Ein einfaches Verfahren zur Normalisierung unendlicher Herleitungen.

H. Schwichtenberg

Mathematisches Institut der Universität München,
Theresienstraße 39, D-8000 München 2

Betrachtet werden zahlentheoretische Systeme erster Stufe mit ω-Regel und natürlichen Schlußregeln im Sinne von Gentzen. Es wird ein primitiv rekursiver Operator N angegeben, der jede Herleitung in eine Normalform (unter Einschluß permutativer Konversionen) überführt. Dieser Operator N bearbeitet Herleitungsbäume "von der Wurzel zu den Spitzen" und bestimmt für jeden Knoten a der Normalform explizit eine endliche Menge von Knoten der gegebenen Herleitung, von deren Beschriftung die Beschriftung von a allein abhängt; insbesondere ist N stetig bezüglich der unten angegebenen Metrik auf der Menge der Herleitungen. Ein ähnliches Verfahren für ein anderes formales System (ohne permutative Konversionen) wurde von Mints in [2] angegeben.

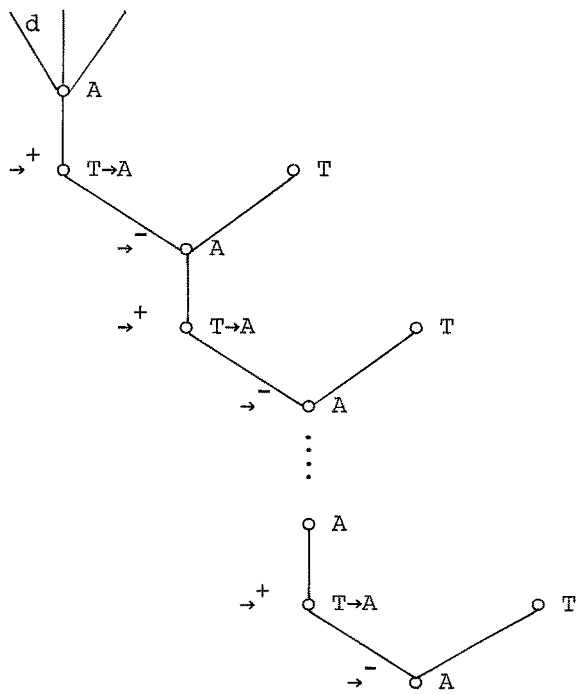
Es stellt sich die Frage, warum man neben dem üblichen durch transfinite Rekursion (also "von den Spitzen zur Wurzel") definierten Normalisierungsoperator den hier betrachteten Operator N untersuchen soll. Folgende Gründe lassen sich angeben:

1. N ist ohne weiteres auch auf nicht-fundierte Herleitungen anwendbar. Nicht-fundierte Herleitungen können auftreten, wenn man Gültigkeit bezüglich Modellen von beschränkter Komplexität betrachtet. (Unter Komplexität eines Modells versteht man dabei die Komplexität der Menge aller im Modell gültigen Formeln, nicht nur der Primformeln.) Bezogen auf diese Modelle sind nämlich auch solche nicht-fundierte Herleitungen korrekt, deren unendliche Pfade sämtlich eine größere als die vorgegebene Komplexität haben. Wir wollen jedoch diesen Aspekt hier nicht weiter verfolgen; mehr darüber findet man in [1].

2. N ist durch besonders einfache primitive Rekursionen zu definieren; eine transfinite Rekursion ist nicht erforderlich.

3. Bei der tatsächlichen Herstellung der Normalform einer Herleitung (etwa auf einem Rechner) scheint die der Definition von N zugrunde liegende Strategie besonders naheliegend und vorteilhaft zu sein.

Zu beachten ist, daß es zur Durchführung dieses Programms erforderlich ist, den Herleitungsbegriff zu verändern und etwa zu den Herleitungsregeln eine sogenannte Wiederholungsregel Rep hinzuzunehmen, welche den Übergang von einer Formel A zu derselben Formel A gestattet; dies wurde zuerst in [1, S. 46] bemerkt. Zum Beweis betrachte man die folgenden Herleitungen $d_n(d)$:



mit n Anwendungen des logischen Axioms T und einer normalen Teilherleitung d von A. Die Normalform von $d_n(d)$ ist offenbar d. Nun trägt die Menge der Herleitungen in natürlicher Weise eine Metrik: ist h die kleinste Höhe, auf der sich zwei Herleitungen erstmals unterscheiden, so sei $\frac{1}{h+1}$ ihr Abstand. Ist jetzt d_∞ der (von d unabhängige) Grenzwert der $d_n(d)$ und d eine von der Normalform von d_∞ verschiedene normale Herleitung, so strebt $d_n(d)$ gegen d_∞, obwohl die Normalformen einen konstanten positiven Abstand behalten. Es kann also keinen stetigen und daher erst recht keinen primitiv rekursiven Normalisierungsoperator geben. - Dieses Argument gilt offenbar nicht mehr, wenn die Wiederholungsregel Rep zugelassen wird. Die Eindeutigkeit der Normalform hat man dann jedoch nur noch bis auf Anwendungen von Rep.

