V E K T O R A N A L Y S I S

Vorlesung

von

Prof. Dr. D. Puppe

im

Wintersemester 1964/65

Ausarbeitung :

Rudolf Fritsch

Als Manuskript vervielfältigt im Mathematischen

Institut der Universität des Saarlandes

1966

Vorwort

Dieses Manuskript stützt sich hauptsächlich auf eine zweistündige Vorlesung über "Vektoranalysis", die ich im Wintersemester 1964/65 an der Universität des Saarlandes gehalten habe. Die Grundlagen der Lebesgueschen Integrationstheorie (§§ 1-3) wurden allerdings in der Vorlesung nicht vorgetragen. Sie konnten vorausgesetzt werden, da ich sie zwei Semester vorher in der Vorlesung "Analysis II" gebracht hatte. Auch einige andere Dinge konnten aus Zeitgründen nicht so ausführlich behandelt werden, wie sie jetzt in der Ausarbeitung zu finden sind.

Beim Aufbau der Lebesgueschen Integrationstheorie habe ich mich an eine Vorlesung angelehnt, die M. Kneser im Sommersemester 1960 an der Universität München gehalten hat. Im Zusammenhang mit dem Minkowskischen Maß (§ 6) habe ich ein Manuskript von H. König benutzt. Unter Verwendung von Ideen aus dem Buch "Geometric Integration Theory" von H. Whitney habe ich versucht, eine geometrische Motivierung für die Einführung von alternierenden Differentialformen und ihre Integration zu geben (§ 8). Nur für diesen Zweck wird in § 7 ein kurzer Abriß über den Satz von Radon-Nikodym gegeben. In der Vorlesung hat ihn Herr Dr. H.-B. Brinkmann vorgetragen. Für die Theorie der Differentialformen und den Satz von Stokes habe ich einiges aus der Vorlesungsausarbeitung "Vektoranalysis" von Dombrowski-Hirzebruch (Bonn 1962) übernommen.

Die vorliegende Ausarbeitung stammt von Herrn R. Fritsch. Wie oben bereits erwähnt, hat er viele Ergänzungen zu dem von mir vorgetragenen Stoff eingefügt. Die Herren cand. math. M. Blachetta und cand. math. H. Eichhorn haben je die Hälfte des Manuskripts nochmals genau durchgesehen sowie das Stichwortverzeichnis angelegt. Für die Vervielfältigung geschrieben wurde das Manuskript von Fräulein Kurtzemann und Frau Jochem.

Ihnen allen danke ich für die geleistete Arbeit.

Saarbrücken, im Juni 1966

D. Puppe

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die klassische Vektoranalysis befaßte sich mit den Beweisen der Integralsätze von Gauß:

$$\iint\limits_{\partial B} (\mathfrak{G}(\mathfrak{r}), \mathfrak{n}(\mathfrak{r}))\, d = \iiint\limits_{B} \operatorname{div} \mathfrak{G}\,(\mathfrak{r})\, dv$$

und Stokes:

$$\int\limits_{\partial F} (\mathfrak{G}(\mathfrak{r}), \mathfrak{t})\, ds = \iint\limits_{F} (\operatorname{rot} \mathfrak{G}(\mathfrak{r}), \mathfrak{n}(\mathfrak{r}))\, dv,$$

sowie der Greeneschen Formeln. Man findet das in den bekannten Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Nun hat sich herausgestellt, daß diese Sätze und Formeln Spezialfälle des „allgemeinen Stokesschen Satzes" sind, der das Hauptziel dieser Vorlesung bildet.

Jedoch hat sich der Stoff, der heute unter dem Begriff „Vektoranalysis" verstanden wird, über das urspüngliche Gebiet erweitert. Diese Vorlesung umfaßt dazu auch die Integralrechnung mehrerer Variabler, die im I. Kapitel (§§ 1-4) dargestellt ist, ferner die Einführung der differenzierbaren Untermannigfaltigkeiten in $\underline{\underline{R}}^n$ (s. § 5) und die Definition eines niederdimensionalen Maßes; unter den vielen bekannten Möglichkeiten hierfür konnte jedoch nur eine herausgegriffen werden: das Minkowskische Maß, das in § 6 behandelt wird.

Ein zentraler Begriff der modernen Beweise des allgemeinen Stokesschen Satzes ist die „äußere (alternierende) Differentialform" von E. Cartan. In den §§ 7, 8 wird versucht, eine anschauliche Motivation für diesen Begriff zu geben, die §§ 9 - 12 enthalten eine zusammengefaßte Theorie.

In § 13 wird dann schließlich der allgemeine Stokessche Satz formuliert und bewiesen. Genauere Angaben über den Inhalt dieser Ausarbeitung sind dem Inhaltsverzeichnis zu entnehmen.

Literatur:

Im Text werden folgende Lehrbücher zitiert:

[B] R.C. Buck: „Advanced Calculus". McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London 1956.

[F] H. Flanders: „Differential Forms with Applications to the Physical Sciences". Academic Press, New York and London, 1963.

[H] P.R. Halmos: „Measure Theory". D. van Nostrand Company, Inc., Toronto-New York-London 1950.

[HY] J.G. Hocking - G.S. Young: „Topology". Addison Wesley Publishing Company, Inc., Reading (Massachusetts)-London 1961.

[S] S. Sternberg: „Lectures on Differential Geometry". Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1964.

Außerdem wird einigemale auf die Vorlesungsausarbeitung verwiesen:

[DH] P. Dombrowski - F. Hirzebruch: „Vektoranalysis", als Manuskript vervielfältigt vom Mathematischen Institut der Universität Bonn 1962.

Zeitschriftenstellen sind im Text aufgeführt. Es sei nur noch ergänzt, daß sich ein ausführliches Literaturverzeichnis zum „Minkowski-Maß" (§ 6) bei M. Kneser: „Einige Bemerkungen über das Minkowskische Flächenmaß" im Archiv der Mathematik, Band 6 (1955), S. 382 - 390, findet.

I. Kapitel: Die Integralrechnung mehrerer Variabler.

Die ersten drei Paragraphen dieses Kapitels entsprechen im Aufbau und vielen Einzelheiten einer Vorlesung, die Professor Dr. M. Kneser im SS 1960 an der Universität München gehalten hat.

§ 1 Definition des Lebesgueschen Integrals.

1.1 Treppenfunktionen.

1.1.1 Definition: Ein offener Quader im $\mathbb{R}^n$ ist eine Punktmenge der Form

$$Q = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid a_i < x_i < b_i \text{ für alle } i = 1,\ldots,n\},$$

wobei $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ feste Zahlen sind und $a_i < b_i$ für alle i.

Die Menge

$$\overline{Q} = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für alle } i = 1,\ldots,n\}$$

heißt abgeschlossener Quader.

1.1.2 Definition: Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt Treppenfunktion, wenn gilt:

(a) Es gibt einen (offenen) Quader Q, so daß $\varphi(x) = 0$ für alle $x \notin Q$.

(b) Q läßt sich durch endlich viele Hyperebenen, definiert durch eine Gleichung der Form $x_i = \text{const.}$, so in Teilquader zerlegen, daß φ im Innern jedes Teilquaders konstant ist.

(c) φ ist beschränkt.

1.1.3 Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$; $\varphi_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\varphi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$$

heißt charakteristische Funktion von M.

1.1.4 Satz: (a) Jede Treppenfunktion läßt sich in folgender Form darstellen:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{l} a_k \varphi_{Q_k} + \sum_{s=1}^{t} \psi_s .$$

Dabei sind die φ_{Q_k} $(k = 1,\dots,l)$ charakteristische Funktionen von offenen (!) Quadern Q_k mit $Q_j \cap Q_k = \emptyset$ für $j \neq k$, die a_k $(k = 1,\dots,l)$ sind komplexe Konstanten, und jedes ψ_s ist eine spezielle Treppenfunktion $\underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$, nämlich eine solche, die höchstens auf der Hyperebene $\{x | x_{i_s} = r_s\}$ für festes $i_s \in \{1,\dots,n\}$ und $r_s \in \underline{\underline{R}}$ von Null verschiedene Werte hat. Liegen alle Funktionswerte von φ in $[0,\infty[$, so kann man erreichen, daß das gleiche für alle ψ_r gilt und daß auch $a_k \in [0,\infty[$ für alle k.

(b) Sind $\varphi, \psi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ Treppenfunktionen und ist $c \in \underline{\underline{C}}$, so sind auch $\varphi + \psi$, $\varphi \cdot \psi$, $c\varphi$ und $|\varphi|$ Treppenfunktionen.

1.2 Das Elementarintegral für Treppenfunktionen.

1.2.1 Definition: Ist

$$Q = \{(x_1,\dots,x_n) | \; a_i < x_i < b_i \text{ für } i = 1,\dots,n\},$$

so heißt

$$|Q|_{Df} = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Inhalt von Q.

1.2.2 Hilfssatz: Sei $\varphi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ eine Treppenfunktion und

$$(*) \qquad \varphi = \sum_{k=1}^{l} a_k \varphi_{Q_k} + \sum_{s=1}^{t} \psi_s$$

eine Darstellung von φ gemäß 1.1.4. Die Zahl

$$S(\varphi) = \sum_{k=1}^{l} a_k \cdot |Q_k|$$

hängt nicht von der Wahl der Darstellung (*) ab.

Definition: $S(\varphi)$ heißt Elementarintegral von φ.

Beweis des Hilfssatzes: Sei

$$\varphi = \sum_{j=1}^{l'} a_j' \varphi_{Q_j'} + \sum_{s=1}^{t'} \psi_s'$$

eine zweite Darstellung von φ gemäß 1.1.4 (a).

Dann ist zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^{l} a_k |Q_k| = \sum_{j=1}^{l'} a_j' |Q_j'|$$

O.B.d.A gilt $a_k \neq 0$ $(k = 1,\dots, l)$ und $a_j' \neq 0$ $(j = 1,\dots,l')$. Beachtet man, daß für die leere Menge gilt: $|\emptyset| = 0$, so erhält man zunächst:

$$|Q_k| = \sum_{j=1}^{l'} |Q_k \cap Q_j'| \quad \text{und}$$

$$|Q_j'| = \sum_{k=1}^{l} |Q_k \cap Q_j'|.$$

Sei nun a_{k_j} der Funktionswert von φ auf $Q_k \cap Q_j'$, also $a_k = a_{k_j} = a_j'$, falls $Q_k \cap Q_j' \neq \emptyset$; sonst $a_{k_j} = 0$.

Dann folgt:

$$\sum_{k=1}^{l} a_k|Q_k| = \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{l'} a_{k_j}|Q_k \cap Q_j'| = \sum_{j=1}^{l'}\sum_{k=1}^{l} a_{k_j}|Q_k \cap Q_j'| =$$

$$= \sum_{j=1}^{l'} a_j' \sum_{k=1}^{l} |Q_k \cap Q_j'| = \sum_{j=1}^{l'} a_j|Q_j'|.$$

1.2.3 Satz: Für Treppenfunktionen $\varphi, \psi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ und $a \in \underline{\underline{C}}$ gilt:

$$S(\varphi + \psi) = S(\varphi) + S(\psi)$$

$$S(a\varphi) = a(S\varphi).$$

Beweis: Wir können für φ und ψ Darstellungen gemäß 1.1.4 (a) wählen, so daß gilt:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{l} a_k \varphi_{Q_k} + \dots$$

und

$$\psi = \sum_{k=1}^{l} b_k \varphi_{Q_k} + \dots$$

Daraus erhalten wir:

$$\varphi + \psi = \sum_{k=1}^{l} (a_k + b_k) \varphi_{Q_k} + \dots$$

und

$$S(\varphi+\psi) = \sum_{k=1}^{l} (a_k+b_k)|Q_k| = \sum_{k=1}^{l} a_k|Q_k| + \sum_{k=1}^{l} b_k|Q_k| = S(\varphi) + S(\psi).$$

Der andere Fall ist trivial.

1.2.4 Zusatz: Für alle Treppenfunktionen $\varphi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ gilt:

$$|S(\varphi)| \leq S(|\varphi|).$$

Beweis: Sei

$$\varphi = \sum_{k=1}^{l} a_k \varphi_{Q_k} + \dots$$

eine Darstellung von φ gemäß 1.1.4. Dann folgt:

$$|S(\varphi)| = |\sum_{k=1}^{l} a_k |Q_k|| \leq \sum_{k=1}^{l} |a_k| \cdot |Q_k| = S(|\varphi|)$$

wegen

$$|\varphi| = \sum_{k=1}^{l} |a_k| \varphi_{Q_k} + \ldots$$

Folgerung: Seien φ und ψ Treppenfunktionen mit reellen Werten und $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in \underline{\underline{R}}^n$, so ist $S(\varphi) \leq S(\psi)$.

Beweis: $S(\psi) - S(\varphi) = S(\psi - \varphi) = S(|\psi - \varphi|) \geq |S(\psi - \varphi)| \geq 0.$

1.3 Die L_1-Norm.

Wir betrachten endliche oder unendliche Folgen von offenen Quadern Q_k und von Zahlen $a_k \in [0,\infty[$ ($k = 1,\ldots,l$ oder k durchläuft alle natürlichen Zahlen).

1.3.1 Definition: Für $f : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ heißt

$$\|f\|_1 \;{}_{Df}\!= \operatorname{Inf}\{\sum_k a_k |Q_k| \mid |f| \leq \sum_k a_k \varphi_{Q_k}\}$$

L_1-Norm von f. (Zu jedem Paar von Folgen Q_k, a_k mit $|f| \leq \sum_k a_k \varphi_{Q_k}$ wird der Wert $\sum_k a_k |Q_k|$ und von allen diesen Werten die untere Grenze gebildet. Einer divergenten Reihe mit nicht-negativen reellen Gliedern wird dabei der Wert ∞ zugesprochen. Für jedes $a \in \underline{\underline{R}}$ und für $a = \infty$ wird $a \leq \infty$ verabredet).

Für jedes f gibt es Folgen Q_k, a_k mit $|f| \leq \sum_k a_k \varphi_{Q_k}$; man nehme z.B. irgendeine Folge von Quadern $Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots$ mit $\bigcup_k Q_k = \underline{\underline{R}}^n$ und setze $a_k = 1$ für alle k. Es kann aber sein, daß immer $\sum_k a_k |Q_k| = \infty$ ist. Dann ist $\|f\|_1 = \infty$.

Für Funktionen $f : \underline{\underline{R}}^n \to [0,\infty[$ bezeichnet man die L_1-Norm $\|f\|_1$ auch als „oberes Lebesguesches Integral". Falls keine Verwechslung mit anderen Normen zu befürchten ist, schreiben wir auch $\| \ \|$ für $\| \ \|_1$.

1.3.2 Satz: Für alle $f, g : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ gilt:

(a) $\|f\| = \| \, |f| \, \| \geq 0$

(b) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (Dreiecksungleichung)

(c) $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$ für alle $c \in \underline{\underline{C}}$

(d) $|f| \leq |g| \Rightarrow \|f\| \leq \|g\|$.

Dabei wird vereinbart:

$a + \infty = \infty + a = \infty + \infty = \infty$ für alle $a \in \underline{\underline{R}}$

$a \cdot \infty = \infty$ für alle $a \in]0,\infty[$

$0 \cdot \infty = 0.$

Die Eigenschaften (1) - (3) besagen, daß $\| \ \|$ eine Semi-Norm auf dem Vektorraum aller Funktionen $\underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ ist. Trotz der Bezeichnung „L_1-Norm" handelt es sich nicht um eine Norm im strengen Sinne, bei der außerdem

$$\|f\| < \infty$$

und

$$\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$$

gelten müßte.

Beweis: (a) trivial.

(b) Sei $|f| \leq \sum_k a_k \varphi_{Q_k}$ und $|g| \leq \sum_k a'_k \varphi_{Q'_k}$ gemäß der Definition der L_1-Norm. Dann ist

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \sum_k \left(a_k \varphi_{Q_k} + a'_k \varphi_{Q'_k}\right).$$

Die rechte Seite kann zu einer einzigen Reihe zusammengefaßt werden, in der alle Glieder $a_k \varphi_{Q_k}$ und $a'_k \varphi'_{Q_k}$ vorkommen; auf die Reihenfolge kommt es dabei nicht an. Es folgt:

$$\|f + g\| \leq \sum_k a_k |Q_k| + \sum_k a'_k |Q'_k|$$

und daraus die Behauptung, indem man von den beiden Summanden auf der rechten Seite die untere Grenze bildet.

(c) Aus $|f| \leq \sum_k a_k \varphi_{Q_k}$ folgt $|c|\ |f| \leq \sum |c| a_k \varphi_{Q_k}$

und daraus

$$\|cf\| \leq \sum_k |c| a_k |Q_k| = |c| \sum_k a_k |Q_k|,$$

also $\|cf\| \leq |c|\ \|f\|$, indem man rechts die untere Grenze bildet. Für $|c| = 0$ ist daher und nach (a) $\|cf\| = 0$, für $|c| > 0$ ergibt sich:

$$|c| \|f\| = |c| \cdot \|\tfrac{c}{c} f\| \leq |c| \cdot |\tfrac{1}{c}| \cdot \|cf\| = \|cf\|.$$

(d) Aus $|g| \leq \sum_k a_k \varphi_{Q_k}$ folgt $|f| \leq \sum a_k \varphi_{Q_k}$.

$\|f\|$ ist also untere Grenze einer größeren Menge als $\|g\|$.

1.4 Die L_1-Norm einer Treppenfunktion.

1.4.1 Satz: Für jede Treppenfunktion $\varphi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{C}$ gilt

$$\|\varphi\| = S(|\varphi|).$$

Zum Beweis dieses fundamentalen Satzes benötigen wir die beiden folgenden Hilfssätze, die in 1.4.2 und 1.4.3 bewiesen werden:

Hilfssatz (a): Für jede charakteristische Funktion φ_Q eines offenen Quaders $Q \subset \underline{\underline{R}}^n$ gilt: $\|\varphi_Q\| = |Q|$ $(_{Df}= S(\varphi_Q))$.

Hilfssatz (b): Sei $r \in \underline{\underline{R}}$ und $i \in \{1,\ldots,n\}$. Dann gilt für jede Funktion $\psi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$, die höchstens auf der Hyperebene $\{x |\ x_i = r\}$ von 0 verschiedene Werte hat:

$$\|\psi\| = 0.$$

Beweis des Satzes: Sei $\varphi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ eine Treppenfunktion; wir haben gemäß 1.1.4 (a) eine Darstellung:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{l} a_k \varphi_{Q_k} + \sum_{s=1}^{t} \psi_s ,$$

so daß gilt: Zu jedem $s \in (1,\ldots,t)$ existiert ein Paar r_s, i_s $(r_s \in \underline{\underline{R}}, i_s \in \{1,\ldots,n\})$ mit:

$$\psi_s(x) \neq 0 \text{ höchstens für } x \in \{x |\ x_{i_s} = r_s\}.$$

Nach 1.3.2 folgt:

$$\|\varphi\| \leq \sum_{k=1}^{l} |a_k| \cdot \|\varphi_{Q_k}\| + \sum_{s=1}^{t} \|\psi_s\|.$$

Wegen der Hilssätze (a) und (b) ist der Ausdruck auf der rechten Seite gleich

$$\sum_{k=1}^{l} |a_k| \cdot |Q_k| = S(|\varphi|).$$

Letzteres nach 1.2.2; denn für die Treppenfunktion $|\varphi|$ gilt:

$$|\varphi| = \sum_{k=1}^{l} |a_k| \varphi_{Q_k} + \sum_{s=1}^{t} |\psi_s|.$$

Wir haben also erhalten:

$$\|\varphi\| \leq S(|\varphi|).$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung betrachten wir den nach 1.1.2 (a) existierenden Quader $Q \subset \underline{\underline{R}}^n$, für den gilt:

$$y \in \underline{\underline{R}}^n - Q \Rightarrow \varphi(x) = |\varphi|(x) = 0$$

und eine nach 1.1.2 (c) existierende Konstante $a \in [0,\infty[$ mit: $|\varphi|(x) \leq a$ für alle $x \in \underline{\underline{R}}^n$.

Dann ist auch

$$\psi_{Df} = a\,\varphi_Q - |\varphi| \quad (= |\psi|)$$

eine Treppenfunktion, und es folgt:

$$\begin{aligned} a|Q| &= \|a\varphi_Q\| && \text{nach 1.3.2 (c) und Hilfssatz (a)} \\ &\leq \|\psi\| + \|\varphi\| && \text{nach 1.3.2 (a)} \\ &\leq S(\psi) + S(|\varphi|) && \text{wie im ersten Teil gezeigt} \\ &= S(a\varphi_Q) && \text{nach 1.2.3} \\ &= a|Q| && \text{nach 1.2.2.} \end{aligned}$$

Es muß also überall das Gleichheitszeichen stehen, und wir erhalten insbesondere

$$\|\psi\| + \|\varphi\| = S(\psi) + S(|\varphi|).$$

Da im ersten Teil $\|\psi\| \leq S(\psi)$ gezeigt wurde, folgt nun

$$\|\varphi\| \geq S(|\varphi|).$$

1.4.2 Beweis des Hilfssatzes (a).

Trivial folgt aus der Definition 1.3.1

$$\|\varphi_Q\| \leq |Q|.$$

Zu zeigen ist noch:

$$\varphi_Q \leq \sum_k a_k\,\varphi_{Q_k} \quad \Rightarrow \quad |Q| \leq \sum_k a_k |Q_k|.$$

1. Fall: Die Summation erstreckt sich über endlich viele k ($= 1,\dots,l$). Dann gilt:

$$|Q| = S(\varphi_Q) \leq S\Big(\sum_{k=1}^{l} a_k \varphi_{Q_k}\Big) \qquad \text{nach 1.2.4 Folg.}$$

$$= \sum_{k=1}^{l} a_k\, S(\varphi_{Q_k}) \qquad \text{nach 1.2.3}$$

$$= \sum_{k=1}^{l} a_k |Q_k| \qquad \text{nach 1.2.2.}$$

2. Fall: Die Summation erstreckt sich über alle natürlichen Zahlen $k = 1,2,\dots$

Zu $Q = \{x \mid a_i < x_i < b_i \text{ für } i = 1,\dots,n\}$ und $0 < \varepsilon < 1$ bilden wir den Quader:

$$Q_\varepsilon \;{}_{Df}\!= \{x \mid a_i + \tfrac{\varepsilon}{2}(b_i - a_i) < x_i < b_i - \tfrac{\varepsilon}{2}(b_i - a_i) \quad \text{für } i = 1,\dots,n\}$$

Dann ist $Q_\varepsilon \subset \bar{Q}_\varepsilon \subset Q$, $\bar{Q}_\varepsilon$ kompakt und

$$|Q_\varepsilon| = \prod_{i=1}^{n} (1 - \varepsilon)(b_i - a_i) = (1 - \varepsilon)^n |Q|.$$

Für jedes $x \in \bar{Q}_\varepsilon$ gilt:

$$1 = \varphi_Q(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_{Q_k}(x).$$

Daher gibt es eine (von x abhängige) natürliche Zahl l_x mit:

$$1 - \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{l_x} a_k \varphi_{Q_k}(x).$$

Rechts steht die Summe aller a_k, für die $k \leq l_x$ und $x \in Q_k$.

Wir definieren:

$$W_x \;{}_{Df}\!= \bigcap_{\substack{k \le l_x \\ x \in Q_k}} Q_k \quad .$$

Wegen $x \in W_x$ ist $W_x \neq \emptyset$, außerdem ist W_x als Durchschnitt endlich vieler offener Mengen selbst offen.

$\{W_x \mid x \in \bar{Q}_\epsilon\}$ ist eine offene Überdeckung von $\bar{Q}_\epsilon$. Da $\bar{Q}_\epsilon$ kompakt ist, genügen endlich viele $x_1, \ldots, x_m$ dazu, daß $\{W_{x_j} \mid j = 1, \ldots, m\}$ eine offene Überdeckung von $\bar{Q}_\epsilon$ ist (nach dem Überdeckungssatz von Heine-Borel). Sei $l \;{}_{Df}\!= \mathrm{Max}(l_{x_1}, \ldots, l_{x_m})$ und $y \in Q_\epsilon$. Dann gibt es ein j, so daß $y \in W_{x_j}$, und es folgt

$$1 - \epsilon \le \sum_{k=1}^{l_{x_j}} a_k \varphi_{Q_k}(x_j) \le \sum_{k=1}^{l_{x_j}} a_k \varphi_{Q_k}(y) \le \sum_{k=1}^{l} a_k \varphi_{Q_k}(y)$$

also

$$\varphi_{Q_\epsilon} \le \sum_{k=1}^{l} \frac{a_k}{1-\epsilon} \varphi_{Q_k} .$$

Im Fall 1 wurde gezeigt, daß hieraus folgt:

$$|Q_\epsilon| \le \sum_{k=1}^{l} \frac{a_k}{1-\epsilon} |Q_k| ,$$

und wir erhalten:

$$|Q| = \frac{|Q_\epsilon|}{(1-\epsilon)^n} \le \frac{1}{(1-\epsilon)^{n+1}} \sum_{k=1}^{l} a_k |Q_k| \le \frac{1}{(1-\epsilon)^{n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k |Q_k| .$$

Weil ϵ eine beliebig kleine positive Zahl sein darf, folgt die Behauptung.

1.4.3 Beweis des Hilfssatzes (b).

Sei $\epsilon > 0$ und $Q_k \subset \underline{\underline{R}}^n$ die Menge aller $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit:

$$|x_j| < \frac{k}{2} \quad \text{für } j \in \{1, \ldots, n\} \text{ und } j \neq i$$

$$|x_i - r| < \frac{\epsilon}{k^{n-1} 2^{k+1}}$$

$(k = 1, 2, \ldots)$. Q_k ist ein offener Quader mit:

$$|Q_k| = \frac{\epsilon}{2^k} \,.$$

Andererseits ist $|\psi| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{Q_k}$, also

$$\|\psi\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon .$$

Da das für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung.

1.4.4 Satz: Für jede Treppenfunktion $\varphi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ gilt:

$$|S(\varphi)| \leq \|\varphi\| .$$

Beweis: $|S(\varphi)| \leq S(|\varphi|)$ nach 1.2.4
$= \|\varphi\|$ nach 1.4.1.

1.5 Definition des Lebesgueschen Integrals.

1.5.1 Definition: Eine Funktion $f : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ heißt integrierbar (im Sinne von Lebesgue), wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\varphi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ gibt, so daß $\|\varphi - f\| < \epsilon$.

Gleichwertig damit ist die Existenz einer Folge von Treppenfunktionen φ_j $(j = 1, 2, \ldots)$ mit $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - f\| = 0$.

1.5.2 Satz: Sei $f : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ eine beliebige Funktion, $\varphi_j : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ $(j = 1,2,\ldots)$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{j\to\infty} \|\varphi_j - f\| = 0$. Dann konvergiert die Folge $S(\varphi_j)$ $(j = 1,2,\ldots)$ gegen einen endlichen Wert in $\underline{\underline{C}}$.

Beweis: Zu einem $\varepsilon > 0$ gibt es ein j_o, so daß $\|\varphi_j - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $j \geq j_o$. Folglich ist

$$
\begin{aligned}
|S(\varphi_j) - S(\varphi_k)| &= |S(\varphi_j - \varphi_k)| && \text{nach } 1.2.3 \\
&\leq \|\varphi_j - \varphi_k\| && \text{nach } 1.4.4 \\
&\leq \|\varphi_j - f\| + \|f - \varphi_k\| && \text{nach } 1.3.2\text{ b} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon && \text{für alle } j,k > j_o.
\end{aligned}
$$

Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium folgt die Behauptung.

Folgerung: $\lim\limits_{j\to\infty} S(\varphi_j)$ ist durch f eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $\bar{\varphi}_j : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ $(j = 1,2,\ldots)$ eine weitere Folge von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{j\to\infty} \|\bar{\varphi}_j - f\| = 0$. (Der Querstrich "$\bar{\ }$" bei "$\bar{\varphi}_j$" bedeutet hier natürlich nicht „konjugiert komplex"!) Dazu betrachten wir die Folge

$$
\psi_k = \begin{cases} \varphi_j, & k = 2j - 1 \\ \bar{\varphi}_j, & k = 2j \end{cases} \qquad (k = 1,2,\ldots)
$$

Es gilt auch: $\lim\limits_{j\to\infty} \|\psi_k - f\| = 0$, und nach dem Satz konvergiert $(S(\psi_k))$ gegen einen endlichen Wert. Dann konvergieren auch die Teilfolgen $(S(\varphi_j))$ und $(S(\bar{\varphi}_j))$ gegen den gleichen Wert.

1.5.3 Definition: Ist f integrierbar und erfüllt φ_j $(j = 1,2\ldots)$ die Voraussetzungen des Satzes 1.5.2, so heißt

$$
L(f) \underset{Df}{=} \lim_{j\to\infty} S(\varphi_j)
$$

(Lebesguesches) Integral von f.

1,5,4 Bemerkung: Eine Treppenfunktion $\varphi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ ist natürlich integrierbar, und es gilt:

$$L(\varphi) = S(\varphi).$$

1,5,5 Definition: Sei $A \subset B \subset \underline{\underline{R}}^n$ und $f : B \to \underline{\underline{C}}$. Wir betrachten $f_A : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$, definiert durch

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

f heißt integrierbar über A, wenn f_A integrierbar ist (im Sinne von 1.5.1), und man definiert das Integral von f über A durch

$$\int_A f \; Df = L(f_A).$$

§ 2 Eigenschaften des Integrals.

Zur Abkürzung der Schreibweise wird vereinbart: Die Formulierung: „Die Funktionen f, g seien über $A \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar" schließt ein, daß A in den Definitionsbereichen der (komplexwertigen) Funktionen f und g enthalten ist; diese können aber größer als A und überdies voneinander verschieden sein. Als Definitionsbereich von f + g bzw. f · g ist der Durchschnitt der Definitionsbereiche von f und g zu betrachten.

2.1 Das Integral ist ein lineares Funktional und additiv in Bezug auf den Integrationsbereich. Im einzelnen bedeutet das:

2.1.1 Satz: Die Funktionen f, g seien über $A \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar. Dann gilt:

(a) f + g ist über A integrierbar und

$$\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g .$$

(b) Für jedes $c \in \mathbb{C}$ ist cf über A integrierbar und

$$\int_A (cf) = c\int_A f$$

Beweis: O.B.d.A. Sei $A = \mathbb{R}^n$.

(a) Seien (φ_j), (ψ_j) Folgen von Treppenfunktionen mit:

$\lim\limits_{j\to\infty} \|\varphi_j - f\| = 0$ bzw. $\lim\limits_{j\to\infty} \|\psi_j - g\| = 0$.

Aus $\|\varphi_j + \psi_j - (f + g)\| \leq \|\varphi_j - f\| + \|\psi_j - g\|$ (nach 1.3.2)

folgt $\lim\limits_{j\to\infty} \|(\varphi_j + \psi_j) - (f + g)\| = 0$ und

$$L(f + g) = \lim_{j\to\infty} S(\varphi_j + \psi_j) \quad \text{(nach 1.5.3)}$$

$$= \lim_{j\to\infty} [S(\varphi_j) + S(\psi_j)] \quad \text{nach 1.2.3}$$

$$= \lim_{j\to\infty} S(\varphi_j) + \lim_{j\to\infty} S(\psi_j) = L(f) + L(g) \text{ nach } 1.5.3$$

(b) Analog.

2.1.2 Folgerung: Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $A \cap B = \emptyset$. Ist f über A und über B integrierbar, so auch über $A \cup B$, und es gilt:

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

Beweis: $f_{A\cup B} = f_A + f_B$ (s. 1.5.5)

2.2 Ordnungssätze.

2.2.1 Satz: Ist f über A integrierbar, so auch $|f|$, und es gilt:

$$\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$$

Beweis: O.B.d.A sei $A = \mathbb{R}^n$.
Sei (φ_j) eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - f\| = 0$.
Wegen $|\varphi_j| - |f| \leq |\varphi_j - f|$ (Dreiecksungleichung) gilt nach 1.3.2

$$\| |\varphi_j| - |f| \| \leq \| |\varphi_j - f| \| = \|\varphi_j - f\|,$$

also $\lim_{j\to\infty} \| |\varphi_j| - |f| \| = 0$ und

$$\begin{aligned} L(|f|) &= \lim_{j\to\infty} S(|\varphi_j|) && \text{nach } 1.5.3 \\ &\geq \lim_{j\to\infty} |S(\varphi_j)| && \text{nach } 1.2.4 \\ &= |L(f)| && \text{nach } 1.5.3. \end{aligned}$$

2.2.2 Folgerungen: (a) Sind f, g über A integrierbare reellwertige Funktionen mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in A$, so ist

$$\int_A f \leq \int_A g$$

(Monotonie).

(b) Sind f, g über A integrierbare reellwertige Funktionen und definiert man die Funktionen Min(f,g) und Max (f,g) durch

$$\mathrm{Min}(f,g)(x) \underset{Df}{=} \mathrm{Min}(f(x), g(x))$$
$$\mathrm{Max}(f,g)(x) \underset{Df}{=} \mathrm{Max}(f(x), g(x))$$

für jedes x, für das die rechten Seiten erklärt sind, so sind auch Min(f,g) und Max(f,g) über A integrierbar.

(c) Ist f über A und B integrierbar, so ist f auch über $A \cup B$ und $A \cap B$ integrierbar; dabei gilt:

$$\int_A f + \int_B f = \int_{A\cup B} f + \int_{A\cap B} f$$

Beweis: (1) $\int_A g - \int_A f = \int_A (g-f) = \int_A |g - f| \geq |\int_A (g-f)| \geq 0$

(2) $\mathrm{Min}(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$

$\mathrm{Max}(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$.

(c) $f_{A\cup B} = \mathrm{Max}(f_A, f_B)$

$f_{A\cap B} = \mathrm{Min}(f_A, f_B)$.

Daraus folt nach (2) die Integrierbarkeit von f über $A \cup B$ und $A \cap B$. Die Gleichung folgt aus 2.1.1 wegen

$$f_A + f_B = f_{A\cup B} + f_{A\cap B}$$

2.3 Existenz des Integrals von Produkten

Satz: Sind f, g über A integrierbare Funktionen und ist g beschränkt in A (d.h. $|g(x)| \leq c$ für alle $x \in A$ und ein geeignetes $c \in]0,\infty[$), so ist auch $f \cdot g$ über A integrierbar.

