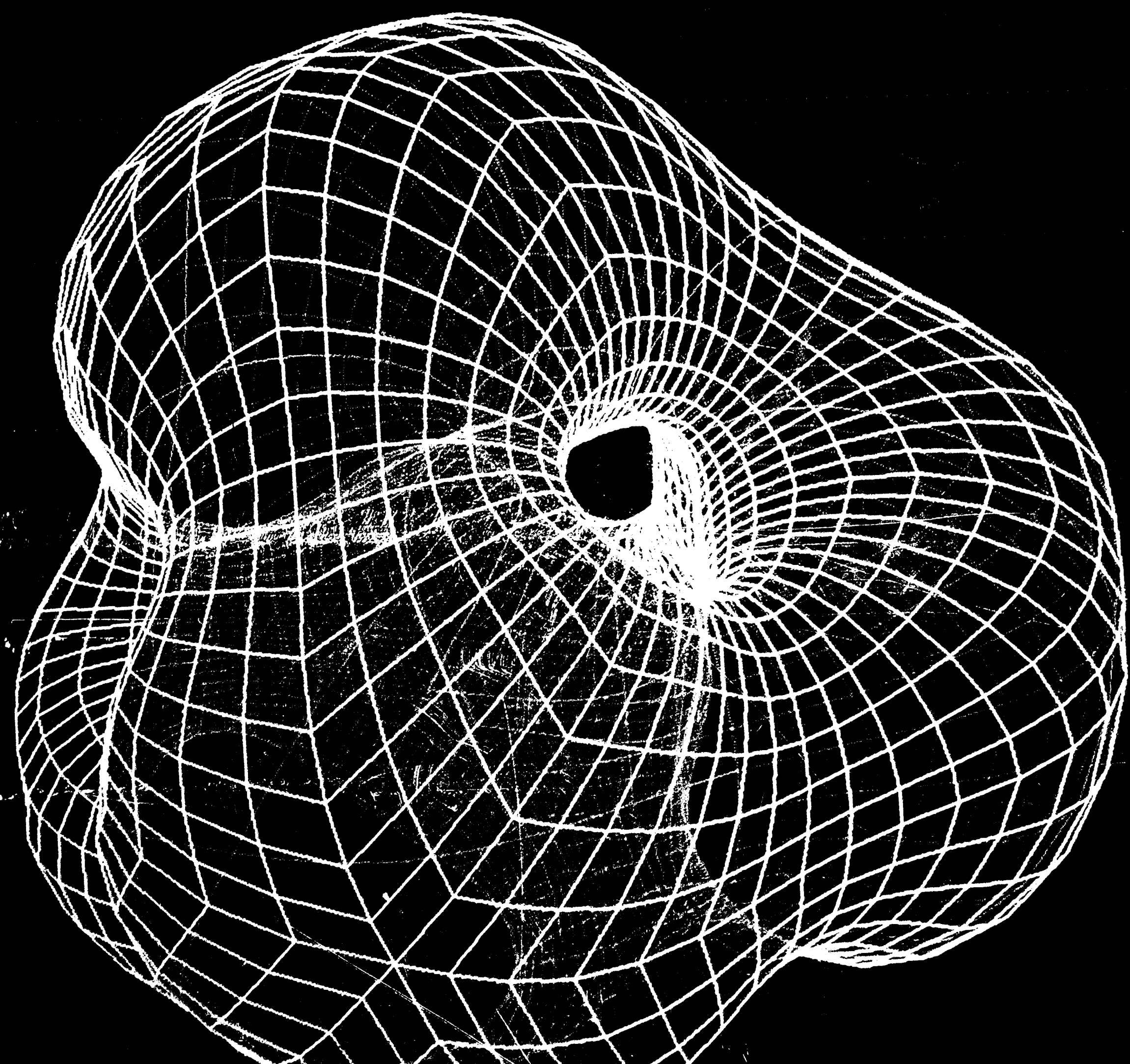
Heft 10
ISSN 0720–9991
ISBN 3 7983 1191 9

