

(ii) Für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ ist $\bar{n}$ ein 0-Term.

(iii) Ist t ein $(\sigma \to \tau)$-Term und s ein σ-Term, so ist (ts) ein τ-Term.

(iv) Ist t ein τ-Term, so ist $\lambda x^\sigma . t$ ein $(\sigma \to \tau)$-Term.

(v) Sind t_i 0-Terme für $i \in \mathbb{N}$, so ist die Folge $\langle t_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ ein $(0 \to 0)$-Term.

(vi) t ist τ-Term nur gemäß (i)-(v).

Unendliche Terme bezeichnen wir im folgenden mit t, s, r. Die Typenstufe $S(\tau)$ eines τ-Terms t bezeichnen wir kurz mit $S(t)$. Wir schreiben für (ts) auch $t(s)$ und für $t(s_1)\dots(s_n)$ auch $t(s_1,\dots,s_n)$ oder $ts_1\dots s_n$. Für $\lambda x_1.\lambda x_2.\dots\lambda x_n.t$ schreiben wir $\lambda x_1 x_2 \dots x_n.t$. Die Terme $\bar{n}$ nennen wir Ziffern.

Letzten Endes interessieren wir uns nur für abgeschlossene Terme, aber wir müssen auch Teilterme von ihnen betrachten. Nun sieht man leicht aus der Definition , daß jeder Teilterm eines abgeschlossenen unendlichen Terms höchstens endlich viele Variable frei enthält. Also genügt es, unendliche Terme mit nur endlich vielen freien Variablen zu betrachten, und das wollen wir von jetzt ab tun.

2.2 Für jeden unendlichen Term t kann man seinen Wert $W_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}}t$ unter einer Belegung der Variablen $\mathfrak{x} = x_1,\dots,x_n$ mit den Funktionalen $\mathfrak{a} = a_1,\dots,a_n$ definieren, vorausgesetzt daß alle in t freien Variablen in $\mathfrak{x}$ vorkommen. $W_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}}t$ ist ein Funktional des Typs τ , falls t ein τ-Term ist.

Definition von $W_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}}t$

(i) $W_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}}x_i = a_i$

(ii) $W_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}}\bar{n} = n$

(iii) $W_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}}(ts) = (W_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}}t)(W_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}}s)$

(iv) $(W_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}}(\lambda x t))a = W_{\mathfrak{x}x}^{\mathfrak{a}a}t$

(v) $(W^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{r}}\langle t_i\rangle)n = W^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{r}}t_n$

2.3 Definition von $|t|$ (Tiefe von t)

(i) $|x| = 1$

(ii) $|\overline{n}| = 1$

(iii) $|ts| = \max(|t|,|s|)+1$

(iv) $|\lambda xt| = |t|+1$

(v) $|\langle t_i\rangle| = \sup\limits_i(|t_i|+1)$

2.4 Zu jedem $\prec$-rekursiven Funktional F kann man nun wie folgt einen F darstellenden abgeschlossenen unendlichen Term t konstruieren (also $F = Wt$), dessen Tiefe $|t|<\alpha\cdot\omega$ ist, α Ordnungstyp von $\prec$:

0 wird dargestellt durch $\overline{0}$ und eine etwa 2-stellige primitiv rekursive Funktion f durch $\lambda xy\langle\langle\overline{f(i,j)}\rangle_{j\in\mathbb{N}}\, y\rangle_{i\in\mathbb{N}}\, x$. Sei F aus Funktionalen $G_1,\ldots,G_m$ explizit definiert in der Form $F(x_1,\ldots,x_n) = A$. $s_1,\ldots,s_m$ seien Terme mit $|s_i|<\alpha\cdot\omega$, die $G_1,\ldots,G_m$ darstellen. t sei aus $s_1,\ldots,s_m$ in derselben Weise mit Anwendungen aufgebaut wie A aus $G_1,\ldots,G_m$. Dann wird F dargestellt durch $\lambda x_1\ldots x_n.t$ und es ist $|\lambda x_1\ldots x_n.t| < \alpha\cdot\omega$. Sei schließlich F durch eine $\prec$-Rekursion aus G definiert:

$$F(x) = G([F]_{\prec x},x) \ .$$

s sei ein Term mit $|s|<\alpha\cdot\omega$, der G darstellt. Dann kann man rekursiv Darstellungen t_n von $F(n)$ definieren durch

$$t_n \equiv s\langle t_{ni}\rangle_{i\in\mathbb{N}}\,\overline{n}$$

$$\text{mit} \quad t_{ni} :\equiv \begin{cases} t_i & \text{falls} \quad i \prec n \\ \underset{\sim}{0} & \text{sonst} \end{cases}$$

und F darstellen durch $t :\equiv \langle t_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ [7]. Die Abschätzung $|t| < \alpha\cdot\omega$ ergibt sich wie folgt. Sei etwa $|s| \leq \alpha\cdot k$. Durch $\prec$-Induktion über n zeigt man leicht $|t_n| \leq \alpha\cdot k + 1\cdot(o_\prec(n)+1)$ mit $1<\omega$, $o_\prec(n)$ Ordnungstyp von $\{m \mid m\prec n\}$. Daraus ergibt sich unmittelbar $|t| < \alpha\cdot\omega$ (ist α Limeszahl, so hat man $|t| < \alpha(k+1)$).

2.5 Der so zu einem $\prec$-rekursiven Funktional F der Typenstufe $n+1$ konstruierte F darstellende Term t enthält i.a. Teilterme einer Typenstufe $>n+1$; offenbar ist das Supremum der Typenstufen aller Teilterme gleich der maximalen Typenstufe eines in der Definition von F auftretenden Hilfsfunktionals. Wir zeigen jetzt, daß man einen F darstellenden Term auch so wählen kann, daß für seine "innere Typenstufe" nur die durch Rekursion eingeführten Hilfsfunktionale eine Rolle spielen.

Lemma Gegeben sei eine Definition eines $\prec$-rekursiven Funktionals F der Typenstufe $n+1$, in der alle durch Rekursion eingeführten Hilfsfunktionale Typenstufen $\leq n+m+1$ besitzen.

---

7) Zu Termen $\langle s_i^\sigma\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\sigma\neq 0$ s. die Einleitung und Fußnote 3 .

Dann kann man einen abgeschlossenen unendlichen Term t_F konstruieren mit $F = Wt_F$ und $|t_F| < \alpha \cdot \omega$ (α Ordnungstyp von $\prec$), dessen Teilterme alle eine Typenstufe $\leq n+m+1$ besitzen.

Der Beweis ergibt sich durch eine einfache Modifikation der obigen Konstruktion. Dabei verwenden wir das Normalformentheorem für endliche Terme (also Terme, die ohne Verwendung von Folgen $\langle t_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ aufgebaut sind): Jeder endliche Term **A** läßt sich durch λ-Konversionen $(\lambda x B)C \rightarrow B_x[C]$ von Teiltermen reduzieren auf einen endlichen Term $\mathbf{A}^*$ vom Rang $R\mathbf{A}^* = 0$ (einen Beweis dafür erhält man z.B. durch Spezialisierung von 2.10). Die Fälle $F=0$ und F primitiv rekursive Funktion sind trivial. Sei F explizit definiert in der Form $F(x_1,\ldots,x_n) = A[x_1,\ldots,x_n,G_1,\ldots,G_k]$. Wir können annehmen, daß $G_1,\ldots,G_k$ durch $\prec$-Rekursionen eingeführt sind, wenn wir in **A** auch Abstraktionen zulassen. Ist $\mathbf{A}^*$ die Normalform von A , so hat $t_F :\equiv \lambda x_1 \ldots x_n . A^*[x_1,\ldots,x_n,t_{G_1},\ldots,t_{G_k}]$ die verlangten Eigenschaften. Sei schließlich F durch eine $\prec$-Rekursion definiert, etwa in der Form $F(x) = A[[F]_{\prec x},x,G_1,\ldots,G_p]$ mit einem endlichen Term **A** und durch $\prec$-Rekursion eingeführten $G_1,\ldots,G_p$. $\mathbf{A}^*$ sei die Normalform von A. Terme t_n zur Darstellung von $F(n)$ definieren wir jetzt durch

$$t_n :\equiv A^*[\langle t_{ni} \rangle_{i \in \mathbb{N}}, \bar{n}, t_{G_1},\ldots,t_{G_p}]$$

$$\text{mit } t_{ni} \equiv \begin{cases} t_i & \text{falls } i \prec n \\ \underset{\sim}{0} & \text{sonst} \end{cases}$$

und wir setzen wieder $t_F :\equiv \langle t_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$. Offenbar hat t_F die verlangten Eigenschaften. (Die Abschätzung $|t_F| < \alpha \cdot \omega$ ergibt sich genau wie in 2.4 ; s. auch 3.3). Damit ist das Lemma bewiesen.

2.6 Wie üblich kann man die Substitution $t_x[s]$ erklären. Durch Induktion über t zeigt man leicht

$$W^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{e}}\, t_y[s] = W^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{e}\,{}^{W^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{e}} s}_{y}}\, t$$

$$|t_x[s]| \leq |s| + |t| .$$

2.7 Definition von $t \Dashv s$ (t ist reduzierbar auf s)

(i) $(\lambda x t)s \Dashv t_x[s]$

(ii) $\Dashv$ ist reflexiv und transitiv.

(iii) Wenn $t \Dashv t'$ und $s \Dashv s'$, so $ts \Dashv t's'$.

(iv) Wenn $t \Dashv t'$, so $\lambda x t \Dashv \lambda x t'$.

(v) Wenn $t_i \Dashv t_i'$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so $\langle t_i \rangle \Dashv \langle t_i' \rangle$.

(vi) $t \Dashv s$ nur gemäß (i) - (v).

Offenbar bleibt der Wert eines Terms beim Reduzieren unverändert, d.h. aus $t \Dashv t'$ folgt $W^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{e}} t = W^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{e}} t'$.

2.8 Den Rang Rt eines Terms t definieren wir als das Supremum der Typenstufen aller Teilterme der Form $\lambda x s$ in einem Kontext $(\lambda x s)r$.

2.9 Lemma $R(t_x[s]) \leq \max(Rt, Rs, Ss)$.

Der Beweis ergibt sich leicht durch Induktion über t .

2.10 Lemma Zu jedem t mit $Rt \leq k+1$ gibt es ein t' mit $t \mathrel{=\!\!\!|} t'$, $Rt' \leq k$ und $|t'| \leq 2^{|t|}$.

Wir führen den Beweis durch Induktion über t . Fall 1: $t \equiv \langle t_i \rangle$. Man setze $t' \equiv \langle t_i' \rangle$ mit nach Induktionsvoraussetzung gewählten t_i' . Fall 2: $t \equiv \lambda xs$. Man setze $t' \equiv \lambda xs'$. Fall 3: $t \equiv rs$. Man wähle r', s' nach Ind.vor.. Hat r' die Form λxr_1 und ist $Sr = k+1$, so setze man $t' \equiv (r_1)_x[s']$; es folgt $t \mathrel{=\!\!\!|} t'$, $Rt' \leq \max(Rr_1, Rs', Ss') \leq k$ und

$$\begin{aligned} |t'| &\leq |s'| + |r'| \\ &\leq 2^{|s|} + 2^{|r|} \\ &\leq 2^{\max(|s|, |r|)+1} \\ &= 2^{|t|}. \end{aligned}$$

Andernfalls setze man $t' \equiv r's'$; es folgt $t \mathrel{=\!\!\!|} t'$, $|t'| \leq \max(2^{|r|}, 2^{|s|})+1 \leq 2^{|t|}$ und mit einer einfachen Überlegung $Rt' \leq k$.

2.11 Bemerkung In der angegebenen Konstruktion von t' aus t treten bei Substitutionen i.a. auch gebundene Umbenennungen auf. Mir ist nicht bekannt, ob man erreichen kann, daß die Anzahl der gebundenen Variablen in t' endlich bleibt, falls sie in t endlich war. Wenn das der Fall ist, kann man im §3 eine einfachere Version der Wertfunktionale verwenden.

2.12 Betrachten wir eine Definition eines $\prec$-rekursiven Funktionals F der Typenstufe $n+1$, in der alle durch Rekursion eingeführten Hilfsfunktionale Typenstufen $\leq n+m+1$ besitzen. Nach 2.5 läßt sich F darstellen in der Form $F = Wt_F$ mit einem t_F der Tiefe $|t_F| < |\prec|\cdot\omega$ und vom Rang $Rt_F \leq n+m+1$. Aus t_F kann man durch m-fache Anwendung von 2.10 ein t_F^* konstruieren mit $t_F \dashv t_F^*$, $Rt_F^* \leq n+1$ und $|t_F^*| < 2_m(|\prec|\cdot\omega)$, so daß also auch gilt $F = Wt_F^*$. Unser Ziel im nächsten Abschnitt ist es, entsprechend der Darstellung Wt_F^* von F eine Definition von F zu finden, in der keine "Umwege" durch höhere Typenstufen mehr auftreten, stattdessen aber eine Rekursion längs einer aus $\prec$ kanonisch konstruierten Wohlordnung vom Typ $\beta < 2_m(|\prec|\cdot\omega)$.

§3 Termnummern und Wertfunktionale

3.1 Wir definieren induktiv Nummern oder Bezeichnungen für gewisse unendliche Terme, ähnlich der Church/Kleene'schen Definition von Ordinalzahlbezeichnungen. Die Definition ist trivial im Fall von Variablen, Ziffern, Anwendungen oder Abstraktionen. Im Fall eines Folgenterms verwenden wir eine primitiv rekursive Funktion zur Aufzählung der Nummern der Folgenglieder, damit beim Auswerten einer Termnummer nicht beliebig komplizierte rekursive Funktionen erforderlich werden. Unsere Definition von Termnummern enthält folgende Parameter: (1) eine Relation $\prec$, die dazu dienen soll, Schranken für die Tiefe der bezeichneten Terme bereit zu stellen. Die Auswertung einer Termnummer kann dann durch $\prec$ -Rekursion erfolgen. (2) eine Menge $\mathbb{M}$ von Typen.

Gegeben sei eine Indizierung der primitiv rekursiven Funktionen, etwa wie in Kleene 1958. Die primitiv rekursive Funktion mit Index e bezeichnen wir mit $[e]$. $\prec$ sei eine 2-stellige Relation und $a_1 \in \mathrm{Feld}(\prec)$ (in einer Wohlordnung $\prec$ wird a_1 als die der Ordinalzahl 1 entsprechende Zahl gewählt). M sei eine Menge von Typen. Alle in der folgenden Definition auftretenden Typen seien aus M .