§ 1 HERLEITUNGEN

Wie bereits erwähnt, betrachten wir zahlentheoretische Systeme erster Stufe mit ω-Regel und natürlichen Schlußregeln im Sinne von Gentzen. Herleitungen sehen wir als beschriftete Bäume an, wobei die Beschriftung der einzelnen Knoten möglichst knapp gehalten wird; dies ermöglicht eine einfache Definition des Normalisierungsoperators N (sowie eine einfache Darstellung solcher Herleitungen in einem Rechner). Insbesondere schreiben wir niemals ganze Formeln (etwa bei Annahmen) oder Terme (etwa bei Anwendungen von $\forall^-$) an die Knoten, sondern stellen sie jeweils als Teilbäume dar.

Unsere Sprache sei durch Objektvariablen x y ... sowie Funktionssymbole f g ... und Prädikatensymbole p q ... jeweils fester endlicher Stellenzahl bestimmt. Terme und Formeln werden wie üblich aufgebaut, letztere aus Primformeln (einschließlich dem Falsum $\bot$) mittels $\wedge \rightarrow \forall x$; $\neg A$ wird wie üblich durch $A \rightarrow \bot$ definiert. Eine Liste Ax_0 Ax_1 ... von gegen Termsubstitution abgeschlossenen Axiomenschemata sei vorgegeben (etwa Gleichheitsaxiome, Definitionsgleichungen für einige primitiv rekursive Funktionen sowie das Schema $\neg\neg A \rightarrow A$ für Primformeln A). Annahmen im Sinne von Gentzens natürlichen Schlußregeln markieren wir durch die Annahmevariable u v ...; es wird verlangt, daß in einer gegebenen Herleitung mehrere Vorkommen derselben Annahmenvariablen u stets dieselbe Formel markieren. Herleitungen sind dann mittels Einführungs- und Beseitigungsregeln für jedes der logischen Symbole $\wedge \rightarrow \forall$ aufgebaut; dabei binden die Einführungsregeln $\forall^+$ jeweils eine Objektvariable x bzw. $\rightarrow^+$ eine Annahmevariable u. Ferner haben wir die ω-Regel in der folgenden Form. Hauptprämisse ist ein Term t; Nebenprämissen sind Herleitungen d_i ($i = 0,1,\ldots$) derselben Formel A aus (u.a.) Annahmen $t = \underline{i}$, die mit der Annahmenvariablen u_i markiert seien. Die Konklusion ist dann wieder die Formel A, und es werden alle Annahmenvariablen u_i gebunden. Schließlich lassen wir aus dem oben angegebenen Grund noch die Wiederholungsregel Rep zu.

Genauer ist eine Herleitung ein $\leq \omega$-fach verzweigter fundierter Baum, der an jedem Knoten mit einem der folgenden Symbole beschriftet ist

$x\ y\ \ldots$

$f\ g\ \ldots$

$p\ q\ \ldots$

$\wedge$

$\rightarrow$

$\forall x\ \forall y\ \ldots$

$u\ v\ \ldots$

$Ax_0\ Ax_1\ \ldots$

$\wedge^+$

$\wedge^-_0\ \wedge^-_1$

$\rightarrow^+ u\ \rightarrow^+ v\ \ldots$

$\rightarrow^-$

$\forall^+ x\ \forall^+ y\ \ldots$

$\forall^-$

$\omega\ \langle u_i \rangle_{i<\omega}$

Rep

und der gewisse naheliegende Korrektheitsbedingungen erfüllt, die hier nicht explizit aufgeschrieben werden sollen; zur Formulierung dieser Bedingungen ist es erforderlich, durch Induktion über die Höhe eines Knotens a im Baum die folgenden Begriffe zu definieren

Formel(a) Der Term bzw. die Formel, die bei der üblichen Notation am Knoten a der Herleitung stehen würde.

Ann(a) Endliche Liste aller im Knoten a der Herleitung freien Annahmenvariablen.