WISSENSCHAFTSMAGAZIN



MATHEMATIK

Aus dem Inhalt

Mathematische Logik

Helmut Schwichtenberg*

Wir wollen uns hier mit der Frage befassen, was mathematische Beweise sind, und für welchen Zweck man sie verwenden kann (außer für den offensichtlichen Zweck, daß sie die Wahrheit der betreffenden Behauptung sicherstellen). Es gibt viele andere Fragestellungen in der mathematischen Logik, auf die wir hier nicht eingehen können; eine gute, für Mathematiker ohne Logik-Kenntnisse bestimmte Übersicht findet man in dem „Handbook of Mathematical Logic", herausgegeben von J. Barwise, North-Holland Publishing Company (Amsterdam 1977). Eine für ein breiteres Publikum bestimmte, sehr lesenswerte Abhandlung über mathematische Logik ist von G. Kreisel unter dem Titel „Was hat die Wissenschaft von der mathematischen Logik?" im Jahrbuch 1982 der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft, 1982, S. 163–173, veröffentlicht worden.

1. Reine Logik

Wichtige Kennzeichen der formalen und damit auch der mathematischen Logik sind (1) die Trennung von Syntax und Semantik (mit Syntax bezeichnet man die Lehre von der formalen Gestalt sprachlicher Ausdrücke, mit Semantik die Lehre von der Bedeutung sprachlicher Ausdrücke), und (2) die genaue Festlegung der sprachlichen Mittel, mit denen etwas über den zugrunde gelegten Bereich von Objekten ausgesagt werden soll. Der Grund für die Trennung von Syntax und Semantik liegt darin, daß man andernfalls leicht zu Antinomien etwa der Form „Was ich jetzt schreibe ist falsch" kommt. Die genaue Festlegung der sprachlichen Mittel ist notwendig, da Logiken über verschiedenen Sprachen ganz verschiedene Eigenschaften haben.

Wir beschränken uns hier auf die sogenannte Prädikatenlogik erster Stufe. In ihr stehen folgende sprachliche Mittel zur Verfügung.

1. Symbole (Namen) für einzelne Objekte,
2. Symbole für Prädikate oder Relationen zwischen Objekten (z.B. die Teilbarkeitsrelation zwischen natürlichen Zahlen, oder die Relation „ist Tochter von" zwischen gegenwärtig lebenden Menschen),
3. Symbole für Funktionen, die auf Objekten definiert sind und Objekte als Werte haben (z.B. die Quadratfunktion für natürliche Zahlen),
4. Symbole für die aussagenlogischen Verknüpfungen „und" (geschrieben: $\wedge$), „wenn – so" (geschrieben: $\rightarrow$), „das Falsum" (geschrieben: $\perp$),
5. Variablen $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$ für Objekte sowie Symbole für die Allquantoren „für alle x" (geschrieben: $\forall x$).

Die aussagenlogischen Verknüpfungen „nicht" (geschrieben: $\neg$) und „oder" (geschrieben: $\vee$) werden definiert, und zwar $\neg A$ durch $A \rightarrow \perp$ und $A \vee B$ durch $\neg(\neg A \wedge \neg B)$. Ferner wird der Existenzquantor „es gibt ein x" (geschrieben: $\exists x$) definiert: $\exists x A$ steht für $\neg\forall x \neg A$. Hierbei bezeichnen A, B sogenannte Formeln; sie werden mit den aussagenlogischen Verknüpfungen $\wedge$, $\rightarrow$, $\perp$ und dem Allquantor $\forall x$ aus sogenannten Primformeln aufgebaut. Primformeln wiederum entstehen, indem man Prädikatensymbole auf sogenannte Terme anwendet. Terme schließlich werden mittels der Funktionssymbole aus Namen für einzelne Objekte und aus Variablen aufgebaut. Ein Beispiel einer Formel ist

$$\forall x \exists y (y > x \wedge \forall z (z \mid y \rightarrow z = 1 \vee z = y));$$

über dem Bereich der natürlichen Zahlen drückt sie aus, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, wenn man die Relationen $>$, $\mid$ und $=$ als „ist größer als", „teilt" und „ist gleich" interpretiert.