Definition von $u \in \mathrm{Num} = \mathrm{Num}^{\prec, M}$ (u ist Termnummer)

(i) $\langle 1, \ulcorner\tau\urcorner, a_1, i\rangle =: \ulcorner x_i^{\tau}\urcorner \in \mathrm{Num}$

(ii) $\langle 2, \ulcorner 0\urcorner, a_1, i\rangle =: \ulcorner \bar{i}\urcorner \in \mathrm{Num}$

(iii) Wenn $u, v \in \mathrm{Num}$, $\mathrm{Typ}(u) = \ulcorner\sigma\to\tau\urcorner$, $\mathrm{Typ}(v) = \ulcorner\sigma\urcorner$ und $|u|, |v| \prec a$, so ist $\langle 3, \ulcorner\tau\urcorner, a, u, v\rangle \in \mathrm{Num}$.

(iv) Wenn $u \in \mathrm{Num}$, $\mathrm{Typ}(u) = \ulcorner\tau\urcorner$ und $|u| \prec a$, so ist $\langle 4, \ulcorner\sigma\to\tau\urcorner, a, \ulcorner x_i^{\sigma}\urcorner, u\rangle \in \mathrm{Num}$.

(v) Wenn für alle i $[e](i) =: u_i \in \mathrm{Num}$, $\mathrm{Typ}(u_i) = \ulcorner 0\urcorner$, $|u_i| \prec a$, $R(u_i) \leq k$ und $FV(u_i) \subseteq^{\#} b$, so ist $\langle 5, \ulcorner 0\to 0\urcorner, a, k, b, e\rangle \in \mathrm{Num}$.

(vi) $u \in \mathrm{Num}$ nur gemäß (i) - (v).

Hierbei ist $\mathrm{Typ}(u) := (u)_1$, $|u| := (u)_2$ und R, FV (die Bezeichnungen erinnern an Rang, freie Variable) sind definiert durch

$$R(u) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (u)_0=1,2 \\ \max(R((u)_3),R((u)_4)) & \text{falls } (u)_0=3,\ (u)_{3,0}\neq 4 \\ \max(R((u)_3),R((u)_4),S((u)_3)) & \text{falls } (u)_0=3,\ (u)_{3,0}=4 \\ R((u)_4) & \text{falls } (u)_0=4 \\ (u)_3 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$FV(u) = \begin{cases} \{u\}^{\#} & \text{falls } (u)_0=1 \\ \emptyset^{\#} & \text{falls } (u)_0=2 \\ FV((u)_3) \cup^{\#} FV((u)_4) & \text{falls } (u)_0=3 \\ FV((u)_4) -^{\#} \{(u)_3\}^{\#} & \text{falls } (u)_0=4 \\ (u)_4 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei die mit $\#$ versehenen mengentheoretischen Zeichen unter einer (trivial zu wählenden) Kodierung der endlichen Variablenmengen den genauso bezeichneten Mengenoperationen entsprechen sollen. $\ulcorner\tau\urcorner$ bezeichnet wie üblich eine Gödelnummer von τ, und $S(u)$ liest aus u die Stufe des Typs τ mit $(u)_1=\ulcorner\tau\urcorner$ ab.

3.2 Jede Termnummer u **bestimmt eindeutig einen unendlichen Term** t_u, und zwar wie folgt:

(i) Ist $u = \langle 1,\ulcorner\tau\urcorner,a_1,i\rangle \in Num$, so ist $t_u \equiv x_i^\tau$.

(ii) Ist $u = \langle 2,\ulcorner 0\urcorner,a_1,i\rangle \in Num$, so ist $t_u \equiv \bar{i}$.

(iii) Ist $u = \langle 3,\ulcorner\tau\urcorner,a,v,w\rangle \in Num$, so ist $t_u \equiv t_v t_w$.

(iv) Ist $u = \langle 4,\ulcorner\sigma\to\tau\urcorner,a,\ulcorner x_i^\sigma\urcorner,v\rangle \in Num$, so ist $t_u \equiv \lambda x_i^\sigma t_v$.

(v) Ist $u = \langle 5,\ulcorner 0\to 0\urcorner,a,k,b,e\rangle \in Num$, so ist $t_u \equiv \langle t_{u_i}\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ mit $u_i := [e](i)$.

Umgekehrt braucht für einen unendlichen Term offenbar keine Nummer zu existieren, und wenn eine existiert, so ist sie i.a. nicht eindeutig bestimmt. Wir verwenden $\ulcorner t \urcorner$ als Variable für Nummern von t. Die Verwendung der Schreibweise $\ulcorner t \urcorner$ setzt voraus, daß eine Nummer von t existiert.

3.3 Zu jedem $\prec$-rekursiven Funktional F hatten wir in 2.5 einen F darstellenden unendlichen Term t_F konstruiert. Wir wollen jetzt eine Termnummer $\ulcorner t_F \urcorner$ für t_F in kanonischer Weise festlegen.

$\prec$ sei also die zur Definition des $\prec$-rekursiven Funktionals F verwendete Wohlordnung von $\mathbb{N}$. α sei der Ordnungstyp von $\prec$. Aus $\prec$ erhält man in kanonischer Weise eine Wohlordnung $\prec_0$ vom Ordnungstyp $\alpha \cdot \omega$ (etwa durch $n \prec_0 m \;:\leftrightarrow\; (\pi_1 n \prec \pi_1 m \wedge \pi_2 n = \pi_2 m) \vee \pi_2 n < \pi_2 m$; dabei sind π_1, π_2 primitiv rekursive Umkehrfunktionen einer surjektiven Paarfunktion π). Wir nehmen an, daß $\prec$ und die den Ordinalzahlfunktionen $\lambda\xi.\xi+1$, $\lambda\xi.n\cdot\xi$ in $\prec$ entsprechenden Funktionen primitiv rekursiv sind. M sei die Menge aller in der Definition von F auftretenden Typen, soweit sie eine Stufe $\leq$ der maximalen Typenstufe 1 eines durch $\prec$-Rekursion eingeführten Hilfsfunktionals besitzen.

Wir definieren $\ulcorner t_F \urcorner \in \mathrm{Num}^{\prec_0, M}$ durch Induktion über F. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, daß F durch eine

$\prec$ -Rekursion eingeführt wurde; die restlichen Fälle sind einfacher bzw. trivial.

Sei also F definiert in der Form $F(x) = A[[F]_{\prec x}, x, G_1, \ldots, G_p]$ mit durch $\prec$ -Rekursion eingeführten $G_1, \ldots, G_p$. A^* sei die Normalform von A. t_F war aus Termen

$$t_n \equiv A^*[\langle t_{ni}\rangle_{i\in\mathcal{N}}, \bar{n}, t_{G_1}, \ldots, t_{G_p}]$$

$$\text{mit} \quad t_{ni} \equiv \begin{cases} t_i & \text{falls } i \prec n \\ \underset{\sim}{0} & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert durch $t_F \equiv \langle t_n\rangle_{n\in\mathcal{N}}$. Die Abschätzung $|t_F| < \alpha\cdot\omega$ ergab sich wie folgt: Seien $|t_{G_1}|, \ldots, |t_{G_p}| \leq \alpha\cdot k$ und $|\underset{\sim}{0}|+1 \leq k$. Dann ist $|t_n| \leq \alpha\cdot k + (|A^*|+1)(o_\prec(n)+1)$ (man beweist dies und $|\langle t_{ni}\rangle_{i\in\mathcal{N}}| \leq \alpha\cdot k + (|A^*|+1)o_\prec(n) + 1$ gemeinsam durch Induktion über n; $o_\prec(n)$ ist die der Zahl n in $\prec$ entsprechende Ordinalzahl).

Für $G_1, \ldots, G_p$ seien nun Termnummern $\ulcorner t_{G_1}\urcorner, \ldots, \ulcorner t_{G_p}\urcorner$ mit Tiefenschranken $|\ulcorner t_{G_i}\urcorner| \preceq_0 \ulcorner\alpha\cdot k\urcorner$ schon konstruiert. Wir definieren mit Hilfe des Rekursionstheorems für $\mathcal{P}$ (Kleene 1958, p.75) eine primitiv rekursive Funktion mit Index e, so daß $[e](n) =: u_n$ eine Termnummer für t_n ist mit einer Tiefenschranke $|u_n| \preceq_0 \ulcorner\alpha\cdot k + (|A^*|+1)(o_\prec(n)+1)\urcorner$ (aufgrund der Annahmen über $\prec$ ist $\ulcorner\ldots n\ldots\urcorner$ eine primitiv rekursive Funktion von n; $\ulcorner\ldots n\ldots\urcorner$ meint natürlich die der Ordinalzahl $\ldots n\ldots$ in $\prec_0$ entsprechende Zahl). Nehmen wir an, ein solches e liegt bereits vor. Dann erhält man eine Nummer u'_n für $\langle t_{ni}\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ in der Form $\langle 5, \ulcorner 0 \to 0 \urcorner, a, 1, \emptyset^{\#}, e' \rangle$ wobei $e' = e'(e,n)$ so gewählt ist, daß

$$[e'](i) = \begin{cases} [e](i) & \text{falls } i \prec n \\ \ulcorner \underset{\sim}{0} \urcorner & \text{sonst ,} \end{cases}$$

und $a = a(n) = \ulcorner \alpha \cdot k + (|A^*|+1)o_{\prec}(n) + 1 \urcorner$. $e'(e,n)$ und $a(n)$ sind primitiv rekursiv. Entsprechend dem Aufbau von t_n aus $\langle t_{ni}\rangle_{i\in\mathbb{N}}$, $t_{G_1},\dots,t_{G_p}$ kann man nun aus u'_n, $\ulcorner t_{G_1} \urcorner,\dots,\ulcorner t_{G_p} \urcorner$ eine Nummer für t_n konstruieren, mit einer Tiefenschranke $\preceq_0 \ulcorner \alpha \cdot k + (|A^*|+1)(o_{\prec}(n)+1) \urcorner$. Eine Anwendung des Rekursionstheorems für $\mathcal{P}$ liefert jetzt das gewünschte e . Aus e erhält man unmittelbar eine Nummer $\ulcorner t_F \urcorner$ für t_F .

3.4 Wir wollen jetzt Wertfunktionale $W_\tau = W_\tau^{\prec,M}$, $\tau \in M$, definieren. Sei u eine Termnummer $\in \mathrm{Num}^{\prec,M}$ mit $\mathrm{Typ}(u) = \ulcorner \tau \urcorner$ und $FV(u) = \emptyset^{\#}$. Wir hätten gerne, daß $W_\tau u$ den Wert des durch u bezeichneten abgeschlossenen Terms t_u angibt. Für die rekursive Definition der W_τ ist es jedoch nötig, auch freie Variable in t_u zuzulassen. Wir führen deshalb ein zusätzliches Argument ein, von dem wir später annehmen, daß es eine Belegung $\mathfrak{r} \to \mathfrak{a}$ dieser Variablen kodiert. Es soll also gelten (Typenindizes sind weggelassen)

$$W \ulcorner x_i \urcorner \ulcorner \mathfrak{r} \to \mathfrak{a} \urcorner = a_i$$
$$W \ulcorner \underline{i} \urcorner \ulcorner \mathfrak{r} \to \mathfrak{a} \urcorner = i$$

$$W\ulcorner ts\urcorner\ulcorner \mathfrak{e}\to\mathfrak{v}\urcorner = (W\ulcorner t\urcorner\ulcorner \mathfrak{e}\to\mathfrak{v}\urcorner)(W\ulcorner s\urcorner\ulcorner \mathfrak{e}\to\mathfrak{v}\urcorner)$$

$$W\ulcorner \lambda x t\urcorner\ulcorner \mathfrak{e}\to\mathfrak{v}\urcorner\, a = W\ulcorner t\urcorner\ulcorner \mathfrak{e}, x\to\mathfrak{v}, a\urcorner$$

$$W\ulcorner\langle t_i\rangle\urcorner\ulcorner \mathfrak{e}\to\mathfrak{v}\urcorner\, n = W([e](n))\ulcorner \mathfrak{e}\to\mathfrak{v}\urcorner$$

e der aus $\ulcorner\langle t_i\rangle\urcorner$ ablesbare primitiv rekursive Index der Folge der $\ulcorner t_i\urcorner$.

Wir setzen M als endliche Menge von Typen und $\prec$ als Wohlordnung der natürlichen Zahlen voraus, damit wir die W_τ , $\tau \in M$, durch simultane $\prec$-Rekursion definieren können.

Um die W_τ genau zu definieren, müssen wir uns zunächst mit Kodierungen von Belegungen befassen. Sei $n+1 := \max_{\tau\in M} S\tau$. Da wir uns letzten Endes nur für abgeschlossene Terme interessieren und freie Variable nur für den induktiven Aufbau betrachten müssen, genügt es, sich auf freie Variable mit Typenstufen $\leq n$ zu beschränken. Gegeben sei also eine Belegung von Variablen $x_1,\dots,x_m$ durch Funktionale $a_1,\dots,a_m$, jeweils von den Typen $\tau_1,\dots,\tau_m$ mit Stufen $S\tau_i \leq n$. Als erstes transformiere man alle a_i auf einen gemeinsamen Standardtyp n der Stufe n ; dazu verwenden wir Transformationsfunktionale [8] $Tr^n_{\tau_i}$ mit Inversen $Tr^{\tau_i}_n$, so daß gilt $Tr^{\tau_i}_n(Tr^n_{\tau_i} a_i) = a_i$. Aus diesen $Tr^n_{\tau_i} a_i$ bilde man ein Tupel $c^n = \langle \dots, Tr^n_{\tau_i} a_i, \dots, \underset{\sim}{0}^n, \dots\rangle$ der Länge $\max(\ulcorner x_1\urcorner, \dots, \ulcorner x_m\urcorner)$, das an der $\ulcorner x_i\urcorner$-ten Stelle gerade $Tr^n_{\tau_i} a_i$

[8] Solche Transformationsfunktionale lassen sich leicht explizit definieren; s. Gandy 1967 .

(für $i=1,\ldots,m$) und an allen anderen Stellen $\underset{\sim}{0}^n$ enthält. Dieses Tupel $c^n =: \ulcorner \mathscr{C} \rightarrow \mathscr{W} \urcorner$ sei die Kodierung der gegebenen Belegung. Aus c läßt sich dann das der Variablen x_i unter der Belegung zugeordnete Funktional a_i zurückgewinnen in der Form $a_i = Tr_n^{\tau_i}(c)_{\ulcorner x_i \urcorner}$. Erweitert (bzw. ändert) man die gegebene Belegung durch die Forderung, daß die Variable x^τ mit dem Funktional a^τ belegt werden soll, so entspricht dem für Kodierungen der Übergang von c zu $\mathrm{Erw}\ c \ulcorner x \urcorner (Tr_\tau^n a)$ mit einem Funktional $\mathrm{Erw} = \mathrm{Erw}_n$, das leicht aus primitiv rekursiven Funktionen explizit zu definieren ist.