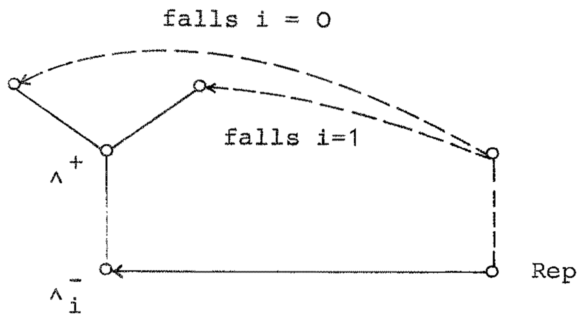
Zu beachten ist, daß im Fall der Regel $\to^+$ mit gebundener Annahmenvariable u die zugehörige Annahmeformel A in einer zusätzlichen Prämisse aufgeführt werden muß, da sich sonst die Beschriftung $A \to B$ dieses Knotens i.a. nicht ablesen läßt.

§ 2 ECHTE KONVERSIONEN

Gegeben sei jetzt eine Herleitung d, in der einige echt konvertierbare Teilherleitungen markiert sind; echt konvertierbar heißt dabei eine Herleitung, wenn sie mit einer Beseitigungsregel endet (also $\wedge_i^-$, $\to^-$ oder $\forall^-$), deren Hauptprämisse durch eine Einführungsregel gewonnen wurde (also $\wedge^+$, $\to^+$ bzw. $\forall^+$). Wir definieren die <u>reduzierte</u> <u>Herleitung</u> Rd := d' schrittweise von aussen nach innen. Gleichzeitig definieren wir für jeden Knoten (:= endliche Zahlenfolge) a in d' den <u>Urbildknoten</u> U(a) in d sowie die <u>Sprunganweisungen</u> Sp(a); Sp(a) ist eine endliche Folge von Paaren (u,b) oder (x,b). Die Wurzel □ (:= leere Zahlenfolge) ist ein Knoten von d'. Ferner sei U(□) = □ und Sp(□) leer. Wir betrachten jetzt einen beliebigen Knoten a in d', für den U(a) und Sp(a) bereits definiert sind.

<u>Fall 1</u> U(a) beginnt in d eine markierte konvertierbare Teilherleitung. Dann können folgende Situationen vorliegen:

<u>Unterfall 1.1</u>



Genauer: $d(U(a)) = \wedge_i^-$

$d(U(a)0) = \wedge^+$

(Hier haben wir mit d(b) die Beschriftung des Knotens b in d bezeichnet; ferner bezeichnen wir die Verlängerung eines Knotens (:= endliche Zahlenfolge) b um die Zahl j mit bj).

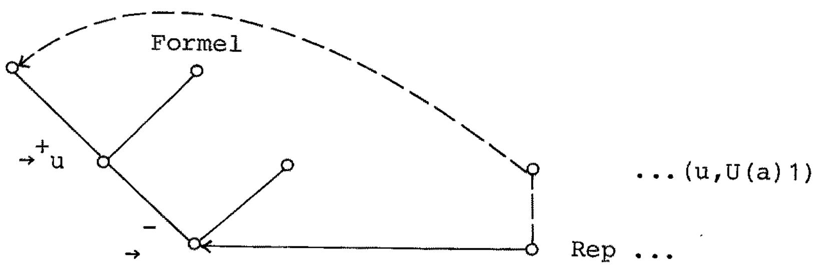
Dann soll a0 ein Knoten in d' sein, aber kein aj mit $j > 0$; ferner setzen wir

$d'(a) := \text{Rep}$

$U(a0) := U(a)0i$

$Sp(a0) := Sp(a)$

<u>Unterfall 1.2</u>



Genauer: $d(U(a)) = \rightarrow^-$

$d(U(a)0) = \rightarrow^+ u$

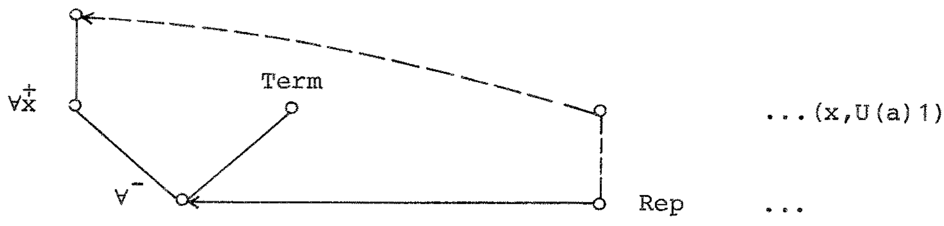
Dann soll wieder a0 ein Knoten in d' sein, aber kein ai mit $i > 0$; ferner setzen wir