Eine Formel heißt allgemeingültig, wenn sie für beliebige (nicht leere) Objektbereiche und bei beliebiger Interpretation der in ihr vorkommenden Relations- und Funktionssymbole sowie Namen in dem betreffenden Objektbereich gültig ist. (Man beachte, daß ein eventuell in der Sprache vorkommendes Gleichheitssymbol = ebenfalls beliebig interpretiert werden kann, also nicht notwendig durch die Gleichheitsrelation über dem Objektbereich.) Zum Beispiel sind die Formeln

$$\forall x (Px \rightarrow Qx) \wedge Pa \rightarrow Qa$$

und

$$\forall x (Px \rightarrow Qx) \wedge Pa \rightarrow \exists x Qx$$

allgemeingültig, nicht aber die Formel

$$\forall x (Px \rightarrow Qx) \wedge Pa \rightarrow \forall x Qx.$$

Regeln zur Gewinnung allgemeingültiger Formeln lassen sich leicht angeben. Wir beschreiben hier ein Regelsystem, das von G. Gentzen 1934 in der Absicht aufgestellt wurde, das natürliche Schließen möglichst unverändert wiederzugeben. Er ging von der Beobachtung aus, daß in mathematischen Beweisen häufig zusätzliche Annahmen eingeführt und später wieder beseitigt werden. Dementsprechend werden in dem Regelsystem des natürlichen Schließens nicht Formeln schlechthin hergeleitet, sondern Formeln aus Annahmeformeln $A_1, \ldots, A_n$. Wir verwenden folgende Regeln

Annahmeeinführung. Aus der Annahme A ist die Formel A selbst herleitbar.

$\wedge$-Einführung. Sind sowohl die Formel A als auch die Formel B jeweils aus gewissen Annahmen herleitbar,

so ist die Formel $A \wedge B$ aus allen Annahmen gemeinsam herleitbar.

$\wedge$-*Beseitigung.* Ist die Formel $A \wedge B$ aus gewissen Annahmen herleitbar, so sind sowohl die Formel A als auch die Formel B aus diesen Annahmen herleitbar.

$\rightarrow$-*Einführung.* Ist die Formel B aus Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ und eventuell der Annahme A herleitbar, so ist die Formel $A \rightarrow B$ aus den Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ allein herleitbar.

$\neg$-*Beseitigung.* Sind sowohl die Formel $A \rightarrow B$ als auch die Formel A jeweils aus gewissen Annahmen herleitbar, so ist die Formel B aus allen Annahmen gemeinsam herleitbar.

$\forall$-*Einführung.* Ist die Formel A aus gewissen Annahmen herleitbar, und kommt in keiner dieser Annahmeformeln die Variable x frei vor, so ist die Formel $\forall xA$ aus diesen Annahmen herleitbar.

$\forall$-*Beseitigung.* Ist die Formel $\forall xA$ aus gewissen Annahmen herleitbar, und ist r ein Term, so ist auch die Formel $A_x[r]$ aus diesen Annahmen herleitbar; $A_x[r]$ bezeichnet das Ergebnis der Substitution des Terms r für alle freien Vorkommen der Variablen x in der Formel A.

Prinzip des indirekten Beweises für Primformeln. Für jede Primformel A gilt die Formel $\neg\neg A \rightarrow A$ als herleitbar.

Man überlegt sich leicht, daß jede mit diesen Regeln herleitbare Formel (ohne Annahmen) auch allgemeingültig ist. Die Umkehrung dieser Aussage, daß nämlich jede allgemeingültige Formel mit den angegebenen Regeln hergeleitet werden kann, ist – was angesichts der Einfachheit der angegebenen Regeln vielleicht überrascht – ebenfalls richtig; dies ist der Inhalt des von K. Gödel in seiner Dissertation 1930 bewiesenen Vollständigkeitssatzes.