Definition der $W_\tau = W_\tau^{\prec, M}$, $\tau \in M$:

(i) falls $(u)_0=1$: $W_\tau u^0 c^n = Tr_n^\tau(c)_u$

(ii) falls $(u)_0=2$, $\tau=0$: $W_\tau uc = (u)_3$

(iii) falls $(u)_0=3$, $\mathrm{Typ}((u)_3)=\ulcorner \sigma \rightarrow \tau \urcorner$ mit $\sigma \rightarrow \tau, \sigma \in M$:

$$W_\tau uc = (W_{\sigma \rightarrow \tau}(u)_3 c)(W_\sigma (u)_4 c)$$

(iv) falls $(u)_0=4$, τ von der Form $\varrho \rightarrow \sigma$ mit $\varrho, \sigma \in M$:

$$W_\tau uc = \lambda a^\varrho . W_\sigma (u)_4 (\mathrm{Erw}\ c\ (u)_3\ (Tr_\varrho^n a))$$

(v) falls $(u)_0=5$, $\tau = 0 \rightarrow 0$:

$$W_\tau uc = \lambda a^0 .\ W_0([(u)_4](a))\ c$$

(vi) sonst: $W_\tau uc = 0^\tau$.

Hierin sind noch alle Vorkommen von W auf der rechten Seite der Definitionsgleichungen zu ersetzen durch $[W]_{|\cdot| \prec |u|}$, also durch ein Funktional, das an der Stelle v den Wert Wv hat, falls $|v| \prec |u|$, und $\underset{\sim}{0}$ ist sonst.

Daß diese Definition auf eine $\prec$-Rekursion reduzierbar ist, sieht man leicht forlgendermaßen ein. Zunächst läßt sie sich reduzieren auf eine simultane $\prec$-Rekursion

$$(*) \qquad F_i v = G_i [F_1]_{\prec v} \ldots [F_k]_{\prec v} v \qquad i=1,\ldots,k ,$$

indem man ansetzt $W_\tau uc = W'_\tau |u| uc$ und die $W'vuc$ in naheliegender durch simultane $\prec$-Rekursion definiert, also etwa im Fall (iii) durch $W'vuc = ([W'_{\sigma\to\tau}]_{\prec v} \, |(u)_3| (u)_3 c)([W'_\sigma]_{\prec v} \, |(u)_4| (u)_4 c)$.
(*) kann man dann wie üblich mit dem Ansatz

$$Fv = \langle Tr^{n+1}_{\tau_i}(F_i v)\rangle_{i=1,\ldots,k}$$

auf eine gewöhnliche $\prec$-Rekursion reduzieren [9].

Insgesamt ergibt sich also, daß Wertfunktionale $W_\tau = W_\tau^{\prec,M}$, $\tau \in M$, mit den in der Definition angegebenen Eigenschaften (i) - (vi) definiert werden können durch explizite Definitionen und eine $\prec$-Rekursion, in der alle verwendeten Hilfsfunktionale explizit aus primitiv rekursiven Funktionen definiert sind.

---

[9] Auch ohne Voraussetzungen über die Extensionalität ist eine Reduktion simultaner Rekursionen auf gewöhnliche möglich, wie Diller und Schütte 1971 gezeigt haben. Dabei treten jedoch durch Rekursion definierte Hilfsfunktionale höherer Typenstufen auf.

3.5 Aus der Definition der W_τ ist klar, daß $W_\tau{}^{\ulcorner}t^{\tau\urcorner}{}^{\ulcorner}\mathfrak{r}\to\mathfrak{w}^{\urcorner}$ stets dasselbe mengentheoretische Funktional darstellt wie t^τ unter der Belegung $\mathfrak{r}\to\mathfrak{w}$, nämlich $W^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{r}}t^\tau$.

3.6 Sei $\prec$ eine Wohlordnung von $\mathbb{N}$ mit kleinstem Element 0 . Aus $\prec$ erhält man wie folgt (nach Tait 1967) eine Wohlordnung $\prec'$ von $\mathbb{N}$ mit dem Ordnungstyp $|\prec'| = 2^{|\prec|}$. Man geht aus von einer (wie üblich leicht zu definierenden) eineindeutigen Beziehung

$$a = \langle a_0,\ldots,a_{|a|-1}\rangle$$

zwischen Zahlen und endlichen Zahlenfolgen mit

$$a_0 \succ a_1 \succ \ldots \succ a_{|a|-1} .$$

Wir nehmen an, daß $|a|=0$ genau dann wenn $a=0$. Ist dann $2^{\alpha_0}+\ldots+2^{\alpha_n}$ eine Ordinalzahl $<2^\alpha$ mit $\alpha>\alpha_0>\ldots>\alpha_n$, und sind $a_0,\ldots,a_n$ die den Ordinalzahlen $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$ in $\prec$ entsprechenden Zahlen, so sei $\langle a_0,\ldots,a_n\rangle$ die der Ordinalzahl $2^{\alpha_0}+\ldots+2^{\alpha_n}$ in $\prec'$ entsprechende Zahl. Es gilt also

$$\begin{aligned} a \prec' b \leftrightarrow\ & \exists k_{k<|a|,|b|}(\forall i_{i<k}\ a_i=b_i \wedge a_k\prec b_k)\\ & \vee(|a|<|b| \wedge \forall i_{i<|a|}\ a_i=b_i) . \end{aligned}$$

Ist $\prec$ primitiv rekursiv, so offenbar auch $\prec'$.

3.7 Wir zeigen jetzt, daß den im §2 angegebenen Operationen an Termen - z.B. Substitution $t_x[s]$ oder Reduktion

$t \dashv t'$ des Rangs von t um 1 - primitiv rekursive Funktionen zwischen Termnummern entsprechen. Insbesondere gibt es also auch für den in 2.12 aus t_F durch mehrfaches Reduzieren konstruierten Term t_F^* eine Termnummer $\ulcorner t_F^* \urcorner$.

$\prec$ sei eine primitiv rekursive Wohlordnung von $\mathbb{N}$ mit kleinstem Element 0 , und $\prec'$ sei die in 3.6 aus $\prec$ konstruierte Wohlordnung vom Ordnungstyp $|\prec'| = 2^{|\prec|}$. Die den Ordinalzahlfuntkionen max, + in $\prec$ entsprechenden Funktionen bezeichnen wir mit omax, $\oplus$; sie seien primitiv rekursiv. M sei eine Menge von Typen.

Wir konstruieren zunächst eine primitiv rekursive Funktion $Red = Red^{\prec}$, so daß für beliebige $\ulcorner t \urcorner \in Num^{\prec,M}$ mit $R \ulcorner t \urcorner \leq k+1$ folgendes gilt: (1) $Red(\ulcorner t \urcorner, k) =: Red_k \ulcorner t \urcorner \in Num^{\prec',M}$ ist eine Nummer des in 2.10 aus t und k konstrierten reduzierten Terms t' , (2) $o_{\prec'} | Red_k \ulcorner t \urcorner | \leq 2^{o_{\prec} | \ulcorner t \urcorner |}$, (3) $R(Red_k \ulcorner t \urcorner) \leq k$ und (4) $FV(Red_k \ulcorner t \urcorner) \subseteq^{\#} FV \ulcorner t \urcorner$. Dabei setzen wir voraus, daß eine primitiv rekursive Funktion $Sub = Sub^{\prec}$ bereits konstruiert ist, so daß für beliebige $\ulcorner t \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner s \urcorner \in Num^{\prec,M}$ gilt (1) $Sub(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner s \urcorner) \in Num^{\prec,M}$ ist eine Nummer des Terms $t_x[s]$, (2) $|Sub(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner s \urcorner)| \preceq |\ulcorner s \urcorner| \oplus |\ulcorner t \urcorner|$, (3) $R(Sub(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner s \urcorner)) \leq max(R \ulcorner t \urcorner, R \ulcorner s \urcorner, S \ulcorner s \urcorner)$ und (4) $FV(Sub(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner s \urcorner) \subseteq^{\#} (FV \ulcorner t \urcorner -^{\#} \{\ulcorner x \urcorner\}^{\#}) \cup^{\#} FV \ulcorner s \urcorner$.

Nach dem Rekursionstheorem für $\mathcal{P}$ gibt es eine primitiv rekursive Funktion Red_k mit Index e , so daß für alle u

folgendes gilt [10]. Falls $(u)_0=5$: $\mathrm{Red}_k(u) = \langle 5, \mathrm{Typ}(u), 2^{\ulcorner o_{\prec}(|u|)\urcorner}, k, \mathrm{FV}(u), e' \rangle$, wobei $e' = e'(e,u)$ ein primitiv rekursiver Index von $\mathrm{Red}_k([(u)_5](n))$ als Funktion von n ist; e' ist als Funktion von e und u primitiv rekursiv. Falls $(u)_0=4$: $\mathrm{Red}_k(u) = \langle 4, \mathrm{Typ}(u), |v| \oplus \ulcorner 1 \urcorner, (u)_3, v \rangle$ mit $v = \mathrm{Red}_k((u)_4)$. Falls $(u)_0=3$: Wir setzen $\mathrm{Red}_k((u)_3) = v$ und $\mathrm{Red}_k((u)_4) = w$. Ist die Typenstufe $S(v)=k+1$ und $(v)_0=4$, so sei $\mathrm{Red}_k(u) = \mathrm{Sub}^{\prec'}((v)_4, (v)_3, w)$. Ist jedoch $S(v) \neq k+1$ oder $(v)_0 \neq 4$, so sei $\mathrm{Red}_k(u) = \langle 3, \mathrm{Typ}(u), \mathrm{omax}(|v|, |w|) \oplus \ulcorner 1 \urcorner, v, w \rangle$. Sonst: $\mathrm{Red}_k(u) = u$. Durch Vergleich mit 2.10 macht man sich leicht klar, daß Red_k das Verlangte leistet.

Als nächstes konstruieren wir eine Funktion $\mathrm{Sub} = \mathrm{Sub}^{\prec}$ mit den oben angegebenen Eigenschaften. Dabei setzen wir diesmal voraus, daß eine primitiv rekursive Funktion Umb (von Umbenennung) bereits konstruiert ist, so daß für alle $\ulcorner t \urcorner, \ulcorner x \urcorner \in \mathrm{Num}^{\prec, M}$ gilt (1) $\mathrm{Umb}(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner x \urcorner) \in \mathrm{Num}^{\prec, M}$ ist Nummer eines Terms t_1 , der aus t durch gebundene Umbenennung hervorgeht und kein gebundenes Vorkommen von x mehr enthält. (2) $|\mathrm{Umb}(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner x \urcorner)| = |\ulcorner t \urcorner|$ und (3) $\mathrm{FV}(\mathrm{Umb}(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner x \urcorner)) = \mathrm{FV}\ulcorner t \urcorner$.

Wir definieren $\mathrm{Sub}(u,v,w)$ in der Form $\mathrm{Sub}_1(\mathrm{Umb}^*(u, \mathrm{FV}(w)), v, w)$, wobei Umb^* eine einfache Variante von Umb ist, in der ein Kodifikat einer endlichen Variablenmenge

---

[10] Vgl. die Definition von $+_0^!$ in Kleene 1958 , p.75 .

statt einer einzelnen Variablen auftritt (also $\mathrm{Umb}^*(u,\{\ulcorner x_1\urcorner,\ldots$ $\ldots,\ulcorner x_n\urcorner\}^\#) = \mathrm{Umb}(\ldots\mathrm{Umb}(u,\ulcorner x_1\urcorner),\ldots,\ulcorner x_n\urcorner)$). Eine primitiv rekursive Funktion Sub_1 mit Index e konstruieren wir wieder nach dem Rekursionstheorem für $\mathcal{P}$ als Lösung der folgenden Gleichungen. Falls $(u)_0=5$: $\mathrm{Sub}_1(u,v,w) = \langle 5,\ \mathrm{Typ}(u),\ |w|\oplus|u|,$ $\max(R(u),R(w),S(w)),\ (\mathrm{FV}(u)-^\#\{v\}^\#)\cup^\#\mathrm{FV}(w),\ e'\rangle$, wobei $e' =$ $e'(e,u,v,w)$ ein primitiv rekursiver Index von $\mathrm{Sub}_1([(u)_4](n),v,w)$ als Funktion von n ist. Falls $(u)_0=4$: $\mathrm{Sub}_1(u,v,w) = \langle 4,\ \mathrm{Typ}(u),\ |u_4|\oplus\ulcorner 1\urcorner,\ (u)_3,\ u_4\rangle$ mit $u_4 =$ $\mathrm{Sub}_1((u)_4,v,w)$. Falls $(u)_0=3$: $\mathrm{Sub}_1(u,v,w) = \langle 3,\ \mathrm{Typ}(u),$ $\mathrm{omax}(|u_3|,\ |u_4|)\oplus\ulcorner 1\urcorner,\ u_3,\ u_4\rangle$ mit $u_i = \mathrm{Sub}_1((u)_i,v,w)$ für $i=3,4$. Falls $(u)_0=1$, $v=u$: $\mathrm{Sub}_1(u,v,w) = w$. Sonst: $\mathrm{Sub}_1(u,v,w) = u$. - Man macht sich wieder leicht klar, daß Sub die verlangten Eigenschaften hat.

Zur Konstruktion von Umb verwenden wir eine primitiv rekursive Funktion Ers (von Ersetzung), die folgendes leistet: Für alle $\ulcorner t\urcorner,\ \ulcorner x^\sigma\urcorner,\ \ulcorner y^\sigma\urcorner\in \mathrm{Num}^{\prec,M}$ ist (1) $\mathrm{Ers}(\ulcorner t\urcorner,\ulcorner x\urcorner,\ulcorner y\urcorner)\in$ $\mathrm{Num}^{\prec,M}$ eine Nummer eines Terms, der aus t hervorgeht durch Ersetzen aller (freien und gebundenen) Vorkommen von x durch y , (2) $|\mathrm{Ers}(\ulcorner t\urcorner,\ulcorner x\urcorner,\ulcorner y\urcorner)| = |\ulcorner t\urcorner|$ und (3) $\mathrm{FV}(\mathrm{Ers}(\ulcorner t\urcorner,\ulcorner x\urcorner,\ulcorner y\urcorner))$ $= (\mathrm{FV}\ulcorner t\urcorner -^\# \{\ulcorner x\urcorner\}^\#)\cup^\#\{\ulcorner y\urcorner\}^\#$. Die Definition von Umb aus Ers und die Definition von Ers lassen sich wie in den vorangehenden Fällen mit dem Rekursionstheorem für $\mathcal{P}$ durchführen; wir übergehen die Einzelheiten.