$d'(a) := \text{Rep}$

$U(a0) := U(a)\ 0\ 0$

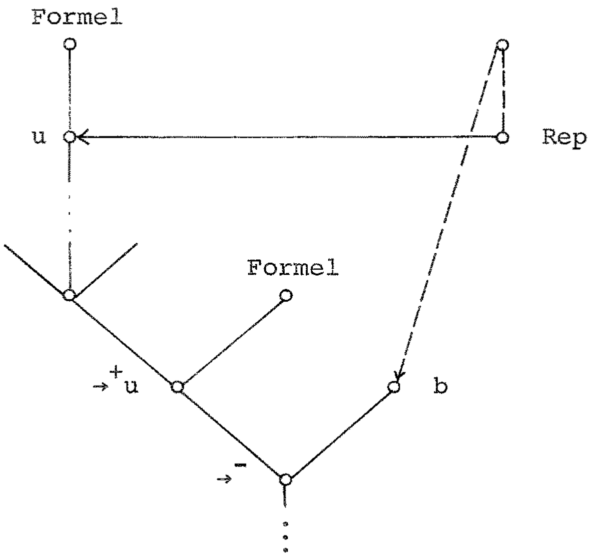
$Sp(a0) :=$ die endliche Folge, die aus Sp(a) durch Anfügen des Paares (u,U(a)1) entsteht.

Unterfall 1.3



wie Unterfall 1.2.

Fall 2 U(a) ist in d mit einer Annahmenvariablen u (bzw. mit einer Objektvariablen x) beschriftet, für die ein Paar (u,b) (bzw. (x,b)) in Sp(a) vorkommt:



Genauer: d(U(a)) = u, und es gibt ein mit u beginnendes Paar in Sp(a); (u,b) sei das letzte derartige Paar.

Dann soll a0 ein Knoten in d' sein, aber kein ai mit i > 0; ferner setzen wir

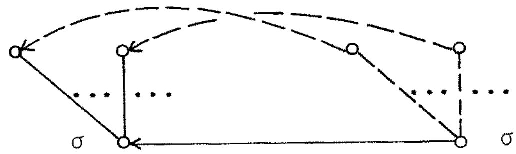
d'(a) := Rep

U(a0) := b

Sp(a0) := die endliche Folge, die aus Sp(a) entsteht durch Streichen des letzten mit u beginnenden Paares (u,b) sowie sämtlicher Paare (v,c) und (y,c), deren Variabale v bzw. y nicht in einem Knoten echt unterhalb b gebunden ist.

Den Fall einer Objektvariablen x behandelt man entsprechend.

<u>Fall 3</u> Sonst.



Dann soll ai ein Knoten in d' sein genau dann, wenn U(a)i ein Knoten in d ist; ferner setzen wir

$$d'(a) := d(U(a))$$
$$U(ai) := U(a)i$$
$$Sp(ai) := Sp(a).$$

Zunächst hat man sich zu überlegen, daß Rd wieder eine Herleitung ist, und zwar von derselben Endformel und mit höchstens weniger Annahmen. Zum Beweis benötigt man eine Bauminduktion in Rd; wir müssen also als erstes wissen, daß Rd fundiert ist. Dazu betrachten wir auf Herleitungen neben der üblichen Baumordnung (erzeugt von $a < b$: $\leftrightarrow$ der Knoten a ist eine Fortsetzung des Knotens b) eine partielle lexikographische Ordnung, die erzeugt wird von der Baumordnung und von

$a <_{lex} b : \leftrightarrow$ a,b haben ein gemeinsames Anfangsstück c so daß b Fortsetzung von c0 ist, a Fortsetzung von c1 ist und c mit einer der Regeln $\rightarrow^-$ oder $\forall^-$ beschriftet ist.

Man überlegt sich leicht, daß aus der Fundiertheit einer Herleitung bezüglich ihrer Baumordnung auch ihre Fundiertheit bezüglich der partiellen lexikographischen Ordnung folgt. Die Fundiertheit von Rd ergibt sich jetzt aus der Fundiertheit von d, da für $a,b \in Rd$ aus $a < b$ stets $U(a) <_{lex} U(b)$ folgt.

Durch Bauminduktion über Rd zeigt man jetzt, daß für jeden Knoten a in Rd Formel(a) aus Formel(U(a)) durch Ausführung der in Sp(a) gespeicherten Substitutionen entsteht, und daß Ann(a) enthalten ist in derjenigen Menge von Annahmenvariablen, die aus Ann(U(a)) entsteht durch "Ausführung" (in einem naheliegenden Sinn) der Sprunganweisungen in Sp(a). Daraus ergibt sich dann leicht, daß Rd eine Herleitung ist, die dieselbe Endformel und höchstens weniger Annahmen als d hat.