Es ist hier nicht der Platz, auf den Beweis des Vollständigkeitssatzes einzugehen. Hervorheben möchte ich jedoch einige zusätzliche Einsichten, die dieser Beweis vermittelt. Zunächst ist die Behauptung „A ist herleitbar" im (klassischen) schwachen Sinn gemeint. D.h. im Beweis wird nicht etwa eine Herleitung konstruiert, sondern es wird aus der Annahme, daß alle Herleitungen eine von A verschiedene Endformel haben, ein Widerspruch abgeleitet. Ferner wird die Voraussetzung „A ist allgemeingültig" nicht in ihrer vollen Stärke benötigt: Es genügt, daß man die Allgemeingültigkeit für nur einen einzigen zugrunde liegenden Objektbereich fordert, nämlich für die (abzählbare) Menge aller Terme der formalen Sprache. Auch die Funktionssymbole sowie die Namen kann man fest (und in auf der Hand liegender Weise) über diesem Termbereich interpretieren. Lediglich die Relationssymbole müssen – in Abhängigkeit von A – geeignet interpretiert werden. Aber auch hier kann man sich auf Interpretationen beschränken, die in der Form

Für alle Terme r gilt: $\varepsilon_1(r,t)$,
und es gibt einen Term s mit $\varepsilon_2(s,t)$

mit entscheidbaren Eigenschaften ε_1, ε_2 von Termen definiert sind. Die etwas uferlos erscheinende Voraussetzung „A ist allgemeingültig" bildet also keinen Grund zur Beunruhigung.

Aufgrund des Gödelschen Vollständigkeitssatzes wissen wir, daß die Menge der allgemeingültigen Formeln mit der Menge der Formeln übereinstimmt, die durch die angegebenen Regeln formal hergeleitet werden können. Durch systematisches Anwenden der Regeln erhält man deshalb ein Verfahren, mit dem alle allgemeingültigen Formeln der Reihe nach aufgezählt werden. Die Frage liegt nahe, ob man sogar ein Entscheidungsverfahren für die Menge aller allgemeingültigen Formeln angeben kann, d.h. ein Verfahren, das für jede vorgelegte Formel der Prädikatenlogik in endlich vielen Schritten entscheidet, ob die Formel allgemeingültig ist oder nicht. Ein Satz von A. Church 1936 sagt aus, daß es ein solches Verfahren nicht geben kann. Daraus kann man folgern, daß eine weitere naheliegende Frage negativ zu beantworten ist, nämlich ob es ein Aufzählungsverfahren auch für die Menge aller nicht allgemeingültigen Formeln gibt. Gäbe es nämlich ein derartiges Aufzählungsverfahren, so hätte man auch ein Entscheidungsverfahren für die Menge aller allgemeingültigen Formeln: Man braucht nur die beiden Aufzählungsverfahren parallel ablaufen zu lassen und nachsehen, in welcher der beiden Aufzählungen die zu untersuchende Formel A vorkommt.

2. Arithmetik

Bisher gingen wir davon aus, daß wir mit unserer formalen Sprache etwas über beliebige Objektbereiche aussagen. Als allgemeingültig sehen wir Formeln an, die für solche beliebigen Objektbereiche und für jede mögliche Interpretation der Symbole der Sprache gültig waren. Wir wollen uns jetzt mit der Frage befassen, wie es mit dem Gültigkeitsbegriff aussieht, wenn wir speziell die Menge der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, . . . als Objektbereich verwenden, und wenn wir ferner gewissen Symbole der Sprache nur im Standardsinn interpretieren, etwa die Symbole 0 (die Zahl 0), N (die Nachfolgefunktion) und $+, \cdot$ (Addition und Multiplikation) sowie $<$ und $=$ (die Kleiner- und die Gleichheitsrelation). Die Herleitungsregeln aus § 1 bleiben sicherlich gültig. Zusätzlich gelten etwa die folgenden Axiome:

- die Gleichheitsaxiome $x=x$, $x=y \rightarrow y=x$ und $x=y \wedge y=z \rightarrow x=z$, sowie Axiome, die die Verträglichkeit der Gleichheitsrelation mit den vorkommenden Funktions- und Relationssymbolen ausdrücken, also etwa
  $x_1=y_1 \wedge x_2=y_2 \rightarrow x_1+x_2=y_1+y_2$
  $x_1=y_1 \wedge x_2=y_2 \wedge x_1<x_2 \rightarrow =y_1<y_2$
- die beiden Peano-Axiome $Nx \neq 0$ und $Nx=Ny \rightarrow x=y$
- die Definitonsgleichungen für $+, \cdot$ und $<$
- die Trichotomie für $<$, also $x<y \vee x=y \vee y<x$.

Bezeichnen wir die hiermit bestimmte Theorie mit Z_1, so stellt sich zunächst die Frage, ob etwa schon alle in der betrachteten Sprache formulierbaren zahlentheoretischen Wahrheiten in Z_1 herleitbar sind. Daß dies nicht der Fall ist, ist der Inhalt des ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes für Z_1. Genauer sagt er aus, daß man eine Formel A ohne freie Variable angeben kann, so daß in Z_1 weder A noch die Negation $\neg A$ herleitbar sind.

Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz verschärft diese Aussage, indem er eine spezielle, besonders interessante Formel $Wf(Z_1)$ ohne freie Variable angibt, die wahr, aber in Z_1 nicht herleitbar ist: $Wf(Z_1)$ drückt aus, daß Z_1 widerspruchsfrei ist, d.h. daß es keine annahmenfreie Herleitung in Z_1 gibt, die mit $\perp$ endet. Um $Wf(Z_1)$ als Formel unserer recht eingeschränkten Sprache aufschreiben zu können, hat man sich zuvor zu überlegen, daß der Begriff einer Herleitung in Z_1, aufgefaßt als eine endliche, baumförmige Figur, in geeigneter Weise in Z_1 repräsentiert werden kann. Als letzte naheliegende Frage über Z_1 betrachten wir noch die nach der Entscheidbarkeit von Z_1 d.h. die Frage, ob man mit einem allgemeinen, im Prinzip mechanisch ausführbaren Verfahren für jede vorgelegte Formel entscheiden kann, ob sie in Z_1 herleitbar ist oder nicht. Die Antwort ist hier wieder negativ: A. Church hat 1936 gezeigt, daß es ein solches Entscheidungsverfahren nicht geben kann.

Man könnte nun einwenden, daß alles dies Aussagen über die doch recht willkürlich festgelegte Theorie Z_1 sind, und sich fragen, ob diese Aussagen denn auch richtig bleiben, wenn man Verschärfungen der Theorie Z_1 betrachtet. Eine naheliegende Verschärfung bestünde etwa drin, das Prinzip der vollständigen Induktion hinzuzunehmen, d.h. für jede Formel A(x) das zusätzliche Axiom $A(0) \wedge \forall y(A(y) \rightarrow A(Ny)) \rightarrow \forall x\, A(x)$ zu den Axiomen von Z_1 hinzuzufügen. Die dann entstehende Theorie Z ist die sogenannte Peano-Arithmetik; man beachte, daß sie durch unendlich viele Axiome bestimmt ist. Es zeigt sich nun, daß alle angeführten Sätze, also die beiden Gödelschen Unvollständigkeitssätze und der Churchsche Unentscheidbarkeitssatz, auch für Z richtig sind. Darüber hinaus gilt, daß sogar *beliebige* Erweiterungen von Z_1, solange sie nur axiomatisierte (d.h. durch ein entscheidbares Axiomensystem gegebene) Theorien sind, unentscheidbar und im Sinne des ersten Gödelschen Satzes unvollständig sind. Sogar der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz läßt sich auf solche beliebigen axiomatisierten Erweiterungen von Z_1 übertragen, sofern sie nur gewissen – in der Praxis meist erfüllten – Ableitbarkeitsbedingungen genügen.