3.8 Sei $\prec$ eine primitiv rekursive Wohlordnung von $\mathbb{N}$ mit kleinstem Element 0, so daß den Ordinalzahlfunktionen $+, \cdot$ primitiv rekursive Funktionen entsprechen. Der Einfachheit halber (um primitive Rekursionen auf $\prec$-Rekursionen reduzieren zu können) setzen wir wieder (1),(2) aus 1.6 voraus.

Satz 1 Ein Funktional F der Typenstufe $n+1$ sei definiert durch explizite Definitionen und $\prec$-Rekursionen. Die Typenstufen der durch Rekursion eingeführten Hilfsfunktionale seien $\leq n+m+1$ $(m \geq 1)$. Dann kann man eine neue Definition von F angeben, in der alle durch Rekursion eingeführten Hilfsfunktionale Typenstufen $\leq n+1$ besitzen, in der aber anstelle der $\prec$-Rekursionen eine $\prec^*$-Rekursion verwendet wird mit einer kanonisch aus $\prec$ konstruierten Wohlordnung $\prec^*$ von einem Ordnungstyp $|\prec^*| < 2_m(|\prec|\cdot\omega)$ (wobei $2_0(\xi)=\xi$, $2_{i+1}(\xi)=2^{2_i(\xi)}$).

Beweis: Mit M_k bezeichnen wir die Menge der in der Definition von F auftretenden Typen mit Stufen $\leq k$. In 3.3 hatten wir eine Nummer $\ulcorner t_F \urcorner \in \mathrm{Num}^{\prec_0, M_{n+m+1}}$ für einen F darstellenden unendlichen Term t_F festgelegt. Dabei war $\prec_0$ eine kanonisch aus $\prec$ konstruierte Wohlordnung vom Ordnungstyp $|\prec_0| = |\prec|\cdot\omega$. Offenbar kann man bei festem F anstelle von $\prec_0$ auch eine kanonisch aus $\prec$ konstruierte Wohlordnung $\prec_l$ vom Ordnungstyp $|\prec_l| = |\prec|\cdot l$ (mit passendem l) verwenden, so daß also $\ulcorner t_F \urcorner \in \mathrm{Num}^{\prec_l, M_{n+m+1}}$. Weiter war $R\ulcorner t_F \urcorner \leq n+m+1$ und $FV\ulcorner t_F \urcorner = \emptyset^{\#}$. Wendet man jetzt die in 3.7 konstruierte

Redunktionsfunktion m-mal an, so erhält man eine Nummer

$$\mathrm{Red}_{n+1}(\mathrm{Red}_{n+2}\ldots(\mathrm{Red}_{n+m}\ulcorner t_F\urcorner)\ldots)) =: \mathrm{Red}^*\ulcorner t_F\urcorner =: \ulcorner t_F^*\urcorner$$

$\in \mathrm{Num}^{\prec^*, M_{n+m+1}}$ des in 2.12 konstruierten t_F^*. Dabei ist $\prec^*$ die Wohlordnung, die aus $\prec_1$ durch m-fache Anwendung der '-Operation aus 3.6 entsteht (es war $|\prec'| = 2^{|\prec|}$) und folglich einen Ordnungstyp $|\prec^*| < 2_m(|\prec|\cdot\omega)$ besitzt. Aufgrund der Eigenschaften der Reduktionsfunktion ist $R\ulcorner t_F^*\urcorner \leq n+1$ und $FV\ulcorner t_F^*\urcorner = \emptyset^{\#}$. Also gilt auch $\ulcorner t_F^*\urcorner \in \mathrm{Num}^{\prec^*, M_{n+1}}$. Als neue Definition von F wählen wir

$$F^{\tau} = W_{\tau}^{\prec^*, M_{n+1}}\ulcorner t_F^*\urcorner ;$$

dies ist möglich, da ja (vgl. 3.5) $W^{\prec^*, M_{n+1}}\ulcorner t_F^*\urcorner$ dasselbe mengentheoretische Funktional darstellt wie t_F^*, nämlich F. Die verlangten Eigenschaften dieser neuen Definition ergeben sich unmittelbar aus der Definition der Wertfunktionale in 3.4.

Bemerkung Man kann leicht erreichen, daß in der neuen Definition von F sämtliche Hilfsfunktionale (also nicht nur die durch Rekursion eingeführten) eine Typenstufe $\leq n+1$ besitzen, wenn man den Begriff der $\prec$-Rekursion etwas abändert, nämlich zu $F(x) = A[[F]_{\prec x}, x]$ mit einem endlichen Term A. Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Normalformentheorem für endliche Terme. Eine Abänderung des Rekursionsschemas ist nötig, da in $F(x) = G([F]_{\prec x}, x)$ G notwendig eine höhere Typenstufe als F besitzt.

§4 Formalisierung in Erweiterungen von Gödel's T Wir wollen Satz 1 verallgemeinern, indem wir von der Auffassung abgehen, über alle Funktionale im mengentheoretischen Sinn zu reden. Stattdessen betrachten wir beliebige Modelle der Theorie T primitiv rekursiver Funktionale von Gödel 1958 in der extensionalen Version von Spector 1962, erweitert um $\prec$-Rekursionen und $\prec$-Induktionen. Wir zeigen, daß Satz 1 auch in diesem allgemeineren Kontext gilt, und daß der Beweis quantorenfrei, genauer in der betrachteten Erweiterung von T geführt werden kann.

4.1 Wir gehen also aus von der extensionalen Version von Gödel's T, wie sie etwa in Spector 1962 angegeben ist. Für eine Wohlordnung $\prec$ von $\mathbb{N}$ sei $T_\prec$ die Erweiterung von T um $\prec$-Rekursionen $F(x) = G([F]_{\prec x},x)$ und $\prec$-Induktionen

$$\frac{F_i(x) = G([F_i]_{\prec x},x) \qquad\qquad i=1,2}{F_1(x) = F_2(x)}$$

Dabei steht $[F]_{\prec x}$ für $\lambda y_{y\prec x}\, Fy$ also für $\lambda y\ D(Fy,\underset{\sim}{0},c_\prec(y,x))$ mit $D(x^\tau,y^\tau,z^0) = x$, falls $z=0$, und $=y$ sonst. Aus der gewählten Form der $\prec$-Induktion erhält man leicht andere Formen, etwa die folgende:

$$\frac{\begin{array}{c} P(0,y) \\ \bigwedge_{i=1}^{n} P([g_i xy]_{\prec x},\ hxy) \rightarrow P(x,y) \end{array}}{P(x,y)}$$

Hier steht $[g_i xy]_{\prec x}$ für $D(g_i xy,0,c_\prec(g_i xy,x))$, und es ist $0\prec x$ für alle $x\neq 0$ angenommen.

Über $\prec$ machen wir wieder die Annahmen (1),(2) aus 1.6 . Die in 1.6 angegebene Reduktion von primitiven Rekursionen auf $\prec$-Rekursionen läßt sich dann auch in $T_\prec$ durchführen. Wir können also in $T_\prec$ auf primitive Rekursionen verzichten.

Mit $T^n_\prec$ bezeichnen wir die Teiltheorie von $T_\prec$, in der alle durch Rekursion eingeführten Konstanten Typenstufen $\leq n+1$ besitzen. $T^n_\prec + PL$ (bzw. $HA^n_\prec$) sei die Erweiterung von $T^n_\prec$ um die mehrsortige intuitionistische Prädikatenlogik ohne (bzw. mit) Induktionsregel für die erweiterte Sprache. $T^n_\prec + PL$ ist eine konservative Erweiterung von $T^n_\prec$, wie man mit Hilfe der Gödel - Interpretation (s. etwa Spector 1962) leicht beweist. Man hat dabei zu beachten, daß die auftretenden Hilfsfunktionale von Typenstufen $> n+1$ alle explizit definiert sind (für $HA^n_\prec$ ist das nicht mehr der Fall).

4.2 Unter denselben Voraussetzungen über $\prec$ wie in 3.8 gilt

Satz 2 Zu jeder Konstanten F in $T^{n+m}_\prec$ $(m \geq 1)$ mit der Typenstufe $n+1$ gibt es eine Konstante F' in $T^n_{\prec^*}$ mit einer kanonisch aus $\prec$ konstruierten Wohlordnung $\prec^*$ von einem Ordnungstyp $|\prec^*| < 2_m(|\prec|\cdot\omega)$, so daß $Fx_1\ldots x_k = F'x_1\ldots x_k$ in $T^{n+m}_{\prec^*}$ beweisbar ist.

Zum Beweis seien $\prec_1$, $\prec^*$, die M_k und ein $\ulcorner t_F \urcorner \in \mathrm{Num}^{\prec_1, M_{n+m+1}}$ mit $R\ulcorner t_F \urcorner \leq n+m+1$, $FV\ulcorner t_F \urcorner = \emptyset^{\#}$ wie in 3.8 gewählt. Wir zeigen in 4.3

$$T^{n+m}_{\prec_1} \vdash F = W^{\prec_1, M_{n+m+1}} \ulcorner t_F \urcorner \underset{\sim}{0}$$

und in 4.4 das folgende Reduktionslemma: M sei eine endliche Menge von Typen mit Stufen $\leq i+1$, und $\tau \in M$. Dann ist in $T^i_{\prec}$ + PL ableitbar

$$\text{(Red)} \qquad \begin{aligned} & u \in \mathrm{Num}^{\prec, M} \wedge R(u) \leq k+1 \wedge \mathrm{Typ}(u) = \ulcorner \tau \urcorner \\ & \rightarrow \mathrm{Red}_k(u) \in \mathrm{Num}^{\prec', M} \\ & \quad \wedge |\mathrm{Red}_k(u)| \preceq' 2^{\ulcorner o_{\prec}(|u|) \urcorner} \\ & \quad \wedge R(\mathrm{Red}_k(u)) \leq k \\ & \quad \wedge FV(\mathrm{Red}_k(u)) \subseteq^{\#} FV(u) \\ & \quad \wedge \mathrm{Typ}(\mathrm{Red}_k(u)) = \ulcorner \tau \urcorner \\ & \quad \wedge W^{\prec, M}_{\tau}\, u = W^{\prec', M}_{\tau}(\mathrm{Red}_k u) \end{aligned}$$

Weiter zeigen wir in 4.4 , daß unter denselben Voraussetzungen über M in $T^i_{\prec}$ + PL ableitbar ist

$$(*) \qquad \begin{aligned} & u \in \mathrm{Num}^{\prec, M} \wedge R(u) \leq k \wedge \forall v \in^{\#} FV(u) : \mathrm{Typ}(v) \in M_k \\ & \wedge \mathrm{Typ}(u) = \ulcorner \tau \urcorner \rightarrow W^{\prec, M}_{\tau}\, u = W^{\prec, M_k}\, u \end{aligned}$$

mit einer beliebigen Menge $M_k \subseteq M$ von Typen einer Stufe $\leq k$.- Daraus ergibt sich Satz 2 , denn in $T^{n+m}_{\prec^*}$ hat man dann

$$F = W^{\prec_1, M_{n+m+1}} \ulcorner t_F \urcorner \underset{\sim}{0}$$
$$= W^{\prec^*, M_{n+1}} (Red_{n+1}(Red_{n+2} \ldots (Red_{n+m} \ulcorner t_F \urcorner) \ldots)) \underset{\sim}{0}$$

und damit eine Darstellung von F durch eine Konstante von $T^n_{\prec^*}$.

4.3 Beweis von $T^{n+m}_{\prec_1} \vdash F = W^{\prec_1, M_{n+m+1}} \ulcorner t_F \urcorner \underset{\sim}{0}$. Wir verwenden einige einfache Eigenschaften der Wertfunktionale, die wir zunächst zusammenstellen. $\mathbf{A}$ bezeichne dabei einen endlichen Term (also aufgebaut aus Variablen und Ziffern mit Anwendungen und Abstraktionen), und $W^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{x}} u$ steht für
$W\, u\, (Erw \ldots (Erw\, \underset{\sim}{0} \ulcorner x_1 \urcorner (Tr^{n+m}_{\tau_1} a_1)) \ldots \ulcorner x_p \urcorner (Tr^{n+m}_{\tau_p} a_p))$ (die Parameter $\prec_1$, M_{n+m+1} bei W sind weggelassen).

(1) $W^{\mathfrak{a} a b \mathfrak{b}}_{\mathfrak{x} x y \mathfrak{y}} \ulcorner \mathbf{A} \urcorner = W^{\mathfrak{a} b a \mathfrak{b}}_{\mathfrak{x} y x \mathfrak{y}} \ulcorner \mathbf{A} \urcorner$

(2) $W^{\mathfrak{a} a \mathfrak{b} d \mathfrak{z}}_{\mathfrak{x} x \mathfrak{y} x \mathfrak{z}} \ulcorner \mathbf{A} \urcorner = W^{\mathfrak{a} \mathfrak{b} d \mathfrak{z}}_{\mathfrak{x} \mathfrak{y} x \mathfrak{z}} \ulcorner \mathbf{A} \urcorner$

(3) $W^{\mathfrak{a} a}_{\mathfrak{x} x} \ulcorner \mathbf{A} \urcorner = W^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{x}} \ulcorner \mathbf{A} \urcorner$ falls x nicht frei in $\mathbf{A}$.

(4) $W^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{x}} \ulcorner \mathbf{A}_x[t] \urcorner = W^{\mathfrak{a} W^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{x}} \ulcorner t \urcorner}_{\mathfrak{x} x} \ulcorner \mathbf{A} \urcorner$

(5) $W^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{x}} \ulcorner \mathbf{A} \urcorner = \mathbf{A}_{\mathfrak{x}}[\mathfrak{a}]$ falls $\mathfrak{x}$ alle in $\mathbf{A}$ freien Variablen enthält.

(1) - (5) ergeben sich unmittelbar durch Induktion über $\mathbf{A}$.