Beweis: O.B.d.A sei $A = \underline{\underline{R}}^n$. Zu $\epsilon > 0$ gibt es eine Treppenfunktion $\varphi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ mit $\|\varphi - f\| < \frac{\epsilon}{2c}$. φ ist nach 1.1.2 beschränkt, also gibt es ein $d \in]0,\infty[$, so daß $|\varphi|(x) \le d$ für alle $x \in \underline{\underline{R}}^n$ ist. Weiterhin gibt es eine Treppenfunktion $\psi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ mit $\|\psi - g\| < \frac{\epsilon}{2d}$. Wir erhalten so nach 1.3.2

$$\begin{aligned}\|\varphi\psi - fg\| &\le \|\varphi\psi - \varphi g\| + \|\varphi g - fg\| \\ &= \||\psi - g|\cdot|\varphi|\| + \||\varphi - f|\cdot|g|\| \\ &\le \||\psi - g|\cdot d\| + \||\varphi - f|\cdot c\| \\ &= d\|\psi - g\| + c\|\varphi - f\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

Da $\varphi\psi$ nach 1.1.4 b Treppenfunktion ist, ist $f \cdot g$ nach 1.5.1 integrierbar.

2.4 L_1-Norm und Integral.

2.4.1 Satz: $f : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ integrierbar $\Rightarrow \|f\| = L(|f|)$.

Beweis: Sei (φ_j) eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - f\| = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|f\| &= \lim_{j\to\infty} \|\varphi_j\| \quad \text{wegen } \big|\|\varphi_j\| - \|f\|\big| \le \|\varphi_j - f\| \\ &= \lim_{j\to\infty} S(|\varphi_j|) \qquad \text{nach 1.4.1} \\ &= L(|f|) \qquad \text{nach 1.5.3}\end{aligned}$$

2.4.2 Satz: $f : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$, $\|f\| = 0 \Rightarrow f$ integrierbar, $L(f) = 0$.

Beweis: Wir definieren φ_j durch $\varphi_j(x) = 0$ für alle $x \in \underline{\underline{R}}^n$ und $j = 1,2,\ldots$. Dann folgt:

$$\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - f\| = \|-f\| = 0 \quad \text{und} \quad S(\varphi_j) = 0$$

d.h. auch $\qquad L(f) = \lim_{j\to\infty} S(\varphi_j) = 0.$

2.5 Maß von Mengen.

2.5.1 Definition: Eine Teilmenge A in $\underline{\underline{R}}^n$ heißt integrierbar, wenn ihre charakteristische Funktion φ_A integrierbar ist. Ist das der Fall, so heißt

$$m(A) \;_{Df}\!= L(\varphi_A) = \int_A 1$$

das Maß von A.

Offenbar gilt: $m(\emptyset) = 0$ und $m(A) \geq 0$ für jedes integrierbare $A \subset \underline{\underline{R}}^n$.

2.5.2 Satz: Seien A und B integrierbare Teilmengen in $\underline{\underline{R}}^n$.

(a) Dann sind auch $A \cup B$ und $A \cap B$ integrierbar, und es gilt:

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$$

(b) $B \subset A \Rightarrow A - B$ integrierbar, $m(B) \leq m(A)$.

Beweis: (a) $\varphi_{A\cup B} = \mathrm{Max}(\varphi_A, \varphi_B)$

$\varphi_{A\cap B} = \mathrm{Min}(\varphi_A, \varphi_B)$ (s. 2.2.2 (b))

$\varphi_{A\cup B} + \varphi_{A\cap B} = \varphi_A + \varphi_B.$

Daraus folgt die behauptete Gleichung nach 2.1.1 (a).

(b) $\varphi_{A-B} = \varphi_A - \varphi_B$ (s. 2.1.1)

2.5.3 Satz: Sei f eine über A integrierbare Funktion und B eine integrierbare Menge. Dann ist f auch über $A \cap B$ integrierbar.

Beweis: Wegen $f_{A\cap B} = f_A \cdot \varphi_B$ folgt die Behauptung aus 2.3.

2.5.4 Definition: Eine Teilmenge A in $\underline{\underline{R}}^n$ heißt Nullmenge, wenn eine der beiden folgenden gleichwertigen Aussagen gilt:

(a) A ist integrierbar und $m(A) = 0$.

(b) $\|\varphi_A\| = 0$

(a) $\Rightarrow$ (b) folgt aus 2.4.1. (b) $\Rightarrow$ (a) aus 2.4.2.

2.5.5 Satz: Seien A und B Teilmengen in $\underline{\underline{R}}^n$ mit $A \subset B$. Ist B eine Nullmenge, so auch A.

Beweis: folgt unmittelbar aus der Definition 2.5.4 und aus 1.3.2 wegen

$$|\varphi_A| = \varphi_A \leq \varphi_B = |\varphi_B|.$$

2.5.6 Weitere Eigenschaften des Maßes von Mengen finden sich in 2.7, da sie jetzt noch nicht bewiesen werden können.

2.6 Grenzwertsätze.

2.6.1 Satz: Seien $f, f_j : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ $(j = 1,2,\ldots)$, f_j integrierbar für alle j und $\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\| = 0$. Dann ist auch f integrierbar, und es gilt:

$$L(f) = \lim_{j\to\infty} L(f_j).$$

Beweis: Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein j mit $\|f_j - f\| < \frac{\epsilon}{2}$ und eine Treppenfunktion $\varphi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ mit: $\|\varphi - f_j\| < \frac{\epsilon}{2}$, also $\|\varphi - f\| < \epsilon$. Demnach ist f integrierbar. Ferner gilt:

$$\begin{aligned} |L(f_j) - L(f)| &= |L(f_j - f)| && \text{nach 2.1.1 (a)} \\ &\leq L(|f_j - f|) && \text{nach 2.2.1} \\ &= \|f_j - f\| && \text{nach 2.4.1,} \end{aligned}$$

also
$$L(f) = \lim_{j\to\infty} L(f_j).$$

Folgerung: Sei $A \subset \underline{\underline{R}}^n$, $\|\varphi_A\| < \infty$, $f_j : A \to \underline{\underline{C}}$ integrierbar über A für $j = 1,2,\ldots$ und (f_j) konvergiere gleichmäßig gegen $f : A \to \underline{\underline{C}}$. Dann ist auch f integrierbar über A und

$$\int_A f = \lim_{j\to\infty} \int_A f_j .$$

Beweis: Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein j_0, so daß $|f_j(x) - f(x)| \leq \epsilon$ ist für alle $j \geq j_0$ und $x \in A$. Es folgt $|f_{jA} - f_A| \leq \epsilon\varphi_A$ (Bezeichnungen s. 1.5.5) und daraus

$$\|f_{jA} - f_A\| \leq \|\epsilon\varphi_A\| = \epsilon\,\|\varphi_A\| \text{ für } j \geq j_0.$$

Wegen $\|\varphi_A\| < \infty$ folgt: $\lim\limits_{j\to\infty} \|f_{jA} - f_A\| = 0$ und die Behauptung ergibt sich aus dem Satz.

2.6.2 Die Unendlicheckungleichung.

Satz: Für die Funktionenfolge $f_j : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ sei die Reihe $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|f_j\|$ konvergent. Dann gilt:

(a) Die Reihe $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j$ konvergiert „fast überall" in $\underline{\underline{R}}^n$, d.h. die Menge N aller $x \in \underline{\underline{R}}^n$, für die $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ nicht konvergiert, ist eine Nullmenge.

(b) Definiert man $f : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j(x), & x \notin N \\ \text{beliebig aus } \underline{\underline{C}}, & x \in N, \end{cases}$$

so ist $\|f\| \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \|f_j\|$.

Beweis: (b) Es sei zunächst dahingestellt, ob N eine Nullmenge ist oder nicht. Zu $\epsilon > 0$ wählen wir nach 1.3.1 $a_{jk} \in [0,\infty[$ und Quader $Q_{jk} \subset \underline{\underline{R}}^n$, so daß

$$|f_j| \leq \sum_k a_{jk}\,\varphi_{Q_{jk}}$$

und

$$\sum_k a_{jk}|Q_{jk}| \leq \|f_j\| + \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Es folgt:

$$|f| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \leq \sum_{j,k} a_{jk}\varphi_{Q_{jk}}$$

und

$$\|f\| \le \sum_{j,k} a_{jk}|Q_{jk}| \le \sum_{j=1}^{\infty} (\|f_j\|) + \frac{\varepsilon}{2^j}) = (\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|) + \varepsilon,$$

Da dies für jedes ε gilt, folgt die Behauptung.

(a) Sei $\varepsilon_1 \in \,]0,\infty[$. Wir wählen $f(x)$ für $x \in N$ so, daß $|f(x)| \ge \varepsilon_1$ gilt. Dann ist $\varepsilon_1 \cdot \varphi_N \le |f|$, also

$$\varepsilon_1 \|\varphi_N\| \le \|f\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\| < \infty,$$

Da dies für jedes (beliebig große) ε_1 gilt, folgt $\|\varphi_N\| = 0$ und damit die Behauptung.

2.6.3 Der Satz von Beppo Levi.

Satz: Seien f_j über A integrierbare Funktionen $(j = 1,2,\ldots)$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \int_A |f_j|$ konvergent. Dann konvergiert $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ fast überall in A. Definiert man $f : A \to \underline{\underline{C}}$ durch

$$f(x) \underset{Df}{=} \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x), & \text{falls die Reihe konvergiert,} \\ \text{beliebig aus } \underline{\underline{C}}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist f über A integrierbar, die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \int_A f_j$ konvergiert, und es gilt:

$$\int_A f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_A f_j .$$

Beweis: O.B.d.A. sei $A = \underline{\underline{R}}^n$.

Wegen 2.4.1 gilt: $\infty > \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\underline{\underline{R}}^n} |f_j| = \sum_{j=1}^{\infty} L(|f_j|) = \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|$,

und wir erhalten aus 2.6.2, daß $\sum f_j(x)$ fast überall konvergiert. Sei N die Menge aller $x \in \underline{\underline{R}}^n$, so daß $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$

divergiert.

Wir definieren $g_k \; {}_{Df}\!\!= \sum_{j=1}^{k} f_j$ und erhalten:

$$f(x) - g_k(x) = \sum_{j=k+1}^{\infty} f_j(x) \qquad \text{für } x \notin N.$$

2.6.2 liefert dann $\|f - g_k\| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \|f_j\|$;

und es folgt:

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \|f - g_k\| \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} \|f_j\| = 0 .$$

Nach 2.6.1 ist f also integrierbar und

$$L(f) = \lim_{k\to\infty} L(g_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} L(f_j) = \sum_{j=1}^{\infty} L(f_j)$$

Folgerung: Sei $g_k : A \to \underline{\underline{R}}$ über A integrierbar, $(g_k(x) | k = 1,2,\ldots)$ monoton fallend für jedes $x \in A$ und $(\int_A g_k)$ nach oben beschränkt. Dann konvergiert g_k fast überall in A gegen eine integrierbare Funktion $f : A \to \underline{\underline{R}}$, und es gilt:

$$\int_A f = \lim_{k\to\infty} \int_A g_k .$$

Beweis: Wir setzen in dem Satz $f_1 = g_1$ und $f_j = g_j - g_{j-1}$ für $j = 2,3,\ldots$. $\sum_{j=1}^{\infty} \int_A |f_j|$ konvergiert, da die Folge

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \int_A |f_j|\right) = \left(\int_A |f_1| - \int_A f_1 + \int_A g_k\right) \text{ beschränkt ist.}$$

Der Satz liefert die Behauptung.

Bemerkung: Der Satz findet sich in der Arbeit von Beppo Levi: „Sopra l'integrazione delle Serie" (Rendiconti del reale istituto Lombardo di scienze e lettere, Serie II, Band 39, 1906, Seite 775 - 780). Henri Lebesgue hat dann in der 2. Auflage seiner „Lecon sur l'integration et de la recherche des fonctions primitives" (Paris, Gauthier-Villars, 1927, Neudruck 1950, Seite 132) unter Berufung auf die Arbeit von Levi ausdrücklich die Folgerung formuliert. In der Literatur findet man leider häufig nur diese Folgerung, die dann manchmal nach Beppo Levi, manchmal aber auch nach Lebesgue benannt wird.

2.6.4 Satz: Sei $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A \;{}_{Df}{=} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \underline{\underline{R}}^n$ und $f : A \to \underline{\underline{C}}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(1) f ist über A_j $(j = 1,2,\ldots)$ integrierbar.

(2) Die Folge $(\int_{A_j} |f|)$ ist beschränkt.

Dann ist f über A integrierbar, und es gilt:

$$\int_A f = \lim_{j\to\infty} \int_{A_j} f$$

Beweis: Wir definieren $B_1 \;{}_{Df}{=} A_1$, $B_i \;{}_{Df}{=} A_i - A_{i-1}$ $(i = 2, 3,\ldots)$ und wenden den Satz 2.6.3 auf f_{B_i} an:

$$\int_A f_{B_i} = \int_{B_i} f \quad \text{existiert nach 2.5.3}$$

$$\sum_{i=1}^{j} \int_A |f_{B_i}| = \sum_{i=1}^{j} \int_{B_i} |f| = \int_{A_j} |f| \text{ ist beschränkt, also}$$

konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} \int_A |f_{B_i}|$. Wegen $f_A = \sum_{i=1}^{\infty} f_{B_i}$ und nach 2.6.3 ist f über A integrierbar und

$$\int_A f = \int_A f_A = \sum_{i=1}^{\infty} \int_A f_{B_i} = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{j} \int_A f_{B_i} = \lim_{j\to\infty} \int_{A_j} f$$

(weil $\sum_{i=1}^{j} \int_A f_{B_i} = \sum_{i=1}^{j} \int_{B_i} f = \int_{A_j} f$).

2.7. Weitere Eigenschaften des Maßes von Mengen.

2.7.1 Satz: Eine Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen (s. 2.5.4) ist eine Nullmenge.

Beweis: Sei $N = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ und $\|\varphi_{N_j}\| = 0$ für $j = 1,2,\ldots$.

Wir definieren $f : \underline{\underline{R}}^n \to [0,\infty[$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{N_j}(x), & \text{falls die Reihe konvergiert} \\ 1\ , & \text{sonst;} \end{cases}$$

Wegen $\sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_{N_j}\| = 0$ sind die Voraussetzungen von 2.6.2 erfüllt. Ferner ist $\varphi_N \leq f$, also folgt:

$$0 \leq \|\varphi_N\| \leq \|f\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_{N_j}\| = 0$$

und daraus $\|\varphi_N\| = 0$.

2.7.2 Satz: Sei $f : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$.

(a) Es ist genau $\|f\| = 0$, wenn f fast überall verschwindet, d.h. $N_{Df} = \{x | f(x) \neq 0\}$ eine Nullmenge ist.

(b) Verschwindet f fast überall, so ist f integrierbar und $L(f) = 0$.

Beweis: (a) Sei N Nullmenge. Dann setzen wir in der Unendlicheck-Ungleichung 2.6.2

$$f_j = \varphi_N \text{ für } j = 1,2,\ldots$$

Für das dortige f können wir die gegebene Funktion nehmen, und es folgt:

$$0 \leq \|f\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_N\| = 0,$$

also $\|f\| = 0$.

Sei umgekehrt $\|f\| = 0$. Wir setzen

$$N_j \underset{Df}{=} \{x \mid |f(x)| \geq \tfrac{1}{j}\} \quad \text{für } j = 1,2,\ldots.$$

Dann ist

$$\varphi_{N_j} \leq j|f|,$$

also $\|\varphi_{N_j}\| \leq j\|f\| = 0$, d.h. für alle $j = 1,2,\ldots$ ist N_j Nullmenge. Nach 2.7.1 ist dann auch $N = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ Nullmenge.

(b) Aus (a) folgt $\|f\| = 0$, und deswegen liefert 2.4.2 die Behauptung.

2.7.3 Kettensätze:

(a) Aufsteigender Kettensatz: Sei $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset \underline{\underline{R}}^n$, $A \underset{Df}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ und A_i integrierbar für $i = 1,2,\ldots$. Ist die Folge $(m(A_i))$ beschränkt, so ist A integrierbar, und es gilt:

$$m(A) = \lim_{i\to\infty} m(A_i).$$

(Andernfalls ist A nicht integrierbar.)

(b) Absteigender Kettensatz: Sei $\underline{\underline{R}}^n \supset B_1 \supset B_2 \ldots$, $B \underset{Df}{=} \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ und B_i integrierbar für $i = 1,2,\ldots$. Dann ist B integrierbar, und es gilt:

$$m(B) = \lim_{i\to\infty} m(B_i).$$

<u>Beweis:</u> (a) Sei $(m(A_i))$ beschränkt. Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 2.6.4, indem $f = \varphi_A$ gesetzt wird.
Sei nun $(m(A_i))$ nicht beschränkt und angenommen, A ist integrierbar. Aus $A_i \subset A$ für alle i folgt nach 2.5.2

$$m(A_i) \leq m(A) \text{ für alle } i,$$

d.h. $m(A)$ wäre eine Schranke für $(m(A_i))$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
(b) Sei $A_j \;{}_{Df}{=}\; B_1 - B_j$ $(j = 1,2,\ldots)$. Dann ist A_j für jedes $j = 1,2,\ldots$ integrierbar, und es gilt:

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A \;{}_{Df}{=} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = B_1 - B.$$

Für alle $j = 1,2,\ldots$ ist $m(A_j) \leq m(B_1)$. Also ist A nach dem aufsteigenden Kettensatz integrierbar und

$$m(A) = \lim_{j\to\infty} m(A_j) = m(B_1) - \lim_{j\to\infty} m(B_j).$$

Daraus ergibt sich nach 2.5.2

$$\lim_{j\to\infty} m(B_j) = m(B_1 - A) = m(B).$$

2.7.4 Im folgenden benötigen wir den
<u>Hilfssatz: Jede nicht-leere offene Menge $A \subset \underline{\underline{R}}^n$ läßt sich als abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen A_j $(j = 1,2,\ldots)$ so darstellen, daß gilt:</u>
(1) $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$

(2) Für alle $j = 1,2,\ldots$ ist A_j eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen (achsenparallelen) Würfeln. Folgerung: Jede nicht-leere offene Menge läßt sich als abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Würfeln darstellen.

Beweis: A_j sei die Vereinigung aller Würfel, die ganz in A liegen und durch Ungleichungen der Form

$$(*) \qquad \frac{q_i}{2^j} \le x_i \le \frac{q_i + 1}{2^j} \qquad i = 1,\ldots,n$$

definiert sind, wobei die q_i ganze Zahlen mit $|q_i| \le j \cdot 2^j$ sind. Wegen der Bedingungen an die q_i ist jedes A_j Vereinigung von höchstens endlich vielen Würfeln.

Außerdem gilt:

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Wir haben also noch zu zeigen:

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Natürlich ist $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset A$. Sei andererseits $x = (x_1,\ldots,x_n) \in A$. Da A offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß gilt:

$$K_\epsilon(x) \underset{Df}{=} \{y \in \underline{\underline{R}}^n \mid |y - x| < \epsilon\} \subset A.$$

Für genügend großes j_0 gibt es dann ganze Zahlen q_i mit $|q_i| \le j_0 2^{j_0}$ $(i = 1,\ldots,n)$, so daß der durch Ungleichungen der Form (*) definierte Würfel einserseits x umfaßt, andererseits aber ganz in $K_\epsilon(x)$ und damit auch in A liegt; daraus folgt $x \in A_{j_0} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

2.7.5 Satz: Jede beschränkte offene und jede beschränkte abgeschlossene (d.h. kompakte) Menge in $\underline{\underline{R}}^n$ ist integrierbar.

Beweis: Sei $A \subset \underline{\underline{R}}^n$ und A beschränkt. Dann gibt es einen offenen Quader $Q \supset A$.

Sei A zunächst offen. Dann gibt es nach dem Hilfssatz 2.7.4 Mengen A_j mit:

$$A_1 \subset \ldots \subset A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,$$

wobei jedes A_j eine endliche Vereinigung von (abgeschlossenen) Quadern ist, d.h. φ_{A_j} ist für jedes j eine Treppenfunktion. Die A_j sind also alle integrierbar, und die Folge $(m(A_j))$ ist durch $m(Q) = |Q|$ beschränkt. Der aufsteigende Kettensatz 2.7.3 (a) liefert dann die Behauptung für jede offene Menge $A \subset \underline{\underline{R}}^n$.

Sei nun A abgeschlossen. Dann ist $Q - A$ offen und nach dem eben Bewiesenen integrierbar. Nach 2.5.2 (b) ist auch

$$A = Q - (Q - A)$$

integrierbar.

2.7.6 Satz: Seien A_i, $i = 1,2,\ldots$ integrierbare Teilmengen in $\underline{\underline{R}}^n$ und $A_j \cap A_k = \emptyset$, falls $j \neq k$. Dann gilt:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

falls die Reihe auf der rechten Seite konvergiert; ansonsten ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ nicht integrierbar.

Beweis: Konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$, so folgt die Behauptung aus dem Satz von Beppo Levi 2.6.3.

Ist umgekehrt $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ integrierbar, so folgt aus 2.5.2

$$\sum_{i=1}^{j} m(A_i) \leq m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) < \infty \text{ für } j = 1, 2, \ldots$$

d. h.

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \text{ konvergiert.}$$

2.8 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen.

Satz: Ist A eine kompakte Teilmenge in $\underline{\underline{R}}^n$, so ist jede stetige Funktion $f : A \to \underline{\underline{C}}$ über A integrierbar.

Beweis: Da A kompakt ist, ist eine stetige Funktion $f : A \to \underline{\underline{C}}$ sogar gleichmäßig stetig: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $\delta > 0$, so daß für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta$ gilt

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Wir wählen einen offenen Quader Q, der A enthält, - das ist wegen der Kompaktheit von A immer möglich - zerlegen ihn durch endlich viele Hyperebenen der Form

$$x_i = \text{const} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

in offene Teilquader Q_k $(k = 1, \ldots, l)$, deren Durchmesser kleiner als δ ist. Für alle k mit $A \cap Q_k \neq \emptyset$ wählen wir ein $x_k \in A \cap Q_k$ und definieren dann eine Treppenfunktion $\varphi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ durch:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x_k), & \text{wenn } x \in Q_k \text{ und } A \cap Q_k \neq \emptyset, \\ f(x), & \text{wenn } x \in A \text{ und } x \notin \bigcup_{k=1}^{l} Q_k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

φ ist als Treppenfunktion integrierbar, A ist als kompakte Menge ebenfalls integrierbar (nach 2.7.5), also ist φ nach

2.5.3 auch über A integrierbar, und es gilt für alle $x \in A$:

$$|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

Wählt man der Reihe nach $\varepsilon = \frac{1}{j}$ $(j = 1,2,\ldots)$ und konstruiert dazu φ_j, so erhält man eine Folge von über A integrierbaren Funktionen, die in A gleichmäßig gegen f konvergieren. Nach der Folgerung in 2.6.1 ist f dann über A integrierbar.

2.9 Vergleich mit dem Elementarintegral.

2.9.1 Definition: Sei $a, b \in \underline{\underline{R}}$ und $a < b$. Eine Funktion $f : [a,b] \to \underline{\underline{C}}$ heißt elementar integrierbar, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen $\varphi_j : \underline{\underline{R}} \to \underline{\underline{C}}$ mit $\varphi_j | \underline{\underline{R}} - [a,b] = 0$ $(j = 1,2,\ldots)$ gibt, die gleichmäßig gegen $f_{[a,b]}$ konvergiert. (Zur Schreibweise vgl. 1.5.5)

2.9.2 Satz: Ist $f : [a,b] \to \underline{\underline{C}}$ elementar integrierbar und $(\varphi_j | j = 1,2,\ldots)$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\varphi_j | \underline{\underline{R}} - [a,b] = 0$, die gleichmäßig gegen $f_{[a,b]}$ konvergiert, so ist f integrierbar, und es gilt:

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{j\to\infty} S(\varphi_j).$$

Der Beweis ergibt sich aus 1.5.4 und der Folgerung in 2.6.1.

Wir schreiben auch $\int_a^b f(t)\,dt$ für $\lim_{j\to\infty} S(\varphi_j)$ und bezeichnen diesen Ausdruck als „eigentliches elementares Integral von f von a bis b."

Aus dem Satz erhalten wir unmittelbar:

Folgerung: Ist $f : [a,b] \to \underline{\underline{C}}$ elementar integrierbar, so ist das eigentliche elementar Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ unabhängig von der Auswahl der Folge von Treppenfunktionen, die gegen f konvergiert und zur Berechnung des Grenzwerts herangezogen wird.

2.9.3 Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ heißt Regelfunktion, wenn die einseitigen Limiten

$$\lim_{\substack{x \to x' \\ x < x' \\ x \in M}} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{\substack{x \to x' \\ x > x' \\ x \in M}} f(x)$$

für jedes $x' \in M$ existieren.

2.9.4 Beispiele für Regelfunktionen bilden die Treppenfunktionen und die stetigen Funktionen.

2.9.5 Satz: Ist $M \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, d. h. $M = [a,b]$ für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$, so ist eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ genau dann Regelfunktion, wenn sie elementar integrierbar ist.

Beweis: Sei f elementar integrierbar. Es gibt also eine Folge von Treppenfunktionen $\varphi_j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen $f_{[a,b]}$ konvergiert. Sei $x' \in M$ und $\lim\limits_{\substack{x \to x' \\ x > x'}} \varphi_j(x) = c_j$.

Zu einem $\varepsilon > 0$ gibt es ein j_o, so daß $|\varphi_j(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $j \geq j_o$ und $x \in [a,b]$ gilt. Wir erhalten für $j, k \geq j_o$:

$|\varphi_j(x) - \varphi_k(x)| \leq |\varphi_j(x) - f(x)| + |f(x) - \varphi_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Für jedes feste Paar j,k gibt es andererseits ein $x_o > x'$, so daß

$|c_j - \varphi_j(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ und $|c_k - \varphi_k(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ für $x' < x \leq x_o$.

Die Zusammensetzung der verschiedenen Ausdrücke ergibt dann $|c_j - c_k| < \varepsilon$ für $j,k \geq j_o$, und nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium folgt die Existenz des Limes

$$\lim_{j \to \infty} c_j =_{Df} c.$$

Wir wählen nun ein $j \geq j_0$, so daß $|c_j - c| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Es gibt ein $x_0 > x'$, so daß $|\varphi_j(x) - c_j| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ für $x' < x \leq x_0$. Für diese x folgt

$$|f(x) - c| \leq |f(x) - \varphi_j(x)| + |\varphi_j(x) - c_j| + |c_j - c|$$

$$\leq \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon,$$

also existiert

$$\lim_{\substack{x\to x'\\ x>x'}} f(x) = c.$$

Genauso schließt man für $\substack{x\to x'\\ x<x'}$.

(Der Beweis in dieser Richtung funktioniert auch ohne Voraussetzung über M.)

Sei nun f Regelfunktion. Es genügt zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Treppenfunktion $\varphi : \underline{\underline{R}} \to \underline{\underline{C}}$ mit

$$\varphi \,\Big|\, \underline{\underline{R}} - [a,b] = 0$$

und

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert zu jedem $x' \in [a,b]$ ein $\delta_{x'} > 0$, so daß

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ für } x,y \in \,]x' - \delta_{x'}, x'[\quad \text{oder}$$

$$x,y \in \,]x', x' + \delta_{x'}[.$$

Die Menge der Intervalle $]x' - \delta_{x'}, x' + \delta_{x'}[$ bildet eine offene Überdeckung von $[a,b]$. Da $[a,b]$ kompakt ist, genügen nach dem Überdeckungssatz von Heine-Borel endlich viele dieser Intervalle zur Überdeckung von $[a,b]$. Die zugehörigen endlich vielen Punkte der Form $x' - \delta_{x'}$, x' oder $x' + \delta_{x'}$ ordnen wir der Größe nach und bezeichnen sie mit $a_1, \dots, a_n$,

also

$$a =_{Df} a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} {}_{Df}= b.$$

Im Innern eines jeden dieser Intervalle $[a_\nu, a_{\nu+1}]$ $(\nu = 0,\ldots,n)$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ (für $x,y \in]a_\nu, a_{\nu+1}[$). Die folgende Definition liefert deswegen eine Treppenfunktion φ mit den gewünschten Eigenschaften:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & , x = a_\nu \; (\nu = 0,\ldots, n+1) \\ f\left(\frac{a_\nu + a_{\nu+1}}{2}\right) & , x \in]a_\nu, a_{\nu+1}[\; (\nu = 0,\ldots,n) \\ 0 & , x \notin [a,b] \end{cases}$$

2.9.6 Definition: (a) Sei $f : [a,b[\to \underline{\underline{C}}$ $(a \in \underline{\underline{R}},\ b \in \underline{\underline{R}} \cup \{\infty\})$ eine Regelfunktion. Der Ausdruck

$$\int_a^{\vec{b}} f(t)\, dt = \lim_{\substack{x \to b \\ x \in [a,b[}} \int_a^x f(t) dt$$

heißt „Elementares uneigentliches Integral von f von a bis b". Das elementare uneigentliche Integral „existiert" oder „konvergiert", wenn der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

(b) Sei $\int_a^{\vec{b}} f(t)\, dt$ eine elementares uneigentliches Integral (konvergent oder nicht).

$\int_a^{\vec{b}} f(t)\, dt$ „konvergiert absolut", wenn $\int_a^{\vec{b}} |f(t)|\, dt$ existiert.
(Ist f Regelfunktion, so ist natürlich auch $|f|$ Regelfunktion!)

2.9.7 Während alle elementar integrierbaren Funktionen im Sinne von Lebesgue (1.5.5) integrierbar sind, gilt eine ähnliche Aussage für das elementare uneigentliche Integral nicht allgemein.

Satz: Ist $f : [a,b[\to \underline{\underline{C}}$ eine Regelfunktion, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $\int\limits_{[a,b[} f$ existiert im Sinne von Lebesgue.

(b) $\int\limits_a^{\underset{\rightarrow}{b}} f(t)\,dt$ konvergiert absolut.

Gilt (a) und (b), so ist

$$\int\limits_{[a,b[} f = \int\limits_a^{\overrightarrow{b}} f(t)\,dt$$

(Aus der absoluten Konvergenz folgt die Konvergenz!)

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b): Da f über $[a,b[$ integrierbar sein soll, ist nach 2.2.1 auch $|f|$ über $[a,b[$ integrierbar. Satz 2.9.2 liefert

$$\int\limits_a^x |f(t)|\,dt = \int\limits_{[a,x]} |f| \le \int\limits_{[a,b[} |f| < \infty \text{ für } x \in [a,b[.$$

Da die Funktion $F(x) =_{Df} \int\limits_a^x |f(t)|\,dt$ $(x \in\,]a,b[)$ für $x \to b$ monoton wächst und durch $\int\limits_{[a,b[} |f|$ nach oben beschränkt ist, folgt die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x\in]a,b[}} F(x) = \lim_{\substack{x\to b\\ x\in]a,b[}} \int\limits_a^x |f(t)|\,dt =_{Df} \int\limits_a^{\underset{\rightarrow}{b}} |f(t)|\,dt.$$

(b) $\Rightarrow$ (a): Wir wollen Satz 2.6.4 anwenden und setzen dazu $A =_{Df} [a,b[$, $A_j = [a,b_j]$, wobei $b_j \in\,]a,b[$ eine monoton wachsende Folge sei, die gegen b konvergiert. f ist Regelfunktion, also ist f nach den Sätzen 2.9.5 und 2.9.2 über A_j integrierbar (für $j = 1,2,\ldots$), und das gleiche gilt für $|f|$. Die monotone wachsende Folge $(\int_{A_j} |f|)$ ist durch $\int_a^b |f(t)| dt$ beschränkt, also ist (Satz 2.6.4) f über A integrierbar (im Sinne von Lebesgue), und es gilt:

$$\int_{[a,b[} f = \lim_{j\to\infty} \int_{A_j} f = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

2.9.8 Bemerkung: Aus der absoluten Konvergenz eines uneigentlichen elementaren Integrals folgt die Konvergenz. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, was man an der Regelfunktion $f : [0,\infty[\to \underline{\underline{C}}$, die durch

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t = 0 \\ \dfrac{\sin t}{t} & , \quad t > 0 \end{cases}$$

gegeben ist, nachweisen kann. Es gibt also Funktionen, für die das elementare uneigentliche Integral existiert, die aber nicht im Sinne von Lebesgue integrierbar sind.

§ 3. Der Satz von Fubini. Berechnung von Integralen.

3.1 Bezeichnungen.

Wir betrachten Funktionen $f : \underline{\underline{R}}^{n+m} \to \underline{\underline{C}}$ und setzen zur Abkürzung

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \underline{\underline{R}}^n$$
$$y = (y_1, \ldots, y_m) \in \underline{\underline{R}}^m$$
$$(x,y) = (x_1, \ldots, x_n,\ y_1, \ldots, y_m) \in \underline{\underline{R}}^{n+m}$$

Ferner wird für jedes $x \in \underline{\underline{R}}^n$ die Funktion

$$f_x : \underline{\underline{R}}^m \to \underline{\underline{C}}$$

durch $f_x(y) = f(x,y)$ für alle $y \in \underline{\underline{R}}^m$ definiert. Für das (Lebesguesche) Integral von f (über $\underline{\underline{R}}^{n+m}$) schreiben wir nun

$$\int\limits_{\underline{\underline{R}}^{n+m}} f(x,y)\ dx_1 \ldots dx_n\ dy_1 \ldots dy_m \underset{Df}{=} L(f),$$

während

$$\int\limits_{\underline{\underline{R}}^m} f(x,y)\ dy_1 \ldots dy_m \underset{Df}{=} L(f_x)$$

das Integral der Funktion f_x bei festem $x \in \underline{\underline{R}}^n$ bedeutet. Letzteres ist dann noch von x abhängig; es wurde nur „über y" integriert.