Alle diese Resultate haben einen stark negativen Charakter. Sie zeigen, daß die bis auf Leibniz zurückgehenden Hoffnungen auf eine „ars iudicandi" oder eine „ars inveniendi" jedenfalls für formale Systeme, die das angegebene Minimum an Arithmetik enthalten, nicht erfüllbar sind.

Etwas wird dieses negative Bild durch ein von Turing und Feferman erhaltenes Resultat aufgehellt: Um es zu formulieren, müssen wir noch einmal auf den zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz zurückkommen. Er sagte aus, daß für geeignete formale Theorien T, die mindestens so stark wie Z_1 sind, die Formel Wf(T), welche die Widerspruchsfreiheit von T aussagt, in T unbeweisbar ist. Diese Formel Wf(T) wollen wir leicht verstärken: Sie hat die Gestalt $\forall x(Herl_T(x, \ulcorner \perp \urcorner) \rightarrow \perp)$ und sagt demnach aus, daß, falls man eine beliebige T-Herleitung x des Falsum $\perp$ hätte, das Falsum $\perp$ folgte, d.h. daß dies nicht der Fall sein kann. Die Verstärkung besteht nun darin, daß man anstelle des Falsum $\perp$ beliebige quantorenfreie Formeln A(y) zuläßt. Genauer: Man betrachtet die Formel $\forall x\, \forall y(Herl_t(x, \ulcorner A(\dot{y}) \urcorner) \rightarrow A(y))$ mit quantorenfreiem A(y); sie sagt aus, daß, falls man eine beliebige Herleitung x der Formel hätte, die aus A(y) durch Einsetzen der y-ten Ziffer für die Variable y entsteht, daraus A(y) folgte. Die Gesamtheit dieser Formeln nennt man das uniforme Reflexionsschema für die gegebene Theorie T. Nach dem zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz ist klar, daß das uniforme Reflexionsschema für T nicht in T herleitbar ist, d.h. daß $T_1 := T +$ uniformes Reflexionsschema für T eine echte Erweiterung von T ist. Diesen Übergang von T zu T_1 kann man nun iterieren, d.h. man betrachtet $T_2 := T_1 +$ uniformes Reflexionsschema für T_1, dann T_3, T_4 usw. Auch eine transfinite Fortsetzung dieser Konstruktion ist möglich, indem man etwa eine Erweiterung T_ω aller Theorien T_n dadurch definiert, daß man als Axiome sämtliche Axiome der einzelnen T_n zuläßt. In dieser Weise erhält man für jede konstruktive (d.h. durch eine entscheidbare Wohlordnung gegebene) Ordinalzahl α eine Theorie T_α, und das oben angekündigte Resultat von Turing und Feferman sagt aus, daß bei der Ausgangstheorie $T = Z_1$ in der Gesamtheit aller dieser Theorien T_α genau die arithmetischen Wahrheiten herleitbar sind.