Zum Beweis von $F = W \ulcorner t_F \urcorner$ in $T^{n+m}_{\prec_1}$ beschränken wir uns auf den Fall, daß F durch $\prec$-Rekursion eingeführt wurde; die restlichen Fälle sind einfacher bzw. trivial. F erfüllt dann eine Rekursionsgleichung (s. 3.3)

$$F(x) = A^*[[F]_{\prec x}, x, G_1, \ldots, G_p] .$$

Es genügt zu zeigen, daß $W\ulcorner t_F \urcorner$ dieselbe Rekursionsgleichung erfüllt, also

$$W\ulcorner t_F \urcorner x = A^*[[W\ulcorner t_F \urcorner]_{\prec x}, x, G_1, \ldots, G_p] ,$$

denn durch $\prec$-Induktion folgt daraus die Behauptung. Man erhält zunächst $W\ulcorner t_F \urcorner x = W([e](x))$ mit e wie in 3.3, so daß also $[e](x)$ eine Nummer für $A^*[\langle t_{xi}\rangle_{i\in\omega}, \bar{x}, t_{G_1}, \ldots, t_{G_p}]$ ist, die aus den Termnummern $\ulcorner t_{G_1} \urcorner, \ldots, \ulcorner t_{G_p} \urcorner$ für $t_{G_1}, \ldots, t_{G_p}$ und $e' = e'(e,x)$ (s. 3.3) für $\langle t_{xi}\rangle_{i\in\omega}$ aufgebaut ist. Mit (4) und (5) ergibt sich

$$W\ulcorner t_F \urcorner x = A^*[W(e'(e,x)), x, W\ulcorner t_{G_1} \urcorner, \ldots, W\ulcorner t_{G_p} \urcorner] .$$

Nach Voraussetzung der Induktion über F hat man bereits $W\ulcorner t_{G_i} \urcorner = G_i$. Es genügt also zu zeigen

$$W(e'(e,x))y = [W\ulcorner t_F \urcorner]_{\prec x}\, y .$$

Dies beweist man unmittelbar durch Unterscheiden der Fälle $y \prec x$ und $y \not\prec x$.

4.4 Wir benötigen zunächst eine Darstellung von $\mathrm{Num}^{\prec, M}$ in Π^0_1-Form, die man folgendermaßen erhalten kann. Unendliche Terme lassen sich auffassen als wohlfundierte Bäume, an deren Spitzen Variablen oder Ziffern angeheftet sind, und für die jeder Knoten entweder 2-fach verzweigt ist (das entspricht der

Anwendung), oder einfach verzweigt ist und eine Variable angeheftet hat (das entspricht der λ-Abstraktion mit dieser Variablen), oder ω-fach verzweigt ist (das entspricht der Folgenbildung). Jede Termnummer $\ulcorner t \urcorner$ kann man sich dann induktiv entlang dem als Baum aufgefaßten Term t entstanden denken, indem man an jeden Knoten eine Nummer des entsprechenden Teilterms anheftet. Die Eigenschaft $u \in Num^{\prec,M}$ ist also äquivalent damit, daß u einen solchen wohlfundierten Stammbaum besitzt. Letzteres läßt sich aber leicht in Π^0_1 -Form darstellen: Man hat auszudrücken, daß an jeder Stelle (= Folgennummer) u der Baum lokal korrekt ist, d.h. daß die dort angeheftete Termnummer u_n (leicht durch primitive Rekursion nach n zu definieren) mit i.a. allen ihren Vorgängern $u_{n*\langle i\rangle}$, $i=0,1,2...$, entsprechend der Definition der Termnummern zusammenhängt. Die Wohlfundiertheit ist dann automatisch erfüllt, da insbesondere $|u_{n*\langle i\rangle}| \prec |u_n|$ verlangt wird und $\prec$ eine Wohlordnung ist. - Die so gewonnene Darstellung von $u \in Num^{\prec,M}$ hat die Form $\forall x P(x,u)$ mit einem Prädikat P , das primitiv rekursiv ist in der Aufzählungsfunktion $\lambda ab.[a](b)$ von $\mathcal{P}$.

Als erstes erhalten wir jetzt, daß sich die im Reduktionslemma auftretende Formel (Red) und die Formel (*) unter den in 4.2 formulierten Voraussetzungen in $HA^i_\prec$ ableiten lassen. Beide Male ergibt sich die Ableitung leicht mit $\prec$-Induktion nach $|u|$, falls man (im Fall (Red)) voraussetzt (vgl. 3.7)

$$
\begin{aligned}
& u,v,w \in \mathrm{Num}^{\prec,M} \;\wedge\; \mathrm{Var}(v) \;\wedge\; \mathrm{FV}(u) \cap^{\#} \mathrm{FV}(w) = \emptyset^{\#} \\
& \wedge\; \mathrm{Typ}(u) = \ulcorner\tau\urcorner \;\wedge\; \mathrm{Typ}(v) = \mathrm{Typ}(w) = \ulcorner\sigma\urcorner \\
& \rightarrow\; \mathrm{Sub}_1(u,v,w) \in \mathrm{Num}^{\prec,M} \\
\text{(Sub)} \qquad & \qquad \wedge\; |\mathrm{Sub}_1(u,v,w)| \preceq |w| \oplus |u| \\
& \qquad \wedge\; R(\mathrm{Sub}_1(u,v,w)) \leq \max(Ru,Rw,Sw) \\
& \qquad \wedge\; \mathrm{FV}(\mathrm{Sub}_1(u,v,w)) \subseteq^{\#} (\mathrm{FV}(u) -^{\#} \{v\}^{\#}) \cup^{\#} \mathrm{FV}(w) \\
& \qquad \wedge\; \mathrm{Typ}(\mathrm{Sub}_1(u,v,w)) = \ulcorner\tau\urcorner \\
& \qquad \wedge\; W_{\tau}^{\prec,M}(\mathrm{Sub}_1 uvw)c = W_{\tau}^{\prec,M}u(\mathrm{Erw}\ c\ v\ (W_{\sigma}^{\prec,M}wc))
\end{aligned}
$$

Auch dies erhält man leicht durch $\prec$-Induktion nach $|u|$, wenn man eine entsprechende Formel (Umb) für die Funktion Umb zur Verfügung hat (s. 3.7), und (Umb) wiederum ergibt sich durch $\prec$-Induktion nach $|u|$ aus einer entsprechenden Formel (Ers) für die Funktion Ers (s. 3.7), die sich dann schließlich direkt durch $\prec$-Induktion nach $|u|$ beweisen läßt.

Aus den skizzierten Ableitungen von (Red) und (*) in $HA^i_{\prec}$ konstruieren wir nun mit Hilfe des Herbrand'schen Satzes die gesuchten Ableitungen in $T^i_{\prec}$ + PL (vgl. Kreisel 1958 und Shepherdson 1965). Dazu beachte man zunächst, daß alle durch $\prec$-Induktion hergeleiteten Formeln mit Quantoren, also (*), (Red), (Sub), (Umb) und (Ers), die Gestalt

$$\forall x P(x,u) \rightarrow Q(u,\mathfrak{y})$$

haben mit quantorenfreien P,Q. Die Beweise erschließen dies jeweils mit den Mitteln der intuitionistischen Prädikatenlogik aus

$$\forall \mathfrak{y} \forall v_{|v| \prec |u|} [\forall x P(x,v) \to Q(v,\mathfrak{y})] ,$$

aus Allabschlüssen quantorenfreier Formeln und aus bereits abgeleiteten Exemplaren der Formeln (Sub), (Umb), (Ers). Wir wollen jedesmal eine Funktion f konstruieren, so daß $P(f(u,\mathfrak{y}),u) \to Q(u,\mathfrak{y})$ in $T^i_\prec$ ableitbar ist. Dazu können wir ausgehen von einer Ableitung in der intuitionistischen Prädikatenlogik für die Formel

$$\begin{aligned} &\forall \mathfrak{z}\, R(\mathfrak{z}) \wedge \forall \mathfrak{y}, v \exists x [\, |v| \prec |u| \wedge P(x,v) \to Q(v,\mathfrak{y})] \\ &\wedge \forall x P(x,u) \to Q(u,\mathfrak{y}) \end{aligned}$$

in der Sprache von $T^i_\prec$, mit quantorenfreiem R . Zur Vereinfachung lassen wir die Parameter $\mathfrak{y}$ weg und nehmen $\mathfrak{z} = z$ an. Nach dem Herbrand'schen Satz gibt es Terme

$$\begin{aligned} s_i &\equiv s_i(u,x_1,\ldots,x_{i-1}) &\quad& \text{für } i=1,\ldots,n \\ t_j &\equiv t_j(u,x_1,\ldots,x_n) && \text{für } j=1,\ldots,m \\ r_k &\equiv r_k(u,x_1,\ldots,x_n) && \text{für } k=1,\ldots,l \end{aligned}$$

vom Typ 0 , so daß in der Aussagenlogik ableitbar ist

$$\begin{aligned} &\bigwedge_k R(r_k) \wedge \bigwedge_i [\, |s_i| \prec |u| \wedge P(x_i,s_i) \to Q(s_i)] \\ &\wedge \bigwedge_j P(t_j,u) \to Q(u) . \end{aligned}$$

In $T^i_\prec$ ist also ableitbar

$$(1) \qquad \bigwedge_i [\, |s_i| \prec |u| \wedge P(x_i,s_i) \to Q(s_i)] \to \bigvee_j [P(t_j,u) \to Q(u)] .$$

Man definiere nun eine Funktion f durch die folgende $\prec$-Rekursion nach $|u|$

$$f(u) = \min\{t_j(u,x_1,\ldots,x_n) \mid P(t_j(u,x_1,\ldots,x_n),u) \rightarrow Q(u)\},$$

wobei gesetzt ist

$$x_i = \begin{cases} f(s_i(u,x_1,\ldots,x_{i-1})) & \text{falls } |s_i(u,x_1,\ldots,x_{i-1})| \prec |u| \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Aus (1) erhält man dann in $T^i_{\prec}$

$$\bigwedge_i \left[|s_i| \prec |u| \wedge P(f(s_i),s_i) \rightarrow Q(s_i)\right] \rightarrow \left[P(f(u),u) \rightarrow Q(u)\right]$$

und damit die Prämisse einer $\prec$-Induktion nach $|u|$, die sich leicht auf die in 4.1 angegebene Form bringen läßt. Also ist $P(f(u),u) \rightarrow Q(u)$ in $T^i_{\prec}$ ableitbar.

II Charakterisierung einer erweiterten Grzegorczyk-Hierarchie unter Verwendung unendlicher Terme

Wir betrachten die folgende Erweiterung der Grzegorczyk-Hierarchie (nach Robbin 1965): Für $\alpha < \varepsilon_0$ sei F_α definiert durch $F_0(x) = 2^x$, $F_{\alpha+1}(x) = F_\alpha^{(x)}(x)$, $F_\lambda(x) = F_{\lambda[x]}(x)$ ($F_\alpha^{(x)}$ x-te Iterierte von F_α , $\lambda[x]$ x-tes Glied einer kanonischen Fundamentalfolge für λ) und $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}(F_\alpha)$ (elementarer Abschluß von F_α). Für $\bigcup_{\alpha<\varepsilon_0} \mathcal{E}_\alpha$ und für die einzelnen $\mathcal{E}_\alpha$ sind eine Reihe von Charakterisierungen bekannt. Wir fügen hier zwei weitere hinzu.

Jedes primitiv rekursive Funktional F kann man nach Tait 1965a (ausgehend von einer Definition von F) kanonisch darstellen durch einen unendlichen Term t_F der Tiefe $|t_F| < \omega^2$, und t_F läßt sich mit Hilfe von λ-Konversionen reduzieren auf einen unendlichen Term t_F^* der Tiefe $|t_F^*| < \varepsilon_0$, in dem die Typenstufen der Teilterme nicht größer sind als die Typenstufe des Gesamtterms (s. I2). In I3 haben wir gesehen, daß mit einem geeigneten Konzept von Termnummern dem Übergang von t_F zu t_F^* eine primitiv rekursive Funktion Red^* entspricht. Aus einer kanonisch zu wählenden (s. I3.3) Nummer $\ulcorner t_F \urcorner$ von t_F erhält man also in primitiv rekursiver Weise eine Nummer $Red^* \ulcorner t_F \urcorner$ von t_F^* und damit insbesondere eine Ordinalzahl [11] $\omega \cdot \alpha_F + k < \varepsilon_0$ als

---

[11] Da wir hier primitiv rekursive (und nicht wie in I $\prec$-rekursive)

Schranke für die Tiefe von t_F^* . Die Ordinalzahl $\alpha_F < \varepsilon_0$ wollen wir als Kompliziertheitsmaß für die gegebene Definition des primitiv rekursiven Funktionals F auffassen.

Sei nun insbesondere f ein primitiv rekursives Funktional der Typenstufe 1 , also eine Funktion. Nach I3.8 läßt sich f darstellen in der Form $f = W^{\omega\cdot\alpha_f+k+1,M} \ulcorner t_f^* \urcorner$ mit einer Menge M von Typen der Stufen $0,1$. Also kann man f durch eine $\omega\cdot\alpha_f$ -Rekursion und primitiv rekursive Operationen definieren, ohne daß dabei Hilfsfunktionale von Typenstufen >1 auftreten. Mit der Darstellung $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{R}_\alpha$ für $\alpha < \varepsilon_0$ aus Schwichtenberg 1971 folgt $f \in \mathcal{E}_{\alpha_f}$, falls $\alpha_f \geq \omega$.

Ist $m+1$ $(m \geq 1)$ die größte Typenstufe eines durch Rekursion eingeführten Hilfsfunktionals in der gegebenen Definition von f - kurz: hat (die Definition von) f den Rang $m+1$ - , so erhält man aus der Konstruktion von α_f leicht $\omega \leq \alpha_f < 2_m(\omega^2) = \omega_{m+1}$ (mit $\omega_0 := 1$, $\omega_{i+1} := \omega^{\omega_i}$), also $f \in \bigcup_{\alpha<\omega_{m+1}} \mathcal{E}_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega_{m+1}} \mathcal{R}_\alpha$, d.h. f ist ω_{m+1} -rekursiv [12]. Umgekehrt folgt

---

Funktionale betrachten, benötigen wir für die Tiefenschranken nicht mehr geeignet zu konstruierende Wohlordnungen, sondern wir können eine feste Standard-Wohlordnung vom Ordnungstyp ε_0 zugrunde legen. Entsprechend verwenden wir Wertfunktionale $W_\tau^{\alpha,M}$, die analog zu I3.4 durch simultane α-Rekursion (s. I1.4) definiert sind.