Ferner kann man den obigen Fundiertheitsbeweis für Rd zu einer Höhenabschätzung verwenden: definiert man wie üblich die Höhe $|a|$ eines Elements in einer fundierten Ordnung durch

$$|a| := \sup_{b<a}(|b| + 1),$$

falls a kein minimales Element ist, und durch $|a| := 1$ sonst, so zeigt man leicht durch Bauminduktion über Rd

$$|a| \leq |U(a)|_{lex}$$

für alle a in Rd. Angewandt auf die Wurzel ergibt dies, daß sich die Höhe $|Rd|$ von Rd bzgl. der Baumordnung durch die Höhe $|d|_{lex}$ von d bzgl. der partiellen lexikographischen Ordnung abschätzen läßt. Separat überlegt man sich nun leicht, daß sich $|d|_{lex}$ stets abschätzen läßt durch $2^{|d|} - 1$, falls $|d| < \omega$, bzw. durch $2^{|d|} + r(|d|)$, falls $|d| \geq \omega$; hierbei ist $r(\alpha)$ der Überschuß von α über die letzte Limeszahl.

Um schließlich die wesentliche Eigenschaft von Rd zu formulieren, benötigen wir den Begriff der Stufe SA einer Formel A:

$$\begin{aligned}
SA &:= 0, \text{ falls A Primformel} \\
S(A \to B) &:= \max(SA + 1, SB) \\
S(A \land B) &:= \max(SA, SB) \\
S\forall xA &:= SA.
\end{aligned}$$

Eine Herleitung d heißt echt konvertierbar, wenn sie mit einer Beseitigungsregel endet, deren Hauptprämisse durch eine Einführungsregel gewonnen wurde. Ferner nennen wir eine Herleitung d permutativ konvertierbar, wenn sie mit einer Beseitigungsregel endet, deren Hauptprämisse durch die ω-Regel oder durch die Wiederholungsregel Rep gewonnen wurde. Unter dem Grad $G_e d$ bzw. $G_p d$

von d bzgl. echter (bzw. permutativer) Konversionen verstehen wir die kleinste Zahl, die größer ist als alle Stufen der Hauptformeln der Beseitigungsregeln am Ende der echt (bzw. permutativ) konvertierbaren Teilherleitungen von d. Man beachte, daß gilt $G_e d$, $G_p d \leq \omega$; ferner, daß $G_e d = 0$ (bzw. $G_p d = 0$) gerade bedeutet, daß in d keine echt (bzw. permutativ) konvertierbaren Teilherleitungen vorkommen. Es gilt nun der folgende

Satz Sei $k < \omega$ und d eine Herleitung mit $G_p d \leq k$, $G_e d \leq k+1$. Markiere in d alle echt konvertierbaren Teilherleitungen mit Hauptformel der Stufe k. Dann ist Rd eine Herleitung derselben Endformel mit höchstens weniger Annahmen, für die gilt $G_p Rd$, $G_e Rd \leq k$ sowie $|Rd| < 2^{|d|} + \omega$. Für jeden Knoten a in Rd hängt die Beschriftung von a nur ab von den Beschriftungen in d der endlich vielen Knoten aus

$$M_e^{k,d}(a) := \{U(b) \mid b \text{ Anfangsstück von } a\};$$

dabei ist U(b) der oben definierte von k und d abhängige Urbildknoten von b.

Zum Beweis haben wir uns nur noch zu überlegen, daß bei der Bildung von Rd neue echt oder permutativ konvertierbare Teilherleitungen höchstens mit Stufen $<k$ der Hauptformel entstehen; dies ist aber unmittelbar aus der Konstruktion von Rd zu ersehen.