3. Der starke Existenzquantor

Bisher hatten wir Formeln der Gestalt $\exists x A(x)$ (es gibt ein x mit der Eigenschaft A(x)) im klassischen Sinn verstanden, d.h. als Abkürzung für $\neg \forall x \neg A(x)$. In der Mathematik hat man schon immer – explizit oder implizit – neben diesem schwachen Existenzquantor auch einen starken betrachtet, der eine Beispielsangabe für das als existent behauptete x erfordert. Hermann Weyl hatte diese Unterscheidung wie folgt formuliert (Math. Z. 10, 1921): „Ein Existentialsatz – etwa ‚es gibt eine gerade Zahl' – ist überhaupt kein Urteil im eigentlichen Sinne, das einen Sachverhalt behauptet; Existentialsachverhalte sind leere Erfindungen der Logiker. ‚2 ist eine gerade Zahl': das ist ein wirkliches, einem Sachverhalt Ausdruck gebendes Urteil; ‚es gibt eine gerade Zahl' ist nur ein aus diesem Urteil gewonnenens Urteilsabstrakt. Bezeichne ich Erkenntnis als einen wertvollen Schatz, so ist das Urteilsabstrakt ein Papier, welches das Vorhandensein eines Schatzes anzeigt, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. Sein einziger Wert kann darin liegen, daß es mich antreibt, nach dem Schatze zu suchen."

Entsprechend diesem Ansatz erweitern wir nun unseren Formelbegriff, indem wir zusätzlich den starken Existenzquantor $\exists^* x$ bei der Formelbildung zulassen, und betrachten Urteile „$r_1, \ldots, r_n$ *realisieren* A" anstelle von Formeln. Die Anzahl und die Typen der Terme $r_1, \ldots, r_n$ sind dabei durch die Formel A festgelegt; z.B. erfordert die Formel $\exists^* A(x)$ (A(x) quantorenfrei) einen realisierenden Term vom Objekttyp, die Formel $\exists^* x A(x) \rightarrow \exists^* y B(y)$ einen realisierenden Term vom Typ der Funktionen von Objekten in Objekte, und die Formel $(\exists^* x A(x) \rightarrow \exists^* y B(y)) \rightarrow \exists^* z C(z)$ einen realisierenden Term vom Typ eines Funktionals, das Objektfunktionen Objekte zuordnet. Jedes solche Urteil läßt sich nun mittels der von Kreisel 1959 angegebenen sogenannten modifizierten Realisierbarkeitsinterpretation übersetzen in eine Formel der ursprünglichen Sprache ohne den starken Existenzquantor, die man allerdings um Variablen höheren Typs erweitern muß. Zum Beispiel wird r *realisiert* $\exists^* x A(x)$ übersetzt in $A(r)$, r *realisiert* $\exists^* x(Ax) \rightarrow \exists^* y B(y)$ übersetzt in $\forall u(A(u) \rightarrow B(r(w))$ und r *realisiert* $(\exists^* x A(x) \rightarrow \exists^* y B(y)) \rightarrow \exists^* z C(z)$ übersetzt in $\forall v[\forall u(A(u) \rightarrow B(v(w))] \rightarrow C(r(v))$.

Die interdierte Bedeutung der Terme r sind offenbar berechenbare Funktionale. Dementsprechend ist der intendierte Bereich der Variablen höheren Typs der Bereich der approximierbaren Funktionale, die den natürlichen Definitionsbereich der berechenbaren Funktionale bilden. Es ist hier nicht der Platz, auf die zugehörige von Scott und Ersov entwickelte Theorie einzugehen; siehe dazu etwa D. Scott: Domains for Denotational Semantics, Lecture Notes in Computer Science 150, 1982, S 577–613. Nur soviel sei gesagt: Die berechenbaren (bzw. approximierbaren) Funktionale ergeben sich als Ideale (bzw. rekursiv aufzählbare Ideale) von endlichen Approximationen. Deshalb führt die oben beschriebene Übersetzung der Urteile in eine Arithmetik zweiter Stufe, die konservativ ist über der in § 2 erwähnten Peano-Arithmetik, d.h. in der Sprache ohne Variablen höheren Typs nicht mehr Sätze als diese herzuleiten gestattet.