[12] Dies folgt auch aus Howard 1970a, §5. S. auch Parsons 1971.

aus Tait 1967 , daß jede ω_{m+1}-rekursive Funktion auch definierbar ist als primitiv rekursives Funktional vom Rang $m+1$. Insbesondere ergibt sich, daß das oben definierte Kompliziertheitsmaß unter Erhalt der Eigenschaft $f \in \mathcal{E}_{\alpha_f}$ nicht so verkleinert werden kann, daß für eine Definition vom Rang $m+1$ einer ω_{m+1} - , aber nicht ω_m -rekursiven Funktion f das neue Kompliziertheitsmaß $< \omega_m$ wird.

Wir definieren hier eine einfache Normalform für die Darstellung der ε_0 -rekursiven Funktionen als primitiv rekursive Funktionale und zeigen, daß für solche Normalformen das oben definierte Kompliziertheitsmaß unter Erhalt der Eigenschaft $f \in \mathcal{E}_{\alpha_f}$ überhaupt nicht mehr verkleinert werden kann. Mit anderen Worten: Definiert man $\mathcal{R}_\alpha := \{f \mid f$ definierbar als primitiv rekursives Funktional mit Kompliziertheitsmaß $\leq \alpha\}$, so hat man eine Charakterisierung der erweiterten Grzegorczyk-Hierarchie in der Form $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{R}_\alpha$ für $\omega \leq \alpha < \varepsilon_0$.

Mit im wesentlichen demselben Beweis ergibt sich noch eine andere, eng verwandte Charakterisierung der $\mathcal{E}_\alpha$, die vielleicht von Interesse ist. Dabei geht man aus vom Begriff einer prädikativen Termnummer, d.h. einer Termnummer, bei deren Aufbau keine Typen von höheren Stufen verwendet werden als es die Typenstufe der gesamten Termnummer angibt. Für die Tiefenschranken sei wieder eine feste Standard-Wohlordnung vom Ordnungstyp ε_0 zugrunde gelegt [13]. Definiert man dann $\mathcal{P}_\alpha = \{f \mid f$ definierbar durch

---

13) Man könnte versucht sein, hier die Bezugnahme auf eine Standard-

eine prädikative Termnummer mit Tiefenschranke $<\omega\cdot(\alpha+1)\}$, so ist $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha$ für $\omega \leq \alpha < \varepsilon_0$.

§1 Eine Normalform der primitiv rekursiven Funktionale der Typenstufe 1 Wir gehen aus von der schon mehrfach erwähnten[14)] Tatsache, daß jedes primitiv rekursive Funktional der Typenstufe 1 eine ε_0 -rekursive Funktion ist, also [15)] durch Einsetzungen aus primitiv rekursiven Funktionen und einer der folgenden Funktionen F_α , $\alpha < \varepsilon_0$, erhalten werden kann:

$$F_0(x) = 2^x$$

$$F_{\alpha+1}(x) = F_\alpha^{(x)}(x) \qquad (F_\alpha^{(x)} \text{ x-te Iterierte von } F_\alpha)$$

$$F_\lambda(x) = F_{\lambda[x]}(x) \ .$$

Dabei ist $\lambda[x]$ für Limeszahlen $\lambda < \varepsilon_0$ wie folgt definiert: Jede solche Limeszahl läßt sich eindeutig darstellen in der Form $\lambda = \omega^{\alpha_n} + \ldots + \omega^{\alpha_0}$ mit $\lambda > \alpha_n > \ldots > \alpha_0 > 0$. Es sei dann

$$\lambda[x] = \begin{cases} \omega^{\alpha_n} + \ldots + \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_0 - 1}\cdot x & \text{falls } \alpha_0 \text{ Nachfolgerzahl} \\ \omega^{\alpha_n} + \ldots + \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_0[x]} & \text{falls } \alpha_0 \text{ Limeszahl .} \end{cases}$$

Wohlordnung wegzulassen und etwa Termnummern ganz ohne Tiefenschranken zu definieren. Dann kollabiert jedoch die entstehende Hierarchie: Unter Verwendung von Feferman 1962 zeigt man leicht, daß es zu jeder rekursiven Funktion einen Term der Tiefe $\leq \omega^4 + \omega^2$ gibt, der eine solche Termnummer besitzt.

14) s. Einleitung zu I , S.3 . 15) s. Schwichtenberg 1971

Die gesuchte Normalform der primitiv rekursiven Funktionale der Typenstufe 1 erhalten wir, indem wir die Funktionen F_α in einfacher Weise als primitiv rekursive Funktionale darstellen.

Dazu erweitern wir die eben angegebene Definition der Funktionen F_α zu einer Definition von Funktionalen F_α^{n+1}, $\alpha < \varepsilon_0$, von Standardtypen $n+1$ (mit $n+1 := n \to n$):

$$F_0^{n+1} x_n \ldots x_0 := \begin{cases} 2^{x_0} & \text{falls } n=0 \\ x_n^{(x_0)} x_{n-1} \ldots x_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F_{\alpha+1}^{n+1} x_n \ldots x_0 := (F_\alpha^{n+1})^{(x_0)} x_n \ldots x_0$$

$$F_\lambda^{n+1} x_n \ldots x_0 := F_{\lambda[x_0]}^{n+1} x_n \ldots x_0 \,.$$

Dabei ist x_i eine Variable des Standardtyps i, und z.B. $x_n^{(x_0)} x_{n-1} \ldots x_0$ steht für $I x_0 x_n \ldots x_0$ mit einem Iterationsfunktional I vom Typ $0,n,n-1,\ldots,0 \to 0$, definiert durch $I0yz = z$, $I(x+1)yz = y(Ixyz)$.

<u>Lemma</u> $F_\alpha^{n+1} F_\beta^n = F_{\beta+\omega^\alpha}^n$ falls $\beta+\omega^\alpha = \beta \# \omega^\alpha$.

Die Bedingung $\beta+\omega^\alpha = \beta \# \omega^\alpha$ drückt aus, daß in der Cantor'schen Normalform von β der letzte Summand ω^{β_0} einen Exponenten $\beta_0 \geq \alpha$ besitzt. - Wir beweisen das Lemma durch Induktion nach α. $\alpha=0$:

$$F_0^{n+1} F_\beta^n x_{n-1} \ldots x_0 = (F_\beta^n)^{(x_0)} x_{n-1} \ldots x_0$$

$$= F_{\beta+1}^n x_n \ldots x_0$$

α Nachfolgerzahl:

$$F_\alpha^{n+1} F_\beta^n x_{n-1} \ldots x_0 = (F_{\alpha-1}^{n+1})^{(x_0)} F_\beta^n x_{n-1} \ldots x_0$$

$$= F^n_{\beta+\omega^{\alpha-1} \cdot x_0} x_{n-1} \ldots x_0$$

$$= F^n_{(\beta+\omega^\alpha)[x_0]} x_{n-1} \ldots x_0$$

$$= F^n_{\beta+\omega^\alpha} x_{n-1} \ldots x_0$$

α Limeszahl:

$$F_\alpha^{n+1} F_\beta^n x_{n-1} \ldots x_0 = F^{n+1}_{\alpha[x_0]} F_\beta^n x_{n-1} \ldots x_0$$

$$= F^n_{\beta+\omega^{\alpha[x_0]}} x_{n-1} \ldots x_0$$

$$= F^n_{(\beta+\omega^\alpha)[x_0]} x_{n-1} \ldots x_0$$

$$= F^n_{\beta+\omega^\alpha} x_{n-1} \ldots x_0 \quad .$$

Aus dem Lemma folgt, daß jedes F_α^{n+1} , $\alpha < \varepsilon_0$, also insbesondere auch jede der Funktionen F_α , aus den sehr einfachen Funktionalen F_0^{n+1} (im wesentlichen sind das Iterationsfunktionale) allein durch Anwendungen aufgebaut werden kann, wobei sich der Aufbau an der Cantor'schen Normalform der Ordinalzahl $\alpha < \varepsilon_0$ orientiert. Man beachte, daß in diese Darstellung der Funktionen F_α , $\alpha < \varepsilon_0$, die Fundamentalfolgen $\lambda[x]$ nicht mehr eingehen.

§2 Charakterisierung der erweiterten Grzegorczyk-Hierarchie

Wir wollen jetzt die in der Einleitung angegebenen Charakterisierungen der $\mathcal{E}_\alpha$ beweisen, also

Satz $\mathcal{E}_\alpha = \tilde{\mathcal{R}}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha$ für $\omega \leq \alpha < \varepsilon_0$.

Beweis: $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha \subseteq \mathcal{P}_\alpha$ gilt aufgrund der Definitionen. Die Inklusion $\mathcal{P}_\alpha \subseteq \mathcal{E}_\alpha$ für $\omega \leq \alpha < \varepsilon_0$ ergibt sich mit demselben Beweis, mit dem wir in der Einleitung $f \in \mathcal{E}_{\alpha_f}$ für $\alpha_f \geq \omega$ gezeigt hatten. Zum Beweis von $\mathcal{E}_\alpha \subseteq \tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ beachte man, daß jede $\mathcal{E}_\alpha$-Funktion sich aus F_α und primitiv rekursiven Funktionen durch Einsetzungen definieren läßt. Da offenbar jedes $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ alle primitiv rekursiven Funktionen enthält und abgeschlossen ist gegen Einsetzungen, genügt es zu zeigen $F_\alpha \in \tilde{\mathcal{R}}_\alpha$. Dazu gehen wir aus von der in §1 angegebenen Darstellung der Funktionen F_α , nämlich durch geeignete Anwendungen der Funktionale F_0^{n+1} aufeinander. Wir haben zu zeigen, daß für diese Darstellung von F_α das in der Einleitung definierte Kompliziertheitsmaß $\leq \alpha$ ist. Es ist für das folgende bequem und wohl auch ohne Mißverständnisse möglich, Termnummern durch Angabe der zugehörigen Terme oder auch Funktionale mitzuteilen. Zu zeigen ist also, daß (die Termnummer für) F_α nach Reduktion auf den Rang 1 (mit dem in I3.7 angegebenen Reduktionsverfahren) eine Tiefenschranke $< \omega \cdot (\alpha + 1)$ erhält. Dazu zeigen wir allgemeiner

Behauptung: F_{α}^{n+1} hat im Fall $n=0$ nach Reduktion auf den Rang 1 eine Tiefenschranke $\omega\cdot\alpha+k$, und im Fall $n\geq 1$ nach Reduktion auf den Rang $n+1$ die Gestalt $\lambda x_n\ldots x_0.\langle\ldots\rangle x_0$ und eine Tiefenschranke $\omega\cdot(1+\alpha)+k$.

Der Beweis erfolgt durch Induktion über α . Für $\alpha=0$ ergibt sich die Behauptung leicht aus der Konstruktion von $\ulcorner t_F \urcorner$ in I3.3 . Sei nun $\beta+\omega^{\alpha}=\beta\#\omega^{\alpha}$. Wir müssen untersuchen, wie sich

$$F^n_{\beta+\omega^{\alpha}} = F_{\alpha}^{n+1}F_{\beta}^{n}$$

bei Reduktion auf den Rang n verhält, wobei wir uns an der Definition der Funktion Red in I3.7 zu orientieren haben. Zunächst erfolgt die Reduktion auf den Rang $n+1$ in F_{α}^{n+1} und F_{β}^{n} getrennt. F_{α}^{n+1} erhält nach Ind.vor. die Gestalt $\lambda x_n\ldots x_0.\langle\ldots\rangle x_0$ und eine Tiefenschranke $\omega\cdot(1+\alpha)+k$. Die Reduktion auf den Rang n überführt diese Termnummer in eine andere derselben Gestalt, aber mit einer Tiefenschranke $2^{\omega\cdot(1+\alpha)+k} = \omega^{1+\alpha}+k$. Die Reduktion auf den Rang n überführt weiter F_{β}^{n} nach Induktionsvor. in eine Termnummer mit einer Tiefenschranke $\omega\cdot(sg(n)+\beta)+l$ mit $sg(n):=1\dot{-}(1\dot{-}n)$, also schließlich $F^n_{\beta+\omega^{\alpha}}$ in $\lambda x_{n-1}\ldots x_0.\langle\text{---}\rangle x_0$ mit einer Tiefenschranke $\omega\cdot(sg(n)+\beta)+l+\omega^{1+\alpha}+k' = \omega\cdot(sg(n)+\beta+\omega^{\alpha})+k'$. Damit ist die Behauptung und also auch der Satz bewiesen.

<u>Bemerkung</u>: Genau wie $\mathcal{P}_\alpha \subseteq \mathcal{E}_\alpha$ für $\omega \leq \alpha < \varepsilon_0$ beweist man auch $\bigcup_{\alpha<\omega} \mathcal{P}_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega} \mathcal{E}_\alpha = \mathcal{P}$ (Klasse der primitiv rekusiven Funktionen). Da andererseits $\mathcal{P} \subseteq \mathfrak{K}_0$ ist, hat man

$$\bigcup_{\alpha<\omega} \mathfrak{K}_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega} \mathcal{P}_\alpha = \mathcal{P} \quad .$$

III Bar Rekursion der Typen 0 und 1 führt nicht aus den primitiv rekursiven Funktionalen hinaus

Kleene 1959 und Kreisel 1959c haben unabhängig voneinander den Begriff des stetigen (Kleene: countable) Funktionals eingeführt. Für die Typen $(0\to\tau)\to 0$ mit $\tau=0$ und $\tau=1$ $(:=0\to 0)$ - mit denen wir uns hier hauptsächlich befassen - stimmt dieser Begriff mit dem üblichen (topologischen) überein, wenn man $\mathbb{N}$ mit der diskreten Topologie und $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ mit den entsprechenden Produkttopologien versieht [16]. Allgemein gilt für ein stetiges Funktional Y vom Typ $(0\to\tau)\to 0$, daß Ya nur voe einem endlichen Anfangsstück der Argumentfolge a vom Typ $0\to\tau$ abhängt, also

$$(1)\qquad \forall a\, \exists m\, \forall b(\forall n< m: an=bn \;\to\; Ya=Yb) \;.$$

Nach Kleene 1959 ist jedes rekursive, insbesondere also jedes primitiv rekursive Funktional stetig.

Wir zeigen in §1, daß zu gegebenem primitiv rekursiven Funktional Y vom Typ $(0\to\tau)\to 0$ mit $\tau=0,1$ [17] ein primitiv

---

[16] Das ist z.B. für den Typ $3 = ((0\to 0)\to 0)\to 0$ nicht mehr der Fall, wie zuerst Kreisel bemerkt hat (in Vorlesungen 1958/59, Lecture 26)

[17] Für Typen τ einer Stufe ≥ 2 ist die entsprechende Aussage

rekursiver Stetigkeitsmodul M_Y konstruiert werden kann, der jedem a ein m mit der in (1) formulierten Eigenschaft zuordnet, d.h. so daß gilt

$$(2) \qquad \forall a,b(\ \forall n< M_Y a: an=bn \ \rightarrow \ Ya=Yb)\ .$$

Den Beweis führen wir mit Hilfe der Technik von Kap. I (unendliche Terme und Wertfunktionale); er läßt sich in (der extensionalen Version von Gödel's) T formalisieren. - Dieses Resultat wurde zuerst von Kreisel in Vorlesungen 1971/72 bewiesen.