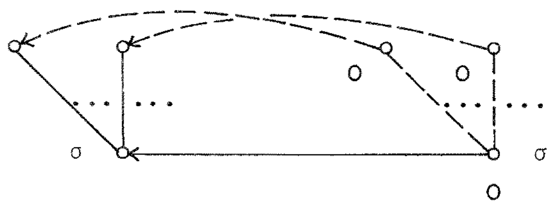
§ 3 PERMUTATIVE KONVERSIONEN

Wir definieren jetzt einen primitiv rekursiven Operator P, der in einer Herleitung d alle Beseitigungsregeln über sämtliche unmittelbar darüberstehenden ω- oder Rep-Regeln hinüberschiebt. Genauer wird dies wie folgt erreicht: Wir durchlaufen d von der Wurzel zu den Spitzen, zu Beginn in einem neutralen Zustand 0, und übernehmen alle Regeln bis auf die Beseitigungsregeln. Stossen wir auf eine Beseitigungsregel, so verändern wir unseren Zustand in 1 und verbleiben darin solange, wie wir auf ω- oder Rep-Regeln oder auf andere Beseitigungsregeln stoßen; nur die ω- und Rep-Regeln übernehmen wir in unsere zu konstruierende Herleitung Pd. Ferner speichern wir bei diesem ersten Durchlauf sämtliche Knoten mit Beseitigungsregeln. Stoßen wir dann auf eine

Einführungsregel, eine Annahme oder ein Axiom, so speichern wir den Knoten ebenfalls, verändern unseren Zustand in 2 und beginnen einen zweiten Durchlauf durch (einen Teil von) d, indem wir der Reihe nach für alle gespeicherten Knoten die dort stehenden Beseitigungsregeln übernehmen. Sind wir schließlich bis zu der Einführungsregel, der Annahme bzw. zu dem Axiom gekommen, so übernehmen wir sie ebenfalls, begeben uns wieder in den neutralen Zustand O und fahren fort wie oben.

Genauer definieren wir zu einer gegebenen Herleitung d die daraus durch permutative Konversionen entstehende Herleitung Pd =: d' schrittweise von außen nach innen. Gleichzeitig definieren wir für jeden Konten a in d' den <u>Urbildknoten</u> V(a) in d, ferner gewisse <u>Wegweiserangaben</u> W(a) sowie einen <u>Zustand</u> Z(a) $\in \{0,1,2\}$; W(a) ist eine endliche Folge von Knoten in d. Die Wurzel $\square$ ist ein Knoten in d'. Ferner sei $V(\square) = \square$, $W(\square)$ leer und $Z(\square) = 0$. Wir betrachten jetzt einen beliebigen Knoten a in d', für den V(a), W(a) und Z(a) bereits definiert sind.

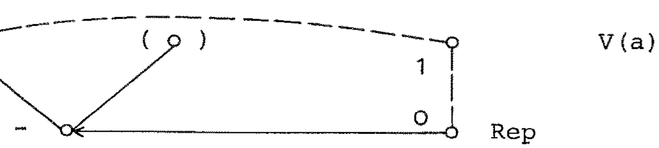
<u>Fall 1</u> $d(V(a)) \notin \{\wedge_0^-, \wedge_1^-, \to^-, \forall^-\}$, $Z(a) = 0$.



Dann soll ai ein Knoten in d' sein genau dann, wenn V(a)i ein Knoten in d ist; ferner setzen wir

$$\begin{aligned} d'(a) &:= d(V(a)) \\ V(ai) &:= V(a)i \\ W(ai) &:= \text{die leere Folge} \\ Z(ai) &:= 0 \end{aligned}$$

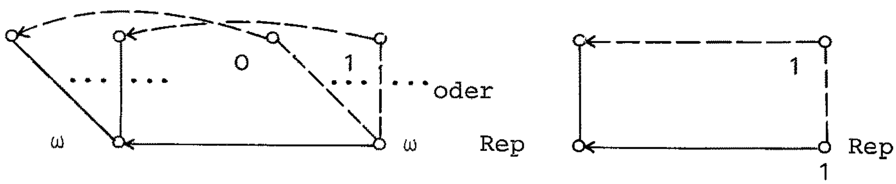
<u>Fall 2</u> $d(V(a)) \in \{\wedge_0^-, \wedge_1^-, \to^-, \forall^-\}$, $Z(a) = 0$



Dann soll a0 ein Knoten in d' sein, aber kein ai mit $i > 0$; ferner setzen wir

$$
\begin{aligned}
d'(a) &:= \text{Rep}\\
V(a0) &:= V(a)0\\
W(a0) &:= \text{die eingliedrige Folge}\\
&\ \text{bestehend aus } V(a)\\
Z(a0) &:= 1
\end{aligned}
$$

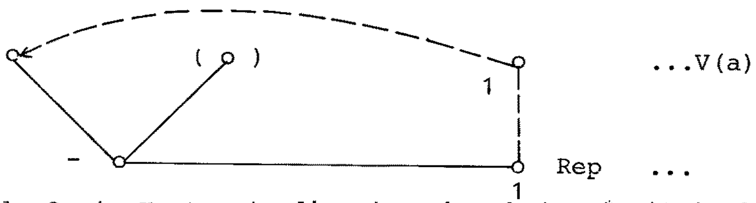
<u>Fall 3</u> $d(V(a)) \in \{\omega, \text{Rep}\}$, $Z(a) = 1$