Zur Abkürzung setzen wir auch noch:

$$dx = dx_1 \ldots dx_n$$
$$d_y = dy_1 \ldots dy_m.$$

3.2 Der Satz von Fubini.

3.2.1 Satz: Sei $f : \underline{\underline{R}}^{n+m} \to \underline{\underline{C}}$ integrierbar. Dann existiert:

$$\int_{\underline{\underline{R}}^m} f(x,y)dy$$

fast überall in $\underline{\underline{R}}^n$, d.h. die Menge N aller $x \in \underline{\underline{R}}^n$, für die $f_x : \underline{\underline{R}}^m \to \underline{\underline{C}}$ nicht integrierbar ist, ist eine Nullmenge in $\underline{\underline{R}}^n$. Definiert man $F : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ durch

$$F(x) = \begin{cases} \int_{\underline{\underline{R}}^m} f(x,y)dy & \text{für } x \notin N \\ \text{beliebig} & \text{für } x \in N \end{cases},$$

so ist F integrierbar (über $\underline{\underline{R}}^n$) und es gilt:

$$\int_{\underline{\underline{R}}^n} F(x)\, dx = \int_{\underline{\underline{R}}^{n+m}} f(x,y)dxdy.$$

Etwas ungenau schreibt man für die linke Seite dieser Gleichung auch

$$\int_{\underline{\underline{R}}^n} \left[\int_{\underline{\underline{R}}^m} f(x,y)dy \right] dx$$

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

3.2.2 Hilfssatz: Sei Q ein Quader in $\underline{\underline{R}}^{n+m}$, dann gibt es Quader $Q_1 \subset \underline{\underline{R}}^n$ und $Q_2 \subset \underline{\underline{R}}^m$, so daß gilt:

$$\varphi_{Q,x} = \begin{cases} \varphi_{Q_2} & \text{für } x \in Q_1 \\ 0 & \text{für } x \notin Q_1. \end{cases}$$

Definiert man $\psi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ durch

$$\psi(x) = S(\varphi_{Q,x}),$$

so gilt: $\psi = |Q_2| \cdot \varphi_{Q_1}$

und $S(\psi) = S(\varphi_Q)$.

Beweis: $Q = \{(x,y) \mid a_i < x_i < b_i,\ c_j < y_j < d_j,$
$i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,m\}$

Wir definieren:

$Q_1 = \{ x \mid a_i < x_i < b_i,\ i = 1,\dots,n\}$ und

$Q_2 = \{ y \mid c_j < y_j < d_j,\ j = 1,\dots,m\}.$

Dabei sind die a_i, b_i, c_j, $d_j \in \underline{\underline{R}}$ für alle i,j.

Nun gilt:

$$\varphi_{Q,x}(y) = \varphi_Q(x,y) = \begin{cases} \varphi_{Q_2}(y) & \text{für } x \in Q_1 \\ 0 & \text{für } x \notin Q_1 \end{cases}$$

und daraus folgt:

$$S(\varphi_{Q,x}) = \begin{cases} S(\varphi_{Q_2}) = |Q_2| & \text{für } x \in Q_1 \\ 0 & \text{für } x \notin Q_1 \end{cases}$$

also $\psi = |Q_2| \cdot \varphi_{Q_1}$

$$\begin{aligned} \text{und}\quad S(\psi) &= S(|Q_2| \cdot \varphi_{Q_1}) = \\ &= |Q_2| \cdot S(\varphi_{Q_1}) \text{ nach } 1.2.3 \\ &= |Q_2| \cdot |Q_1| = |Q| = S(\varphi_Q). \end{aligned}$$

3.2.3 Hilfssatz: Der Satz von Fubini gilt für alle Treppenfunktionen.

Beweis: Sei $\varphi : \underline{\underline{R}}^{n+m} \to \underline{\underline{C}}$ eine Treppenfunktion und N die Menge aller $x \in \underline{\underline{R}}^n$, für die φ_x nicht integrierbar ist. Wir haben für φ nach 1.1.4.a eine Darstellung

$$\varphi = \sum_{k=1}^{l} a_k \varphi_{Q_k} + \sum_{s=1}^{t} \psi_s .$$

Wir betrachten zunächst die Funktionen $\psi_s (s = 1,\dots,t)$.
Für alle s gilt dabei $L(\psi_s) = S(\psi_s) = 0$.
Nach Konstruktion der ψ_s (vgl. 1.1.4) sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $\psi_s(x,y) \neq 0$ höchstens für $y_{j_s} = r_s$. Dann gilt $\psi_{s,x}(y) \neq 0$ höchstens für $y_{j_s} = r_s$, also nach 1.4.1 Hilfssatz (a) $L(\psi_{s,x}) = S(\psi_{s,x}) = 0$.

2. $\psi_s(x,y) \neq 0$ höchstens für $x_{i_s} = r_s$. Dann ist $\psi_{s,x} = 0$ und daher $L(\psi_{s,x}) = 0$ für $x_{i_s} \neq r_s$.
Definiert man $\Psi_s : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ durch

$$\Psi_s(x) = L(\psi_{s,x})$$

falls die rechte Seite existiert und sonst beliebig, so ist wiederum nach 1.4.1 Hilfssatz (a) die Menge aller $x \in \underline{\underline{R}}^n$ mit $\Psi_s(x) \neq 0$ eine Nullmenge in $\underline{\underline{R}}^n$, also $L(\Psi_s) = 0$.
Zusammenfassend erhalten wir:

$$\varphi_x = \sum_{k=1}^{l} a_k \varphi_{Q_{k,x}} + \sum_{s=1}^{t} \psi_{s,x}$$

Nach 3.2.2 existiert $L(\varphi_{Q_{k,x}}) = S(\varphi_{Q_{k,x}})$ für alle x und k, also auch $L(\sum_{k=1}^{l} a_k \varphi_{Q_{k,x}})$; und $L(\psi_{s,x})$ existiert nach dem eben Bewiesenen fast überall in $\underline{\underline{R}}^n$ für alle x, also auch $L(\sum_{s=1}^{t} \psi_{s,x})$. Damit existiert auch $L(\varphi_x)$ fast überall in $\underline{\underline{R}}^n$, d.h., N ist eine Nullmenge.

Nun ist

$$F(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{l} a_k \, S(\varphi_{Q_{k,x}}) + \sum\limits_{s=1}^{t} L(\psi_{s,x}) & \text{für } x \notin N \\ \text{beliebig} & \text{für } x \in N \end{cases}$$

Wir erhalten also wegen $S(\varphi_{Q_{k,x}}) = |Q_{k,2}| \cdot \varphi_{Q_{k,1}}$ (nach 3.2.2)

$$L(F) = \sum_{k=1}^{l} a_k \, |Q_{k2}| \cdot L(\varphi_{Q_{k1}}) + \sum_{s=1}^{t} L(\psi_s)$$

$$= \sum_{k=1}^{l} a_k \, |Q_k| = S(\varphi) = L(\varphi)$$

(ψ_s war nur auf einer Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ von Null verschieden).

3.2.4 Hilfssatz: Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $\|f\| < \infty$. Dann ist $N_{Df} = \{x \mid \|f_x\| = \infty\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$. Für die Funktion $F : \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$, die definiert ist durch

$$F(x) = \begin{cases} \|f_x\| & , \quad x \notin N \\ \text{beliebig aus } [0,\infty[, & x \in N \end{cases}$$

gilt:

$$\|F\| \leq \|f\|$$

Beweis: Sei $|f| \leq \sum\limits_{k} a_k \, \varphi_{Q_k}$.

Dann folgt

$$|f_x| = |f|_x \leq \sum_{k} a_k \, \varphi_{Q_{k,x}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

und

$$\|f_x\| \leq \sum_k a_k |Q_{k,2}| \cdot \varphi_{Q_{k,1}} \quad \text{(nach 3.2.2)}$$

sowie

$$F \leq \sum_k a_k |Q_{k,2}| \cdot \varphi_{Q_{k,1}} \quad \text{und damit}$$

$$\|F\| \leq \sum_k a_k |Q_{k,2}| \cdot |Q_{k,1}| = \sum_k a_k |Q_k|$$

$\|F\|$ ist also untere Grenze einer größeren Menge als $\|f\|$ und daraus folgt:

$$\|F\| \leq \|f\|.$$

Daß N eine Nullmenge ist, zeigt man genauso wie im Beweis zu 2.6.2.

3.2.5 Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis des Satzes von Fubini:

Sei $f : \underline{\underline{R}}^{n+m} \to \underline{\underline{C}}$ integrierbar. Dann gibt es eine Folge von Treppenfunktionen φ_j, so daß

$$\|\varphi_j - f\| \leq \frac{1}{2^j} \quad (j = 1,2,\ldots) \quad \text{ist.}$$

Sei $N_j \underset{Df}{=} \{x \mid \|\varphi_{j,x} - f_x\| = \infty\}$.

Nach 3.2.4 ist N_j für jedes j eine Nullmenge in $\underline{\underline{R}}^n$.

Wir definieren $G_j : \underline{\underline{R}}^n \to [0,\infty[$ durch

$$G_j(x) = \begin{cases} \|\varphi_{j,x} - f_x\| , & x \notin N_j \\ \text{beliebig aus } [0,\infty[, & x \in N_j \end{cases}$$

Dann folgt aus 3.2.4

$$\|G_j\| \leq \|\varphi_j - f\| \leq \frac{1}{2^j} \quad (j = 1,2,\ldots,)$$

und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|G_j\| \leq 1.$$

Die Menge $N_o \underset{Df}{=} \{x \mid \sum_{j=1}^{\infty} G_j(x) = \infty\}$ ist nun nach 2.6.2.a eine Nullmenge in $\underline{\underline{R}}^n$.

Für $x \notin \bigcup_{j=0}^{\infty} N_j$ ist $G_j(x) = \|\varphi_{j,x} - f_x\|$

und $\lim_{j\to\infty} G_j(x) = 0$.

Sei M_j die Menge aller $x \in \underline{\underline{R}}^n$, für die $\varphi_{j,x}$ nicht integrierbar ist. Da φ_j Treppenfunktion ist, ist M_j nach 3.2.3 eine Nullmenge und damit nach 2.7.1 auch

$$N = \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} N_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j\right)$$

Für alle $x \notin N$ ist nun f_x integrierbar (Satz in 2.6.1). Damit ist der 1. Teil des Satzes von Fubini bewiesen.

Wir betrachten nun die Funktion $F : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$, die definiert ist durch:

$$F(x) = \begin{cases} L(f_x) & , \quad \text{wenn } f_x \text{ integrierbar} \\ \text{beliebig aus } \underline{\underline{C}} & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Entsprechend gewinnen wir $\Phi_j : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ aus φ_j.

Für alle $x \notin N$ gilt:

$$|\Phi_j(x) - F(x)| = |L(\varphi_{j,x}) - L(f_x)| = |L(\varphi_{j,x} - f_x)|$$

$$\leq L(|\varphi_{j,x} - f_x|) = \|\varphi_{j,x} - f_x\| = G_j(x).$$

Das bedeutet:

$|\Phi_j - F| \leq G_j + H_j$, wobei $H_j : \underline{\underline{R}}^n \to [0,\infty[$

eine geeignete Funktion ist, die außerhalb der Nullmenge N verschwindet. Weiter folgt:

$$\|\Phi_j - F\| \le \|G_j + H_j\| \le \|G_j\| + \|H_j\| = \|G_j\| \le \frac{1}{2^j}$$

also $\lim\limits_{j\to\infty} \|\Phi_j - F\| = 0$. Nach 3.2.3 ist Φ_j integrierbar und $L(\Phi_j) = L(\varphi_j)$.

Aus 2.6.1 folgt damit: F ist integrierbar und es gilt:

$$L(F) = \lim_{j\to\infty} L(\Phi_j) = \lim_{j\to\infty} S(\varphi_j) = L(f),$$

womit der ganze Satz bewiesen ist.

3.3 Berechnung von Integralen.

3.3.1 Satz: Sei $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und f eine über A integrierbare Funktion. Definiert man

$$A_x \underset{Df}{=} A \cap (x \times \mathbb{R}^m) = \{y \mid (x,y) \in A\}$$

und

$$pr_1 A \underset{Df}{=} \{x \mid \text{es gibt } y \text{ mit } (x,y) \in A\},$$

so gilt (in der ungenauen Schreibweise):

$$\int_A f(x,y)\, dxdy = \int_{pr_1 A} \left[\int_{A_x} f(x,y)dy\right] dx.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Satz von Fubini.

3.3.2 In den Anwendungen treten häufig die folgenden Spezialfälle von 3.3.1 auf:

Satz: (a) Sei $m = 1$ und $X \subset \mathbb{R}^n$, außerdem seien zwei Funktionen $\alpha, \beta : X \to \mathbb{R}$ mit $\alpha \le \beta$ gegeben. Für die Menge $A \underset{Df}{=} \{(x,y) \mid x \in X,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gilt: $pr_1 A = X$ und $A_x = [\alpha(x), \beta(x)]$.

Ist f eine über A integrierbare Funktion, so gilt:

$$\int_A f(x,y)\,dxdy = \int_X \Big[\int_{[\alpha(x),\beta(x)]} f(x,y)\,dy \Big]\,dx$$

(b) Sei m = 1 und X kompakt in $\mathbb{R}^n$; α, β : $X \to \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen mit: $\alpha(x) < \beta(x)$ für alle $x \in X$. Dann ist $A =_{Df} \{(x,y) \mid x \in X,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ kompakt, jede in A stetige Funktion f ist integrierbar über A, und das Integral $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$ existiert im elementaren Sinne.

Beweis: (a) trivial.

(b) 1. A ist kompakt: Sei (x_j, y_j) eine Punktfolge in A. Wegen $x_j \in X$ für alle j gibt es eine Teilfolge (x_{k_j}), die gegen ein $x \in X$ konvergiert. Als stetige Funktionen auf einer kompakten Menge haben α und β ein Minimum und ein Maximum. Es gilt:

$$\text{Min}\ \alpha \leq \alpha(x_{k_j}) \leq y_{k_j} \leq \beta(x_{k_j}) \leq \text{Max}\ \beta.$$

Es gibt also eine Teilfolge (y_{l_j}) der Folge (y_{k_j}), die gegen ein $y \in [\text{Min}\ \alpha, \text{Max}\ \beta]$ konvergiert. Dann konvergiert (x_{l_j}, y_{l_j}) gegen (x,y). Ferner folgt aus der Stetigkeit von α und β

$$\alpha(x) \leq y \leq \beta(x),$$

also $(x,y) \in A$. Die Folge (x_j, y_j) hat also einen Häufungspunkt in A, also ist A kompakt.

2. f integrierbar über A folgt aus 2.8.

3. f(x,y) als Funktion von y elementar integrierbar folgt aus 2.9.4 und 2.9.5.

Unter Umständen kann das Integral über X in analoger Weise durch ein eindimensionales und ein (n-1)dimensionales Integral ausgedrückt werden, usw.

3.3.3 <u>Beispiel:</u> Wir wollen das Volumen der Kugel in $\underline{\underline{R}}^3$ ausrechnen, d. h. m(A) bestimmen für

$$A \underset{Df}{=} \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\} \subset \underline{\underline{R}}^3$$

für ein beliebiges $r \in R$. Wir erhalten:

$$m(a) = \int_A 1 \, dx\, dy\, dz = \int_{x^2+y^2 \leq r^2} \left[\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1 \, dz \right] dx\, dy =$$

$$= 2 \int_{x^2+y^2 \leq r^2} \sqrt{r^2-x^2-y^2} \, dx\, dy = 2 \int_{-r}^{r} \left[\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2} \, dy \right] dx.$$

Dies kann weiter ausgerechnet werden. Einfacher ist jedoch folgender Weg, wobei 3.3.1 mit $n = 1$, $m = 2$ angewandt wird:

$$m(A) = \int_A 1 \, dx\, dy\, dz = \int_{-r}^{r} \left[\int_{y^2+z^2 \leq r^2-x^2} 1 \, dy\, dz \right] dx =$$

$$= \int_{-r}^{r} \pi \, (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi r^3$$

(Das innere Integral im 3. Term bedeutet ja nichts anderes als die Fläche eines Kreises vom Radius $\sqrt{r^2 - x^2}$.)

3.4 <u>Das Cavalierische Prinzip.</u>

Dieses Prinzip wird häufig zur Volumenberechnung herangezogen. Es besagt anschaulich, daß zwei Körper gleicher Höhe genau dann gleiches Volumen haben, wenn die Schnittflächen bei Schnitten in gleicher Höhe gleichen Flächeninhalt haben. Die genaue Formulierung lautet:

Satz: Seien A und B integrierbare Mengen in $\underline{\underline{R}}^{n+m}$, für alle $x \in \underline{\underline{R}}^n$ sei $A_x \overset{Df}{=} \{y \mid (x,y) \in A\} \subset \underline{\underline{R}}^m$ und $B_x \overset{Df}{=} \{y \mid (x,y) \in B\} \subset \underline{\underline{R}}^m$. Ist $m(A_x) = m(B_x)$ fast überall in $\underline{\underline{R}}^n$, so ist $m(A) = m(B)$.

(Aus dem Satz von Fubini folgt insbesondere, daß $m(A_x)$ und $m(B_x)$ fast überall in $\underline{\underline{R}}^n$ existieren.)

Beweis:

$$m(A) = \int_A 1 \; dx\, dy = \int_{\underline{\underline{R}}^n} \left[\int_{A_x} 1 \cdot dy \right] dx = \int_{\underline{\underline{R}}^n} m(A_x)\, dx$$

$$m(B) = \int_B 1 \; dx\, dy = \int_{\underline{\underline{R}}^n} \left[\int_{B} 1 \; dy \right] dx = \int_{\underline{\underline{R}}^n} m(B_x)\, dx$$

3.5 Bemerkung zur Schreibweise

Bei mehrfachen Integralen werden wir häufig die folgende Schreibweise verwenden:

$$\int dx \int F(x,y)\; dy;$$

das soll dasselbe bedeuten wie:

$$\int \left[\int F(x,y) dy \right] dx.$$

§ 4. Der Transformationssatz.

4.1 Volumen eines Parallelotops.

In der Analytischen Geometrie wird der Volumenbegriff folgendermaßen eingeführt:

Seien $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^n$. Diese Vektoren spannen das Parallelotop

$$P = P(x_1,\dots,x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, 0 \le \lambda_i \le 1 \right\}$$

auf. Es soll eine reelle Zahl $V(x_1,\dots,x_n)$ als Volumen von P definiert werden. Läßt man für das Volumen auch negative Werte zu, wobei das Vorzeichen von der Orientierung von P abhängt, so ergeben sich aus der intuitiven Vorstellung folgende Bedingungen an die Funktion V:

(1) $V(x_1,\dots,x_{i-1}, x_i+y_i, x_{i+1},\dots,x_n) =$

$$V(x_1,\dots,x_n) + V(x_1,\dots,x_{i-1}, y_i, x_{i+1},\dots,x_n) \quad i=1,\dots,n$$

(2) $V(x_1,\dots,\lambda x_i,\dots,x_n) = \lambda\, V(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$, $i = 1,\dots,n$,

(3) $V(x_1,\dots,x_n) = 0$ für linear abhängige $x_1,\dots,x_n$,

(4) $V(e_1,\dots,e_n) = 1$ für die Einheitsvektoren $e_i = (\delta_{ij} \mid j=1,\dots,n)$, $i=1,\dots,n$.

Die Eigenschaften (1) und (2) kann man unter dem Begriff „multilinear" zusammenfassen, (3) bedeutet „antisymmetrisch", d.h. aus (3) folgt: Vertauscht man zwei Vektoren in der Folge $(x_1,\dots,x_n)$, so ändert die Funktion V ihr Vorzeichen. (4) stellt eine Normierung dar.

Es gilt dann:

<u>Satz 1:</u> Hat V die Eigenschaften (1) - (4), so ist

$$V(x_1,\ldots,x_n) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>Satz 2. Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und $(u_{ij} \mid i,j = 1,\ldots,n)$ die zugehörige $(n\times n)$-Matrix, d.h. $u(e_j) = \sum_i u_{ij}\, e_i$. Dann gilt für alle $x_1,\ldots,x_n$:</u>

$$V(u(x_1),\ldots, u(x_n)) = \mathrm{Det}\,(u_{ij})\; V(x_1,\ldots,x_n).$$

Die Beweise werden in der Analytischen Geometrie geführt.

Satz 2 besagt, daß sich das Volumen (eines Parallelotops) bei einer linearen Abbildung mit der Determinante multipliziert. Das erklärt, warum im folgenden Transformationssatz für Integrale die Funktionaldeterminante auftritt – jedenfalls dann, wenn man annimmt, daß der absolute Betrag von $V(x_1,\ldots,x_n)$ mit dem Lebesgueschen Maß von $P(x_1,\ldots,x_n)$ übereinstimmt. Es wird sich herausstellen, daß das tatsächlich der Fall ist (4.2.3, Folg. 3).

4.2 <u>Formulierung des Transformationssatzes</u>

4.2.1 <u>Definitionen:</u> Sei A offen in $\mathbb{R}^n$ und $t : A \to \mathbb{R}^m$. t heißt <u>C^r-Abbildung</u>, wenn t in A r-mal stetig differenzierbar ist. t heißt <u>C^r-Immersion</u> ($r \geq 1$), wenn außerdem für jedes $a \in A$ das Differential $d_a t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ injektiv ist, d.h. wenn die Jacobische Funktionalmatrix $Jt(a)$ den Rang n hat. Das kann nur für $n \leq m$ gelten. Ist sogar $n = m$, so ist es mit $\mathrm{Det}\, Jt(a) \neq 0$ gleichbedeutend. Man nennt dann t auch <u>regulär.</u>

Sei nun auch B offen in $\underline{\underline{R}}^n$. $t : A \to B$ heißt <u>C^r-Diffeomorphismus</u>, wenn t bijektiv ist und sowohl t als auch seine Umkehrung t^{-1} C^r-Abbildungen sind. Ist t eine bijektive C^r-Abbildung, so ist t^{-1} genau dann eine C^r-Abbildung, wenn t regulär ist.

4.2.2 <u>Transformationssatz.</u>

<u>Voraussetzung: A, B seien offen in $\underline{\underline{R}}^n$, und $t : A \to B$ sei ein C^1-Diffeomorphismus.</u>

<u>Behauptung: Ist f eine über B integrierbare (komplexwertige) Funktion (insbesondere liegt also B im Definitionsbereich von f), so gilt</u>

$$\int_B f = \int_A (f \circ t) \cdot |\operatorname{Det} Jt| ,$$

<u>d.h. in anderer Schreibweise</u>

$$\int_B f(y)dy = \int_A f(t(x)) \left| \frac{\partial (y_1, \ldots, y_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} \right| dx \text{ mit } y = t(x).$$

<u>Insbesondere wird damit behauptet, daß das Integral auf der rechten Seite existiert.</u>

4.2.3 <u>Folgerung 1. Ist (unter der Voraussetzung des Transformationssatzes) $X \subset A$ und f über tX integrierbar, so ist</u>

$$\int_{tX} f = \int_X (f \circ t) \cdot |\operatorname{Det} Jt| .$$

<u>Beweis:</u> Man wendet den Transformationssatz auf die Funktion $g : B \to \underline{\underline{C}}$ an, wobei

$$g(y) = \begin{cases} f(y), & y \in tX \\ 0, & y \in B - tX. \end{cases}$$

Sei nun $t : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{R}}^n$ eine affine Abbildung. Dann gilt $t(x) = b + t'(x)$ mit $b \in \underline{\underline{R}}^n$ und einer linearen Abbildung t'. Für jedes $a \in \underline{\underline{R}}^n$ ist $d_a t = d_a t' = t'$, also $Jt(a)$ die zu t' gehörige Matrix (unabhängig von a!). Für ihre Determinante schreiben wir auch kurz Det t. Es ist Det $t \neq 0$ genau dann, wenn t bijektiv ist und daher eine affine Umkehrung hat. Wir nennen t dann affine Äquivalenz. Als Spezialfall von Folgerung 1 haben wir:

Folgerung 2. Sei $t : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{R}}^n$ eine affine Äquivalenz.
((1)) Ist $X \subset \underline{\underline{R}}^n$ und f über tX integrierbar, so ist

$$\int_{tX} f = |\mathrm{Det}\ t| \int_X f \circ t .$$

((2)) Ist $X \subset \underline{\underline{R}}^n$ und X integrierbar, so ist

$$m(tX) = |\mathrm{Det}\ t|\, m(X).$$

Insbesondere ist $m(tX) = m(X)$, wenn $|\mathrm{Det}\ t| = 1$, also z. B. wenn t eine Bewegung (= isometrische Abbildung) ist. Ist t affin mit Det $t = 0$, so ist tX in einem $(n-1)$-dimensionalen affinen Unterraum von $\underline{\underline{R}}^n$ enthalten. Durch eine Bewegung kann man erreichen, daß er achsenparallel wird. Daraus folgt $m(tX) = 0$.

Folgerung 3. Für jedes Parallelotop $P(x_1,\dots,x_n)$ ist

$$mP(x_1,\dots,x_n) = |V(x_1,\dots,x_n)| \text{ (vgl. 4.1).}$$

<u>Beweis:</u> Sei $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung mit $t(e_i) = x_i$. Dann ist $P(x_1,\dots,x_n) = tP(e_1,\dots,e_n)$, also $mP(x_1,\dots,x_n) = |\mathrm{Det}\ t|\ mP(e_1,\dots,e_n) = |\mathrm{Det}\ t| = |V(x_1,\dots,x_n)|$ nach 4.1 Satz 1 (oder 2).

4.3 <u>Beweis des Transformationssatzes:</u>

4.3.1 Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt und enthält eine noch genauer zu erläuternde Induktion über n. Die Voraussetzung, daß $t : A \to B$ ein C^1-Diffeomorphismus ist, wird von jetzt an generell gemacht. Unter einem Quader verstehen wir im folgenden grundsätzlich eine Menge der Form

$$\{x \mid a_i \le x_i \le b_i \quad \text{für alle } i = 1,\dots,n\}\ a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

(also einen „achsenparallelen" kompakten Quader).

4.3.2 <u>Hilfssatz: Für jeden Quader $Q \subset A$ und jede auf tQ stetige Funktion f gilt</u>

$$\int_{tQ} f = \int_Q (f\circ t)|\mathrm{Det}\ Jt|$$

(also die Behauptung von 4.2.3 Folg. 1).

<u>Bemerkung:</u> Da es sich um stetige Funktionen auf kompakten Mengen handelt, ist hier die Existenz der Integrale von vornherein gesichert.

<u>Folgerung 1. Hat Q kleinere Dimension als n (d.h. $a_i = b_i$ für mindestens ein i), so ist $m(tQ) = 0$.</u>

<u>Beweis des Hilfssatzes:</u> Sei zunächst n = 1. Dann ist $Q = [a,b]$. Es ist $t'(x) = \mathrm{Det}\ Jt(x) \neq 0$ für alle $x \in A$, also entweder > 0 für alle $x \in Q$ oder < 0 für alle $x \in Q$. Im ersten Fall gilt

$$\int_{tQ} f = \int_{ta}^{tb} f(y)dy = \int_a^b f(t(x))\, t'(x)dx = \int_Q (f\circ t)\, t'$$

nach der Substitutionsregel für das Elementarintegral bei einer Veränderlichen. Im zweiten Fall analog

$$\int_{tQ} f = \int_{tb}^{ta} f(y)dy = \int_b^a f(t(x))\, t'(x)dx = -\int_Q (f\circ t)\, t'.$$

Sei also von jetzt an $n > 1$. Wir beweisen die Behauptung zunächst für genügend kleine Quader Q:

Sei $a \in A$. Wegen $\operatorname{Det} Jt(a) \neq 0$ enthält $Jt(a)$ mindestens ein von 0 verschiedenes Element. O.B.d.A. können wir $D_n t_n(a) \neq 0$ annehmen.

Ist nun $b = (b_1,\ldots,b_n) = t(a)$, so folgt, daß sich die Gleichung

$$y_n = t_n(x_1,\ldots,x_n)$$

in einer Umgebung von $x = a$ und $y_n = b_n$ nach x_n auflösen läßt. Genauer:

Wir betrachten die Abbildung $u : A \to \mathbb{R}^n$, die gegeben ist durch:

$$u_i(x) = \begin{cases} x_i & \text{für } i = 1,\ldots,n-1 \\ t_n(x) & \text{für } i = n \end{cases}$$

Es ergibt sich:

$$Ju = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \\ D_1 t_n & \ldots\ldots & & D_n t_n \end{pmatrix}$$

und daher $\operatorname{Det} Ju = D_n t_n$. Die Abbildung u ist also an der Stelle a lokal umkehrbar, d. h. es gibt offene Umgebungen

U von a und V von $(a_1,\dots,a_{n-1},b_n)$. so daß

$$u : U \to V$$

ein C^1-Diffeomorphismus ist. Es gibt also eine (mindestens einmal) stetig differenzierbare Umkehrung $u^{-1} : V \to U$ von u.

Sei $v := (t|U)\circ u^{-1} : V \to B$, also $t|U = v\circ u$ (v läßt sich auffassen als C^1-Diffeomorphismus $v : V \to W_{Df}=$ Bild $v \subset B$; für $x \in U$ und $y = t(x)$ gilt:

$$\begin{tikzcd}
(x_1,\dots,x_n) \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "t"'] & & (x_1,\dots,x_{n-1},y_n) \arrow[dl, "v"] \\
& (y_1,\dots,y_n). &
\end{tikzcd}$$

)

Ist nun $Q \subset U$, so gilt:

$$\int_Q (f\circ t)\,|\mathrm{Det}\ Jt| =$$

$$= \int_Q (f\circ v\circ u)\,(|\mathrm{Det}\ Jv|\circ u)\,|\mathrm{Det}\ Ju|$$

(Kettenregel $\Rightarrow Jt = (Jv\circ u)\cdot Ju$)

$$= \int_Q (g\circ u)\,|\mathrm{Det}\ Ju| \quad (g \underset{Df}{=} (f\circ v)\cdot|\mathrm{Det}\ Jv|,$$

g ist stetig auf $u(Q)$)

$$= \int_Q g(x_1,\dots,x_{n-1},\ t_n(x))\cdot|D_n t_n(x)|\,dx_1\dots dx_n$$

$$Q = Q_n = Q_{n-1} \times Q_1,\ Q_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1};\ Q_1 \subset \mathbb{R}$$

$$= \int_{Q_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{Q_1} g(x_1, \dots, x_{n-1}, t_n(x)) \cdot |D_n t_n(x)| \quad \text{(Fubini)}$$

$$= \int_{Q_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{t_n(x_1, \dots, x_{n-1}, Q_1)} g(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n) dy_n$$

(Anwendung des Hilfssatzes im schon bewiesenen Fall $n = 1$)

$$= \int_{u(Q)} g(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n) \, dx_1 \dots dx_{n-1} \, dy_n$$

(nach Fubini; das Integral existiert,
da g stetig und $u(Q)$ kompakt)

$$= \int_{u(Q)} g = \int_{u(Q)} (f \circ v) \cdot |\mathrm{Det}\, Jv| .$$

Um von hier aus weiter zu rechnen, definieren wir für jedes $M \subset \mathbb{R}^n$

$$M_y = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, y) \in M\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

(„Schnitt in der Höhe y"). Der C^1-Diffeomorphismus $v : V \to W \subset B$ hat die Eigenschaft $v_n(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = y$, liefert also eine bijektive Abbildung

$$v_y : V_y \longrightarrow W_y \subset B_y$$

mit

$$(v_y)_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = v_i(x_1, \dots, x_{n-1}, y), \; i = 1, \dots, n-1.$$

Daraus entnimmt man

$$Jv = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & Jv_y & & * \\ & & & \vdots \\ & & & * \\ \hline 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \end{array}\right),$$

also $\mathrm{Det}\, Jv = \mathrm{Det}\, Jv_y \neq 0$. Daher ist v_y ein C^1-Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^{n-1}$. Wir machen nun die Induktionsannahme, daß der Transformationssatz für n-1 anstelle von n gilt. Dann gilt auch die Folgerung 1 aus 4.2 in dieser Dimension. Indem wir sie auf v_y anwenden, erhalten wir

$$\int_{u(Q)} (f\circ v)\cdot|\mathrm{Det}\, Jv| =$$

$$= \int_{u(Q)} f(v_y(x_1,\dots,x_{n-1}),y)\cdot|\mathrm{Det}\, Jv_y|\; dx_1\dots dx_{n-1}dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dy \int_{u(Q)_y} f(v_y(x_1,\dots,x_{n-1}),y)\cdot|\mathrm{Det}\, Jv_y|\; dx_1\dots dx_{n-1} \qquad \text{(Fubini)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dy \int_{v_y(u(Q)_y) = (vu(Q))y} f(y_1,\dots,y_{n-1},y)\; dy_1\dots dy_{n-1} \quad \text{(Induktionsannah}$$

$$= \int_{vu(Q)=t(Q)} f \qquad \text{(Fubini).}$$

Damit ist der Hilfssatz für alle Quader $Q \subset U$ bewiesen. Sei nun Q ein beliebiger Quader $\subset A$. Dann gibt es zu jedem $a \in Q$

eine offene Umgebung U_a mit der Eigenschaft von U. Da Q kompakt ist, gibt es eine Lebesguesche Zahl $\epsilon > 0$ für die Überdeckung $(U_a \mid a \in Q)$ von Q. Durch achsenparallele Hyperebenen zerlegt man Q so in endlich viele Teilquader $Q_1, \ldots, Q_l$, daß der Durchmesser von jedem Q_j kleiner als ϵ ist, also jedes Q_j in einem geeigneten U_a liegt. Ist nun f stetig auf tQ, so folgt

$$\int_{tQ} f = \sum_{j=1}^{l} \int_{tQ_j} f = \sum_{j=1}^{l} \int_{Q_j} (f\circ t)\cdot|\mathrm{Det}\, Jt| = \int_{Q} (f\circ t)\cdot|\mathrm{Det}\, Jt| .$$

Dabei ist zu beachten: $Q_j \cap Q_k$ ist zwar nicht immer leer, aber es ist ein Quader von kleinerer Dimension als n, also eine Nullmenge. Ferner liegt $Q_j \cap Q_k$ ganz in einem U_a. Da für solche Quader der Hilfssatz schon bewiesen ist, ist gem. Folg. 1 auch $t(Q_j) \cap t(Q_k) = t(Q_j \cap Q_k)$ eine Nullmenge. Damit ist die letzte Rechnung gerechtfertigt und der Beweis des Hilfssatzes beendet.