Eine endliche Folge $a0,\dots,a(n-1)$ von Funktionalen des Typs τ heißt gesichert (bzgl. Y vom Typ $(0\rightarrow\tau)\rightarrow 0$), wenn Y auf allen Fortsetzungen davon denselben Wert hat, d.h. wenn gilt

$$\forall b(\ \forall m< n: am=bm \ \rightarrow \ Ya=Yb)\ .$$

Für stetiges Y bilden also wegen (1) die ungesicherten Folgen einen wohlfundierten Baum. Wir zeigen in §2 , daß für primitiv rekursives Y und $\tau=0,1$ dieser Baum eine Tiefe $<\varepsilon_0$ besitzt. Dies gilt in dem scharfen Sinn, daß man eine in T definierbare Einbettung des Baumes in eine Standardwohlordnung eines Ordnungs-

---

nicht mehr richtig. Auch gibt es für kein τ einen primitiv rekursiven gleichmäßigen Stetigkeitsmodul M , so daß also (2) mit MYa statt $M_Y a$ gilt. Beides folgt aus einer (unveröffentlichen) Arbeit von Howard " Hereditarily majorizable functionals of finite type", 1972 .

typs $<\varepsilon_0$ finden kann. Daraus folgt dann leicht, daß die (Regel der) Bar Rekursion der Typen 0 und 1 nicht aus den primitiv rekursiven Funktionalen hinausführt [18]. Die Beweise verwenden wieder die Technik aus Kap. I ; sie lassen sich in T formalisieren. - Für $\tau=0$ folgt dies auch aus Tait 1965b zusammen mit dem Resutat aus Kap. I (briefliche Mitteilungen von W. Howard und G. Kreisel) [19]. Mit der Reduktion der Bar Rekursion vom Typ 1 auf den Typ 0 in Howard 1963 kann man die Abgeschlossenheit von T gegen Bar Rekursion vom Typ $\tau=1$ auch aus der für $\tau=0$ beweisen; man braucht dazu die Existenz eines primitiv rekursiven Stetigkeitsmoduls M_Y (s. §1).

§1 Stetigkeitsmoduln für primitiv rekursive Funktionale

Sei Y ein primitiv rekursives Funktional vom Typ $(0\to\tau)\to 0$. Wir behandeln zunächst den Fall $\tau=0$; die für $\tau=1$ notwendigen Änderungen diskutieren wir am Schluß dieses Paragraphen. Y läßt sich (ausgehend von einer Definition von Y) kanonisch darstellen durch einen unendlichen Term t_Y (s. I§2). Sei x eine Variable vom Typ $0\to\tau$, also $0\to 0$. Dann hat $t_Y x \equiv t_{Yx}$ den Typ 0 . t_{Yx} kann man mit λ-Konversionen auf

---

[18] Dagegen führen die Regel der Bar Rekursion eines Typs der Stufe ≥ 2 und auch der Operator der Bar Rekursion vom Typ 0 aus den primitiv rekursiven Funktionalen hinaus. Dies folgt aus Kreisel's Anhang zu Spector 1962 und aus Howard 1968 .

[19] Vgl. auch Diller 1968 und Howard 1970b .

eine Normalform t^*_{Yx} mit $Rt^*_{Yx}=0$ und $|t^*_{Yx}|<\varepsilon_0$ reduzieren (nach Tait 1965a ; s. I 2.10). Offenbar enthält t^*_{Yx} höchstens die Variable x frei.

Wir betrachten jetzt allgemein Terme vom Typ 0 in Normalform (also $Rt=0$), die höchstens die Variable x frei enthalten; sie werden im folgenden mit t (evtl. mit Indizes) bezeichnet. Solche Terme haben einen besonders einfachen Aufbau: sie können nur von der Gestalt xt oder $\langle t_i\rangle t$ oder gleich einer Ziffer $\bar{n}$ sein. Zu jedem solchen t definieren wir induktiv ein $\hat{t}$ durch

$$\widehat{xt} :\equiv \max(\hat{t},\ t+1)$$
$$\widehat{\langle t_i\rangle t} :\equiv \max(\hat{t},\ \langle \hat{t}_i\rangle t)$$
$$\hat{\bar{k}} :\equiv \bar{k}\ .$$

Dabei sind max, +1 aufzufassen als unendliche Terme, die die entsprechenden primitiv rekursiven Funktionen darstellen (s. I2.4). $\hat{t}$ hat dann folgende Eigenschaft.

Lemma $\forall n < W^a_x\hat{t}:\ an=bn \ \longrightarrow\ W^a_x t = W^b_x t$.

Beweis durch Induktion über t . Im Fall einer Ziffer $\bar{k}$ ist die Behauptung trivial. Fall xt : Gelte $\forall n < W^a_x\,\widehat{xt}:\ an=bn$. Wegen $\widehat{xt} \equiv \max(\hat{t},\ t+1)$ folgt daraus

(1) $\forall n < W^a_x\hat{t}:\ an=bn$

(2) $a(W^a_x t) = b(W^a_x t)$.

Zu zeigen ist $W_x^a(xt) = W_x^b(xt)$, also $a(W_x^a t) = b(W_x^b t)$. Aus (1) erhält man mit der Ind.vor. $W_x^a t = W_x^b t$, und daraus mit (2) die Behauptung. Fall $\langle t_i \rangle t$: Gelte $\forall n < W_x^a \widehat{\langle t_i \rangle t}$: an=bn . Wegen $\widehat{\langle t_i \rangle t} \equiv \max(\hat{t}, \langle \hat{t}_i \rangle t)$ folgt daraus (1) und

(3) $\forall n < (W_x^a \langle \hat{t}_i \rangle)(W_x^a t)$: an=bn .

Zu zeigen ist $W_x^a(\langle t_i \rangle t) = W_x^b(\langle t_i \rangle t)$, also $(W_x^a \langle t_i \rangle)(W_x^a t) = (W_x^b \langle t_i \rangle)(W_x^b t)$. Aus (1) erhält man wieder mit der Ind.vor. $W_x^a t = W_x^b t =: j$. (3) besagt dann also

(3)' $\forall n < W_x^a \hat{t}_j$: an=bn .

Daraus folgt mit der Ind.vor. $W_x^a t_j = W_x^b t_j$, und das war zu zeigen.

Setzt man nun $M_Y a := W_x^a \widehat{t^*_{Yx}}$, so folgt aus $\forall n < M_Y a$: an=bn nach dem Lemma $W_x^a t^*_{Yx} = W_x^b t^*_{Yx}$, also auch $W_x^a t_{Yx} = W_x^b t_{Yx}$ und damit Ya = Yb , d.h. M_Y ist ein Stetigkeitsmodul für Y .

Um zu zeigen, daß M_Y ein primitiv rekursives Funktional ist, gehen wir jetzt zu Termnummern über. Dabei können wir die Tiefenschranken aus einer festen Standardwohlordnung vom Typ ε_0 wählen [20]. Hinreichend große Schranken $\alpha < \varepsilon_0$ für die benötigten Tiefenschranken und M für die Menge der auftretenden Typen seien für das folgende fest gewählt. - In I3.7 hatten wir

---

[20] s. Fußnote 11 .

gesehen, daß dem Übergang von einem Term zu seiner Normalform eine primitiv rekursive Funktion Red^* entspricht. Aus einer kanonisch zu wählenden Nummer $\ulcorner t_{Yx} \urcorner$ erhält man also eine Nummer $Red^* \ulcorner t_{Yx} \urcorner$ $=: \ulcorner t^*_{Yx} \urcorner$ von t^*_{Yx}. Aus den Eigenschaften der Funktion Red^* ergibt sich $R \ulcorner t^*_{Yx} \urcorner = 0$ und $FV \ulcorner t^*_{Yx} \urcorner \subseteq^{\#} \{x\}^{\#}$. Man kann nun wie in I3.7 mit dem Rekursionstheorem für $\mathcal{P}$ eine primitiv rekursive Funktion $\widehat{\ }$ konstruieren, so daß für Termnummern $\ulcorner t \urcorner$ mit $R \ulcorner t \urcorner = 0$ und $FV \ulcorner t \urcorner \subseteq^{\#} \{x\}^{\#}$ stets $\widehat{\ulcorner t \urcorner}$ eine Nummer des oben konstruierten Terms $\hat{t}$ ist [21]. Also ist $\widehat{\ulcorner t^*_{Yx} \urcorner} =: \ulcorner \widehat{t^*_{Yx}} \urcorner$ eine Nummer von t^*_{Yx}. Damit ergibt sich eine Darstellung $M_Y a = W_0 \ulcorner \widehat{t^*_{Yx}} \urcorner \ulcorner x \to a \urcorner$ von M_Y mit einem durch α-Rekursion definierten Wertfunktional W_0. Also ist M_Y ein primitiv rekursives Funktional, denn nach Tait 1967 lassen sich α-Rekursionen mit $\alpha < \varepsilon_0$ unter Erhöhung der Typenstufe auf primitive Rekursionen reduzieren.

Wir zeigen jetzt, daß sich der eben geführte Beweis von

$$\forall n < M_Y a:\ an = bn \ \rightarrow\ Ya = Yb$$

auch in T formalisieren läßt. Dazu verwenden wir das Reduktionslemma aus I4.2, wobei hier die Ableitbarkeit der Formel (Red) in HA^{ω}_{α} $(:= \bigcup_i HA^i_{\alpha}$, s. I4.1 $)$ genügt. Weiter benötigen wir eine Formalisierung des obigen Lemmas, die sich in der folgenden

---

[21] Die dabei anzugebenden Tiefenschranken ergeben sich aus der Bemerkung $|\hat{t}| \leq k \cdot |t|$ (mit geeignetem k).

Form unmittelbar durch α-Induktion nach $|u|$ in HA_α^ω beweisen läßt:

$$\begin{aligned}
& u \in Num \ \wedge\ R(u)=0 \ \wedge\ FV(u) \subseteq^{\#} \{x\}^{\#} \ \wedge\ Typ(u) = \ulcorner 0 \urcorner \\
\rightarrow\ & \hat{u} \in Num \\
& \wedge\ o(|\hat{u}|) \leq k \cdot o(|u|) \\
& \wedge\ R(\hat{u}) = 0 \\
& \wedge\ FV(\hat{u}) \subseteq^{\#} \{x\}^{\#} \\
& \wedge\ Typ(\hat{u}) = \ulcorner 0 \urcorner \\
& \wedge \left[\forall n < W_0 \hat{u} \ulcorner x \rightarrow a \urcorner : an = bn \ \rightarrow\ W_0 u \ulcorner x \rightarrow a \urcorner = W_0 u \ulcorner x \rightarrow b \urcorner \right].
\end{aligned}$$

Nach Definition von M_Y ergibt sich daraus und aus (Red) die Ableitbarkeit von $\forall n < M_Y a\colon an = bn \rightarrow Ya = Yb$ in HA_α^ω. Da nun HA_α^ω eine konservative Erweiterung von T ist (s. Tait 1967), folgt die Behauptung.

Im Fall $\tau = 1$ verwendet man eine Variable x vom Typ $0 \rightarrow 1$ (statt $0 \rightarrow 0$) und definiert entsprechend $\hat{t}$ durch

$$\begin{aligned}
\widehat{xts} &:\equiv \max(\hat{t}, \hat{s}, t+1, s+1) \\
\widehat{\langle t_i \rangle t} &:\equiv \max(\hat{t}, \langle \hat{t}_i \rangle t) \\
\hat{\bar{k}} &:\equiv \bar{k}\,.
\end{aligned}$$

Das obige Lemma erhält dann die Form

$$\forall n, m < W_x^a \hat{t}\colon anm = bnm \ \rightarrow\ W_x^a t = W_x^b t$$

und läßt sich genau wie vorher durch Induktion über t beweisen. Die weiteren Änderungen der obigen Überlegung sind offensichtlich;

insbesondere erhält man die Behauptung in der leicht verstärkten Form

$$\forall n,m < M_Y a:\ anm=bnm \ \rightarrow\ Ya=Yb \quad .$$

§2 Zur Bar Rekursion der Typen 0 und 1 Sei Y ein stetiges Funktional vom Typ $(0\rightarrow\tau)\rightarrow 0$. Unter (der Regel der) Bar Rekursion vom Typ τ versteht man (s. Spector 1962) die Definition eines Funktionals F vom Typ $0\rightarrow(0\rightarrow\tau)\rightarrow\sigma$ aus Y und Funktionalen G,H passender Typen durch die Gleichungen

$$(BR_\tau)\qquad F(n,a) = \begin{cases} G(n,a) & \text{falls } Ya_n < n \\ H(\lambda z.F(n+1,\ a|_n^z),\ n,\ a) & \text{sonst .} \end{cases}$$

Dabei ist $a|_n^z m := am$ für $m\neq n$ und $:=z$ für $m=n$, und $a_n m$ $:= am$ für $m<n$ und $:=\underset{\sim}{0}$ für $m\geq n$.

Um einzusehen, daß (BR_τ) eine Lösung F bestimmt, fassen wir sowohl das Paar (n,a) als auch a_n als Kodifikat der endlichen Folge $a0,\dots,a(n-1)$ auf (der Unterschied zwischen beiden Kodifikaten besteht darin, daß (n,a) auch eine Information über die Länge der kodierten Folge enthält). In (BR_τ) wird also F an der Stelle (n,a) definiert unter Rückgriff auf F an Stellen $(n+1,\ a|_n^z)$. Daß diese Rückgriffe wohlfundiert sind, ergibt sich aus der Stetigkeit von Y . Denn für hinreichend großes n ist $Ya_n = Ya$, und damit für noch etwas größeres n $Ya_n < n$.

Wir wollen zeigen, daß (BR_τ) für $\tau=0,1$ nicht aus den primitiv rekursiven Funktionalen hinausführt. Zunächst behandeln wir den Fall $\tau=0$.