Dann soll ai ein Knoten in d' sein genau dann, wenn V(a)i ein Knoten in d ist; ferner setzen wir

$$
\begin{aligned}
d'(a) &:= d(V(a))\\
V(ai) &:= V(a)i\\
W(ai) &:= W(a)\\
Z(ai) &:= \begin{cases} 0 & \text{falls } d(V(a)) = \omega \text{ und } i = 0\\ 1 & \text{sonst.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

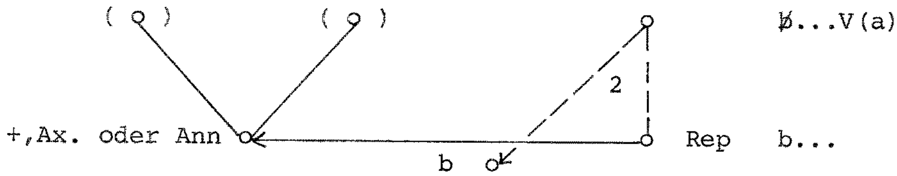
<u>Fall 4</u> $d(V(a)) \in \{\bar{\wedge}_0, \bar{\wedge}_1, \bar{\rightarrow}, \bar{\vee}\}$, $Z(a) = 1$.



Dann soll a0 ein Knoten in d' sein, aber kein ai mit $i > 0$; Ferner setzen wir

$$
\begin{aligned}
d'(a) &:= \text{Rep}\\
V(a0) &:= V(a)0\\
W(a0) &:= W(a)V(a)\\
Z(a0) &:= 1
\end{aligned}
$$

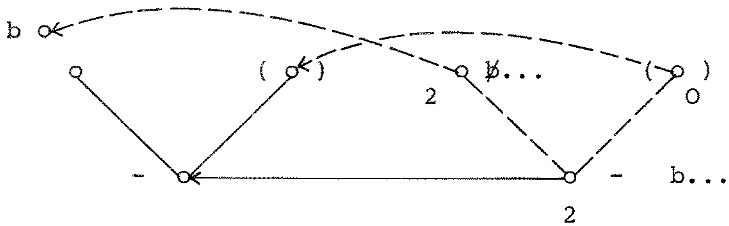
<u>Fall 5</u> $V(a) \notin \{\wedge_0^-, \wedge_1^-, \to^-, \forall^-, \omega, \mathrm{Rep}\}$, $Z(a) = 1$.



Dann soll a0 ein Knoten in d' sein, aber kein ai mit $i > 0$; ferner setzen wir

$d'(a)$:= Rep
$V(a0)$:= erstes Glied der Folge $W(a)$
$W(a0)$ entsteht aus der Folge $W(a)$, indem man deren erstes Glied entfernt und als letztes Glied $V(a)$ anfügt.
$Z(a0)$:= 2

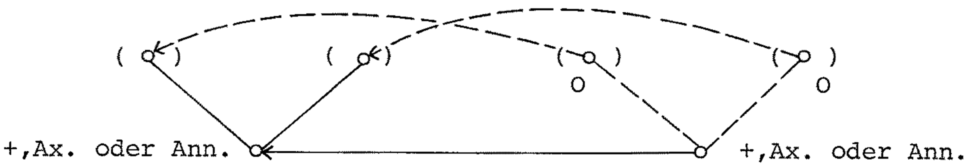
<u>Fall 6</u> $d(V(a)) \in \{\wedge_0^-, \wedge_1^-, \to^-, \forall^-\}$, $Z(a) = 2$



Dann sollen - etwa im Fall $d(V(a)) = \to^-$ - a0 und a1 Knoten in d' sein, aber kein ai mit $i > 1$; ferner setzen wir

$d'(a)$:= $\to^-$
$V(a0)$:= erstes Glied der Folge $W(a)$
$V(a1)$:= $V(a)1$
$W(a0)$:= der Rest der Folge $W(a)$ nach Entfernung des ersten Gliedes
$W(a1)$:= die leere Folge
$Z(a0)$:= 2
$Z(a1)$:= 0

<u>Fall 7</u> $d(V(a)) \notin \{\wedge_0^-, \wedge_1^-, \rightarrow^-, \vee^-, \omega, \mathrm{Rep}\}$, $Z(a) = 2$.