4.3.3 Von hier aus kann man ziemlich schnell zeigen, daß der Transformationssatz und die Folg. 1 aus 4.2.3 gelten, wenn f auf ganz B stetig und X offen oder abgeschlossen ist. Eine offene Menge stellt man dabei als Vereinigung von abzählbar vielen Quadern dar und eine abgeschlossene als Differenz von zwei offenen. Damit der Induktionsbeweis schlüssig wird, muß man sich davon überzeugen, daß im Beweis des Hilfssatzes auch die Induktionsannahme in entsprechender Weise eingeschränkt werden kann. Das ist tatsächlich der Fall; man braucht sie sogar nur für kompaktes X.

Wir gehen nicht näher darauf ein, sondern führen den allgemeinen Beweis zu Ende. Dazu eine weitere Folgerung aus dem Hilfssatz:

<u>Folgerung 2.</u> <u>Für jeden Quader $Q \subset B$ und jede auf Q stetige Funktion f gilt</u>

$$\int_Q f = \int_{t^{-1}Q} (f \circ t) \cdot |\mathrm{Det}\ Jt| .$$

<u>Beweis:</u> Wir wenden den Hilfssatz auf t^{-1} statt t und $g = (f \circ t) \cdot |\mathrm{Det}\ Jt|$ statt f an. Dann ist

$$\int_{t^{-1}Q} g = \int_Q (g \circ t^{-1}) \cdot |\mathrm{Det}\ Jt^{-1}| = \int_Q f .$$

Die letzte Gleichung gilt wegen

$$Jt(t^{-1}y) \cdot Jt^{-1}(y) = J(tt^{-1})(y) = \text{Einheitsmatrix}.$$

4.3.4 Um den Transformationssatz für beliebige integrierbare Funktionen zu beweisen, benutzen wir Approximation durch Treppenfunktionen. Dafür ist eine abkürzende Schreibweise zweckmäßig: Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definieren wir $Tf : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ durch

$$(Tf)(x) = \begin{cases} f(t(x)) \cdot |\mathrm{Det}\ Jt(x)|, & x \in A \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n - A. \end{cases}$$

Dann ist der Transformationssatz äquivalent mit der Aussage: Für jede integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, die außerhalb von B verschwindet, ist auch Tf integrierbar und $L(Tf) = L(f)$.

T kann man als Abbildung $F \to F$ auffassen, wobei F der Vektorraum aller Funktionen $\underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ ist. T ist linear, d.h.

$$\text{(a)}\quad T(f+g) = Tf + Tg$$
$$T(cf) = cTf, \qquad c \in \underline{\underline{C}}$$

und hat außerdem folgende Eigenschaften:

(b) $|Tf| = T|f|$.

(c) Für Funktionen $f, f_1, f_2, \ldots\ldots$ mit nicht-negativen reellen Werten gilt

$$f \le \sum_{k=1}^{\infty} f_k \Rightarrow Tf \le \sum_{k=1}^{\infty} Tf_k$$

(wobei die unendlichen Summen den Wert ∞ haben dürfen).

Die Beweise für (a), (b) und (c) ergeben sich unmittelbar aus der Definition von T.

4.3.5 Für eine beliebige Funktion $f : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ versteht man unter dem <u>Träger von f</u> die Menge

$$\operatorname*{Tr}_{Df} f = \text{abgeschlossene Hülle von } \{x \mid f(x) \neq 0\}.$$

<u>Hilfssatz: Seien $K \subset U \subset \underline{\underline{R}}^n$, K kompakt, U offen in $\underline{\underline{R}}^n$. Dann gilt:</u>

(a) <u>Jeder (kompakte achsenparallele) Quader Q läßt sich durch achsenparallele Hyperebenen so in endlich viele (kompakte) Quader zerlegen, daß</u>

$$Q_j \cap K \neq \emptyset \Rightarrow Q_j \subset U$$

(b) <u>Zu jeder Treppenfunktion $\varphi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ gibt es eine Treppenfunktion ψ, so daß</u>

$\operatorname{Tr} \psi \subset U$

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{für } x \in K \\ \varphi(x) \text{ oder } 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>Beweis:</u>

<u>Zu (a):</u> Man fasse U als offene Überdeckung (bestehend aus einer Menge) von K auf: dann gibt es zu dieser Überdeckung eine Lebesguesche Zahl $\varepsilon > 0$ (d.h. der Abstand von K und $\underline{\underline{R}}^n - U$ ist $\geq \varepsilon$). Nun wähle man die Zerlegung so, daß der Durchmesser von Q_j für jedes j kleiner als ε ist.

<u>Zu (b):</u> Wir wählen einen Quader Q mit $\operatorname{Tr} \varphi \subset Q$ und zerlegen ihn gemäß (a). Sei K' die Vereinigung aller Q_j mit $Q_j \cap K \neq \emptyset$. Dann ist K kompakt und $K \subset K' \subset U$. Die durch

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in K' \\ 0 \quad , & x \notin \underline{\underline{R}}^n - K' \end{cases}$$

definierte Funktion hat die gewünschten Eigenschaften.

4.3.6 Jetzt können wir den Transformationssatz für gewisse Treppenfunktionen beweisen:

<u>Hilfssatz: Sei $\varphi : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ eine Treppenfunktion mit $\operatorname{Tr} \varphi \subset B$. Dann ist $T\varphi$ integrierbar und $L(T\varphi) = L(\varphi)$.</u>

<u>Beweis:</u> Nach der Definition einer Treppenfunktion gibt es einen Quader Q, der $\operatorname{Tr} \varphi$ enthält, und dieser läßt sich in endlich viele Teilquader Q' zerlegen, so daß φ im Inneren jedes Q konstant ist. Da der Träger einer Treppenfunktion kompakt ist, lassen sich diese Quader Q' nach 4.3.5 Hilfssatz (a) noch weiter in Teilquader Q" zerlegen, so daß gilt:

a) $Q'' \cap \operatorname{Tr}\varphi \neq \emptyset \Rightarrow Q' \subset B$.

Für diese Q'' gilt natürlich auch:

b) φ ist im Inneren von Q'' konstant.

Die endlich vielen Q'' mit $Q'' \cap \operatorname{Tr}\varphi \neq \emptyset$ werden mit $Q_1,\dots,Q_l$ bezeichnet. Sei z_j $(j = 1,\dots,l)$ der für alle x aus dem Inneren von Q_j konstante Wert von $\varphi(x)$; dann folgt:

$$L(\varphi) = \sum_{j=1}^{l} \int_{Q_j} z_j = \sum_{j=1}^{l} \int_{t^{-1}Q_j} z_j \cdot |\operatorname{Det} Jt| \quad \text{(nach 4.3.3, Folg. 2)}$$

$$= \sum_{j=1} \int_{t^{-1}Q_j} (\varphi \circ t) \cdot |\operatorname{Det} Jt|$$

(weil sich der Integrand vom vorigen höchstens auf der Nullmenge t^{-1} (Rand Q_j) unterscheidet; s. 4.3.2, Folg. 1)

$$= \int_{\bigcup_j t^{-1}Q_j} (\varphi \circ t)|\operatorname{Det} Jt|$$

(weil $t^{-1}Q_j \cap t^{-1}Q_k = t^{-1}(Q_j \cap Q_k)$ für $j \neq k$ eine Nullmenge ist)

$$= L(T\varphi) \quad \text{(wegen } \operatorname{Tr} T\varphi \subset t^{-1}\operatorname{Tr}\varphi \subset t^{-1}\bigcup_j Q_j = \bigcup_j t^{-1}Q_j\text{)}.$$

4.3.7. <u>Hilfssatz.</u> <u>Sei $f : \underline{R}^n \to C$ eine Funktion mit kompaktem in B enthaltenem Träger. Dann ist $\|Tf\| \le \|f\|$.</u>
(Diese Ungleichung gilt auch ohne Voraussetzung über $\operatorname{Tr} f$, was wir jedoch weder beweisen noch benutzen werden.)

<u>Beweis:</u> Sei

$$|f| \le \sum_k a_k \varphi_{Q_k},$$

$a_k \ge 0$, Q_k offener (!) Quader, k durchläuft $1,2,\dots,l$ oder alle natürlichen Zahlen.

(Wir müssen hier offene Quader nehmen, um mit der Definition der L_1-Norm in Einklang zu bleiben.) φ_{Q_k} ist eine Treppenfunktion; nach 4.3.5 Hilfssatz (b) gibt es eine Treppenfunktion ψ_k, die nur die Werte 0,1 annimmt und für die gilt:

(1) $\quad \operatorname{Tr} \psi_k \subset B$

(2) $\quad \psi_k(x) = \varphi_{Q_k}(x)$ für $x \in \operatorname{Tr} f$

(3) $\quad \psi_k \leq \varphi_{Q_k}$.

Aus (2) folgt

$$|f| \leq \sum_k a_k \psi_k,$$

also

$$|Tf| = T|f| \leq \sum_k T(a_k \psi_k) = \sum_k a_k (T\psi_k) \qquad \text{(nach 4.3.4 (b), (c) bzw. (a))},$$

und daraus

$$\|Tf\| \leq \Big\| \sum_k a_k (T\psi_k) \Big\|$$

$$\leq \sum_k a_k \, \|T\psi_k\| \quad \text{(nach der „Unendlicheck-Ungleichung")}$$

$$= \sum_k a_k \, L(T\psi_k) = \sum_k a_k \, L(\psi_k) \quad \text{(nach 4.3.6 und weil } \psi_k \geq 0)$$

$$\leq \sum_k a_k |Q_k| \quad \text{(denn wegen (3) ist } L\psi_k \leq L\varphi_{Q_k} = |Q_k|).$$

Weil $\| f \|$ nach Definition die untere Grenze dieser Zahlen ist, folgt die Behauptung.

4.3.8. Dieses Ergebnis erlaubt es, den Hilfssatz in 4.3.6 durch Approximation auszudehnen:

<u>Hilfssatz. Sei $f : \underline{\underline{R}}^n \to C$ eine integrierbare Funktion mit kompaktem in B enthaltenem Träger. Dann ist Tf integrierbar und $L(Tf) = L(f)$.</u>

<u>Beweis:</u> Es gibt eine Folge von Treppenfunktionen φ_j mit $\lim_{j\to\infty} \| f - \varphi_j \| = 0.$

Nach 4.3.5 Hilfssatz (b) gibt es für jedes j eine Treppenfunktion ψ_j, so daß

$$\mathrm{Tr}\, \psi_j \subset B$$

$$\psi_j(x) = \begin{cases} \varphi_j(x) & \text{für } x \in \mathrm{Tr}\, f \\ \varphi_j(x) \text{ oder } 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt $|f - \psi_j| \leq |f - \varphi_j|$ und daher

$$\begin{aligned} \|Tf - T\psi_j\| &= \| T(f - \psi_j) \| \\ &\leq \|f - \psi_j\| \quad \text{(nach 4.3.7)} \\ &\leq \|f - \varphi_j\| \longrightarrow 0 \text{ für } j \to \infty. \end{aligned}$$

Nach 4.3.6 ist $T\psi_j$ integrierbar, also ist Tf integrierbar mit

$$L(Tf) = \lim_{j\to\infty} L(T\psi_j) = \lim_{j\to\infty} L(\psi_j) = L(f).$$

4.3.9. Nun können wir den Beweis des Transformationssatzes zu Ende führen. Sei f eine Funktion, die über B integrierbar ist. Wir wählen eine Folge von kompakten Mengen B_j, so daß

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots . \qquad \text{und } B = \bigcup_j B_j .$$

Das ist nach 2.7.4 möglich.

Sei $f_j : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{C}}$ definiert durch

$$f_j(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B_j \\ 0 \quad , & x \in \underline{\underline{R}}^n - B_j . \end{cases}$$

Dann ist

$$\int_{t^{-1}B_j} |f\circ t| \cdot |\text{Det } Jt| = L(T|f_j|)$$

$$= L(|f_j|) \quad (\text{nach 4.3.8, weil Tr } f_j \subset B_j)$$

$$= \int_{B_j} |f| \leq \int_B |f| .$$

Die Folge dieser Integrale ist also beschränkt; wegen

$$t^{-1}B_1 \subset t^{-1}B_2 \subset \ldots . \qquad \text{und } A = \bigcup_j t^{-1}B_j$$

folgt daraus

$$\int_A (f\circ t)\cdot|\text{Det } Jt| = \lim_{j\to\infty} \int_{t^{-1}B_j} (f\circ t)\cdot|\text{Det } Jt|$$

$$= \lim_{j\to\infty} L(Tf_j) = \lim_{j\to\infty} L(f_j) \quad (\text{nach } 4.3.8)$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_{B_j} f = \int_B f .$$

Damit ist der Transformationssatz bewiesen.

(Es sei noch einmal an den Gang der Induktion erinnert: Für n = 1 sind alle Beweisschritte ohne zusätzliche Annahmen durchgeführt worden. Für n > 1 haben wir im Beweis des Hilfssatzes von 4.3.2 den Transformationssatz (4.2) in der Dimension n - 1 benutzt. Jetzt haben wir ihn in der Dimension n erhalten. Der Induktionsschritt ist also durchgeführt.)

4.4 Verallgemeinerung.

4.4.1 Hilfssatz (Satz von Sard): Sei A eine offene Teilmenge in $\underline{\underline{R}}^n$, $t = (t_1,\ldots,t_n) : A \to \underline{\underline{R}}^n$ eine C^1-Abbildung und $A_o \underset{Df}{=} \{x \mid x \in A \text{ und } \operatorname{Det} Jt(x) = 0\}$. Dann ist tA_o eine Nullmenge.

Beweis: Nach 2.7.4 läßt sich A als Vereinigung von abzählbar vielen kompakten (achsenparallelen) Würfeln W darstellen. Nach 2.7.1 brauchen wir nur zu zeigen, daß $t(A_o \cap W)$ eine Nullmenge ist.

Zu $x = (x_1,\ldots,x_n)$ und $y = (y_1,\ldots,y_n)$ aus W gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung Punkte $z^1,\ldots,z^n$ auf der Verbindungsstrecke von x nach y, so daß gilt:

$$t_i(y) - t_i(x) = \sum_{j=1}^{n} D_j t_i(z^i)\,(y_j - x_j) \quad \text{für } i = 1,\ldots,n$$

Da W kompakt und t C^1-Abbildung ist, exisitert eine Lipschitzkonstante a für $t|W$, d.h.

$$(*) \quad |t(y) - t(x)| \leq a \cdot |y - x| \quad \text{für alle } x,y \in W.$$

(Man kann z.B.

$$a = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \operatorname*{Max}_{z \in W} (D_j t_i(z))^2}$$

nehmen.)

Für alle $x \in W$ bezeichne $T^x = (T_1^x,\ldots,T_n^x) : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{R}}^n$ die durch

$$T^x(y) = t(x) + d_x t(y-x) \quad \text{für alle } y \in \underline{\underline{R}}^n$$

gegebene Abbildung.

Daraus erhalten wir für $y \in W$

$$t_i(y) - T_i^x(y) = \sum_{j=1}^{n} \{D_j t_i(z^i) - D_j t_i(x)\}\,(y_j - x_j)$$

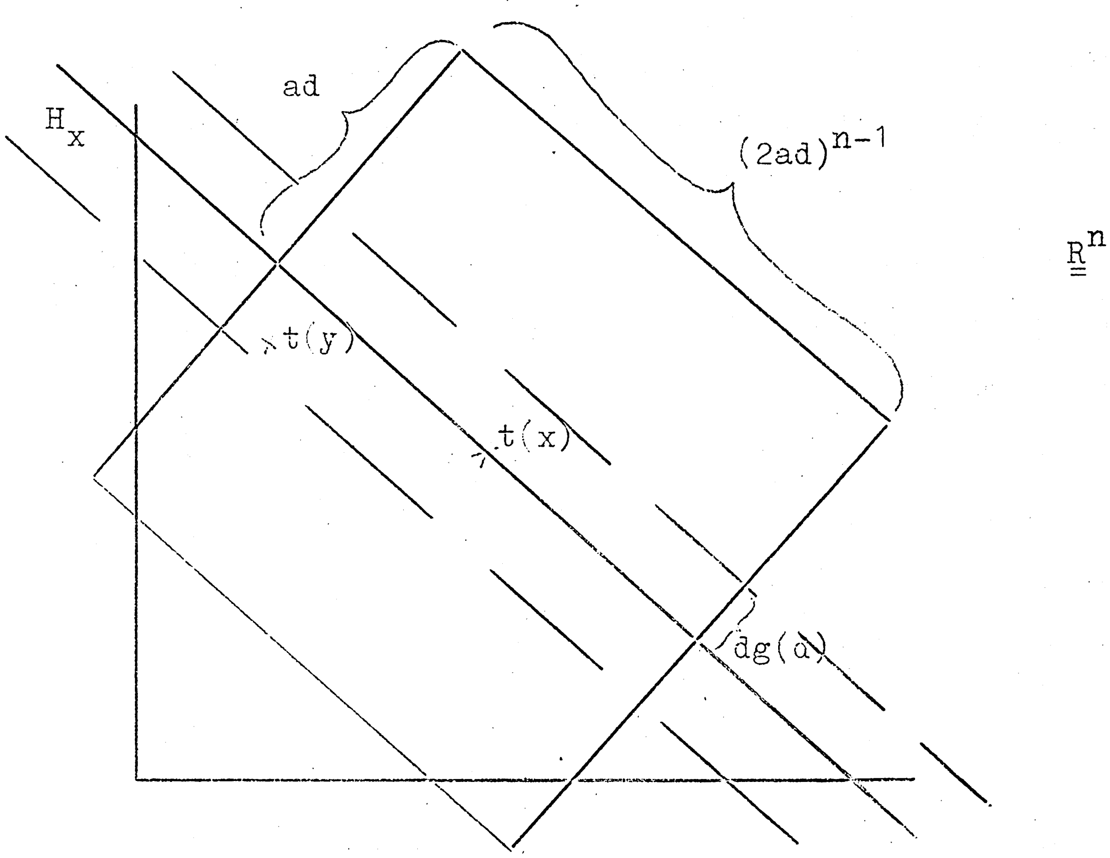
für $i = 1,\dots,n$ und schließen auf die Existenz einer monoton wachsenden Funktion $g : [0,\infty[\to [0,\infty[$, für die gilt:

$$\lim_{r \to 0} g(r) = 0$$

und

$$(**) \quad |t(y) - T^x(y)| \leq |y - x| \, g(|y - x|).$$

Ist $x \in A_0 \cap W$, so bildet T^x den $\underline{\underline{R}}^n$ in eine Hyperebene $H_x \subset \underline{\underline{R}}^n$ ab. Wählen wir $|y - x| < d$, wobei d eine beliebige positive, reelle Zahl ist, so folgt aus der Gleichung $(*)$, daß $t(y)$ $(y \in W)$ in einem zu H_x parallelen Würfel mit dem Mittelpunkt $t(x)$ und der Kantenlänge $2ad$ liegt. Aus der Gleichung $(**)$ folgt noch, daß der Abstand des Punktes $t(y)$ von H_x kleiner gleich $d \cdot g(d)$ ist, also liegt $t(y)$ in einem zu H_x parallelen Quader um $t(x)$ vom Inhalt $2^n \, d^n \, a^{n-1} \, g(d)$ (Vgl. Figur).



Sei nun b die Kantenlänge von W. Wir zerlegen W durch achsenparallele Hyperebenen in kompakte Teilwürfel W_i^j ($j = 1,2,\ldots,\ i = 1,\ldots,2^{jn}$) der Kantenlänge $b \cdot 2^{-j}$ (vgl. auch 2.7.4). Ist für ein i ($1 \leq i \leq 2^{jn}$) $A_o \cap W_i^j \neq \emptyset$, so ist

$$m(tW_i^j) \leq 2^n\ a^{n-1}\ n^{n/2}\ b^n\ 2^{-jn}\ g(b\sqrt{n}/2^j)$$

(Ist nämlich $x \in A_o \cap W_i^j$, so gilt für alle $y \in W_i^j$

$$|y - x| \leq b\ \sqrt{n}/2^j\ ).$$

Sei nun $L_j\ {}_{Df}\!= \{i \mid 1 \leq i \leq 2^{jn} \text{ und } A_o \cap W_i^j \neq \emptyset\}$

Für die Mengen V_j ($j = 1,2,\ldots.$), die definiert sind durch

$$V_j\ {}_{Df}\!= \bigcup_{i \in L_j} W_i^j,$$

erhalten wir nun:

$$tV_1 \supset tV_2 \ldots . \supset \bigcap_{j=1}^{\infty} tV_j =_{Df} V \supset t(A_o \cap W)$$

und

$$m(tV_j) \leq 2^n\ a^{n-1}\ n^{n/2}\ b^n\ g(b\sqrt{n}/2^j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Aus dem absteigenden Kettensatz (2.7.3) folgt:

$$m(V) = \lim_{j\to\infty} m\ (tV_j) = 0;$$

daher ist erst recht $t(A_o \cap W)$ eine Nullmenge (s. 2.5.5). (Eine Verallgemeinerung dieses Satzes und den gesamten Beweis findet man in [S] 2. Kap. § 3).

4.4.2 <u>Hilfssatz: Ist A offen in $\underline{\underline{R}}^n$, $t : A \to \underline{\underline{R}}^n$ eine C^1-Abbildung und $N \subset A$ eine Nullmenge, so ist auch tN eine Nullmenge.</u>

<u>Beweis:</u> Sei $A_0 \;{}_{Df}\!\!= \{x \mid x \in A \text{ und } \operatorname{Det} Jt(x) = 0\}$.
Dann ist $t(A_0 \cap N)$ nach 4.4.1 eine Nullmenge. Es genügt also zu zeigen, daß $t(N - A_0)$ eine Nullmenge ist. Da $A - A_0$ offen ist, läßt es sich als Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Mengen W darstellen (2.7.4). Nach 2.7.1 brauchen wir nur zu zeigen, daß $t(N \cap W)$ eine Nullmenge ist. Für alle $x \in A - A_0$ ist $\operatorname{Det} Jt(x) \neq 0$, es gibt also zu jedem $x \in A - A_0$ eine offene Umgebung $U_x \subset A - A_0$, so daß $t|U_x$ ein C^1-Diffeomorphismus ist. Außerdem ist $W \subset \bigcup_{x \in A - A_0} U_x$, und da W kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_s \in A - A_0$, so daß

$$W \subset \bigcup_{l=1}^{s} U_{x_l} .$$

Wir haben weiter:

$$W \cap N \subset \bigcup_{l=1}^{s} (U_{x_l} \cap N).$$

Es genügt demnach, zu zeigen, daß $t(U_{x_l} \cap N)$ $(l = 1, \dots, s)$ eine Nullmenge ist. Das folgt aber aus 4.2.3 Folgerung 1, da wir auf $t|U_{x_l}$ $(l = 1, \dots, s)$ den Transformationssatz anwenden können (s. auch 2.7.2).

4.4.3 Wir können jetzt den Transformationssatz verallgemeinern:

<u>Satz: Sei U offen in $\underline{\underline{R}}^n$ und $t : U \to \underline{\underline{R}}^n$ C^1-Abbildung.</u>

<u>Sei ferner $A \subset U$, $B \subset \underline{\underline{R}}^n$ mit $tA \subset B$ und $m(B-tA) = 0$, $A_{o\ Df}= \{x \mid x \in A$ und $\mathrm{Det}\ Jt(x) = 0\}$ und A' eine offene Teilmenge in $\underline{\underline{R}}^n$ mit: $A' \subset A$, $t|A'$ injektiv und $m(A-(A' \cup A_o)) = 0$. Dann gilt die Behauptung von 4.2.2.</u>

<u>Beweis:</u>

$$A''_{Df}= A' - A_o$$

ist offen in A', und da A' offen in $\underline{\underline{R}}^n$ ist, auch offen in $\underline{\underline{R}}^n$. Da $t|A'$ injektiv ist, ist auch $t|A''$ injektiv. Außerdem gilt $Jt(x) \neq 0$ für alle $x \in A''$. Daraus folgt, daß $t(A'')$ offen ist und t einen C^1-Diffeomorphismus $A'' \to t(A'')$ induziert.

Ist f eine über B integrierbare Funktion, so ist f nach 2.5.3 und 2.7.5 auch über $t(A'')$ integrierbar, und der Transformationssatz liefert zunächst:

$(f\circ t)\cdot|\mathrm{Det}\ Jt|$ ist über A'' integrierbar, und es gilt

$$\int_{A''}(f\circ t)\cdot|\mathrm{Det}\ Jt| = \int_{tA''} f.$$

Zur Abkürzung sei $F_{Df}= (f\circ t)|\mathrm{Det}\ Jt|$. Der Definitionsbereich von F umfaßt A. A läßt sich als disjunkte Vereinigung von A'', A_o und einer Nullmenge N schreiben:

$$A = A'' \cup A_o \cup N,$$

weil nach Voraussetzung gilt:

$$m(A-(A'' \cup A_o)) = m(A-(A' \cup A_o)) = 0.$$

Wegen $F|A_o = 0$ ist F über A_o integrierbar, und es gilt:

$$\int_{A_o} F = 0.$$

Weiterhin ist F über die Nullmenge N integrierbar mit: $\int_N F = 0$ (2.7.2), und wir erhalten nach 2.1.2 die Integrierbarkeit von F über A und

$$\int_A F = \int_{A''} F + \int_{A_0} F + \int_N F = \int_{A''} F \quad .$$

Andererseits stellen wir B dar durch:

$$B = tA \cup M = tA'' \cup tA_0 \cup tN \cup M$$

mit

$$M \underset{Df}{=} B - tA.$$

M ist nach der Voraussetzung eine Nullmenge. Nach 4.4.2 ist tN, nach 4.4.1 tA_0 Nullmenge, also ist auch $tA_0 \cup tN \cup M$ und deswegen

$$B' \underset{Df}{=} tA_0 \cup tN \cup M - tA''$$

Nullmenge. Nach 2.7.2.2 ist f über B' integrierbar mit $\int_{B'} f = 0$, und B läßt sich als disjunkte Vereinigung

$$B = tA'' \cup B'$$

schreiben. 2.1.2 liefert nun

$$\int_B f = \int_{tA''} f + \int_{B'} f = \int_{tA''} f \quad ,$$

und nach dem oben Bewiesenen erhalten wir:

$$\int_B f = \int_{tA''} f = \int_{A''} (f \circ t)|\mathrm{Det}\; Jt| = \int_A (f \circ t) \circ |\mathrm{Det}\; Jt| \quad .$$

4.5 Anwendungen

(Polarkoordinaten)

4.5.1 Polarkoordinaten in $\underline{\underline{R}}^2$.

Wir setzen in 4.4.3

$U = \underline{\underline{R}}^2 = \{(r,\varphi) \mid r,\varphi \in \underline{\underline{R}}\}$

$t(r,\varphi) = (x,y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

$A = \{(r,\varphi) \mid 0 \leq r, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.

$B = \underline{\underline{R}}^2 = tA$

$A' = \{(r,\varphi) \mid 0 < r, 0 < \varphi < 2\pi\}$,

also

$tA' = \underline{\underline{R}}^2 - \{(x,y) \mid y = 0, x \geq 0\}$.

Dann erhalten wir:

$$Jt(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und Det $Jt(r,\varphi) = r \neq 0$ für $(r,\varphi) \in A'$.

t ist auf A' injektiv, und der Satz 4.4 liefert für eine über $X \subset \underline{\underline{R}}^2$ integrierbare Funktion f:

$$\int_X f(x,y)dxdy = \int_{(t^{-1}X)\cap A} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi$$

4.5.2 Beispiel: Sei $f(x,y) \underset{Df}{=} e^{-(x^2+y^2)}$ und $A_j \underset{Df}{=} [-j,j] \times [-j,j] \subset \underline{\underline{R}}^2$. Nach 2.8 ist f über A_j $(j = 1,2,\ldots)$ integrierbar, und es gilt:

$$\int_{A_j} \left| e^{-(x^2+y^2)} \right| dxdy = \int_{A_j} e^{-x^2-y^2} dxdy =$$

$$= \int_{-j}^{j} dx \int_{-j}^{j} e^{-x^2-y^2}\, dy$$ (nach dem Satz von Fubini, vgl. 3.3.1 und 3.5)

$$= \int_{-j}^{j} e^{-x^2}\, dx \int_{-j}^{j} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-j}^{j} e^{-x^2} dx \right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 < \infty$$ (das ist aus der Analysis bekannt).

Nach Satz 2.6.6 folgt daraus die Existenz des Integrals $\int_{\underline{\underline{R}}^2} e^{-(x^2 + y^2)}$ und die Gleichung

$$\int_{\underline{\underline{R}}^2} e^{-(x^2 + y^2)} = \left(\int_{\underline{\underline{R}}} e^{-x^2} \right)^2$$

(Analog schließt man auf die Gleichung

$$\int_{\underline{\underline{R}}^n} e^{-|x|^2} = \left(\int_{\underline{\underline{R}}} e^{-x^2} \right)^n \;)$$

Den Wert des Integrals $\int_{\underline{\underline{R}}^2} e^{-(x^2 + y^2)}$ wollen wir nun mit Hilfe der Polarkoordination berechnen. Nach 4.5.1 erhalten wir:

$$\int_{\underline{\underline{R}}^2} e^{-x^2 - y^2}\, dxdy = \int_A re^{-r^2}\, drd\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} re^{-r^2}\, dr$$ (nach dem Satz von Fubini 3.3.1)

$$= 2\pi \circ \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \pi.$$

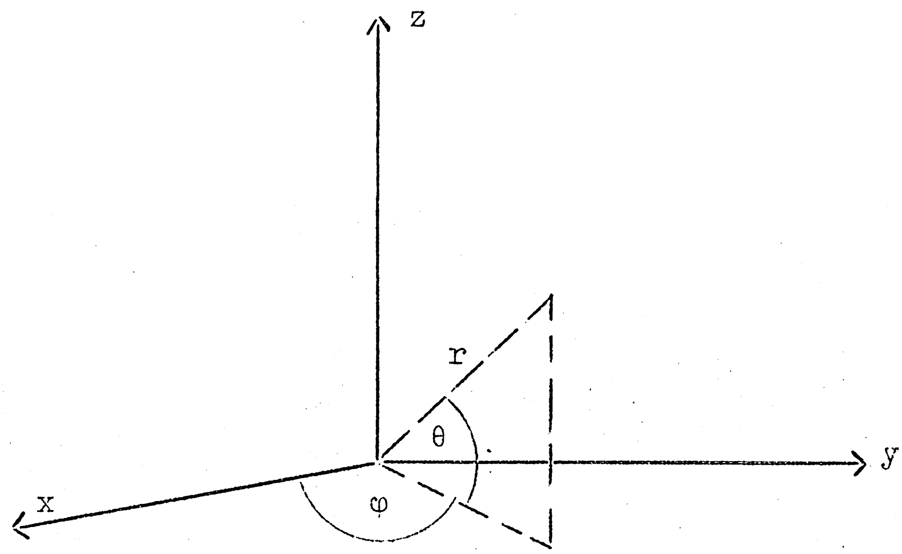
Damit haben wir auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

und

$$\int_{\underline{\underline{R}}^n} e^{-|x|^2} = (\sqrt{\pi}\,)^n .$$

4.5.3 Polarkoordinaten in $\underline{\underline{R}}^3$



Wir setzen in 4.4.3

$$U = \underline{\underline{R}}^3 = \{(r,\varphi,\theta) \mid r,\varphi,\theta \in \underline{\underline{R}}\}$$

$$t(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos\varphi \cdot \cos\theta \\ r \sin\varphi \cdot \cos\theta \\ r \sin\theta \end{pmatrix}$$

$A = \{(r,\varphi,\theta) \mid 0 \le r,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$

$B = \underline{\underline{R}}^3 = tA$

$A' = \{(r,\varphi,\theta) \mid 0 < r,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$,

also

$tA' = \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z) | y = 0,\ x \geq 0\}.$

Dann erhalten wir:

$$Jt(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cdot\cos\theta & -r\sin\varphi\cdot\cos\theta & -r\cos\varphi\cdot\sin\theta \\ \sin\varphi\cdot\cos\theta & r\cos\varphi\cdot\cos\theta & -r\sin\varphi\cdot\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{Det} Jt(r,\varphi,\theta) = \sin\theta\ r^2 \sin\theta\ \cos\theta\ +$

$+\ r\cos\theta\ r\cos^2\theta = r^2\cos\theta \neq 0$ für $(r,\varphi,\theta) \in A'$.

t ist auf A' injektiv und der Satz 4.4 liefert für eine über $X \subset \mathbb{R}^3$ integrierbare Funktion f:

$$\int_X f\,dx\,dy\,dz = \int_{(t^{-1}X)\cap A} f(r\cos\varphi\cos\theta,\dots)r^2\cos\theta\,dr d\varphi d\theta$$

4.5.4 <u>Beispiel:</u> Volumen einer Kugel vom Radius a

$$m(\bar{K}_a(0)) = \int_{\bar{K}_a(0)} 1\,dx\,dy\,dz = \int_{r\leq a} r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\,dr = 2\cdot 2\pi\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{4}{3}a^3\pi$$

4.6 <u>Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^n$, das Maß der n-dimensionalen Einheitskugel.</u>

4.6.1 <u>Definition:</u> Sei $A \subset \mathbb{R}^{n-1}\times]0,\infty[\subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ und $t: A \to B$ eine bijektive Abbildung. Die Zahlen $x_1,\dots,x_n$ heißen „<u>Polarkoordinaten</u>" des Punktes $y = t(x_1,\dots,x_n) \in B$, wenn x_n den euklidischen Abstand r des Punktes $y = (y_1,\ldots,y_n)$ vom Ursprung angibt, d.h. wenn gilt:

$$x_n = r \underset{Df}{=} |y| \underset{Df}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

<u>Bezeichnung:</u> Wir schreiben im folgenden:

$$x \underset{Df}{=} (x_1,\ldots,x_{n-1}) \in \underline{\underline{R}}^{n-1}$$

und

$$y = t(x,r) \quad \text{für } (x,r) \in \underline{\underline{R}}^{n-1} \times [0,\infty[$$

4.6.2 <u>Konstruktion von Polarkoordinaten:</u> Anschaulich können wir Polarkoordinaten für eine (später genauer zu bestimmende) Punktmenge in $\underline{\underline{R}}^n$ folgendermaßen erhalten: Sei $y \in \underline{\underline{R}}^n$. Zunächst schneiden wir die Halbgerade von 0 durch y (in $\underline{\underline{R}}^n$) mit der (n-1)-dimensionalen Einheitssphäre S^{n-1} in $\underline{\underline{R}}^n$, d.h. dem Rand der n-dimensionalen Einheits-(Voll-)Kugel in $\underline{\underline{R}}^n$, dann projezieren wir den Schnittpunkt, den wir mit $\bar{y}$ bezeichnen wollen, vom Punkt $(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-1 \text{ Stellen}},1)$ aus in den Unterraum $\underline{\underline{R}}^{n-1} \times 0$ von $\underline{\underline{R}}^n$ und erhalten einen Punkt $(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$.
Die Zahlen $x_1,\ldots,x_{n-1}$, $r = |y|$ können dann als Polarkoordinaten für den Punkt y aufgefaßt werden. Dieses Verfahren können wir auf alle Punkte der Menge $B' \underset{Df}{=} \{y \mid |y| \neq y_n\}$ anwenden und erhalten durch die Umkehrung die gewünschte Koordinaten-transformation t. Genauer erhalten wir in Formeln:

1) Zu gegebenem $y \in \underline{\underline{R}}^n$:

$$\bar{y} = \frac{1}{r}\, y \quad (r \neq 0 \text{ für alle } y \in B'!)$$

und

$$x_i = \frac{\bar{y}_i}{1-\bar{y}_n} = \frac{y_i}{r-y_n} \quad \text{für } \bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$$

$$\text{und } i = 1, \ldots, n-1$$

(Aus diesen Formeln ersieht man, warum B' auf die Menge der Punkte y mit: $|y| \neq y_n$ beschränkt werden muß.)