4. Anwendungen

Wir kommen nun auf die zu Beginn gestellte Frage zurück, für welche Zwecke man mathematische Beweise verwenden kann. Betrachten wir zunächst eine Herleitung einer Formel der Gestalt $\forall x \exists y A(x,y)$ mit quantorenfreiem $A(x,y)$ etwa in der Peano-Arithmetik. Dann kann man, wie G. Kreisel 1953 gezeigt hat, aus dieser Herleitung ein Verfahren gewinnen, ein solches y in Abhängigkeit von x zu berechnen, und man erhält ferner gewisse (allerdings recht große) Schranken für die Größe von y sowie für die Komplexität dieses Verfahrens. Die Art und Weise, in der dieses Verfahren oder Programm gewonnen wird, ist universell, hängt also nicht von der speziellen Herleitung ab. Man verwendet dazu die von G. Gentzen eingeführte Technik der sogenannten Normalisierung. Zu beachten ist, daß der Existenzquantor vor dem y schwach ist. In der Herleitung braucht also das y nicht explizit konstruiert zu werden, dennoch enthält sie immer implizit ein Berechnungsverfahren für y. Dies gilt allerdings nur, wenn die Formel $A(x,y)$ in $\forall x \exists y A(x,y)$ quantorenfrei ist.

Ferner ist es möglich, die eben erwähnte Technik der Normalisierung zur Vereinfachung von Programmen einzusetzen. Man geht dabei etwa so vor, daß man zunächst die Terminierung eines vorgegebenen Algorithmus formal beweist; diese Herleitung kann man als Teil einer höheren Programmiersprache auffassen. Spezialisiert man dann diese Herleitung und gewisse Eingabedaten, so liefert die bereits oben beschriebene Umformung der Herleitung durch Normalisierung einen spezielleren, den Eingabedaten angepaßten Algorithmus, in dem sozusagen automatisch gewisse durch Besonderheiten der Eingabedaten bedingte Redundanzen entfernt sind. Genaueres hierüber findet man in der Dissertation von C. Goad (Stanford 1979), oder auch in dem zu Anfang erwähnten Artikel von G. Kreisel.

Schließlich möchte ich noch eine bisher weitgehend ungelöste Frage erwähnen: Was weiß man mehr, wenn man von einem Allsatz $\forall x A(x)$ mit quantorenfreiem $A(x)$ nicht nur weiß, daß er wahr ist, sondern ihn sogar mit eingeschränkten formalen Mitteln bewiesen hat? Es liegt nahe zu vermuten, daß die Einsicht in die Gültigkeit von $\forall x A(x)$ dann in besonders „uniformer" Weise gewonnen werden kann. Eine angemessene Formulierung dieses Uniformitätsbegriffs steht aber noch aus; eventuell eignet sich dafür der von J.-Y. Girard kürzlich eingeführte Begriff des Dilators.

Professor Dr.rer.nat. Helmut Schwichtenberg, geboren 1942. Studium der Mathematik an der FU Berlin und der Universität Münster; dort 1978 Promotion, 1974 Habilitation. 1974 bis 1978 wissenschaftlicher Rat und Professor an der Universität Heidelberg, ab 1978 Inhaber des Lehrstuhls für mathematische Logik an der Universität München.

Numerische Aerodynamik

Numerische Methoden werden mit Hilfe von Großrechenanlagen zunehmend für die Entwicklung neuer Technologien der Luft- und Raumfahrt genutzt. Dabei geht es vor allem um eine Verminderung des Luftwiderstands und damit um eine Verringerung ihres Treibstoffverbrauchs. Nur durch eine verstärkten Einsatz numerischer Entwurfs- und Nachrechenverfahren sind wirtschaftliche Entwürfe kurzfristig verfügbar. Die Grundbeziehungen der Strömungsmechanik sind zwar seit langem als Integral- oder partielle Differentialgleichungen bekannt, konnten jedoch zunächst nur unter physikalisch vereinfachenden Annahmen gelöst werden. In der numerischen Strömungsmechanik sind Physik und Numerik von vergleichbarer Bedeutung. Die Physik formuliert treffende Anfangs- und Randbedingungen. Die Numerik umfaßt alle mit der Integration der Gleichungen zusammenhängenden Aufgaben.