Dann soll ai ein Knoten in d' sein genau dann, wenn V(a)i ein Knoten in d ist; ferner setzen wir

$$\begin{aligned} d'(a) &:= d(V(a)) \\ V(ai) &:= V(a)i \\ W(ai) &:= \text{die leere Folge} \\ Z(ai) &:= 0 \end{aligned}$$

Zunächst haben wir uns wieder zu überlegen, daß Pd eine Herleitung ist, und zwar von derselben Endformel und mit höchstens weniger Annahmen. Zum Beweis benötigen wir eine Bauminduktion in Pd; wir müssen also als erstes wissen, daß Pd fundiert ist. Dies ist sehr leicht zu sehen: Sei etwa (a_n) eine unendliche absteigende Folge in Pd. Nach Konstruktion von Pd gilt: Wenn $Z(a_n) = 1$ und $Z(a_{n+1}) = 2$ ist, so gibt es ein m mit $n < m \leq 2n$ derart, daß $Z(a_m) \neq 2$ ist und deshalb $V(a_n)$ echtes Anfangsstück von $V(a_m)$ ist. In allen anderen Fällen ist $V(a_n)$ echtes Anfangsstück von $V(a_{n+1})$.

Durch Bauminduktion über Pd sieht man jetzt leicht, daß für jeden Knoten a in Pd im Fall $Z(a) = 0,2$ gilt Formel (a) = Formel (V(a)), und im Fall $Z(a) = 1$ gilt Formel (a) = Formel (b), wobei b das erste Glied der Folge W(a) ist. Ferner hat man

- im Fall $Z(a) = 0$: Ann (a) = Ann (V(a))
- im Fall $Z(a) = 1$: Ann (a) entsteht aus Ann (V(a)) durch Hinzunahme der Annahmemengen bei Nebenprämissen oder $\rightarrow^-$-Regeln, die unmittelbar vorher im Zustand 1 durchlaufen wurden
- im Fall $Z(a) = 2$: Ann(a) = Ann(a'), wobei a' der Vorgängerknoten von a ist, falls $d(V(a)) = \rightarrow^-$; anderenfalls ist Ann(a) = Ann(a') $\setminus$ Ann(V(a'0)).

Daraus ergibt sich dann leicht, daß Pd eine Herleitung ist, die dieselbe Endformel und höchstens weniger Annahmen als d hat.

Eine Höhenabschätzung für Pd ist recht leicht zu erhalten: es ist $|Pd| \leq |d|(|d|+1)$. - Damit haben wir den

<u>Satz</u>: Sei $k < \omega$ und d eine Herleitung mit $G_p d$, $G_e d \leq k+1$. Dann ist Pd eine Herleitung derselben Endformel mit höchstens weniger Annahmen, für die gilt $G_p Pd = 0$, $G_e Pd \leq k+1$ sowie $|Pd| \leq |d|(|d|+1)$. Für jeden Knoten a in Pd hängt die Beschriftung von a nur ab von den Beschriftungen in d der endlich vielen Knoten aus

$$M_p^{k,d}(a) := \{V(b) \mid b \text{ Anfangsstück von } a\};$$

dabei ist V(b) der oben definierte von k und d abhängige Urbildknoten von b.

Zum Beweis haben wir uns nur zu überlegen, daß die bei permutativen Konversionen evtl. entstehenden neuen echt konvertierbaren Teilherleitungen einen Grand $\leq k+1$ haben.

Setzt man $Gd := \max(G_e d, G_p d)$, so haben wir damit insgesamt den

<u>Satz</u>: Zu jeder Herleitung d mit $Gd =: k+1 < \omega$ findet man eine Herleitung d* derselben Endformel mit höchstens weniger Annahmen, für die gilt $Gd^* = 0$ sowie $|d^*| < \varepsilon(|d|) :=$ kleinste ε-Zahl $> |d|$. d* ergibt sich als $d^* = PRP...RPd$ mit k Vorkommen von R. Für jeden Knoten a in d* hängt die Beschriftung von a nur ab von den Beschriftungen in d der endlich vielen Knoten aus

$$M^d(a) := M_e^{0,PRP...RPd} M_p^{0,RP...RPd} \ldots M_e^{k-1,PRPd} M_p^{k-1,RPd} M_e^{k,Pd} M_p^{k,d}(a);$$

dabei ist $M^{\because}N := \bigcup_{b \in N} M^{\because}(b)$ gesetzt.

LITERATUR

[1] Kreisel G, Mints GE, Simpson SG (1975) The use of abstract language in elementary metamathematics: Some pedagogic examples. Lecture Notes in Mathematics 453:38-131

[2] Mints GE (1978) Finite investigations of transfinite derivations. J Soviet Math 10:548-596