2) Um nun $t(x,r)$ zu gegebenem $x \in \underline{\underline{R}}^{n-1}$ und $r \in]0,\infty[$ zu erhalten, berechnen wir zunächst:

$$|x|^2 \underset{Df}{=} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{\,2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i^2}{(r-y_n)^2} = \frac{r^2 - y_n^2}{(r-y_n)^2} = \frac{r+y_n}{r-y_n}$$

und daraus

$$y_n = r \cdot \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}$$

sowie

$$y_i = x_i(r-y_n) = r\, \frac{2\, x_i}{|x|^2 + 1} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n-1 \quad ,$$

d.h. $t(x,r) = (t_1(x,r), \ldots, t_n(x,r))$ ist gegeben durch

$$(*) \quad t_i(x,r) = \begin{cases} r \cdot \dfrac{2\, x_i}{|x|^2+1} & \text{für } i = 1, \ldots, n-1 \\[2ex] r \cdot \dfrac{|x|^2-1}{|x|^2+1} & \text{für } i = n\ . \end{cases}$$

4.6.3. Wir wollen nun diese Abbildung t genauer untersuchen. Zunächst erweitern wir den Definitionsbereich von t auf den ganzen $\underline{\underline{R}}^n$, indem wir t für $r \leq 0$ auch durch die Formeln $(*)$ aus 4.6.2 definieren. t ist dann eine Abbildung $\underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{R}}^n$, allerdings nicht mehr injektiv.
Definieren wir nun eine Abbildung
$u = (u_1(x),\dots,u_n(x)):\underline{\underline{R}}^{n-1} \to \underline{\underline{R}}^n$ durch:

$$u_i(x) \underset{Df}{=} \begin{cases} \dfrac{2\,x_i}{|x|^2+1} & \text{für } i = 1,\dots,n-1 \\[2ex] \dfrac{|x|^2-1}{|x|^2+1} & \text{für } i = n \end{cases}$$

so können wir schreiben:

$$t(x,r) = r \circ u(x) \qquad \text{für alle } (x,r) \in \underline{\underline{R}}^{n-1} \times \underline{\underline{R}}$$

(Die Abbildung u bildet den $\underline{\underline{R}}^{n-1}$ bijektiv auf die Menge $S^{n-1} - (0,\dots,0,1) \subset \underline{\underline{R}}^n$ ab, d.h. u ist die Umkehrung der
(n-1 Stellen)
stereographischen Projektion von
$S^{n-1} - (0,\dots,0,1)$ auf $\underline{\underline{R}}^{n-1}$).

Für die Funktionalmatrix Jt von t gilt:

$$Jt(x,r) \underset{Df}{=} ((D_1 t)(x,r),\dots,(D_n t)(x,r))$$

mit

$$(D_i t)(x,r) = \begin{cases} r \circ (D_i u)(x) & \text{für } i = 1,\dots,n-1 \\ u(x) & \text{für } i = n \end{cases}$$

Damit erhalten wir:

$$\operatorname{Det} Jt(x,r) = \operatorname{Det}(r\cdot(D_1u)(x),\ldots, r\cdot(D_{n-1}u)(x), u(x)) =$$

$$= r^{n-1} \operatorname{Det}((D_1u)(x),\ldots,(D_{n-1}u)(x), u(x)) =$$

$$= r^{n-1} \varphi(x),$$

wobei $\varphi : \underline{\underline{R}}^{n-1} \to \underline{\underline{R}}$ durch

$$\varphi(x) \underset{Df}{=} \operatorname{Det}((D_1u)(x),\ldots,(D_{n-1}u)(x), u(x))$$

definiert ist.

Man rechnet leicht nach, daß die Vektoren $(D_1u)(x),\ldots,(D_{n-1}u)(x), u(x) \in \underline{\underline{R}}^n$ linear unabhängig sind.

Also ist $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in \underline{\underline{R}}^{n-1}$, und daraus folgt:

$$Jt(x,r) = r^{n-1} \varphi(x) \neq 0 \text{ für alle } r \neq 0.$$

4.6.4. Wir setzen in 4.4.3

$$U = \underline{\underline{R}}^n$$

$t(x,r) = r \cdot u(x)$, wie eben erklärt

$$A = \underline{\underline{R}}^{n-1} \times [0,\infty[$$

$$B = \underline{\underline{R}}^n = tA \cup \{y \,|\, |y| = y_n\}$$

$$A' = \underline{\underline{R}}^{n-1} \times]0,\infty[$$

also $tA' = B' \underset{Df}{=} \{y \,|\, |y| \neq y_n\}$.

Ist f über $Y \subset \underline{\underline{R}}^n$ integrierbar, so liefert der Transformationssatz 4.4.

$$\int_Y f = \int_{(t^{-1}Y)\cap A} (f\circ t)\cdot|\mathrm{Det}\ Jt| = \int_{(t^{-1}Y)\cap A} r^{n-1}\ f(r\cdot u(x))\cdot|\varphi(x)|$$

Im folgenden setzen wir nun voraus: Zu der gegebenen Funktion $f : Y \to \underline{\underline{C}}$ gibt es eine Funktion

$$F : [0,\infty[\to \underline{\underline{C}}\ .$$

so daß $\qquad f(y) = F(|y|)$

und es ist $\qquad Y = \bar{K}_b(0) - \bar{K}_a(0).$

(Dabei soll gelten: a, b $\in \underline{\underline{R}} \cup \{\infty\}$ und $0 \leq a < b$, sowie $\bar{K}_a(0) \ {}_{Df}{=} \{x|x \in \underline{\underline{R}}^n$ und $|x| \leq a\}$ und $\bar{K}_b(0)$ analog).
Dann ist $(t^{-1}Y)\cap A = \underline{\underline{R}}^{n-1}\times[a,b]$, und wir erhalten:

$$\int_Y f = \int_{\underline{\underline{R}}^{n-1}\times[a,b]} r^{n-1}\ F(r)\ |\varphi(x)| =$$

$$= \int_{\underline{\underline{R}}^{n-1}} |\varphi(x)|dx \int_a^b r^{n-1}\ F(r)\ dr.$$

Wenn $a = 0$ und $F(r) = 1$ (für alle $r \in [0,\infty[$), so ist $\int_Y f$ das Maß der n-dimensionalen Vollkugel vom Radius b, für das wir errechnen:

$$\int_Y f = \frac{b^n}{n} \int_{\underline{\underline{R}}^{n-1}} |\varphi(x)|dx.$$

Bezeichnen wir mit k_n das Maß der n-dimensionalen Einheitskugel in $\underline{\underline{R}}^n$, so gilt

$$n \cdot k_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(x)|\,dx.$$

4.6.5 Wir wollen nun den Wert von k_n bestimmen.
Aus den oben angegebenen Formeln erhalten wir, wenn wir $a = 0$ und $b = \infty$ setzen,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = n \cdot k_n \int_0^\infty F(r) r^{n-1}\,dr .$$

Ist $F(r) = e^{-r^2}$, so haben wir nach 4.5.2

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = (\sqrt{\pi}\,)^n$$

und damit:

$$n \cdot k_n = \frac{2\,\pi^{n/2}}{2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\,dr}$$

Aus der Funktion im Nenner des rechten Ausdrucks erhalten wir durch die Substitution $s \underset{Df}{=} r^2$ die aus der Analysis bekannte Gaußsche Π-Funktion

$$\Pi\left(\frac{n}{2} - 1\right) \underset{Df}{=} \int_0^\infty s^{\frac{n}{2} - 1} e^{-s}\,ds,$$

die der Funktionalgleichung

$$m\,\Pi(m-1) = \Pi(m) \text{ für alle } m \in \mathbb{R}$$

genügt.

(Noch bekannter ist die Eulersche Γ-Funktion, die durch

$$\Gamma(x) \underset{Df}{=} \Pi(x-1)$$

gegeben ist.)

4.6.6 Zusammenfassend können wir feststellen:

$$(*) \quad k_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Pi(\frac{n}{2})}$$

für alle natürlichen Zahlen n. Speziell ergibt sich durch Rekursion aus der Funktionalgleichung:

(1) für gerade Dimensionen $n = 2l$:

$$k_{2l} = \pi^l / l!$$

(2) für ungerade Dimensionen $n = 2l + 1$:

$$k_{2l+1} = 2^{2l+1}\, l!\, \pi^l/(2l+1)!$$

4.6.7 <u>Bemerkung:</u> Wir können die Formel (*) aus 4.6.6 geradezu als Definition für die Größen k_n benutzen, wobei wir uns nicht auf natürliche Zahlen n zu beschränken brauchen. Im folgenden kann z.B. oft der Wert $n = 0$ nicht ausgeschlossen werden, dann bezeichnet eben k_0 die Zahl „1", wie sich aus der Formel ergibt.

II. Kapitel: Differenzierbare Untermannigfaltigkeiten in $\underline{\underline{R}}^n$ und das Minkowskische Maß

§ 5 Differenzierbare Untermannigfaltigkeiten in $\underline{\underline{R}}^n$

5.1 Einführung und einfache Beispiele

5.1.1 Gewissen Teilmengen des $\underline{\underline{R}}^n$ wird bei mathematischen und physikalischen Untersuchungen besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Es handelt sich dabei um Mengen mit folgenden grob umrissenen Eigenschaften (die genaue Definition stellen wir noch etwas, d.h. bis 5.3, zurück):

> Sie besitzen eine in vernünftiger Weise eindeutig bestimmte Dimension p ($0 \leq p \leq n$).
>
> Es treten keine Selbstdurchdringungen auf.
>
> Randpunkte gehören nicht dazu.

Eine derartige Menge heißt „p-dimensionale Teil-" oder „Untermannigfaltigkeit (kurz auch: Mannigfaltigkeit) in $\underline{\underline{R}}^n$". Wir behandeln hier nur den klassischen Fall der „Mannigfaltigkeiten ohne Rand"; in der modernen mathematischen Forschung werden auch Mannigfaltigkeiten „mit Rand" benötigt, jedoch können wir hier darauf nicht näher eingehen.

Zusätzlich verlangt man oft auch noch eine „differenzierbare"Struktur, was anschaulich besagt, daß keine „Ecken" auftreten. Man spricht dann von „differenzierbaren", oder auch „glatten" Mannigfaltigkeiten.

Beispiele dafür sind:

5.1.2 im Falle $p = 1$:

> unendlich lange, glatte Kurven in $\underline{\underline{R}}^n$ ohne Doppelpunkte,
>
> offene Teilstücke von solchen,
>
> topologische, glatte Bilder einer Kreislinie.

Jedoch ist eine 8 oder eine einfache glatte Schlaufe 
keine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

5.1.3 im Falle $p = 2$:

unendlich ausgedehnte, glatte Flächen in $\mathbb{R}^n$
ohne Überschneidungen,
offene Teilstücke von solchen,
glatte Zylinderflächen (unendliche oder offene Stücke),
offene Möbiusbänder,
topologische Bilder einer Kugeloberfläche,
Torusoberflächen,
„Brezel"-Flächen (zwei aneinandergesetzte Tori),
sowie alle diese Flächen mit Löchern, d.h. unter
Abzug von abgeschlossenen Teilmengen.

5.1.4 im Falle $p = 3$: Hier sei nur ein triviales Beispiel genannt: In $\mathbb{R}^3$ ist jede offene Menge eine 3-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.

5.1.5 Wenn wir nun nach einer analytischen Beschreibung dieser Mannigfaltigkeiten mit Hilfe des p-dimensionalen „Grundraumes", des $\mathbb{R}^p$, suchen, so stellen wir zunächst fest: Eine globale Beschreibung, d.h. durch eine einzige surjektive, differenzierbare Abbildung des $\mathbb{R}^p$ auf die Mannigfaltigkeit ist nur für 1-dimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeiten grundsätzlich möglich. Schon im Falle $p = 2$ besteht diese Möglichkeit nur für die ersten vier erwähnten Beispiele. Man bemerkt aber als gemeinsame Eigenschaft aller angeführten Beispiele, daß jeder Punkt einer p-dimensionalen Mannigfaltigkeit in dieser eine Umgebung besitzt, die sich topologisch auf eine offene Menge in $\mathbb{R}^p$ abbilden läßt.

Dieser Gedanke führt uns nun zu den folgenden Definitionen.

5.2 Lokale Karten und andere lokale Beschreibungen von Teilmengen in $\underline{\underline{R}}^n$

Sei M eine Teilmenge in $\underline{\underline{R}}^n$, p eine nichtnegative ganze Zahl kleiner oder gleich n, sowie r eine nicht negative ganze Zahl oder unendlich.

5.2.1 Definition: Sei U' eine offene Menge in $\underline{\underline{R}}^p$, V eine offene Menge in $\underline{\underline{R}}^n$ und $a \in V \cap M$. Eine C^r-Immersion $g : U' \to \underline{\underline{R}}^n$, die U' topologisch auf $V \cap M$ abbildet, heißt „lokale Karte" oder „lokale Parameterdarstellung" von M um a. (Wir werden eine lokale Karte im folgenden oft kurz - und nicht ganz exakt - durch „$g : U' \to M$" oder auch nur durch „g" symbolisch bezeichnen. Im Fall r = 0 bedeutet „C^0 - Immersion" nichts anderes als „stetige Abbildung".)

5.2.2 Bemerkung: Wir haben in 5.1.5 bemerkt, daß eine globale Beschreibung für ein-dimensionale Mannigfaltigkeiten möglich ist. Aus der Definition 5.2.1 kann man jedoch unmittelbar entnehmen, daß zur Beschreibung einer Kreislinie (vgl. 5.1.2) eine lokale Karte nicht ausreicht. Um das zu erreichen, müßte man in 5.2.1 die Forderung „topologisch" durch die weit schwächere Bedingung „surjektiv" ersetzen. Es zeigt sich aber, daß man dann auch Gebilde durch solche lokale Karten beschreiben könnte, die man nach unseren Betrachtungen in 5.1.1 nicht als Mannigfaltigkeiten bezeichnen möchte: Es sind dann nämlich Selbstdurchdringungen nicht ausgeschlossen.

Ein einfaches Beispiel bildet die „8", wie man sich leicht überlegen kann. Selbst die Abschwächung auf „bijektiv" ist nicht möglich:

Sei $g :]-\pi, \pi[\to \underline{\underline{R}}^2$ die Abbildung, die durch $g(x') =_{Df} (\sin x', \sin x' \cdot \cos x')$ für alle $x' \in U' =_{Df}]-\pi, \pi[$ gegeben ist. Das Bild von g ist wieder eine 8, (Dabei handelt es sich um eine der Lemniskate ähnliche Figur, jedoch nicht um die Lemniskate selbst, was in [DH] S. 193 behauptet wird.) und g bildet $]-\pi, \pi[$ bijektiv, aber nicht topologisch auf $g(]-\pi, \pi[)$ ab!

5.2.3 Satz: Ist a ein beliebiger Punkt aus M und $r > 0$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) es gibt offene Teilmengen U_1' in $\underline{\underline{R}}^p$ und V_1 in $\underline{\underline{R}}^n$, sowie eine C^r-Abbildung $g : U_1' \to \underline{\underline{R}}^n$, so daß $g : U_1' \to M$ eine lokale Karte von M um a und $g(U_1') = V_1 \cap M$ ist.

(b) Es gibt offene Teilmengen U_2 und V_2 in $\underline{\underline{R}}^n$, sowie einen C^r-Diffeomorphismus $h : U_2 \to V_2$, so daß $a \in V_2$ und $h(U_2 \cap (\underline{\underline{R}}^p \times 0)) = V_2 \cap M$ ist $(0 \in \underline{\underline{R}}^{n-p})$.

(c) Es gibt eine offene Teilmenge V_3 in $\underline{\underline{R}}^n$ und eine C^r-Submersion $f : V_3 \to \underline{\underline{R}}^{n-p}$ (C^r-Submersion bedeutet: Rang $Jf(x) = n-p$ für alle $x \in V_3$), so daß $a \in V_3$ und $V_3 \cap M = f^{-1}(0)$ ist $(0 \in \underline{\underline{R}}^{n-p})$.

(d) Nach eventueller Vertauschung der Faktoren in $\underline{\underline{R}}^n$ gibt es offene Teilmengen V' in $\underline{\underline{R}}^p$ und V'' in $\underline{\underline{R}}^{n-p}$ sowie eine C^r-Abbildung $\varphi : V' \to V''$, so daß $a \in V' \times V''$ und $M \cap (V' \times V'') = \text{Graph}\ \varphi =_{Df} \{(x', \varphi(x')) | x \in V'\}$ ist.

Beweis: Wir beweisen (a) ⇒ (b) in 5.2.4, (b) ⇒ (c) in 5.2.5, (c) ⇒ (d) in 5.2.6 und (d) ⇒ (a) in 5.2.7.

5.2.4 (a) ⇒ (b): Wir haben offene Mengen U_1' in $\underline{\underline{R}}^p$, V_1 in $\underline{\underline{R}}^n$ und eine C^r-Immersion $g : U_1' \to \underline{\underline{R}}^n$, so daß $g : U_1' \to M$ eine lokale Karte von M um a und $g(U_1') = V_1 \cap M$ ist.

Zunächst gilt:

$$\text{Rang } Jg(x') = p \quad \text{für alle } x' \in U_1' \quad .$$

Nach eventueller Vertauschung der Faktoren in $\underline{\underline{R}}^n$ können wir

$$\text{Det } (D_i g_j(a') \mid i,j = 1,\ldots,p) \neq 0$$

annehmen ($a' \;_{Df}= g^{-1}(a)$!). Wir betrachten dann die C^r-Abbildung $h_\alpha : U_1' \times \underline{\underline{R}}^{n-p} \to \underline{\underline{R}}^n$, die durch

$h_\alpha(x',x'') \;_{Df}= g(x') + (0,x'')$ für alle $x' \in U', x'' \in \underline{\underline{R}}^{n-p}$

gegeben ist. Für die Funktionalmatrix dieser Abbildung gilt:

$$Jh_\alpha(a',0) = \left(\begin{array}{c|c} Jg\,(a') & \begin{array}{c} 0 \\ \hline E \end{array} \end{array} \right) ,$$

also $\text{Det } Jh_\alpha(a',0) = \text{Det}(D_i g_j(a')) \neq 0$.
Daher induziert h_α einen C^r-Diffeomorphismus $h_\beta : U_\beta \to V_\beta$ zwischen einer offenen Umgebung $U_\beta \subset U_1' \times \underline{\underline{R}}^{n-p}$ von $(a',0) \in \underline{\underline{R}}^n$ ($0 \in \underline{\underline{R}}^{n-p}$!) und einer offenen Umgebung V_β von $h_\alpha(a',0) = g\,(a') = a$. Ist nun

$$U'_\beta \;_{Df}= \{x' \mid x' \in \underline{\underline{R}}^p \text{ und } (x',0) \in U_\beta\},$$

so erhalten wir

$$h_\beta(U'_\beta \times 0) = g(U'_\beta) \subset M \cap V.$$

Da g nach Voraussetzung U_1' topologisch auf $V_1 \cap M$ abbildet, gibt es eine in $\underline{\underline{R}}^n$ offene Menge V_γ, so daß gilt:

$$V_\gamma \cap M = g(U'_\beta) = h_\beta(U'_\beta \times 0).$$

Wir setzen nun $V_2 \;_{Df}= V_\beta \cap V_\gamma$ und $U_2 \;_{Df}= h_\beta^{-1}\,(V_2)$; dann induziert h_β einen C_r-Diffeomorphismus

$$h \underset{Df}{=} h_\beta | U_2 : U_2 \to V_2$$

der gewünschten Art.

5.2.5 (b) $\Rightarrow$ (c): Wir haben offene Teilmengen U_2 und V_2 in $\underline{\underline{R}}^n$, sowie einen C^r-Diffeomorphismus $h : U_2 \to V_2$, so daß $a \in V_2$ und $h(U_2 \cap \underline{\underline{R}}^p \times 0) = V_2 \cap M$ ist. Sei nun $pr'' : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{R}}^{n-p}$ die Projektion von $\underline{\underline{R}}^n$ auf $\underline{\underline{R}}^{n-p}$, die durch

$$pr''(x',x'') = x'' \text{ für alle } x' \in \underline{\underline{R}}^p,\ x'' \in \underline{\underline{R}}^{n-p}$$

gegeben ist. Wir setzen $V_3 \underset{Df}{=} V_2$ und $f \underset{Df}{=} pr'' \circ h^{-1}$.

Dann gilt:

$$f(x) = pr''(x',0) = 0 \text{ für alle } x = h(x',o) \in V_2 \cap M$$

und

$$f(x) = pr''(x',x'') = x'' \neq 0 \text{ für alle } x = h(x',x'') \in V_2 - M$$

sowie

$$Jf = Jpr'' \circ Jh^{-1};$$

daher folgt aus Rang $Jpr'' = n-p$ und Rang $Jh^{-1} = n$, daß f eine C^r-Submersion ist.

5.2.6 (c) $\Rightarrow$ (d): Wir haben eine offene Teilmenge V_3 in $\underline{\underline{R}}^n$ und eine C^r-Submersion $f : V_3 \to \underline{\underline{R}}^{n-p}$, so daß $a \in V_3$ und $V_3 \cap M = f^{-1}(0)$ ist. Also ist

$$\text{Rang } Jf = n-p,$$

und wir können nach eventueller Vertauschung der Faktoren annehmen:

$$\operatorname{Det}(D_{p+i}\, f_j(a) \mid i,j = 1,\dots,n-p) \neq 0.$$

Dann läßt sich das Gleichungssystem

$$f(x',x'') = 0$$

in einer Umgebung von a nach x" auflösen, d.h. es gibt offene Mengen V_4' in $\underline{\underline{R}}^p$ und V_4'' in $\underline{\underline{R}}^{n-p}$ sowie eine C^r-Abbildung $\varphi : V_4' \to V_4''$, so daß $a \in V_4' \times V_4'' \subset V_3$ ist und für alle $x' \in V_4'$ gilt:

$$x'' = \varphi(x') \Leftrightarrow (x'' \in V_4'' \text{ und } f(x',x'') = 0),$$

also auch $\quad\Leftrightarrow \quad (x',x'') \in M \cap (V_4' \times V_4'')$.

Damit ergibt sich

$$\operatorname{Graph} \varphi = M \cap (V_4' \times V_4'') .$$

5.2.7 (d) $\Rightarrow$ (a): Wir haben offene Teilmengen V_4' in $\underline{\underline{R}}^p$ und V_4'' in $\underline{\underline{R}}^{n-p}$ sowie eine C^r-Abbildung $\varphi : V_4' \to V_4''$, so daß $a =_{Df} (a', \varphi(a')) \in V_4' \times V_4''$ und $M \cap (V_4' \times V_4'') = \operatorname{Graph} \varphi$ ist. Wir setzen $U_1' =_{Df} V_4'$, $V_1 = V_4' \times V_4''$ und definieren $g : U_1' \to V_1$ durch

$$g(x') = (x',\varphi(x')) \text{ für alle } x' \in U_1' .$$

Es gilt dann

$$Jg\,(x') = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ \cdots & \cdots & 1 \\ & J\varphi(x') & \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } x' \in U_1' ,$$

und damit ist alles bewiesen.

5.2.8 Wir entnehmen noch aus 5.2.4 als

<u>Folgerung:</u> <u>Ist $r > 0$, $a \in M$ und $g : U' \to M$ eine lokale Karte von M um a, so gibt es offene Mengen U und V in $\underline{\underline{R}}^n$ und einen C^r-Diffeomorphismus $h : U \to V$, so daß</u>

$\underline{U \cap (\underline{\underline{R}}^p \times 0) \subset U' \times 0 \quad (0 \in \underline{\underline{R}}^{n-p}!)}$

$\underline{h(x',0) = g(x') \text{ für alle } (x'.0) \in U \cap (\underline{\underline{R}}^p \times 0)}$

$\underline{h(U \cap (\underline{\underline{R}}^p \times 0)) = V \cap M}$ und

$\underline{a \in V}$

ist.

5.2.9 Bemerkung: Im Fall $r = 0$ bleibt der Satz 5.2.3 nicht richtig. Die Aussage (2) ist dann echt schärfer als Aussage (1). Wir können hier darauf nicht näher eingehen; der interessierte Leser findet Beispiele und ins Einzelne gehende Literaturhinweise z. B. in [HY].

5.3 Definition einer Teilmannigfaltigkeit in $\underline{\underline{R}}^n$

p und r seien wie in 5.2 gewählt.

5.3.1 Definition: (a) Eine Teilmenge M in $\underline{\underline{R}}^n$ heißt p-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit, wenn zu jedem Punkt $a \in M$ eine lokale Karte von M um a (gemäß 5.2.1) existiert. Eine C^0-Mannigfaltigkeit heißt auch topologische Mannigfaltigkeit, eine C^r-Mannigfaltigkeit mit $r > 0$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

(b) Eine Familie von lokalen Karten $(g_i : U_i' \to M \mid i \in J)$ einer Mannigfaltigkeit M, wobei J irgendeine Indexmenge bedeutet, heißt ein Atlas für M, wenn

$$M = \bigcup_{i \in J} g_i\,(U_i')$$

ist.

5.3.2 Aus dieser Definition ergeben sich unmittelbar die

Folgerungen: (a) Für jeden Punkt a einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M gelten die Aussagen (a) - (d) von Satz 5.2.3.

(b) Jede offene Teilmenge einer p-dimensionalen C^r-Mannigfaltigkeit in $\underline{\underline{R}}^n$ ist eine p-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit in $\underline{\underline{R}}^n$.

5.4 Die Diffeomorphie der Kartenwechsel

Satz: Seien $g_1 : U_1' \to M$ und $g_2 : U_2' \to M$ lokale Karten einer p-dimensionalen C^r-Mannigfaltigkeit M in $\underline{\underline{R}}^n$. Ist für i = 1, 2

$$A_i' \underset{Df}{=} g_i^{-1}(g_1(U_1') \cap g_2(U_2')),$$

so induziert $g_2^{-1} g_1$ eine topologische Abbildung $t : A_1' \to A_2'$, die gegeben ist durch

$$y' = t(x') \underset{Df}{\Leftrightarrow} x' \in A_1',\ y' \in A_2' \text{ und } g_1(x') = g_2(y').$$

Für r > 0 ist t ein C^r-Diffeomorphismus.

Beweis: Aus der Definition der Mannigfaltigkeiten folgt unmittelbar, daß t eine topologische Abbildung ist. Sei also r > 0; dann haben wir nach 4.2.1 nur noch zu zeigen, daß - falls $A_1' \neq \emptyset \neq A_2'$ ist - die Abbildungen t und t^{-1} C^r-Abbildungen sind.

Sei nun $a \in g_1(U_1') \cap g_2(U_2')$. Dann sind g_1 und g_2 lokale Karten von M um a. Nach 5.2.8 gibt es offene Mengen U_2 und V_2 in $\underline{\underline{R}}^n$, sowie einen C^r-Diffeomorphismus $h_2 : U_2 \to V_2$, so daß

$$U_2 \cap (\underline{\underline{R}}^p \times 0) \subset U_2' \times 0$$

$$h_2(y',0) = g_2(y') \text{ für alle } (y',0) \in U_2 \cap (\underline{\underline{R}}^p \times 0)$$

$$h_2(U_2 \cap (\underline{\underline{R}}^p \times 0)) = V_2 \cap M \text{ und}$$

$$a \in V_2$$

ist. Sei

$$B_1' \;{}_{Df}{=}\; g_1^{-1}\; (g_1(U_1') \cap g_2(U_2') \cap V_2).$$

B_1' ist offen in $\underline{\underline{R}}^p$ und enthält g_1^{-1} (a). g_1 induziert eine C^r-Abbildung $g_1' : B_1' \to V_2$, und wir erhalten:

$$t|B_1' = pr' \; h_2^{-1} \quad g_1' \;,$$

wobei $pr' : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{R}}^p$ die natürliche Projektion bedeutet, die durch

$$pr'(x',x'') = x' \quad \text{für alle } x' \in \underline{\underline{R}}^p,\; x'' \in \underline{\underline{R}}^{n-p}$$

gegeben ist. $t|B_1'$ ist damit Zusammensetzung von C^r-Abbildungen und selbst auch C^r-Abbildung. Also ist t an der Stelle g_1^{-1} (a) r-mal stetig differenzierbar. Da das für alle $a \in g_1(U_1') \cap g_2(U_2')$ gilt, folgt, daß t C^r-Abbildung ist; ganz analog ergibt sich auch, daß t^{-1} C^r-Abbildung ist.

5.5 Tangentialvektoren, Tangential- und Normalraum

M sei eine p-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit in $\underline{\underline{R}}^n$ und a ein Punkt aus M.

5.5.1 Definition: (a) Ein Vektor $v \in \underline{\underline{R}}^n$ heißt „tangential an M in a", wenn es zu einem $\delta > 0$ eine C^1-Abbildung $w :]-\delta, \delta[\to \underline{\underline{R}}^n$ gibt, so daß gilt:

((1)) $w(]-\delta, \delta[) \subset M$

((2)) $w(0) = a$

((3)) $w'(0) = v$

(w' bedeutet die Ableitung der Funktion w!).

(b) Die Menge $T_a M$ aller Tangentialvektoren an M in a heißt der „Tangentialraum an M in a".

(c) Die Menge $N_a M$ aller Vektoren aus $\underline{\underline{R}}^n$, die senkrecht auf jedem Vektor des Tangentialraumes an M in a stehen, heißt der „Normalraum zu M in a".

5.5.2 Bemerkung: Ist M_o eine offene Menge (d.h. auch C^1-Mannigfaltigkeit; vgl. 5.3.2 Folgerung (b)) in M und $a \in M_o$, so gilt:

$$T_a M_o = T_a M .$$

5.5.3 Satz: Sei V eine offene Menge in $\underline{\underline{R}}^n$, $a \in V$ und $k : V \to \underline{\underline{R}}^m$ eine C^1-Abbildung; weiterhin sei L eine C^1-Mannigfaltigkeit in $\underline{\underline{R}}^m$, so daß

$$k(M \cap V) \subset L$$

ist. Dann ist

$$(d_a k)\ T_a M \subset T_{k(a)} L$$

($d_a k : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{R}}^m$ bedeutet das Differential der Abbildung k an der Stelle a).

Beweis: Nach 5.5.2 ist

$$T_a M = T_a (M \cap V).$$

Sei nun $v \in T_a\ (M \cap V)$ und $w :]-\delta, \delta[\to \underline{\underline{R}}^n$ eine C^1-Abbildung gem. 5.5.1 (a). Dann gilt: $kw :]-\delta, \delta[\to \underline{\underline{R}}^m$ ist eine C^1-Abbildung mit:

((1)) $kw\ (]-\delta, \delta[) \subset L$

((2)) $kw\ (0) = k(a)$

((3)) $(kw)'(0) = (d_a k)(w'(0)) = (d_a k)v$;

also ist $(d_a k)v \in T_{k(a)} L$, und daraus ergibt sich die Behauptung.

5.5.4 Folgerung: Ist in 5.5.3 $n = m$, k ein C^1-Diffeomorphismus von V auf eine offene Menge W in $\underline{\underline{R}}^n$ und

$$k(M \cap V) = L \cap W,$$

so ist

$$(d_a k)\, T_a M = T_{k(a)} L.$$

Beweis: Man wende 5.5.3 auf k und k^{-1} an.

5.5.5 Satz: Der Tangentialraum $T_a M$ an M in a ist ein p-dimensionaler Untervektorraum von $\underline{\underline{R}}^n$. Bei Verwendung der lokalen Darstellungen von M gemäß 5.2.3 gilt:

(a) $T_a M = \text{Bild } d_{a'} g \quad (a = g(a')!)$

(b) $T_a M = (d_{(a',0)} h)\, (\underline{\underline{R}}^p \times 0) \quad (a = h(a',0)!)$

(c) $T_a M = \text{Kern } d_a f$

(d) $T_a M = \text{Graph } (d_{a'} \varphi) \quad (a = (a', \varphi(a'))!)$

Der Normalraum $N_a M$ zu M in a ist ein $(n-p)$-dimensionaler Untervektorraum von $\underline{\underline{R}}^n$ und zwar das orthogonale Komplement zu $T_a M$ in $\underline{\underline{R}}^n$.

(Der „ ' " bedeutet hier keine Ableitung.)