Sei also Y ein primitiv rekursives Funktional vom Typ $(0\to 0)\to 0$. Wie in §1 bilden wir den Term t^*_{Yx} . Wir betrachten wieder allgemein Terme t in Normalform, die höchstens x frei enthalten. Zu jedem solchen t definieren wir induktiv ein Prädikat S_t (S erinnert an ge<u>s</u>ichert) durch

$$S_{xt}(n,a) \;:\leftrightarrow\; S_t(n,a) \wedge n > W^a_x t$$
$$S_{\langle t_i\rangle t}(n,a) \;:\leftrightarrow\; S_t(n,a) \wedge S_{t_j}(n,a) \quad , \qquad j=W^a_x t$$
$$S_{\overline{k}}(n,a) \;:\leftrightarrow\; 0=0 \;.$$

Lemma 1 $\quad S_t(n,a) \wedge \forall m<n\colon am=bm \;\to\; W^a_x t = W^b_x t$.

Beweis durch Induktion über t . Fall xt : Gelte $S_{xt}(n,a)$ und $\forall m<n\colon am=bm$. Zu zeigen ist $a(W^a_x t) = b(W^b_x t)$. Aus $S_t(n,a)$ folgt nach Ind.vor. $W^a_x t = W^b_x t$, und damit wegen $n > W^a_x t$ die Behauptung. Fall $\langle t_i\rangle t$: Gelte $S_{\langle t_i\rangle t}(n,a)$ und $\forall m<n\colon am=bm$. Zu zeigen ist $(W^a_x\langle t_i\rangle)(W^a_x t) = (W^b_x\langle t_i\rangle)(W^b_x t)$. Aus $S_t(n,a)$ folgt nach Ind.vor. $W^a_x t = W^b_x t =: j$. Zu zeigen ist also $W^a_x t_j = W^b_x t_j$. Das folgt aber nach Ind.vor. aus $S_{t_j}(n,a)$. Fall $\overline{k}$: trivial.

Lemma 2 $\quad S_t(n,a) \wedge m>n \;\to\; S_t(m,a)$.

Beweis durch Induktion über t . Fall xt : Gelte $S_{xt}(n,a)$ und $m>n$. Aus $S_t(n,a)$ folgt nach Induktionsvor. $S_t(m,a)$. Mit $m>n>W_x^a t$ folgt $S_{xt}(m,a)$. Fall $\langle t_i\rangle t$: Gelte $S_{\langle t_i\rangle t}(n,a)$ und $m>n$. Aus $S_t(n,a)$ und $S_{t_j}(n,a)$, $j=W_x^a t$ folgt nach Ind.vor. $S_t(m,a)$ und $S_{t_j}(m,a)$, also insgesamt $S_{\langle t_i\rangle t}(m,a)$. Fall $\bar{k}$: trivial.

U_t (U erinnert an ungesichert) sei das Komplement von S_t , also $U_t(n,a) :\leftrightarrow \neg S_t(n,a)$. Nach Lemma 2 ist U_t ein Baum, d.h. $U_t(n,a) \wedge m<n \rightarrow U_t(m,a)$. Wir definieren jetzt eine ordnungserhaltende Einbettung f_t von U_t in die Ordinalzahlen $<2^{\omega\cdot|t|}$, und zwar wie folgt durch Induktion über t .
$f_t(n,a) := 0$ falls $\neg U_t(n,a)$. Andernfalls

$$f_{xt}(n,a) := \begin{cases} (W_x^a t) - n & \text{falls } S_t(n,a) \\ \omega + f_t(n,a) & \text{falls } U_t(n,a) \end{cases}$$

$$f_{\langle t_i\rangle t}(n,a) := \begin{cases} f_{t_j}(n,a) \quad \text{mit } j=W_x^a t & \text{falls } S_t(n,a) \\ 2^{\omega\cdot|\langle t_i\rangle|} + f_t(n,a) & \text{falls } U_t(n,a) \end{cases}$$

Lemma 3 $\quad f_t(n,a) < 2^{\omega\cdot|t|}$.

Beweis durch Induktion über t . Fall xt : Gilt $S_t(n,a)$, so ist $f_{xt}(n,a)<\omega < 2^{\omega\cdot|xt|}$. Gilt $U_t(n,a)$, so hat man mit der Ind.vor. $f_{xt}(n,a) = \omega+f_t(n,a) < \omega +2^{\omega\cdot|t|} \leq 2^{\omega\cdot|t|+1} < 2^{\omega\cdot|xt|}$.
Fall $\langle t_i\rangle t$: Gilt $S_t(n,a)$, so folgt aus der Ind.vor.

$f_{\langle t_i\rangle t}(n,a) = f_{t_j}(n,a) < 2^{\omega\cdot|t_j|} < 2^{\omega\cdot|\langle t_i\rangle|}$. Gilt $U_t(n,a)$, so erhält man wieder mit der Ind.vor. $f_{\langle t_i\rangle t}(n,a) = 2^{\omega\cdot|\langle t_i\rangle|} + f_t(n,a) < 2^{\omega\cdot|\langle t_i\rangle|} + 2^{\omega\cdot|t|} \leq 2^{\omega\cdot(\max(|\langle t_i\rangle|,|t|)+1)} = 2^{\omega\cdot|\langle t_i\rangle t|}$. Fall $\bar{k}$: trivial.

Lemma 4 $\quad U_t(n,a) \wedge n>m \rightarrow f_t(n,a) < f_t(m,a)$.

Beweis durch Induktion über t . Fall xt : Gelte $U_{xt}(n,a)$ und $n>m$. Gilt $S_t(m,a)$, so folgt nach Lemma 2 $S_t(n,a)$ und daraus wegen $n>m$ die Behauptung $f_{xt}(n,a)< f_{xt}(m,a)$. Gilt $U_t(m,a)$ und $S_t(n,a)$, so ergibt sich $f_{xt}(n,a) < \omega \leq f_{xt}(m,a)$. Gilt $U_t(m,a)$ und $U_t(n,a)$, so ist nach Ind.vor. $f_t(n,a) < f_t(m,a)$ und damit $f_{xt}(n,a) < f_{xt}(m,a)$. Fall $\langle t_i\rangle t$: Gelte $U_{\langle t_i\rangle t}(n,a)$ und $n>m$. Gilt $S_t(m,a)$, so folgt wieder nach Lemma 2 $S_t(n,a)$. Also hat man $U_{t_j}(n,a)$ mit $j = W_x^a t$ und damit nach Ind.vor. $f_{t_j}(n,a) < f_{t_j}(m,a)$, also nach Definition von $f_{\langle t_i\rangle t}$ die Behauptung. Gilt $U_t(m,a)$ und $S_t(n,a)$, so ist nach Lemma 3 $f_{\langle t_i\rangle t}(n,a) = f_{t_j}(n,a) < 2^{\omega\cdot|t_j|} < 2^{\omega\cdot|\langle t_i\rangle|} \leq 2^{\omega\cdot|\langle t_i\rangle|} + f_t(m,a) = f_{\langle t_i\rangle t}(m,a)$. Gilt $U_t(n,a)$, so ist nach Ind.vor. $f_t(n,a) < f_t(m,a)$ und damit $f_{\langle t_i\rangle t}(n,a) < f_{\langle t_i\rangle t}(m,a)$. Fall $\bar{k}$: trivial.

Aus U_t definieren wir einen etwas größeren Baum $\bar{U}_t$ durch $\bar{U}_t(n,a) :\leftrightarrow U_t(n,a) \vee W_x^a t \geq n$. Außerhalb von $\bar{U}_t$, d.h. für n,a mit $\neg\bar{U}_t(n,a)$, gilt also $W_x^a t < n$. Daß $\bar{U}_t$ ein

Baum ist, d.h. $\overline{U}_t(n,a) \wedge m<n \rightarrow \overline{U}_t(m,a)$, folgt aus Lemma 2 . Weiter läßt sich $\overline{U}_t$ mit folgendem $\overline{f}_t$ ordnungserhaltend einbetten in die Ordinalzahlen $< \omega+2^{\omega\cdot|t|}$: $\overline{f}_t(n,a) := 0$ falls $\neg\overline{U}_t(n,a)$. Andernfalls

$$\overline{f}_t(n,a) := \begin{cases} (W_x^a t) - n & \text{falls } S_t(n,a) \\ \omega + f_t(n,a) & \text{falls } U_t(n,a) . \end{cases}$$

Aus Lemma 3 und 4 ergibt sich dann unmittelbar $\overline{f}_t(n,a) < \omega + 2^{\omega\cdot|t|}$ und $\overline{U}_t(n,a) \wedge m<n \rightarrow \overline{f}_t(m,a) < \overline{f}_t(n,a)$.

Betrachten wir jetzt wieder t^*_{Yx} . Außerhalb von $\overline{U}_{t^*_{Yx}}$, d.h. im Fall $\neg\overline{U}_{t^*_{Yx}}(n,a)$, gilt dann $W_x^a t^*_{Yx} < n$ und $S_{t^*_{Yx}}(n,a)$. Mit Lemma 1 folgt $W_x^a t^*_{Yx} = W_x^{a_n} t^*_{Yx} = W_x^{a_n} t_{Yx} = W_x^{a_n}(t_Y x) = Ya_n$, also $Ya_n < n$, d.h. außerhalb von $\overline{U}_{t^*_{Yx}}$ liegt der Anfangsfall von (BR_0) vor. Wir können also (BR_0) als Rekursion über den Baum $\overline{U}_{t^*_{Yx}}$ auffassen, und wegen der Einbettung $\overline{f}_{t^*_{Yx}}$ von $\overline{U}_{t^*_{Yx}}$ in die Ordinalzahlen $< \omega + 2^{\omega\cdot|t^*_{Yx}|} < \varepsilon_0$ auch als Rekursion über einen Abschnitt $<\varepsilon_0$ der Ordinalzahlen.

Es genügt also, in T definierbare Analoga zu $\overline{U}_{t^*_{Yx}}$ und $\overline{f}_{t^*_{Yx}}$ zu finden. Dazu gehen wir wie in §1 zu Termnummern über. Hinreichend große Schranken $\alpha < \varepsilon_0$ für die in den Termnummern vorkommenden Tiefenschranken und M für die Menge der auftretenden

Typen seien wieder fest gewählt. Aus den Definitionen von S_t, f_t etc. ergibt sich unmittelbar, wie man entsprechend $\lambda una.S_u(n,a)$, $\lambda una.f_u(n,a)$ etc. in T_α , also auch in T defienieren kann. Mit denselben Beweisen erhält man dann Analoga zu den bewiesenen Eigenschaften von S_t , f_t etc., also z.B. zu Lemma 3 : $u \in Num \rightarrow f_u(n,a) \prec \ulcorner 2^{\omega \cdot o(|u|)} \urcorner$. Daraus folgt aber, daß sich (BR_0) auf eine α-Rekursion in T reduzieren läßt und folglich nicht aus T hinausführt.

Die Formalisierbarkeit des geführten Beweises in HA^ω_α ist unmittelbar klar. Damit hat man aber auch die Formalisierbarkeit in T , da ja HA^ω_α eine konservative Erweiterung von T ist (s. Tait 1967).

Die für den Fall $\tau=1$ erforderlichen Änderungen sind minimal: In den Definitionen und Beweisen durch Induktion über t ersetze man xt durch xts . Alles andere bleibt unverändert.

Literatur

Diller 1968, Zur Theorie rekursiver Funktionale höherer Typen. Habilitationsschrift, München

Diller/Schütte 1971, Simultane Rekursion in der Theorie der Funktionale endlicher Typen. Archiv math. Logik 14, S.69-74

Gandy 1967, Computable functionals of finite type I . In: Sets, models and recursion theory (ed. Crossley), S.202-242

Feferman 1962, Classifications of recursive functions by means of hierarchies. Trans. Amer. Math. Soc. 104, S.101-122

Gentzen 1936, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Math. Ann. 112, S.493-565

____ 1938, Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, Neue Folge 4 , S.19-44

Gödel 1958, Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunkts. Dialectica 12, S.280-287

Hilbert 1900, Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem Internationalen Mathematikerkongress Paris 1900. Abgedruckt in: Hilbert, Gesammelte Abhandlungen, Bd.III, S.290-329 (1935)

Hilbert/Bernays 1934 u. 1939, Grundlagen der Mathematik, Bd. I u. II

Howard 1963, The axiom of choice (Σ_1^1 - AC_{01}), bar induction and bar recursion. In: Reports of seminar on the foundations of analysis (mimeographed), Stanford, S.2.1-2.44

____ 1968, Functional interpretation of bar induction by bar recursion. Compositio Math. 20, S.107-124

____ 1970a, Assignment of ordinals to terms for primitive recursive functionals of finite type. In: Intuitionism and proof theory (ed. Myhill et al.), S.443-458

____ 1970b, Ordinal analysis of bar recursion of type zero. Mimeographed, 65S.

Kreisel 1958, Mathematical significance of consistency proofs. J. Symbolic Logic 23, S.155-182

____ 1959a, Proof by transfinite induction and definition by transfinite induction in quatifier-free systems (abstract). J. Symbolic Logic 24, S.322

____ 1959b, Inessential extensions of Heyting's arithmetic by means of functionals of finite type (abstract). J. Symbolic Logic 24, S.284

____ 1959c, Interpretation of classical analysis by means of constructive functionals of finite types. In: Construvtivity in Math. (ed. Heyting), S.101-128

____ 1965, Mathematical Logic. In: Lectures on modern Math. (ed. Saaty), S.95-195 , Bd. III

Kleene 1958, Extension of an effectively generated class of functions by enumeration. Colloquium Math. 6, S.67-78

____ 1959, Countable functionals. In: Constructivity in Math. (ed. Heyting), S.81-100

Myhill 1953, A stumblingblock in constructive mathematics (abstract). J. Symbolic Logic 18, S.190

Parsons 1971, Proof theoretic analysis of restricted induction schemata (abstract). J. Symbolic Logic 36, S.361

Robbin 1965, Subrecursive hierarchies. Thesis, Princeton

Routledge 1953, Ordinal recursion. Proc. Cambridge Phil. Soc. 49, S.175-182

Schwichtenberg 1971, Eine Klassifikation der ε_0-rekursiven Funktionen. Z. math. Logik 17, S.61-74

Shepherdson 1965, Non-standard models for fragments of number theory. In: The theory of models (ed. Addison et al.), S. 342-358

Spector 1962, Provably recursive functionals of analysis: a cocsistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics. Proc. Symposia Pure Math., Vol.5, Amer. Math. Soc., S.1-27

Tait 1965a, Infinitely long terms of transfinite type. In: Formal systems and recursive functions (ed. Crossley/ Dummett), S.176-185

____ 1965b, Functionals defined by transfinite recursion. J. Symbolic Logic 30, S.155-174

____ 1967, Constructive reasoning. In: Logic, methodology and the philosophy of science III (ed. van Rootselaar, Staal), S.185-199

a