Beweis: (b) gilt nach 5.5.4 wegen

$$T_{(a',0)}(\underline{\underline{R}}^p \times 0) = \underline{\underline{R}}^p \times 0.$$

(Man setze in 5.5.4 $\underline{\underline{R}}^p \times 0$ für M und die gegebene Mannigfaltigkeit M für L ein sowie den Diffeomorphismus h gemäß 5.2.3 (b) für k);

hieraus folgt nun auch, daß $T_a M$ ein p-dimensionaler Untervektorraum von $\underline{\underline{R}}^n$ ist.

(a) und (c): Nach 5.2.3 (c) ist $f(M) = 0$, also eine 0-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit in $\underline{\underline{R}}^{n-p}$, und wir erhalten aus 5.5.3

$$(d_a f)\, T_a M \subset T_o\, 0 = 0,$$

das bedeutet:

$$T_a M \subset \text{Kern } d_a f.$$

Andererseits erhalten wir wiederum aus 5.5.3

$$\text{Bild } d_{a'} g = (d_{a'} g)\, \underline{\underline{R}}^p \subset T_a M \quad ,$$

und wir haben

$$\text{Bild } d_{a'} g \subset T_a M \subset \text{Kern } d_a f.$$

An beiden Enden dieser Kette stehen aber p-dimensionale Untervektorräume von $\underline{\underline{R}}^n$, also muß gelten

$$\text{Bild } d_{a'} g = T_a M = \text{Kern } d_a f.$$

(d) erhalten wir schließlich, indem wir in einer geeigneten Umgebung $U' \subset \underline{\underline{R}}^p$ von a' eine lokale Karte $g : U' \to M$ definieren durch

$$g(x') \underset{Df}{=} (x', \varphi(x')) \text{ für alle } x' \in U'.$$

Wir haben dann für $v' \in \underline{\underline{R}}^p$:

$$(d_{a'} g)\, v' = (v', (d_{a'} \varphi)(v')),$$

also $T_a M = \text{Graph } (d_{a'} \varphi)$.

Die Behauptung über den Normalraum ist trivial.

5.5.6 <u>Folgerungen:</u> (a) <u>Ist $g : U' \to M$ eine lokale Karte von M um a und $a' \underset{Df}{=} g^{-1}(a)$, dann bilden die Vektoren</u>

$$\underline{(D_1 g)(a'), \ldots, (D_p g)(a')}$$

<u>eine Basis des Tangentialraumes $T_a M$ an M in a.</u>

(b) <u>Ist $f : V_3 \to \underline{\underline{R}}^{n-p}$ eine C^1-Submersion gemäß 5.2.3 (c), so gilt:</u>

$T_aM = \{v \mid ((\text{grad } f_j)(a),v) = 0 \text{ für } j = 1,\dots,n-p\}$.

(„$((\text{grad } f_j)(a),v)$" bedeutet das innere (Skalar-)Produkt der Vektoren $(\text{grad } f_j)(a)$ und v).

(c) Ist f wie in (b) bestimmt, dann bilden die Vektoren:

$$(\text{grad } f_1)(a),\dots,(\text{grad } f_{n-p})(a)$$

eine Basis des Normalraumes zu M in a.

Beweis: (a) Rang $((D_1 g)(a'),\dots,(D_p g)(a')) = p$, da g eine C^1-Immersion ist. Also sind die Vektoren $(D_1 g)(a'),\dots,(D_p g)(a')$ linear unabhängig. Für jedes $j = 1,\dots,p$ gilt außerdem:

$$(D_j g)(a') = (d_{a'} g)(e_j),$$

wenn $e_1,\dots,e_p$ die natürliche Basis von $\mathbb{R}^p$ darstellt; daraus folgt nach 5.5.5 (a)

$$(D_j g)(a') \in T_aM \text{ für } j = 1,\dots,p,$$

und aus $\dim (T_aM) = p$ folgt die Behauptung.

(b) Nach 5.5.5 (c) gilt:

$$v \in T_aM \Leftrightarrow (d_a f)\, v = 0.$$

Die rechte Seite ist aber äquivalent zu

$(d_a f_j)\, v = 0$ für $j = 1,\dots,n-p$,

das ist aber wiederum gleichbedeutend mit:

$$((\text{grad } f_j)(a),v) = 0 \text{ für } j = 1,\dots,n-p.$$

(c) Da f eine C^1-Submersion sein soll, ist

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} d_a f_1 \\ \vdots \\ d_a f_{n-p} \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} (\text{grad } f_1)(a) \\ \vdots \\ (\text{grad } f_{n-p})(a) \end{pmatrix} = n-p,$$

d.h. die (n-p)Vektoren $(\text{grad } f_1)(a),\dots,(\text{grad } f_{n-p})(a)$ sind linear unabhängig; sie liegen nach (b) in N_aM;

da aus $\dim T_aM = p$ folgt: $\dim N_aM = n-p$, bilden sie also eine Basis von N_aM.

5.6 Orientierung von Mannigfaltigkeiten

5.6.1 Orientierung von Vektorräumen

$v_1, \dots, v_p$ und $w_1, \dots, w_p$ seien Basen eines p-dimensionalen reellen Vektorraumes V^p. Dann gibt es genau eine nicht singuläre $(p \times p)$-Matrix $T = (t_{ij})$, so daß gilt:

$$w_i = \sum_{j=1}^{p} t_{ij} v_j \text{ für } i = 1, \dots, p.$$

Wir sagen, die Basen $v_1, \dots, v_p$ und $w_1, \dots, w_p$ sind gleichorientiert, wenn $\mathrm{Det}\, T > 0$ ist, bzw. sie sind entgegengesetzt orientiert, wenn $\mathrm{Det}\, T < 0$ ist. Da T nicht singulär ist, ist $\mathrm{Det}\, T$ immer von Null verschieden, die Relation „gleichorientiert" ist eine Äquivalenzrelation, und wir können sämtliche möglichen Basen von V^p in zwei Äquivalenzklassen gleichorientierter Basen einteilen.
Eine solche Äquivalenzklasse nennen wir Orientierung von V^p.
Ist $V^p = \underline{\underline{R}}^p$, so nennen wir die Orientierung $[e_1, \dots, e_p]$ die natürliche Orientierung von $\underline{\underline{R}}^p$.

(Ist $v_1, \dots, v_p$ eine Basis von V^p, so bezeichnen wir durch $[v_1, \dots, v_p]$ die Orientierung von V^p, d.h. die Äquivalenzklasse gleichgerichteter Basen von V^p, die durch $v_1, \dots, v_p$ repräsentiert werden kann. Wenn wir eine Orientierung ohne Angabe einer Basis symbolisch beschreiben wollen, gebrauchen wir den Buchstaben „o" u.ä.).

Ein orientierter p-dimensionaler, reeller Vektorraum (V^p, o) ist ein p-dimensionaler, reeller Vektorraum V^p zusammen mit einer Orientierung o von V^p.

Sind (V^p, O_v) und (W^p, O_w) orientierte p-dimensionale, reelle Vektorräume, so heißt ein Isomorphismus $h : V^p \to W^p$ orientierungserhaltend, wenn folgendes gilt:
Ist $v_1, \ldots, v_p$ eine Basis von V^p, die O_v repräsentiert, so ist

$$[hv_1, \ldots, hv_p] = O_w.$$

(Ist diese Beziehung für eine Basis richtig, so auch für jede andere Basis, die O_v repräsentiert.)
In diesem Fall sagen wir auch „h führt die Orientierung O_v von V^p in die Orientierung O_w von W^p über."
Man sieht nun unmittelbar ein, daß auch die Umkehrung eines orientierungserhaltenden und die Zusammensetzung zweier orientierungserhaltender Isomorphismen wieder einen orientierungserhaltenden Isomorphismus liefert.

5.6.2 Nun können wir Orientierungen für eine Mannigfaltigkeit erklären:
Definition: (a) Sei M eine p-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit. Eine Orientierung von M ist eine Familie $O = (o_a \mid a \in M)$ mit folgenden Eigenschaften:
((1)) Für jedes $a \in M$ ist o_a eine Orientierung von T_aM.
((2)) Es gibt einen Atlas $(g_i : U_i' \to M \mid i \in J)$ für M, so daß für jedes $i \in J$ und $x' = g^{-1}(x) \in U_i'$

$$d_{x'}g_i : \underline{\underline{R}}^p \to T_xM$$

die natürliche Orientierung von $\underline{\underline{R}}^p$ in o_x überführt.
(b) Eine Mannigfaltigkeit, zu der es eine Orientierung gibt, heißt orientierbar, sonst nicht orientierbar.
(c) Eine C^1-Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer Orientierung O heißt „orientierte Mannigfaltigkeit (M,O)".

Eine lokale Karte $g : U' \to M$, so daß $d_{x'}g$ für jedes $x' \in U$ die natürliche Orientierung von $\underline{\underline{R}}^p$ in o_x überführt, heißt dann orientierte Karte. Ein Atlas für M gemäß Bedingung ((2)) in (a) heißt „orientierter Atlas".
(Ein orientierter Atlas enthält also nur orientierte Karten!).

5.6.3 Satz: Seien $g_1 : U_1' \to M$ und $g_2 : U_2' \to M$ orientierte Karten einer p-dimensionalen orientierten C^r-Mannigfaltigkeit (M,O). Ist für i = 1,2

$$A_i' \underset{Df}{=} g_i^{-1} (g_1(U_1') \cap g_2(U_2')) \neq \emptyset ,$$

so erhält der Diffeomorphismus $t : A_1' \to A_2'$ (vgl. 5.4) die Orientierung, d.h. es gilt für alle $x' \in A_1'$

$$[(d_{x'}t)(e_1),\dots,(d_{x'}t)(e_p)] = [e_1,\dots,e_p].$$

Beweis: Aus der Definition von t folgt unmittelbar

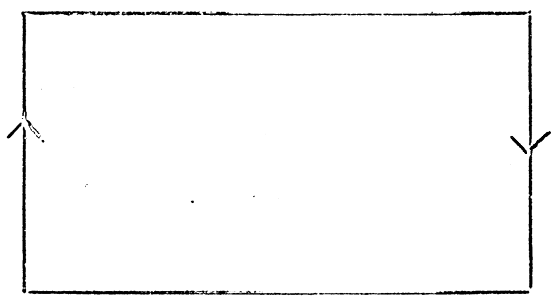
$$d_{x'}t = (d_{t(x')}g_2)^{-1} \circ (d_{x'}g_1).$$

Nach Voraussetzung sind $d_{t(x')}g_2$ und $d_{x'}g_1$ orientierungserhaltend (vgl. die Definition der orientierten Karten in 5.6.2 (c)). Die Behauptung folgt dann aus den Bemerkungen am Ende von 5.6.1.

5.6.4 Beispiel für eine nicht orientierbare Mannigfaltigkeit.

Das offene Möbiusband (2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\underline{\underline{R}}^3$) läßt sich folgendermaßen beschreiben: Es ist die Bildmenge M der stetig differenzierbaren Abbildung
$g : \underline{\underline{R}} \times]-1, 1[\to \underline{\underline{R}}^3$, die durch
$g(x,y) = ((1-y \sin x/2) \cos x, (1-y \sin x/2) \sin x, y \cos x/2)$
gegeben ist.

(g ist keine lokale Karte, da die Abbildung auf M nur surjektiv, aber nicht topologisch ist; vgl. 5.2.2).
Den Beweis, daß M eine nicht orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, müssen wir hier übergehen. Zur Veranschaulichung sei noch eine andere Beschreibung des Möbiusbandes gegeben. Man nehme ein Rechteck



(waagerecht offen, senkrecht abgeschlossen) und verbiege es im $\underline{\underline{R}}^3$ so, daß die beiden senkrechten Seiten mit gleicher Pfeilrichtung zusammenfallen. Damit erhält man ein topologisches Bild des Möbiusbandes.

5.6.5 Bemerkung: Jede 1-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist jedoch orientierbar.

5.7 Randmannigfaltigkeiten

Sei M eine p-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit in $\underline{\underline{R}}^n$ $(p \geq 1)$ und L eine Teilmenge in M.

5.7.1 Definition: (a) Ein Punkt $a \in M$ ist ein Randpunkt von L in M, wenn jede Umgebung von a mit L und mit M - L einen nichtleeren Durchschnitt hat.
Die Menge aller Randpunkte von L in M heißt Rand von L in M.
Wir schreiben dafür auch $Rd_M L$.
(b) Ein Randpunkt a von L in M ist regulärer Randpunkt von L in M, wenn es eine lokale Karte $g : U' \to M$ von M um a gibt, so daß gilt:

$$g(U' \cap (]-\infty, 0[\times \underline{\underline{R}}^{p-1})) \subset L \text{ und}$$

$$g(U' \cap (]0, \infty[\times \underline{\underline{R}}^{p-1})) \subset M - L$$

(In diesem Fall muß $a = g(0, *, \ldots *)$ sein).

Eine solche Karte heißt „Randkarte von L in M um a".

(c) Ein Randpunkt a von L in M ist singulärer Randpunkt von L in M, wenn er nicht regulärer Randpunkt von L in M ist.

Die Menge der regulären Randpunkte von L in M bezeichnen wir mit ∂L, die der singulären mit σL. ($\partial L \cup \sigma L = Rd_M L$, $\partial L \cap \sigma L = \emptyset$).

5.7.2 Satz: ∂L ist eine $(p-1)$-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit.

Beweis: Sei $a \in \partial L$ und $g : U' \to M$ eine Randkarte von L in M um a. Dann ist $g(U' \cap (0 \times \underline{\underline{R}}^{p-1})) \subset \partial L$. Bezeichnet $i : \underline{\underline{R}}^{p-1} \to \underline{\underline{R}}^p$ die natürliche Inklusion, die durch $i(x'') = (o, x'')$ für alle $x'' \in \underline{\underline{R}}^{p-1}$ gegeben ist, und ist $V' \;_{Df}\!= i^{-1}(U')$, so induziert $g \circ i | V'$ eine lokale Karte $h : V' \to \partial L$ von ∂L um a.

h heißt die „zu g gehörige Karte von ∂L".

5.7.3 Bemerkung: $Rd_M L$ und σL sind in M abgeschlossene Mengen. Das sieht man folgendermaßen ein:

$Rd_M L = \bar{L} - \overset{o}{L} = \bar{L} \cap (M - L^o)$, wobei $\bar{L}$ die abgeschlossene Hülle und L^o den offenen Kern von L in M bedeutet.

Also ist $Rd_M L$ als Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen in M.

Wir betrachten nun $Rd_M L$ mit der induzierten Topologie. Dann gibt es nach 5.7.1(b) zu jedem Punkt $a \in \partial L$ eine offene Umgebung in $Rd_M L$, die σL nicht trifft, nämlich $g(U' \cap o \times \underline{\underline{R}}^{p-1})$

∂L ist also offen in $Rd_M L$, σL ist damit als Komplement von ∂L abgeschlossen in $Rd_M L$, und da $Rd_M L$ abgeschlossen in M ist, auch abgeschlossen in M .

5.7.4 Hilfssatz: Sei $a \in \partial L$, $g : U' \to M$ eine Randkarte von L in M um a und $a' {}_{Df}= g^{-1}(a)$. Dann gilt:

(a) $T_a \partial L = (d_{a'} g)(O \times \underline{\underline{R}}^{p-1}) \subset T_a M$.

(b) Bezeichnet $e_1, \ldots, e_p$ die natürliche Basis von $\underline{\underline{R}}^p$, $e_1', \ldots, e_{p-1}'$ die von $\underline{\underline{R}}^{p-1}$ und h die zu g gehörige Karte von ∂L um a, so ist

$(d_{h^{-1}(a)} h)(e_i') = (d_{a'} g)(e_{i+1})$ für $i = 1, \ldots, p-1$,

d.h. insbesondere, daß die Vektoren $(d_{a'} g)(e_2), \ldots, (d_{a'} g)(e_p)$ eine Basis von $T_a \partial L$ bilden.

Der Beweis ist trivial.

5.7.5 Hilfssatz: Ist $p > 1$, M orientierbar, O eine Orientierung von M und $a \in \partial L$, so gilt:

(a) Es gibt eine orientierte Randkarte $g : U' \to M$ von L in M um a.

(b) Sind $g_1 : U_1' \to M$ und $g_2 : U_2' \to M$ orientierte Randkarten von L in M um a, so ist

$[(d_{a'} g_1)(e_2), \ldots] = [(d_{t(a')} g_2)(e_2), \ldots]$

wobei $a' {}_{Df}= g_1^{-1}(a)$ und $t(a') {}_{Df}= g_2^{-1}(a)$ ist.

Beweis: (a) Es gibt zunächst eine Randkarte $\bar{g} : \bar{U}' \to M$ von L in M um a. Ist $\bar{g}$ eine orientierte Karte, so sind wir fertig; andernfalls definieren wir $\hat{g} : \underline{\underline{R}}^p \to \underline{\underline{R}}^p$ durch

$$\hat{g}(x_1, \ldots, x_p) {}_{Df}= (x_1, -x_2, x_3, \ldots, x_p)$$

für alle $x' = (x_1, \ldots, x_p) \in \underline{\underline{R}}^p$ und setzen:

$$U' {}_{Df}= \hat{g}^{-1}(\bar{U}') \quad , \quad g {}_{Df}= \bar{g} \circ \hat{g} : U' \to M.$$

$g : U' \to M$ ist dann eine orientierte Randkarte von L in M um a. (Die Voraussetzung $p > 1$ wurde zur Definition von $\hat{g}$ benötigt).

(b) Wegen $d_{a'}g_1 = d_{t(a')}g_2 \circ d_{a'}t$ (vgl. den Beweis zu 5.6.3) genügt es

$[(d_{t(a')}g_2 \circ d_{a'}t)(e_2),\dots] = [(d_{t(a')}g_2)(e_2)\dots.]$

zu beweisen.

Die Vektoren, die auf der rechten Seite dieser Gleichung auftreten, spannen aber nach 5.7.4 (b) den gleichen Untervektorraum von $\underline{\underline{R}}^n$ auf wie die Vektoren links.

$d_{t(a')}g_2$ ist injektiv, da g_2 eine Immersion (s. 5.2.1, 4...) ist; also spannen die Vektoren $((d_{a'}t)(e_i) \mid i = 2,\dots,p)$ und $(e_i \mid i = 2,\dots,p)$ den gleichen Untervektorraum von $\underline{\underline{R}}^p$ auf. Daraus ergibt sich zunächst:

$D_1t_i = 0$ für $t = (t_1,\dots,t_p)$ und $i = 2,\dots,p$,

und es genügt zu zeigen:

$[(d_{a'}t)(e_2),\dots,(d_{a'}t)(e_p)] = [e_2,\dots,e_p]$.

Die zugehörige Transformationsmatrix J_o erhält man nun aus der Funktionalmatrix $Jt(a')$ durch Streichen der ersten Zeile und Spalte. Für die zugehörigen Determinanten gilt:

$$\operatorname{Det} Jt(a') = D_1t_1 \circ \operatorname{Det} J_o \quad .$$

Da $t_1(x_1,\dots)$ gleiches Vorzeichen wie x_1 hat, kann D_1t_1 an der Stelle $a' = (o,*,\dots,*)$ nicht negativ sein. Weil

$$\operatorname{Det} Jt(a') > 0$$

ist (vgl. 5.6.3 und 5.6.1), folgt

$$\operatorname{Det} J_o > 0$$

und damit nach 5.6.1 die Behauptung.

5.7.6 Satz: (a) Ist M orientierbar, so auch ∂L.

(b) Ist O eine Orientierung von M und $(g_a : U'_a \to M \mid a \in \partial L)$ eine Familie von orientierten Randkarten von L in M um a, so ist

$$\partial O \ {}_{Df}= (\partial o_a \ {}_{Df}= [(d_{a'}g_a)(e_2),\ldots,(d_{a'}g_a)(e_p)] \mid a=g_a(a') \in \partial L)$$

eine Orientierung von ∂L, die sog. „induzierte Orientierung". Diese Orientierung ist unabhängig von der speziellen Auswahl der Familie $(g_a \mid a \in \partial L)$, d.h. es gibt nur eine induzierte Orientierung.

Beweis: Es genügt (b) zu beweisen. Um zu zeigen, daß ∂o eine Orientierung von ∂L ist, müssen wir noch die Bedingung (2) aus der Definition 5.6.2 (a) nachweisen. Wir betrachten als Atlas für L die Familie $(h_a : V'_a \to \partial L \mid a \in \partial L)$, wobei h_a für jedes $a \in \partial L$ die zu g_a gehörige Karte von ∂L bezeichnet (vgl. 5.7.2).

Sei $\bar{x} \in V'_a$, $x \ {}_{Df}= h_a(\bar{x}) \in \partial K$, $x' \ {}_{Df}= g_a^{-1}(x)$ und $\bar{a} \ {}_{Df}= h_a^{-1}(a)$.

Wir haben zu zeigen:

$$[(d_{\bar{x}} h_a)e_1,\ldots,(d_{\bar{x}} h_a)e_{p-1}] = [(d_{x'}g_x)e_2,\ldots,(d_{x'}g_x)e_p]$$

d.h. wegen 5.7.4:

$$[(d_{x'}g_a)e_2,\ldots,(d_{x'}g_a)e_p] = [(d_{x'}g_x)e_2,\ldots,(d_{x'}g_x)e_p],$$

da g_a ja eine geeignete lokale Karte von M um x ist!

Diese Gleichung folgt aber unmittelbar aus 5.7.5, indem man setzt: $g_1 \ {}_{Df}= g_a$ und $g_2 \ {}_{Df}= g_x$.

Es bleibt nun die Eindeutigkeit der induzierten Orientierung zu beweisen; diese folgt aber ebenfalls unmittelbar aus 5.7.5 (b).

§ 6 Das Minkowskische Maß

6.1 Allgemeines über das Maß von niederdimensionalen Mengen in $\underline{\underline{R}}^n$.

6.1.1 Wir erinnern zunächst an ein bekanntes Verfahren zur Bestimmung der Länge einer (rektifizierbaren) Kurve:
Sei $h : I \to \underline{\underline{R}}^n$ ein Kurvenstück in $\underline{\underline{R}}^n$. Man teile das Einheitsintervall irgendwie in m Abschnitte, die durch

$$0 = t_0 < t_1 \ldots < t_m = 1$$

bestimmt seien und bilde den Wert:

$$\sum_{i=1}^{m} |h(t_i) - h(t_{i-1})|$$

(Es handelt sich um die Länge eines dem Kurvenstück einbeschriebenen Polygonzuges). Ist die Menge aller dieser Werte - für beliebige m und $0 = t_0 < \ldots < t_m = 1$ - beschränkt, so heißt das Kurvenstück rektifizierbar, und man bezeichnet das Supremum dieser Menge als die „Länge" von h.

6.1.2 In Analogie dazu versuchte man nun das Maß einer Fläche als Supremum der Maße einbeschriebener Polyeder zu definieren. Es zeigt sich jedoch, daß das kein vernünftiges Maß ergibt: Schon bei einer endlichen Zylinderfläche, für die man ein Maß auf elementare Weise definieren kann, erhält man nach einem solchen Verfahren keine endliche Maßzahl, das zeigen z.B. die sog. „Schwarzschen Stiefelschen" (vgl. H.A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen, Band II, S. 309 - 311).

6.1.3 Man muß also nach einem anderen Weg zu einem allgemeinen Flächenmaß suchen. Das ist in mannigfacher Weise bereits geschehen (vgl. G. Nöbeling: „Über die Flächenmaße im euklidischen Raum". Mathematische Annalen, Band 118, Seite 687 - 701, 1941/43). Manche dieser Methoden lassen sich so verallgemeinern, daß man ein Maß für beliebige niederdimensionale Mengen in $\underline{\underline{R}}^n$ erhält. Unter diesen zeichnet sich die von Minkowski stammende durch besondere Einfachheit und Anschaulichkeit aus (vgl. H. Minkowski: „Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen". Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 9, Seite 115-121, 1901).

6.2 <u>Definition des Minkowskischen Maßes</u>

6.2.1 <u>Definition:</u> Sei A eine nichtleere Teilmenge in $\underline{\underline{R}}^n$.

(a) Unter dem <u>Abstand des Punktes $x \in \underline{\underline{R}}^n$ von der Menge A</u> versteht man die Größe

$$d(x,A) \,_{Df}{=} \inf_{y \in A} d(x,y)$$

(Dabei bedeutet $d(x,y)$ den gewöhnlichen euklidischen Abstand $|y - x|$ der Punkte x und y).

(b) Unter dem <u>Parallelkörper von A im Abstand r</u> $(r > 0)$ versteht man die Punktmenge

$$K_r A \,_{Df}{=} \{x \mid x \in \underline{\underline{R}}^n \text{ und } d(x,A) < r\}.$$

Ist A eine einpunktige Menge, d.h. $A = \{y\}$ für ein geeignetes $y \in \underline{\underline{R}}^n$, so ist $K_r A$ nichts anderes als die offene Kugel um y mit Radius r; wir schreiben dann auch einfach $K_r(y)$ statt $K_r A$.

Wir setzen außerdem: $K_r \emptyset \,_{Df}{=} \emptyset$.

6.2.2 Hilfssatz: Sei $A \subset \underline{\underline{R}}^n$ und $r > 0$; dann gilt:

(a) $K_r A$ ist offen in $\underline{\underline{R}}^n$

(b) $K_r A$ ist genau dann beschränkt, wenn A beschränkt ist.

(c) $K_r A$ ist genau dann integrierbar, wenn A beschränkt ist.

(d) Bezeichnet $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A, so ist

$$K_r \bar{A} = K_r A$$

(e) Ist B eine weitere Teilmenge in $\underline{\underline{R}}^n$, so ist

$$K_r(A \cup B) = K_r A \cup K_r B \quad \text{und}$$

$$K_r(A \cap B) \subset K_r A \cap K_r B$$

(Die Umkehrung der letzten Inklusion gilt jedoch i.a. nicht).

Beweis: (a), (b) trivial.

(c) Ist A beschränkt, so folgt aus (a), (b) und 2.7.5, daß $K_r A$ integrierbar ist. Sei umgekehrt A nicht beschränkt. Dann gibt es eine Punktfolge $x_1, x_2, \ldots$ in A, so daß gilt:

$$d(x_i, x_j) \geq 2\, r, \qquad \text{für } i \neq j.$$

Es folgt:

$$K_r A \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_r(x_i) \quad \text{und}$$

$$K_r(x_i) \cap K_r(x_j) = \emptyset \text{ für alle } i \neq j.$$

Wäre $K_r A$ integrierbar, so würde sich aus 2.5.2 ergeben:

$$\infty > m(K_r A) \geq \sum_{i=1}^{l} m(K_r(x_i)) = l\, k_n\, r^n,$$

wobei k_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bedeutet (vgl. 4.6.6). Da diese Umgleichung für alle natürlichen Zahlen l gelten müßte und $k_n r^n \neq 0$ ist, ergibt sich ein Widerspruch; $K_r A$ ist also nicht integrierbar.

(d) Die Inklusion $K_r A \subset K_r \bar{A}$ ist klar. Sei $x \in K_r \bar{A}$; dann gibt es ein $y \in \bar{A}$ mit

$$d(x,y) < r.$$

Da aber $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A ist, gibt es zu $s \;_{Df}\!= r - d(x,y)$ ein $z \in A$ mit:

$$d(y,z) < s.$$

Die Dreiecksungleichung liefert nun

$$d(x,z) < r,$$

also $d(x,A) < r$ und damit $x \in K_r A$.

(e) trivial.

6.2.3 <u>Definition:</u> Sei A eine beschränkte Teilmenge in $\underline{\underline{R}}^n$. Der Ausdruck

$$m_p(A) \;_{Df}\!= \lim_{r \to 0} \frac{m(K_r A)}{r^{n-p}\, k_{n-p}} \quad (0 \leq p \leq n).$$

heißt „<u>p-dimensionales Minkowski-Maß von A</u>". Es „<u>existiert</u>", wenn der Limes existiert und endlich ist.
(Die Voraussetzung „A beschränkt" ist durch 6.2.2(c) gerechtfertigt; k_{n-p} bedeutet das Maß der (n-p)-dimensionalen Einheitskugel in $\underline{\underline{R}}^n$).

6.2.4 <u>Bemerkungen:</u> (a) Aus 6.2.2. folgt noch:
Das p-dimensionale Minkowski-Maß einer Teilmenge A in $\underline{\underline{R}}^n$ existiert genau dann, wenn das p-dimensionale Minkowski-Maß ihrer abgeschlossenen Hülle $\bar{A}$ existiert, und in diesem Fall gilt:

$$m_p(A) = m_p(\bar{A}).$$

Diese Eigenschaft des Minkowski-Maßes ist ein großer Nachteil, weil sie oft Anlaß zu pathologischem Verhalten gibt, wie etwa Beispiel (b) in 6.2.5 zeigt.

(b) Existiert das p-dimensionale Minkowski-Maß einer Menge A in $\underline{\underline{R}}^n$, so exisitert auch das q-dimensionale Minkowski-Maß von A für alle q mit $p \leq q \leq n$, und es gilt:

$$m_q(A) = 0 \qquad \text{für } q > p.$$

Ist jedoch $m_p(A) \neq 0$, so existiert kein q-dimensionales Minkowski-Maß für $q < p$.

(c) Im Falle $p = n$ exisitert das Minkowski-Maß für jede beschränkte Menge A in $\underline{\underline{R}}^n$, und es gilt:

$$m_p(A) = m(\bar{A})$$

(Das folgt aus (1) und dem absteigenden Kettensatz in 2.7.3).

6.2.5 <u>Beispiele:</u> (a) In vielen Fällen liefert das Minkowski-Maß die erwartete Maßzahl, die nach elementaren Überlegungen gefunden werden kann. Wir knüpfen an 4.6 an und versuchen, das Maß der (n-1)-dimensionale Oberfläche einer Kugel vom Radius a um den Ursprung zu bestimmen. Wir setzen also:

$$A \underset{Df}{=} \{x \mid x \in \underline{\underline{R}}^n \text{ und } |x| = a\}.$$

Für K_rA erhalten wir, falls $r < a$ ist:

$$m(K_rA) = m(K_{a+r}(0)) - m(K_{a-r}(0)) =$$

$$= k_n[(a+r)^n - (a-r)^n],$$

und daraus ergibt sich:

$$m_{n-1}(A) = \lim_{r\to 0} k_n \lfloor (a+r)^n - (a-r)^n \rfloor / (r\cdot k_1) =$$

$$= n\cdot a^{n-1} k_n \ .$$

Speziell haben wir für n = 1, 2, 3 $m_0(A) = 2$, $m_1(A) = 2\,a\,\pi$ und $m_2(A) = 4a^2\pi$.

(b) Andererseits wollen wir auch gleich ein Beispiel betrachten, bei dem sich das Minkowskische Maß pathologisch verhält: A sei die Menge der rationalen Zahlen im Intervall $[0,1]$. Wir wissen, daß das Lebesgueesche Maß von A als Teilmenge von $\underline{\underline{R}}^1$ Null ist; das folgt aus der Abzählbarkeit von A und 2.7.1. Für das Minkowski-Maß gilt jedoch:

$$m_1(A) = m([0,1]) = 1$$

(Das folgt aus (c) in 6.2.4).

6.3 Eigenschaften

6.3.1 Satz: Sei $g : \underline{\underline{R}}^p \to \underline{\underline{R}}^n$ eine isometrische Abbildung, d.h. $d(x,y) = d(g(x),g(y))$ für alle x, y $\in \underline{\underline{R}}^p$, und A eine kompakte Teilmenge in $\underline{\underline{R}}^p$. Dann existiert das p-dimensionale Minkowski-Maß von gA als Teilmenge in $\underline{\underline{R}}^n$, und es ist gleich dem Lebesgueschen Maß von A als Teilmenge in $\underline{\underline{R}}^p$.

Beweis: Als isometrische Abbildung ist g offen. Wir können deshalb o.B.d.A. annehmen:

$$g(x_1,\dots,x_p) = (x_1,\dots,x_p,\ 0,\dots,0)$$

für alle $x = (x_1,\dots,x_p) \in \underline{\underline{R}}^p$.

Eine gegebenenfalls hinzukommende Bewegung ändert am Maß des Parallelkörpers von gA nichts mehr (vgl. 4.2.3) und damit auch nicht am Minkowskischen Maß von gA.

Wir haben nun:

$$A \times K_r(0) \subset K_r(A \times 0) = K_r(gA) \subset K_rA \times K_r(0)$$

($0 \in \underline{R}^{n-p}$!), und es folgt nach 2.5.2

$$m(A \times K_r(0)) \leq m(K_r(gA)) \leq m(K_rA \times K_r(0)).$$

Der Satz von Fubini (3.2.1) ergibt:

$$m(A)\cdot r^{n-p}\ k_{n-p} \leq m(K_r(gA)) \leq m(K_rA)\cdot r^{n-p}\ k_{n-p}\ ,$$

d.h.

$$m(A) \leq \frac{m(K_r(gA))}{r^{n-p}\ k_{n-p}} \leq m(K_rA).$$

Aus dem absteigenden Kettensatz (2.7.3) folgt:

$$\lim_{r\to 0} m(K_rA) = m(A)$$

und daher

$$m_p(gA) = \lim_{r\to 0} \frac{m(K_r(gA))}{r^{n-p}\ k_{n-p}} = m(A)\ .$$

6.3.2 <u>Bemerkung:</u> Mit Hilfe von Beispiel (b) in 6.2.5 überlegt man sich leicht, daß die Voraussetzung „A kompakt" für die Gültigkeit des Satzes 6.3.1 wesentlich ist. (Man vgl. auch 6.2.4.(a)).

6.3.3. <u>Satz:</u> <u>Existiert das p-dimensionale Minkowski-Maß von nichtleeren Teilmengen A und B in $\underline{R}^n$ und ist $d(A,B) =_{Df} \inf_{x\in A} d(x,B) > 0$, so existiert auch das p-dimensionale Minkowski-Maß von $A \cup B$, und es gilt:</u>

$$m_p(A) + m_p(B) = m_p(A \cup B).$$

Beweis:

Sei $d(A,B) = \varepsilon$. Dann ist für $r < \frac{\varepsilon}{2}$

$$K_rA \cap K_rB = \emptyset$$

und deshalb

$$m(K_r(A \cup B)) = m(K_rA \cup K_rB) \qquad \text{nach 6.2.2}$$
$$= m(K_rA) + m(K_rB) \qquad \text{nach 2.5.2.}$$

Da $m_p(A)$ und $m_p(B)$ existiert, ergibt sich die Behauptung.

6.3.4. Bemerkungen: (a) Sind in Satz 6.3.3. die Mengen A und B kompakt, so folgt

$$d(A,B) > 0 \quad \text{aus } A \cap B = \emptyset.$$

(b) Ist $d(A,B) = 0$, so braucht eine zu Formel (1) in 2.5.2. analoge Formel für das Minkowskische Maß nicht zu gelten: Wir betrachten als Beispiel den Fall (2) in 6.2.5., wobei einerseits gilt:

$m_1(A) + m_1([0,1]-A) = m_1([0,1] + m_1([0,1]) = 2$,

und andererseits haben wir:

$m_1(A \cup [0,1]-A) = m_1([0,1]) = 1.$

(c) Auch die Kettensätze (2.7.3.) brauchen für das Minkowski-Maß nicht zu gelten:

Wir betrachten die folgende Punktmenge A in $\underline{\underline{R}}^2$:

$$A_{Df} = \{(x,y) \mid x = \frac{1}{\sqrt{m}} \;;\; y = \frac{k}{2m\sqrt{m}} \;;\; m = 1,2,\ldots;$$

$$k = 1,\ldots,m\} \cup \{0\}.$$

A ist also eine abzählbare kompakte Punktmenge, deren einziger Häufungspunkt der Nullpunkt ist. Ein aufsteigender Kettensatz hätte $m_1(A) = 0$ zur Folge. Es ist jedoch $m_1(A) = \infty$, wie man folgendermaßen einsieht:

Sei $0 < r < \frac{1}{4}$. Dann existiert genau eine natürliche Zahl m mit:

$$\frac{1}{4(m+1)\sqrt{m+1}} \leq r < \frac{1}{4m\sqrt{m}} \quad (*).$$

Auf Grund von

$$r < \frac{1}{4m\sqrt{m}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \qquad \text{für } k = 2,\ldots,m$$

haben die Punkte von A mit den Abszissen $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$ $(k = 1,\ldots,m)$ voneinander einen Abstand $> 2r$, so daß die Kreise von dem Radius r um diese Punkte paarweise disjunkt sind. Hieraus folgt:

$$m(K_r A) \geq \pi\, r^2\,(2+3+\ldots+(m+1)) \geq \frac{1}{2}\pi\, r^2 (m+1)^2 .$$

Andererseits folgt aus (*)

$$(m+1)^2 \geq \frac{1}{16\, r^{4/3}}$$

und daher insgesamt

$$\frac{m(K_r A)}{2r} \geq \frac{\pi}{64\, r^{1/3}} \xrightarrow[r\to 0]{} \infty , \quad \text{w.z.b.w.}$$

Hieraus läßt sich auch gleich ein Gegenbeispiel zum absteigenden Kettensatz konstruieren:

Sei $B_j \ {}_{Df}\!= \{(x,y) \mid (x,y) \in A \text{ und } x \leq \frac{1}{\sqrt{j}}\}$ $(j = 1,2,\ldots)$.

Dann ist $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} B_j = \{(0,0)\}$ und damit

$m_1\left(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} B_j\right) = 0$ im Unterschied zu $m_1(B_j) = \infty$

für alle $j = 1,2,\ldots$.

6.4. "Gute" Mengen in $\underline{\underline{R}}^n$

6.4.1. Definition: Eine Teilmenge $X \subset \underline{\underline{R}}^n$ heißt "gut (für das p-dimensionale Minkowski-Maß)", genau wenn

(a) für jedes kompakte $A \subset X$ $m_p(A)$ existiert und

(b) (aufsteigende Kettenbedingung) für beliebige kompakte Mengen $A_1, A_2 \ldots \subset X$ mit:

$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ gilt:

$$m_p(a) = \lim_{j\to\infty} m_p(A_j).$$

6.4.2. Unmittelbar aus der Definition entnehmen wir die Folgerung: Ist eine Teilmenge $X \subset \underline{\underline{R}}^n$ gut für das p-dimensionale Minkowski-Maß, so ist (a) jede Teilmenge $Y \subset X$ gut für das p-dimensionale Minkowski-Maß und (b) X gut für das q-dimensionale Minkowski-Maß, wenn $p \leq q \leq n$ ist (vgl. 6.2.4. (b)).

6.4.3. Bemerkung: Man erkennt sofort, daß eine Teilmenge $X \subset \underline{\underline{R}}^n$ genau dann gut ist, wenn jede kompakte Teilmenge von X gut ist.

Deswegen genügen uns die folgenden Sätze, die ja meistens nur für kompakte Mengen formuliert sind. Allerdings folgt aus dem bisher Gesagten noch nicht, daß es überhaupt gute Mengen in $\underline{\underline{R}}^n$ gibt. Wir werden jedoch später sehen, daß die p-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten gut für das p-dimensionale Minkowski-Maß sind.

6.4.4. <u>Hilfssatz:</u> <u>Seien A und B kompakte Teilmengen in $\underline{\underline{R}}^n$, A sei gut für das p-dimensionale Minkowski-Maß, und es existiere $m_p(B)$. Dann existiert auch $m_p(A \cup B)$, und es gilt:</u>

$$\underline{m_p(A \cup B) + m_p(A \cap B) = m_p(A) + m_p(B).}$$

<u>Beweis:</u> $m_p(A)$ und $m_p(A \cap B)$ existieren, da A gut ist. Weiterhin gilt:

$$K_r(A \cup B) = K_rA \cup K_rB \quad \text{(nach 6.2.2.)}$$

$$K_r(A \cap B) \subset K_rA \cap K_rB.$$

(Daß hier im allgemeinen nicht „=" stehen kann, sieht man ein, wenn man $A \cap B = \emptyset$ annimmt.) Es folgt

$$m(K_r(A \cup B)) + m(K_r(A \cap B)) \leq m(K_rA \cup K_rB) + m(K_rA \cap K_rB) =$$

$$= m(K_rA) + m(K_rB).$$

Daraus erhalten wir:

$$\limsup_{r \to 0} \frac{m(K_r(A \cup B))}{k_{n-p} \; r^{n-p}} =$$

$$\leq \limsup_{r \to 0} \frac{1}{k_{n-p} \; r^{n-p}} \left(m(K_rA) + m(K_rB) - m(K_r(A \cap B)\right) =$$

$$\leq m_p(A) + m_p(B) - m_p(A \cap B).$$

Andererseits definieren wir:

$$D_j \underset{Df}{=} A \cap (\mathbb{R}^n - K_{\frac{1}{j}}(B)) = \{x \mid x \in A \text{ und } d(x,B) \geq \frac{1}{j}\}.$$

Daraus ergibt sich: $d(D_j,B) \geq \frac{1}{j} > 0$ und $m_p(D_j)$ existiert, da A gut und D_j kompakt ist. Satz 6.3.3 liefert nun:

$$m_p(D_j \cup B) = m_p(D_j) + m_p(B)$$

und

$$m_p(D_j \cup (A \cap B)) = m_p(D_j) + m_p(A \cap B).$$

Aus $D_j \cup B \subset A \cup B$ folgt nun für alle j:

$$m_p(D_j \cup B) \leq \liminf_{r \to 0} \frac{m(K_r(A \cup B))}{k_{n-p}\ r^{n-p}} .$$

Wir haben aber nach den obigen Gleichungen:

$$m_p(D_j \cup B) = m_p(D_j \cup (A \cap B)) + m_p(B) - m_p(A \cap B)$$

und, da A gut ist (vgl. 6.4.1.)

$$m_p(A) = \lim_{j \to \infty} m_p(D_j \cup (A \cap B)).$$

Das liefert:

$$m_p(A) + m_p(B) - m_p(A \cap B) \leq \liminf_{r \to 0} \frac{m(K_r(A \cup B))}{k_{n-p}\ r^{n-p}} \leq$$

$$\leq \limsup_{r \to 0} \frac{m(K_r(A \cup B))}{k_{n-p}\ r^{n-p}} = m_p(A) + m_p(B) - m_p(A \cap B) .$$

Also muß überall das Gleichheitszeichen stehen, und wir erhalten daraus die Behauptung.

6.4.5. <u>Folgerung:</u> <u>Ist eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ gut für das p-dimensionale Minkowski-Maß, so gilt für kompakte Mengen A und B in X:</u>

$$\underline{m_p(A \cup B) + m_p(A \cap B) = m_p(A) + m_p(B).}$$

Beweis: A ist gut nach 6.4.2. (a) und $m_p(B)$ existiert nach 6.4.1.(a). Damit sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 6.4.4. erfüllt.

6.4.6. Satz: Seien A und B kompakte Teilmengen in $\underline{\underline{R}}^n$ und beide gut für das p-dimensionale Minkowski-Maß; dann ist auch $A \cup B$ gut.

Beweis: (a) Sei K eine kompakte Teilmenge in $A \cup B$. Nach 6.4.2.(a) sind die Mengen $K \cap A$ und $K \cap B$ gut und 6.4.4. liefert die Existenz von

$$m_p((K \cap A) \cup (K \cap B)) = m_p(K),$$

also ist die Bedingung 6.4.1.(a) erfüllt.

(b) Sei nun K_j eine aufsteigende Folge von kompakten Mengen in $A \cup B$ $(j = 1,2,\dots)$ und $K = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ eine kompakte Menge in $A \cup B$. Da A und B gut sind, haben wir nach 6.4.1.(b)

$$m(K \cap A) = \lim_{j\to\infty} m\,(K_j \cap A)$$

bzw.

$$m(K \cap B) = \lim_{j\to\infty} m\,(K_j \cap B) ,$$

also

$$(*)\ m(K \cap A) + m(K \cap B) = \lim_{j\to\infty} m\,((K_j \cap A) + m\,(K_j \cap A)).$$

Nun gilt aber für jede kompakte Menge $L \subset A \cup B$ nach 6.4.4. (vgl. (a))

$$m_p(L) = m_p((L \cap A) \cup (L \cap B)) = m_p(L \cap A) + m_p(L \cap B) -$$
$$- m_p(L \cap A \cap B).$$

Indem wir diese Beziehung in die Gleichung (*) einsetzen, erhalten wir die Bedingung 6.4.1.(b).

6.4.7. Satz: Ist eine Teilmenge $X \subset \underline{\underline{R}}^n$ gut für das p-dimensionale Minkowski-Maß, so gilt in X der absteigende Kettensatz für Ketten von kompakten Mengen, d.h. sind $A_j (j = 1,2\ldots)$ kompakte Mengen in X mit der Eigenschaft:

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j ,$$

so ist $m_p(A) = \lim_{j\to\infty} m_p(A_j)$;

($m_p(A)$ existiert, da A als Durchschnitt von kompakten Mengen selbst kompakt und natürlich in X enthalten ist, nach (6.4.1(a)).

Beweis: Wir setzen für $j = 1,2,\ldots$

$$B_j \;{}_{Df}\!= A_1 \cap (\underline{\underline{R}}^n - K_{\frac{1}{j}}(A_j)) = \{x \mid x \in A_1 \text{ und } d(x,A_j) \geq \tfrac{1}{j}\}.$$

Da B_j kompakt ist, haben wir unter Berücksichtigung von $B_j \cap A_j = \emptyset$ und $B_j \cap A = \emptyset$:

$$\begin{aligned}
(*)\quad m_p(B_j \cup A) &= m_p(B_j) + m_p(A) && \text{(nach 6.4.4)}\\
&\leq m_p(B_j) + m_p(A_j) && \text{(wegen } K_rA_j \supset K_rA!)\\
&= m_p(B_j \cup A_j) && \text{(nach 6.4.4.)}\\
&\leq m_p(A_1) && \text{(wegen } K_rA_1 \supset K_r(B_j \cup A_j))
\end{aligned}$$

für alle $j = 1,2,\ldots$.

Andererseits folgt aus 6.4.1.(b), da die $(B_j \cup A)$ $(j = 1,2,\ldots)$ eine aufsteigende Kette mit der Vereinigung A_1 bilden,

$$\lim_{j\to\infty} m_p(B_j \cup A) = m_p(A_1).$$

Gehen wir deshalb in der Gleichungsfolge (*) zur Grenze $j \to \infty$ über, so muß überall das Gleichheitszeichen stehen, wir haben also insbesondere:

$$\lim_{j\to\infty} m_p(B_j) + m_p(A) = \lim_{j\to\infty} (m_p(B_j) + m_p(A_j)).$$

Da aber $\lim_{j\to\infty} m_p(B_j)$ (auch nach 6.4.1.) existiert, folgt die Behauptung.

6.5 Maß eines niederdimensionalen Parallelotops.

6.5.1 Hilfssatz: Seien $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die „Gramsche" Determinante

$$G_{Df} = \mathrm{Det}((v_i,v_j) \mid i,j = 1,\dots,n)$$

die Formel

$$G = [\mathrm{Det}(v_1,\dots,v_n)]^2 \quad .$$

Beweis: Sei $V = (v_1,\dots,v_n)$ die Matrix, in der die $v_i (i = 1,\dots,n)$ als Spaltenvektoren auftreten. Bezeichnet V^T die Transponierte von V, so folgt

$$V^T \cdot V = \begin{pmatrix} (v_1,v_1) & \dots & (v_1,v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (v_n,v_1) & \dots & (v_n,v_n) \end{pmatrix} \quad ,$$

also $G = \mathrm{Det}(V^T \cdot V) = \mathrm{Det}\, V^T \cdot \mathrm{Det}\, V = (\mathrm{Det}\, V)^2 =$

$$= [\mathrm{Det}\,(v_1,\dots,v_n)]^2 \; .$$

6.5.2. Satz: Sei $P(v_1,\dots,v_p)$ das von den Vektoren $v_1,\dots,v_p \in \mathbb{R}^n$ aufgespannte Parallelotop $(0 \le p \le n)$. Dann ist

$$m_p(P(v_1,\dots,v_p)) = \sqrt{\mathrm{Det}\,((v_i,v_j) \mid i,j = 1,\dots,p)} \; .$$

Beweis: Da eine Bewegung beide Seiten der zu beweisenden Gleichung invariant läßt, können wir o.B.d.A.

$$v_i = (v_i',0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \text{ für } i = 1,\dots,p \text{ annehmen.}$$

Dann erhalten wir:

$$m_p(P(v_1,\ldots,v_p)) = m(P(v_1',\ldots,v_p')) \qquad \text{(nach 6.3.1.)}$$

$$= |\,\mathrm{Det}\,(v_1',\ldots,v_p')\,| \qquad \text{(nach 4.2.3, Folg. 3)}$$

$$= [\,\mathrm{Det}((v_i',v_j') \mid i,j = 1,\ldots,p)]^{1/2} \qquad \text{(nach 6.5.1.)}$$

$$= [\,\mathrm{Det}((v_i,v_j) \mid i,j = 1,\ldots,p)]^{1/2}$$

(nach unserer obigen Voraussetzung).

6.6 Der Darstellungssatz für das Minkowski-Maß

Bevor wir den Darstellungssatz (6.6.2.) formulieren, beweisen wir einen Hilfssatz, der den Kern des Darstellungssatzes bereits enthält.

6.6.1. Hilfssatz: Sei M eine Teilmenge in $\underline{\underline{R}}^n$, a ein Punkt von M, U' eine offene Menge in $\underline{\underline{R}}^p$ $(0 < p < n)$ und $g : U' \to M$ eine lokale C^2-Karte von M um a; dann gibt es eine Umgebung V' von $a' =_{Df} g^{-1}(a)$ in U' - d.h. $a' \in V' \subset U'$ -, so daß gV' gut für das p-dimensionale Minkowski-Maß ist, und für jede kompakte Menge $A' \subset V'$ gilt:

$$m_p(gA') = \int_{A'} [\,\mathrm{Det}\,((D_i g,\ D_j g) \mid i,j = 1,\ldots,p)]^{1/2} \quad .$$

Beweis: Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $g(U') = M$, d.h. insbesondere, daß M eine p-dimensionale C^2-Mannigfaltigkeit ist. Nach 5.5.6. bilden dann die Vektoren $(D_i g)(a')$ $(i = 1,\ldots,p)$ eine Basis des Tangentialraumes T_aM an M in a.

Da T_aM ein Untervektorraum von $\underline{\underline{R}}^n$ ist (5.5.5.), gibt es Vektoren $v_{p+1},\ldots,v_n \in \underline{\underline{R}}^n$, so daß die Vektoren $(D_1 g)(a'),\ldots,(D_p g)(a'),v_{p+1},\ldots,v_n$ zusammen eine Basis von $\underline{\underline{R}}^n$ bilden.

Betrachten wir nun die Determinantenfunktion $T : U' \to R$, die durch

$$T(x')_{Df} = \mathrm{Det}[(D_1 g)(x'), \ldots, (D_p g)(x'), v_{p+1}, \ldots, v_n]$$

gegeben ist, so ist $T(a') \neq 0$, da die Vektoren $(D_1 g)(a'), \ldots, (D_p g)(a'), v_{p+1}, \ldots, v_n$ als Basis von $\underline{\underline{R}}^n$ linear unabhängig sind, und aus der bekannten Stetigkeit von Determinantenfunktionen folgt, daß es eine offene Umgebung U'_1 von a' in U' gibt, so daß für alle $x' \in U'_1$ ebenfalls gilt:

$$T(x') \neq 0.$$

Damit bilden die Vektoren

$$(D_1 g)(x'), \ldots, (D_p g)(x'), v_{p+1}, \ldots, v_p$$

für jedes $x' \in U'_1$ eine Basis von $\underline{\underline{R}}^n$. Wir wenden nun auf diese Basen das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren an, indem wir setzen:

$$w_1(x')_{Df} = \frac{(D_1 g)\ (x')}{|(D_1 g)\ (x')|}$$

$$w_2(x')_{Df} = \frac{(D_2 g)(x') - ((D_2 g)(x'), w_1(x'))w_1(x')}{|(D_2 g)(x') - ((D_2 g)(x'), w_1(x'))w_1(x')|}$$

$$\vdots$$

$$w_n(x')_{Df} = \frac{v_n - \sum_{i=1}^{n-1} (v_n, w_i(x'))\ w_i(x')}{\left|v_n - \sum_{i=1}^{n-1} (v_n, w_i(x'))w_i(x')\right|}.$$

Dann erkennen wir folgende Eigenschaften der Vektoren $w_1(x'), \ldots, w_n(x')$:

(1) Sie bilden für jedes $x' \in U'_1$ eine orthonormierte Basis des $\underline{\underline{R}}^n$.

(2) Die induzierten Abbildungen $w_i : U_1' \to \underline{\underline{R}}^n$ $(i = 1,\dots,n)$ sind C^1-Abbildungen, da g als C^2-Abbildung vorausgesetzt ist.

(3) Die Vektoren $w_1(x'),\dots,w_p(x)$ spannen denselben Untervektorraum von $\underline{\underline{R}}^n$ auf wie die Vektoren $(D_1g)(x'),\dots,(D_pg)(x')$, sie bilden also auch eine Basis von $T_{g(x')}M$.

Daraus folgt noch, daß die Vektoren $w_{p+1}(x'),\dots,w_n(x')$ eine orthonormierte Basis des Normalraumes $N_{g(x')}M$ zu M in $g(x')$ (vgl. 5.5.1.) bilden.

Nun definieren wir $h_1 : U_1' \times \underline{\underline{R}}^{n-p} \to \underline{\underline{R}}^n$ durch

$$h_1(x_1,\dots,x_n) =_{Df} g(x_1,\dots,x_p) + \sum_{j=p+1}^{n} x_j\, w_j(x_1,\dots,x_p) .$$

Aus der Eigenschaft (2) folgt, daß h_1 eine C^1-Abbildung ist; wir erhalten als Funktionalmatrix für alle $x = (x_1,\dots,x_n) \in U_1' \times \underline{\underline{R}}^{n-p}$:

$$Jh_1(x) = ((D_1g)(x') + \sum_{j=p+1}^{n} x_j\, D_1\, w_j(x'),\dots,w_{p+1}(x'),\dots,w_n(x')),$$

wenn $x' =_{Df} (x_1,\dots,x_p)$ gesetzt wird.

An der Stelle $x = (a',0)$ ist Jh_1 nicht singulär, d.h. die Abbildung h_1 ist bei $x = (a',0)$ lokal umkehrbar.

Damit induziert h_1 einen C^1-Diffeomorphismus $h : V \to W$, wobei V eine geeignete offene Umgebung von $(a',0)$ in $U_1' \times \underline{\underline{R}}^{n-p}$ und W eine geeignete offene Umgebung von $h_1(a',0) = g(a') = a$ in $\underline{\underline{R}}^n$ bedeutet; dazu können wir o.B.d.A. annehmen: Die Mengen V und W sowie die Funktion $\operatorname{Det} Jh : V \to \underline{\underline{R}}$ sind beschränkt, außerdem gilt:

$$V = V' \times V'' \quad (a' \in V' \subset \underline{\underline{R}}^p,\ 0 \in V'' \subset \underline{\underline{R}}^{n-p}),$$

V' und V'' sind offen in $\underline{\underline{R}}^p$ bzw. $\underline{\underline{R}}^{n-p}$. Es gibt deshalb ein $\alpha > 0$, so daß gilt:

$$K_r(0) \subset V'' \text{ für alle } r \leq \alpha.$$

Sei nun A' eine kompakte Teilmenge von V'.

Wir beweisen zunächst:

<u>Behauptung 1:</u> <u>Für alle $r \leq \alpha$ gilt:</u>

$$\underline{h(A' \times K_r(0)) \subset K_r(gA').}$$

Die Voraussetzung $r \leq \alpha$ sichert, daß $A' \times K_r(0)$ im Definitionsbereich von h enthalten ist. Sei nun $(x', x'') \in A' \times K_r(0)$; dann folgt:

$$|h(x', x'') - g(x')| = \left| \sum_{j=p+1}^{n} x_j w_j (x') \right| =$$

$$= \sqrt{\sum_{j=p+1}^{n} x_j^{\,2}} \quad \text{(Die } w_j \text{ sind orthonormiert)}$$

$$= \quad |x''| < r.$$

Wegen $g(x') \in gA'$, folgt aus dieser Ungleichung die Behauptung 1.

Wir wollen nun eine geeignete Obermenge von $K_r(gA')$ bestimmen. Dazu wählen wir eine offene Menge D' in $\underline{\underline{R}}^p$, so daß gilt:

$$A' \subset D'$$

und

$$\bar{D}' \subset V',$$

wobei $\bar{D}'$ die abgeschlossene Hülle von D' bedeutet. Da V' beschränkt ist, ist sowohl $\bar{D}'$ als auch $Rd_{V'}D'$ (s.5.7.1.(a) und 5.7.3.) kompakt. Weiterhin sind auch die Mengen $g(Rd_{V'}D') = Rd_{gV'}(gD') = Rd_M(gD')$ und gA' kompakt, da g stetig ist;

wegen $Rd_{V'}D' \cap A' = \emptyset$ folgt aus der Injektivität von g:

$$d(gA', Rd_M(gD')) > 0 .$$

Sei nun

$$a_1 \underset{Df}{=} \mathrm{Min}(\alpha, \tfrac{1}{2}\, d(gA', Rd_M(gD')) \qquad (> 0!).$$

Dann gilt für $r \leq \alpha_1$ die

<u>Behauptung 2: Ist $A'_r \underset{Df}{=} pr' \cdot h^{-1}(K_r(gA'))$, so gilt:</u>

$$\underline{K_r(gA') \subset h(A_r' \times K_r(0))}$$

<u>($pr' : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{R}}^p$ ist definiert durch:</u>

$$\underline{pr'(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_p)).}$$

Um das zu beweisen, definieren wir zu einen Punkt $y \in K_r(gA')$ eine C^2-Abbildung $\varphi : \bar{D}' \to \underline{\underline{R}}$ durch

$$\varphi(x') = |y - g(x')|^2 \qquad (x' = (x_1,\ldots,x_p)).$$

Da φ stetig und $\bar{D}'$ kompakt ist, besitzt φ ein Minimum, d.h. es existiert ein $b' \in \bar{D}'$, so daß gilt:

$$\varphi(b') \leq \varphi(x') \quad \text{für alle } x' \in \bar{D}' .$$

Da aber $y \in K_r(gA')$ ist, gibt es ein $c' \in A'$, so daß gilt:

$$|y - g(c')| < r \quad ,$$

und wir haben

$$|y - g(b')|^2 = \varphi(b') \leq \varphi(c') = |y - g(c')|^2,$$

da $c' \in A' \subset \bar{D}'$; daraus ergibt sich

$$|y - g(b')| < r$$

und:

$$|g(c') - g(b')| < 2\, r \leq 2\alpha_1 \leq d(gA', Rd_M(gD')).$$

Daraus schließen wir: b' ist innerer Punkt des Definitionsbereiches von φ. Deswegen folgt aus der Minimaleigenschaft von φ an der Stelle b':

$$(\operatorname{grad} \varphi)(b') = 0,$$

d.h. $(D_i\varphi)(b') = 0$ für $i = 1,\ldots,p$. Nun ist aber $(D_i\varphi)(x') = 2(y - g(x'), (D_ig)(x'))$ für alle $x' \in \bar{D}'$ und $i = 1,\ldots,p$.

Das liefert:

$$y - g(b') \in N_{g(b')}M \quad ,$$

und deswegen gilt:

$$y - g(b') = \sum_{j=p+1}^{n} z_j\, w_j(b') \text{ für ein geeignetes } z'' = (z_{p+1},\ldots,z_n) \in \mathbb{R}^{n-p} \quad ,$$

d.h.

$$y = g(b') + \sum_{j=p+1}^{n} z_j\, w_j(b') = h(b',z'');$$

das letzte Gleichheitszeichen gilt,

da $|z''| = |y-g(b')| < r$, also $z'' \in K_r(0) \subset V''$ ist.

Schließlich folgt $(b',z'') \in A'_r \times K_r(0)$ wegen

$b' = pr' \circ h^{-1} \circ h(b',z'') = pr' \circ h^{-1}(y) \in pr' \circ h^{-1}\ (K_rgA') = A'_r$,

also ist auch die Behauptung 2 bewiesen.

Die Behauptungen 1 und 2 ergeben nun zusammen:

für $r \leq \alpha_1$ gilt:

$m(h(A' \times K_r(0)) \leq m\, K_r(gA') \leq m(h(A'_r \times K_r(0)))$.

Die angegebenen Mengen sind alle (Lebesgue-) integrierbar, und der Transformationssatz (4.2.2.) liefert:

$$(*) \quad \int_{A' \times K_r(0)} |\operatorname{Det} Jh| \leq m(K_rgA') \leq \int_{A'_r \times K_r(0)} |\operatorname{Det} Jh| \quad .$$

Wir wenden auf das linke Integral den Satz von Fubini (3.2.1.) an und erhalten:

$$\int_{A'xK_r(0)} |\text{Det } Jh| = \int_{A'} dx' \int_{K_r(0)} |\text{Det } Jh(x',x")| \; dx" .$$

Aus der Stetigkeit der Determinantenfunktion folgt, daß es zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $(x',x") \in \bar{D}' \times \overline{K_r(0)}$ mit: $|x"| < \delta$ gilt:

$\big|\,|\text{Det } Jh(x'.x")| - |\text{Det } Jh(x',0)|\,\big| < \varepsilon.$

Es folgt für $r < \delta$:

$$\left| \int_{K_r(0)} |\text{Det } Jh(x',x")| \; dx" - \int_{K_r(0)} |\text{Det } Jh(x',0)| dx" \right| < \varepsilon \cdot k_{n-p} \; r^{n-p}$$

und wegen

$$\int_{K_r(0)} |\text{Det } Jh(x',0)| \; dx" = |\text{Det } Jh(x',0)| \cdot k_{n-p} \; r^{\;n-p}$$

ergibt sich

$$\left| \frac{1}{k_{n-p} \; r^{n-p}} \int_{A'xK_r(0)} | \; \text{Det } Jh(x',x")| dx'dx" - \int_{A'} |\text{Det } Jh(x',0)| dx' \right| \leq \varepsilon m$$

(für $r < \delta$), und wir erhalten

$$\lim_{r \to 0} \frac{m(h(A'xK_r(0)))}{k_{n-p} \; r^{n-p}} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{\int_{A'xK_r(0)} |\text{Det } Jh(x',x")| dx'dx"}{k_{n-p} \; r^{n-p}} =$$

$$= \int_{A'} |\text{Det } Jh(x',0)| dx' .$$

Im Hinblick auf die rechte Seite von (*) wollen wir erst das folgende Integral untersuchen:

$$\left| \int_{(A_r'-A')\times K_r(0)} \frac{|\mathrm{Det}\ Jh|}{k_{n-p}\ r^{n-p}} \right| \le \int_{(A_r'-A')} dx' \left| \int_{K_r(0)} \frac{|\mathrm{Det}\ Jh(x',x'')|\,dx''}{k_{n-p}\ r^{n-p}} \right| \le$$

$$\le \int_{(A_r'-A')} \epsilon + |\mathrm{Det}\ Jh(x',0)|\ dx' \quad (\text{für } r < \delta)$$

$$\le C \cdot m(A_r' - A'),$$

wobei C eine geeignete obere Schranke für die Funktion $\epsilon + |\mathrm{Det}\ Jh(x',o)|$ $(x' \in V')$ bedeutet.
(Wir haben V so konstruiert, daß eine solche Schranke immer existiert.) Aus dem absteigenden Kettensatz folgt nun:

$$\lim_{r\to 0} m(A_r' - A') = 0,$$

und damit haben wir

$$\lim_{r\to 0} \int_{(A_r' - A')\times K_r(0)} \frac{|\mathrm{Det}\ Jh|}{k_{n-p}\ r^{n-p}} = 0 .$$

Die Ungleichung (*) liefert nun

$$\int_{A'\times K_r(0)} \frac{|\mathrm{Det}\ Jh|}{k_{n-p}\ r^{n-p}} \le \frac{m(K_r gA')}{k_{n-p}\ r^{n-p}} \le \int_{A'\times K_r(0)} \ldots\ldots\ldots + \int_{(A_r'-A')\times K_r(0)} \ldots\ldots\ldots .$$

Durch Übergang zur Grenze $r \to 0$ erhalten wir aus diesen Ungleichungen nach den obigen Berechnungen:

$$m_p(gA') = \lim_{r\to 0} \frac{m(K_r gA')}{k_{n-p}\ r^{n-p}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \int_{A'\times K_r(0)} \frac{|\mathrm{Det}\ Jh|}{k_{n-p}\ r^{n-p}} = \int_{A'} |\mathrm{Det}\ Jh(x',0)|\,dx' .$$

Für $|\mathrm{Det}\ Jh(x',0)|$ errechnen wir:

$$|\mathrm{Det}\; Jh(x',0)| = |\mathrm{Det}\; Jh_1(x',0)| =$$

$$= |\mathrm{Det}\,(D_1g(x'),\dots,D_pg(x'),w_{p+1}(x'),\dots,w_n(x'))|$$

$$= \sqrt{G}\;,$$

wobei G die Gramsche Determinante aus 6.5.1. bedeutet, die in unserem Fall gegeben ist durch

$$G = \left|\begin{array}{ccc|ccc} (D_1g(x'),D_1g(x')), & \dots, & (D_1g(x'),D_pg(x')) & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ (D_pg(x'),D_1g(x')), & \dots, & (D_pg(x'),D_pg(x')) & & & \\ \hline & & & 1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \end{array}\right|$$

da die $w_j(x')$ (unter sich) orthonormiert sind und auf jedem der $(D_ig)(x')$ senkrecht stehen ($i = 1,\dots,p$; $j = p+1,\dots,n$).

Wir können also zusammenfassen:

$$m_p(gA') = \int_{A'} [\mathrm{Det}((D_ig,\ D_jg)|\, i,j = 1,\dots,p)]^{1/2}$$

und haben damit den 2. Teil des Hilfssatzes bewiesen.

Um zu zeigen, daß gV' gut für das p-dimensionale Minkowski-Maß ist, müssen wir nach 6.4.1. auch noch nachweisen, daß die aufsteigende Kettenbedingung erfüllt ist. Diese folgt aber mit Hilfe der eben bewiesenen Formel aus 2.6.4.

6.6.2. <u>Darstellungssatz für das Minkowski-Maß:</u>

<u>Eine p-dimensionale C^2-Mannigfaltigkeit M in $\underline{\underline{R}}^n$ ist gut für das p-dimensionale Minkowski-Maß. Ist $g : U' \to M$ eine lokale (C^2-) Karte von M und A' eine kompakte Teilmenge in U', so ist</u>

$$m_p(gA') = \int_{A'} [\mathrm{Det}((D_ig,D_jg)|\; i,j = 1,\dots,p)]^{1/2}\;.$$

<u>Beweis:</u> Sei K eine kompakte Menge in M. Nach 6.6.1. gibt es zu jedem Punkt $a \in K$ eine lokale Karte $g_a : V'_a \to M$, so daß $g_a V'_a$ gut für das p-dimensionale Minkowski-Maß ist. Da die V'_a offen sind, können wir offene Mengen W'_a ($a \in K$) wählen, so daß für jedes $a \in K$ gilt:
$a \in g_a W'_a$ und die abgeschlossene Hülle $\overline{W}'_a$ von W'_a ist kompakt und in V'_a enthalten.
Damit bildet die Familie $(g_a W'_a \mid a \in K)$ eine Überdeckung der kompakten Menge K durch in M offene Mengen. Nach dem Überdeckungssatz von Heine-Borel genügen aber schon endlich viele dieser $g_a W'_a$ zur Überdeckung von K; seien es $g_{a_1} W'_{a_1}, \ldots$ $g_{a_l} W'_{a_l}$. Zur Abkürzung schreiben wir:

$g_i W'_i \;{}_{Df}{=}\; g_{a_i} W'_{a_i}$ für $i = 1, \ldots, l$. Also ist:

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{l} g_k W'_k \quad .$$

Dann gilt natürlich auch

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{l} g_h \overline{W'_k} \quad .$$

Für jedes $k (k = 1, \ldots, l)$ ist aber $g_k \overline{W}'_k$ eine kompakte Menge in $g_k V'_k$ und deshalb nach 6.4.2. gut. Satz 6.4.6. überträgt sich auf endliche Vereinigungen von kompakten guten Mengen, d.h. $\bigcup_{k=1}^{l} g_k \overline{W}'_k$ ist gut; damit ist nach 6.4.2. auch K gut. Die 1. Behauptung folgt nun aus 6.4.3.
Ist nun $g : U' \to M$ eine lokale (C^2-)Karte von M und A' eine kompakte Teilmenge in U', so wählen wir analog zum vorigen zu jedem $a' \in U'$ eine kompakte Umgebung $\overline{W}'_{a'}$, für die die Formel aus 6.6.1. gilt. Es genügen (wieder nach dem Überdeckungssatz von Heine-Borel) endlich viele dieser $\overline{W}'_{a'}$ zur Überdeckung von A';

für diese schreiben wir zur Abkürzung wieder $W'_1,\dots,W'_l$, so daß wir haben:

$$A' \subset \bigcup_{k=1}^{l} \bar{W}_k \ .$$

Sei $A'_k \ {}_{Df}{=} \ A' \cap \bar{W}'_k$. $(k = 1,\dots,l)$ und $B'_m \ {}_{Df}{=} \ \bigcup_{k=1}^{m} A'_k$

$(m = 1,\dots,l)$, d.h. $B'_1 = A'_1$ und $B'_l = A'$. Nach 6.4.5. folgt für
$m = 2,\dots,l$

$$m_p(B'_m) = m_p(B'_{m-1}) + m_p(A'_m) - m_p(B'_{m-1} \cap A'_m) \ .$$

Daraus folgt der Reihe nach

$$m_p(B'_2) = \int_{B'_2} [\mathrm{Det}((D_i g, D_j g))]^{1/2}$$

$\vdots$

$$m_p(B'_l) = m_p(A') = \int_{A'} [\mathrm{Det}((D_i g, D_j g))]^{1/2}$$

mit Hilfe von Folgerung (c) aus 2.2.2.

6.7 Bemerkungen und Beispiele zum Darstellungssatz

6.7.1. Bemerkung: Der Hilfssatz 6.6.1. und damit auch der Darstellungssatz 6.6.2. gilt ebenso, wenn nur C^1-Karten vorausgesetzt werden. Wir können darauf in unserem Rahmen nicht näher eingehen.

6.7.2. Beispiele: (a) Sei $p = 1$. Ist $g : U' \to M$ eine lokale Karte von M, so gibt es wegen $U' \subset \underline{\underline{R}}^1$ ein kompaktes Intervall $[a',b'] \subset U'$, und wir erhalten für die Länge des Kurvenstückes L von $g(a')$ bis $g(b')$ von M die bekannte Formel

$$m_1(L) = \int_a^b |g'(t)| \, dt \quad .$$

(b) Sei weiter $p = 1$, und nun außerdem $n = 2$. Seien V' und V'' offene Mengen in $\underline{\underline{R}}^1$ und $\varphi : V' \to V''$ eine lokale Beschreibung von M gemäß Bedingung (4) in 5.2.2. Wir erhalten eine lokale Karte $g : V' \to M$ von M, indem wir setzen:

$g(t) \underset{Df}{=} (t, \varphi(t))$ für alle $t \in V'$.

Nach (1) erhalten wir für ein kompaktes Intervall $[a,b] \subset V'$:

$$m_1(g[a',b']) = \int_a^b |g'(t)| \, dt = \int_a^b \sqrt{1+(\varphi'(t))^2} \, dt \; .$$

(c) Sei nun $p = 2$. Ist $g : U' \to M$ eine lokale Karte von M und A' eine kompakte Menge in U', so erhalten wir als Maß des Flächenstückes gA' in $\underline{\underline{R}}^n$

$$m_2(gA') = \int_{A'} \begin{vmatrix} (D_1 g, D_1 g) & (D_1 g, D_2 g) \\ (D_2 g, D_1 g) & (D_2 g, D_2 g) \end{vmatrix}^{1/2}$$

Unter Verwendung der Gaußschen Symbole

$E \underset{Df}{=} (D_1 g, D_1 g)$, $F \underset{Df}{=} (D_1 g, D_2 g) [= (D_2 g, D_1 g)]$, $G \underset{Df}{=} (D_2 g, D_2 g)$

können wir auch schreiben:

$$m_2(gA') = \int_{A'} \sqrt{EG - F^2}$$

(In der modernen Differentialgeometrie schreibt man häufig $g_{ij} \underset{Df}{=} (D_i g, D_j g)$ $(i,j = 1,2)$ und $g \underset{Df}{=} \mathrm{Det}((g_{ij}) | i,j = 1,2)$; das bedeutet:

$$m_2(gA') = \int_{A'} \sqrt{g}).$$

(d) Schließlich betrachten wir den Fall $p = 2$ und $n = 3$ unter der Voraussetzung

$$g(u,v) = (u,\ v,\ \varphi(u,v))$$

mit einer geeigneten Funktion φ.

Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
D_1 g &= (1,\ 0,\ D_1\varphi) \\
D_2 g &= (0,\ 1,\ D_2\varphi) \\
E &= 1 + (D_1\varphi)^2 \\
F &= (D_1\varphi)(D_2\varphi) \\
G &= 1 + (D_2\varphi)^2
\end{aligned}$$

$$EG - F = 1 + (D_1\varphi)^2 + (D_2\varphi)^2 = 1 + (\operatorname{grad}\varphi,\ \operatorname{grad}\varphi)$$

und damit

$$m_2(gA') = \int_{A'} \sqrt{1 + (\operatorname{grad}\varphi,\ \operatorname{grad}\varphi)}\ .$$

III. Kapitel: Alternierende Differentialformen

§ 7. Der Satz von Radon-Nikodym

7.1. Definitionen:

7.1.1. Sei M eine Menge und P eine Menge von Teilmengen von M. Eine Funktion $F : P \to \underline{\underline{R}}$ heißt Mengenfunktion auf M.

7.1.2. Sei M eine Menge, eine Mengenfunktion F auf M heißt additiv, wenn gilt:

$$F(A \cup B) = F(A) + F(B),$$

falls F für die Mengen A, B, $A \cup B \subset M$ definiert und $A \cap B = \emptyset$ ist.

7.1.3. Sei M eine Teilmenge in $\underline{\underline{R}}^n$. Eine additive Mengenfunktion auf M heißt vollstetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle (Lebesgue-) integrierbaren Mengen $A \subset M$, für die F(A) definiert und $m(A) < \delta$ ist, gilt:

$$F(A) < \varepsilon .$$

7.1.4. Sei M eine Teilmenge in $\underline{\underline{R}}^n$, x ein innerer Punkt aus M und F eine Mengenfunktion auf M, derart, daß für genügend kleine $r \in \,]0,\infty[$ $F(W_r(x))$ definiert ist. (Dabei bedeutet $W_r(x)$ den n-dimensionalen offenen Würfel um $x = (x_1,\ldots,x_n)$ mit der Kantenlänge 2 r, d.h. $W_r(x) \;_{Df}\!= \{y = (y_1,\ldots,y_n) \mid |x_i - y_i| < r,\ \ i = 1,\ldots,n\}$. Dann heißt der Ausdruck

$$F'(x) = \lim_{r\to 0} \frac{F(W_r(x))}{r^n\, k_n} \qquad \text{(vgl. 4.6.6.)}$$

das Differential von F an der Stelle x, falls ein endlicher Grenzwert exisitert.

7.2. Der Satz von Radon-Nikodym

7.2.1. Satz: Sei P eine Menge von (Lebesgue-) integrierbaren Teilmengen von

$E_n \underset{Df}{=} \{x \mid x = (x_1,\ldots,x_n) \in \underline{\underline{R}}^n$ und $\underset{1\le i\le n}{\operatorname{Max}} |x_i| \le 1\}$, so daß

für alle $x \in W_1(O) \subset E_n$ und $r \le 1 - \underset{1\le i\le n}{\operatorname{Max}} |x_i|$ gilt:

$$W_r(x) \in P;$$

außerdem sei $F : P \to \underline{\underline{R}}$ eine additive, vollstetige Mengenfunktion auf E_n. Dann gilt:

(a) Es gibt eine fast überall in E_n eindeutig bestimmte Funktion $f : E_n \to R$ mit: $\int\limits_A f = F(A)$ für alle $A \subset P$ (f heißt „Dichte" von F).

(b) Für fast alle $x \in E_n$ existiert das Differential von F an der Stelle x.

(c) Es gilt fast überall in E_n:

$$f(x) = F'(x),$$

wobei f die Funktion aus (a) bedeutet.

Den Beweis können wir in unserem Rahmen nicht führen. Eine allgemeinere Formulierung des Satzes und den vollständigen Beweis findet man z.B. in der (Original-)Arbeit von Otton Nikodym: „Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon" (Fundamenta mathematicae, Band 15, S. 131 - 179), oder in [H] § 31. Der Satz wird im folgenden nur zur Motivierung der Differentialformen und nicht zum systematischen Aufbau der Theorie benutzt.

7.2.2. Bemerkung: Ersetzt man die Voraussetzung der „Vollstetigkeit" durch die Forderung nach „gleichmäßiger" Differenzierbarkeit, so erhält man sogar eine stetige Dichte, die dann natürlich eindeutig bestimmt ist. Näheres dazu findet man in [B], Kap. 3 Nr. 5.

7.3. Beispiele:

7.3.1. Seien A und B offene Teilmengen in $\underline{\underline{R}}^n$, die E_n umfassen; weiterhin sei $t : A \to B$ ein C^1-Diffeomorphismus mit: $t\,E_n \subset E_n$, C bezeichne eine integrierbare Teilmenge in E_n und f die charakteristische Funktion von tC; dann ist $f \circ t$ die charakteristische Funktion von C und der Transformationssatz 4.2.2. liefert:

$$F(C) \underset{Df}{=} m(tC) = \int_B f = \int_A (f \circ t)\,|\mathrm{Det}\ Jt| = \int_A |\mathrm{Det}\ Jt|\ .$$

Also ist $|\mathrm{Det}\ Jt(x)|$ für fast alle $x \in E_n$ das Differential der Mengenfunktion F an der Stelle x. d.h.

$$|\mathrm{Det}\ Jt(x)| = \lim_{r \to 0} \frac{m(tK_r(x))}{r^n\, k_n}\ .$$

7.3.2. Sei M eine n-dimensionale C^2-Mannigfaltigkeit in $\underline{\underline{R}}^m$ und $g : U' \to M$ eine lokale Karte von M, so daß gilt: $U' \subset E_n$. Dann ist $g\,U'$ gut für das n-dimensionale Minkowski-Maß, und für jedes kompakte $A' \subset U'$ gilt:

$$F(A') \underset{Df}{=} m_n(gA') = \int_{A'} \sqrt{\mathrm{Det}((D_i g, D_j g)|\ i,j = 1,\dots,n)}$$

(nach 6.6.2.). Also ist $\sqrt{\mathrm{Det}((D_i g(x),\ D_j g(x))|i,j = 1,\dots,n)}$ für fast alle $x \in E_n$ das Differential der Mengenfunktion F an der Stelle x.

7.3.3. In der Physik treten als additive, vollstetige Mengenfunktionen die Funktionen auf, die jedem Teilkörper eines Körpers seine Masse bzw. Ladung zuordnen. Der Satz von Radon-Nikodym liefert dann die Existenz einer Dichtefunktion, der sog. „Massendichte" bzw. der „Ladungsdichte".

7.3.4. In der Wahrscheinlichkeitstheorie sind die Verteilungsfunktionen als Mengenfunktionen in unserem Sinne anzusprechen, und man erhält dann die „Wahrscheinlichkeitsdichte".

7.3.5. Nun wollen wir noch eine additive Mengenfunktion auf E_n angeben, zu der es keine Dichte gibt, das sog. „Dirac-Maß" Δ_{x_0} zum Punkte $x_0 \in E_n$. Es ist für alle integrierbaren Teilmengen A von E_n definiert durch die Bedingung:

$$\Delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x_0 \in A \\ 0. & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir erhalten zwar fast überall als Differential

$\Delta'_{x_0}(x) = 0$, falls $x \neq x_0$ und $|x| < 1$,

aber es gibt keine Dichte $\delta : E_n \to \underline{\underline{R}}$, so daß

$$\int_A \delta = \Delta_{x_0}(A)$$

für alle integrierbaren Teilmengen $A \subset E_n$ gilt, obwohl man in der Physik manchmal so tut („Dirac-Funktion").

§ 8 Begründung der alternierenden Differentialformen.

Auch für diesen § gilt das im Anschluß an den Satz von Radon-Nikodym Bemerkte: Wir entwickeln hier keinen strengen Aufbau der Theorie sondern versuchen nur, heuristisch die exakten Untersuchungen der folgenden §§ zu motivieren.

8.1. Ausgangspunkt

8.1.1. Beispiele: (a) Sei in $\underline{\underline{R}}^3$ ein Kraftfeld gegeben. Ist M eine eindimensionale Teilmannigfaltigkeit, d.h. eine Kurve in $\underline{\underline{R}}^3$, so können wir für jedes (abgeschlossene) Teilstück L von M eine „Arbeit" angeben, die ein Massenpunkt zur Durchlaufung dieses Teilstückes in einer bestimmten Richtung benötigt.

(b) Sei in $\underline{\underline{R}}^3$ eine Flüssigkeitsströmung gegeben. Ist M eine zweidimensionale orientierbare Teilmannigfaltigkeit, d.h. eine Fläche in $\underline{\underline{R}}^3$, so können wir jedem Teilstück von M die Flüssigkeitsmenge zuordnen, die in der Zeiteinheit durch dieses Flächenstück in einer bestimmten Richtung hindurchfließt.

8.1.2. Zu diesen Beispielen wollen wir nun den abstrakten Hintergrund untersuchen: Sei in $\underline{\underline{R}}^n$ eine p-dimensionale, orientierbare C^1-Mannigfaltigkeit M gegeben. Wir wollen mit O_1 bzw. O_2 die beiden möglichen Orientierungen von M bezeichnen. Für eine geeignete Teilmenge P der Potenzmenge PM von M sei eine Funktion

$$F : P \times \{O_1, O_2\} \rightarrow \underline{\underline{R}}$$

erklärt. Das Bildelement von $(A, O) \in P \times \{O_1, O_2\}$ bei dieser Abbildung F wollen wir durch

$$F\ (A;\ M,\ O).$$

bezeichnen. (F(A; M, O) ist in unserem Beispiel 8.1.1.(a) nichts anderes als die Arbeit, die zur Durchlaufung von A in Richtung O benötigt wird; auch in Beispiel 8.1.1.(b) hat es die dort näher beschriebene Bedeutung). Für unsere Überlegungen sollen die Menge P und die Funktion F gewissen (an Hand der Beispiele naheliegenden) Bedingungen genügen, z. B. soll F „stetig" und „additiv" von A abhängen; diese Bedingungen werden wir jedoch erst später genau formulieren (vgl. Annahme 1 in 8.2.2., Annahme 2 in 8.2.4. und Annahme 3 in 8.3.6.).

Die Funktion F sei von nun an für den Rest dieses Paragraphen fest vorgegeben.

8.2. Übergang zu Differentialen

8.2.1. Wir wollen uns nun auf den Fall beschränken, daß M ein p-dimensionaler affiner Unterraum von $\underline{\underline{R}}^n$ ist.

Sei a ein beliebiger Punkt aus M. Dann gibt es einen p-dimensionalen Untervektorraum V' von $\underline{\underline{R}}^n$, so daß wir schreiben können:

$$M = a + V' \quad .$$

Ist $v_1, \ldots, v_p$ eine Basis von V', so können wir durch

$$g(t_1, \ldots, t_p) \;{}_{Df}\!= a + \sum_{i=1}^{p} t_i v_i \quad \text{für alle } t = (t_1, \ldots, t_p) \in \underline{\underline{R}}^p$$

eine lokale (und in diesem Fall auch globale) Karte $g : \underline{\underline{R}}^p \to M$ von M um a definieren.

Zur Abkürzung schreiben wir noch:

$$g'(t) \;{}_{Df}\!= \sum_{i=1}^{p} t_i v_i \quad , \qquad \text{d.h.}$$

$$g(t) = a + g'(t) \quad .$$

Sei nun $O = [v_1,\dots,v_p]$ (vgl. 5.6.1.). Durch die Festsetzung

$\Phi(A') \;{}_{Df}{=}\; F(gA';\, M,\, O)$ für alle A' mit: $gA' \in P$

erhalten wir eine Mengenfunktion auf $\underline{\underline{R}}^p$ (vgl. 7.1.1.).

Wir machen nun die erste der in 8.1.2. angekündigten Voraussetzungen:

8.2.2. <u>Annahme 1:</u> Für jedes A aus P ist $g^{-1}A$ integrierbar; für jedes $t = (t_1,\dots,t_p) \in W_1\ (O) \subset \underline{\underline{R}}^p$ und $r \leq 1 - \underset{1\leq i\leq p}{\text{Max}} |t_i|$ gilt: $g\ W_r(t) \in P$. F ist für festes $O \in \{O_1, O_2\}$ eine additive Mengenfunktion auf M und „stetig" in folgendem Sinn: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, derart, daß für alle $A \in P$ mit $m(g^{-1}A) < \delta$ (m bezeichnet das Lebesguesche Maß in $\underline{\underline{R}}^p$!) gilt:

$$|F(A;\, M,\, O)| < \varepsilon.$$

8.2.3. Bezeichnen wir mit D den Definitionsbereich von Φ und mit K die Menge der integrierbaren Teilmengen auf E_p, so folgt aus Annahme 1, daß die Mengenfunktion $\Phi \mid D \cap K$ den Voraussetzungen des Satzes von Radon-Nikodym (7.2.1.) genügt. Deshalb erhalten wir nach diesem Satz durch Differenzieren von $\Phi \mid D \cap K$ eine fast überall eindeutig bestimmte Dichtefunktion $\bar{\varphi} : E_p \to \underline{\underline{R}}$, für die gilt:

$$\int_{A'} \bar{\varphi} = \Phi\ (A') \text{ für alle } A' \in D \cap K$$

(Bei unseren Beispielen 8.1.1. bezeichnet man $\bar{\varphi}$ auch als Feldstärke bzw. Stromdichte).

Wenn es unter den zu $\Phi \mid D \cap K$ möglichen Dichtefunktionen $\bar{\varphi}$ eine stetige gibt, so ist diese überall in E_p eindeutig bestimmt. Wir wollen deshalb voraussetzen:

8.2.4. Annahme 2: Zu $\Phi \mid D \cap K$ gibt es eine stetige Dichtefunktion, die wir mit φ bezeichnen.

8.2.5. Die (nunmehr eindeutig bestimmte) Funktion $\varphi : E_p \to \mathbb{R}$ hängt nach unserer Konstruktion natürlich von der Wahl des Punktes a und der Basis $v_1, \ldots, v_p$ von V' ab, ist aber sonst durch unsere Voraussetzungen eindeutig bestimmt. Das führt uns zur Definition einer Funktion $w : M \times \underbrace{V' \times \ldots \times V'}_{p\text{-mal}} \to \mathbb{R}$, die wir vorerst nur für Elemente $(a; v_1, \ldots, v_p) \in M \times V' \times \ldots \times V'$ erklären wollen, für die die Vektoren $v_1, \ldots, v_p$ linear unabhängig sind, d.h. eine Basis von V' bilden; in diesem Fall setzen wir:

$$w(a; v_1, \ldots, v_p) \;_{Df}\!= \varphi(0).$$

Die Definition von w für die übrigen Elemente des Definitionsbereiches bringen wir in 8.3.4.

8.3. Folgerungen aus Spezialfällen

8.3.1. Sei $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ eine affine Abbildung und

$$\tilde{g} \;_{Df}\!= g \circ h : \mathbb{R}^p \to M .$$

Aus dem verallgemeinerten Transformationssatz (4.4.3.) erhalten wir für eine Teilmenge $A' \subset \mathbb{R}^p$, für die $\tilde{g} A' \in P$ ist:

$$F(\tilde{g}A'; M, 0) = F(g(hA'); M, 0) = \Phi\,(hA') =$$

$$= \int_{hA'} \varphi = \int_{A'} \tilde{\varphi} \quad ,$$

wobei $\tilde{\varphi} \;_{Df}\!= (\varphi \circ h) \cdot |\mathrm{Det}\ h|$ ist (vgl. auch 4.2.3. Folg. 1).

8.3.2. Wir setzen nun h speziell als Translation an, d.h. $h(t) = s + t$ für ein festes s und alle t aus $\mathbb{R}^p$.

Dann erhalten wir:

$$\tilde{g}(t) = g\,h(t) = a + g'(s+t) = g(s) + g'(t)$$

und

$$\varphi(s) = \varphi\,h(0) = \tilde{\varphi}\,(0),$$

wobei wir $\tilde{\varphi}$ als die Dichtefunktion auffassen können, die wir nach dem Verfahren von 8.2. aus F erhalten, wenn wir statt von a und $v_1,\dots,v_p$ von $\tilde{a} \;_{Df}{=}\; g(s)$ und $\tilde{v}_i \;_{Df}{=}\; v_i$ $(i = 1,\dots,p)$ ausgehen, d.h.

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}\,(0) &= w\,(\tilde{a};\, \tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_p) \qquad \text{(nach 8.2.5.)} \\ &= w\,(g(s);\, v_1,\dots,v_p). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $(s = (s_1,\dots,s_p))$:

$$\begin{aligned} F(gA':\,M,\,0) &= \int_{A'} \varphi\,(s)\,ds_1,\dots,ds_p = \\ &= \int_{A'} w(a + g'(s);\, v_1,\dots,v_p) \quad \text{für alle } A' \in D\,, \end{aligned}$$

d.h. wir können die Funktion F auch durch Integration der stetigen Funktion w zurückerhalten.

(Die Stetigkeit von w als Funktion von s folgt aus der Stetigkeit von φ, die nach Annahme 2 (8.2.4.) vorausgesetzt ist.)

8.3.3. Nun sei h in 8.3.1. eine lineare Abbildung mit positiver Determinante. Dann ist $\tilde{\varphi}$ die Dichtefunktion, die wir aus F erhalten, wenn wir von der Basis

$\tilde{v}_1 \;_{Df}{=}\; g' \circ h(e_1),\dots,v_p \;_{Df}{=}\; g' \circ h(e_p)$ von V'

ausgehen, d.h.

$$w(a;\, \tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_p) = \tilde{\varphi}\,(0),$$

woraus folgt:

$$(*) \quad w(a;\, \tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_p) = \text{Det } h \cdot w(a;\, v_1,\dots,v_p).$$

Ist speziell $h(e_i) = \lambda_i e_i$ für $\lambda_i > 0$ $(i = 1,\ldots,p)$, so ergibt sich weiter:

(*) $\quad w(a; \lambda_1 v_1,\ldots,\lambda_p v_p) = \lambda_1 \ldots \lambda_p \, w(a; v_1,\ldots,v_p)$.

8.3.4. Nun kommen wir zur Ergänzung der Definition von w (vgl. 8.2.5.):

Sei $\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_p$ ein System von linear abhängigen Vektoren aus V'. Dann gibt es eine lineare Abbildung $h : \underline{\underline{R}}^p \to \underline{\underline{R}}^p$ mit verschwindender Determinante, so daß gilt:

$$g \circ h\,(e_i) = \tilde{v}_i \quad \text{für } i = 1,\ldots,p.$$

In diesem Fall erhalten wir aus 8.3.1.

$$F(\widetilde{g}A'; M, 0) = 0 \quad \text{falls } \widetilde{g}A' \in P.$$

Das führt uns mit Rücksicht auf die Überlegungen in 8.3.2. und 8.3.3. zu der

<u>Definition:</u> $w(a; v_1,\ldots,v_p) = 0$ für linear abhängige $v_1,\ldots,v_p \in V'$.

Dann bleiben auch die Formeln (*) aus 8.3.3. richtig (für Det $h \geq 0$ und $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1,\ldots,p)$).

8.3.5. Seien $v_o, v_1,\ldots,v_p$ linear unabhängige Vektoren in $\underline{\underline{R}}^n$ und $a \in \underline{\underline{R}}^n$ ein fester Punkt. Zu $\varepsilon > 0$ seien affine Abbildungen g,h,f $\underline{\underline{R}}^p \to \underline{\underline{R}}^n$ durch die Festsetzungen

$$\left.\begin{array}{lll} g(0) = a, & g(e_1) = a+\varepsilon v_1, & g(e_i) = a+v_i \\ h(0) = a+\varepsilon v_1, & h(e_1) = a+\varepsilon(v_o+v_1), & h(e_i) = a+\varepsilon v_1+v_i \\ f(0) = a, & f(e_1) = a+\varepsilon(v_o+v); & f(e_i) = a+v_i \end{array}\right\} \text{für } i = 2,\ldots$$

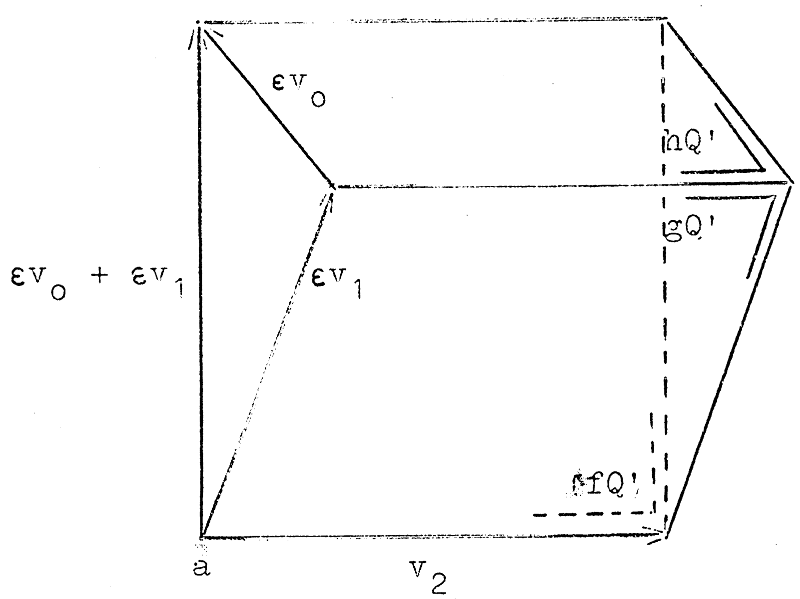
gegeben.

$g'(\underline{\underline{R}}^p)$, $h(\underline{\underline{R}}^p)$ und $f(\underline{\underline{R}}^p)$ sind p-dimensionale Teilmannigfaltigkeiten in $\underline{\underline{R}}^n$; wir schreiben zur Abkürzung dafür Mg, Mh bzw. Mf.

Nun sei W" der abgeschlossene Einheitswürfel in $\underline{\underline{R}}^{p-1}$.
Dann betrachten wir den kompakten Quader

$$Q'_{Df} = [0,1] \times W" \subset \underline{\underline{R}}^p$$

und sein Bild bei den Abbildungen g, h und f.
Die Verhältnisse im Falle $p = 2$ zeigt die folgende Skizze:



g(Q'), h(Q') und f(Q') lassen sich als die Seiten eines (p+1)-dimensionalen „Prismas" ansehen. (Im gezeichneten Fall handelt es sich wirklich um ein dreiseitiges Prisma, für $p > 2$ ergibt sich ein komplizierteres Gebilde.)

Nun wollen wir eine physikalische Überlegung anstellen: Sei in $\underline{\underline{R}}^n$ eine Strömung gegeben und F(A;M,O) definiert als die Menge, die pro Zeiteinheit durch die Teilmenge A der p-dimensionalen, orientierten Mannigfaltigkeit hindurchtritt. Dann können wir feststellen: Die Gesamtmenge, die durch den Rand des Prismas nach außen tritt (mit den zugehörigen Vorzeichen aufsummiert), ist gleich:

$K_o=F(g(Q');Mg,[\varepsilon v_1,v_2,\dots,v_p]) + F(h(Q');Mh,[\varepsilon v_o,v_2,\dots,v_p]) -$
$\quad - F(f(a');Mf,[\varepsilon(v_o+v_1),v_2,\dots,v_p])$ + einem Korrekturglied K_1,

das von den Mengen herrührt, die durch die übrigen Seiten des Prismas treten; da die Gesamt„Fläche" dieser Seiten durch eine zu ε^2 proportionale Größe beschränkt ist, kann man auch $K_1 \leq k_1\varepsilon^2$ für eine geeignete Konstante k_1 annehmen.
K_o selbst hängt aber von den physikalischen Vorgängen im Innern des Prismas ab (Erzeugung und Vernichtung von Strömung, Druck- und Dichteänderung.).
Da das Volumen des Prismas ebenfalls durch ein geeignetes Vielfaches von ε^2 beschränkt ist, erscheint es vernünftig, auch $K_o \leq k_o\varepsilon^2$ anzunehmen.
Damit haben wir:

$$F(g(Q'); Mg,[\varepsilon v_1,\ldots.]) + F(h(Q'); Mh,[\varepsilon v_o,\ldots]) =$$

$$F(f(Q'); Mf,[\varepsilon(v_o+v_1),\ldots.]) + K.$$

wobei für $K \underset{Df}{=} K_o - K_1$ gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{K}{\varepsilon} = 0 .$$

Damit rechtfertigen wir:

8.3.6. <u>Annahme 3:</u> Ist W ein kompakter Würfel in $\underline{\underline{R}}^{p-1}$, $I = [0,1] \subset \underline{\underline{R}}$ und $g(I \times W)$, $h(I \times W)$ bzw. $f(I \times W) \in P$, so gilt:

$$F(g(IxW); M,[\varepsilon v_1,v_2,\ldots,v_p]) + F(h(IxW); M,[\varepsilon w,v_2,\ldots,v_p]) =$$

$$= F(f(IxW); M,[\varepsilon(v_1+w), v_2,\ldots,v_p]) + O(\varepsilon),$$

wobei für die Funktion $O(\varepsilon)$ gilt: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{O(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$

8.3.7. Nun erhalten wir aber aus 8.3.2. und 8.3.3.

$$F(g(IxW); M,[\varepsilon v_1,v_2,\ldots,v_p]) =$$

$$\varepsilon \int_{IxW} w\,(a+s_1\varepsilon v_1 + \sum_{i=2}^{p} s_i v_i; v_1,\ldots,v_p)\, ds_1,\ldots,ds_p$$

und

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(g(I\times W);\ M,\ [\varepsilon v_1, v_2, \dots, v_p])}{\varepsilon}$$

$$= \int_{I\times W} w(a+\sum_{i=2}^{p} s_i v_i;\ v_1, \dots, v_p)\ ds_1 \ \dots\ ds_p \ =$$

$$= \int_{W} w(a+\sum_{i=2}^{p} s_i v_i;\ v_1, \dots, v_p)\ ds_2 \ \dots\ ds_p \quad \text{(nach dem Satz von Fubini 3.2.1.}$$

Analoge Schlüsse und Annahme 3 (8.3.6.) liefern schließlich:

$$\int_{W} w(a+\sum_{i=2}^{p} s_i v_i;\ v_1, \dots, v_p)\ ds_2 \ \dots\ ds_p + \int_{W} w(a+\sum_{i=2}^{p} s_i v_i;\ w,$$

$$v_2, \dots, v_p)\ ds_2 \ \dots\ ds_p = \int_{W} w(a+\sum_{i=2}^{p} s_i v_i;\ v_1+w,\ v_2, \dots, v_p) ds_2 \ \dots\ d$$

Da das für alle W gilt, folgt aus dem Satz von Radon-Nikodym und der Stetigkeit von w (vgl. 8.2.3. und 8.3.2.)

$$w(a+\sum_{i=2}^{p} s_i v_i;\ v_1, \dots, v_p) + w(a+\sum_{i=2}^{p} s_i v_i;\ w,\ v_2, \dots, v_p) =$$

$$= w(a+\sum_{i=2}^{p} s_i v_i;\ w + v_1,\ v_2, \dots, v_p)$$

und speziell für $s_2 = \dots = s_p = 0$:

$$w(a; v_1, \dots, v_p) + w(a;\ w,\ v_2, \dots, v_p) = w(a;\ v_1 + w,\ v_2, \dots, v_p).$$

8.3.8. <u>Folgerung:</u> <u>$w(a;\ -v_1, v_2, \dots, v_p) = -\ w(a;\ v_1, \dots, v_p)$.</u>

<u>Beweis:</u> $w(a;\ -v_1, v_2, \dots, v_p) \ddagger w(a;\ v_1, \dots, v_p) =$

$$= w(a;\ 0,\ v_2, \dots, v_p) = 0 \text{ nach } 8.3.4.$$

8.3.9. Die Schlüsse von 8.3.5. bis 8.3.8. gelten analog für $j = 2,\ldots,p$: und zusammen mit 8.3.3. und 8.3.4. erhalten wir:

$$w(a;\ v_1,\ldots,v_j+w,\ldots v_p) = w(a;\ v_1,\ldots,v_p) + w(a;v_1,\ldots,v_{j-1},w,$$
$$v_{j+1},\ldots v_p)$$

$$\lambda\ w(a:\ v_1,\ldots v_p) = w(a;\ v_1,\ldots,\lambda v_j,\ldots,v_p)$$

$$w(a;\ v_1,\ldots,v_p) = -\ w(a;\ v_1,\ldots,v_{j-1},\ v_{j+1},v_j,\ v_{j+2},\ldots,v_p),$$

d.h. w ist für festes a. als Funktion auf $\underbrace{V' \times V' \times \ldots \times V'}_{p\text{-mal}}$ aufgefaßt, eine sog. „alternierende Multilinearform" (vgl. 9.1.1.1, 9.2.1.1 und 9.2.2.).

8.4. Zusammenfassung: Die so definierte Funktion

$$w:\ M \times \underbrace{V' \times \ldots \times V'}_{p\text{-mal}} \to \underline{\underline{R}}$$

hat also folgende Eigenschaften:

(1) Bei festem $(v_1,\ldots,v_p)$ hängt w stetig von $a \in M$ ab.

(2) Bei festem $a \in M$ ist w nach 8.3.3. und 8.3.7. eine „Multilinearform" (vgl. die Definition in 9.1.1.).

(3) Bei festem $a \in M$ ist w nach 8.3.4. „alternierend" (vgl. die Definition in 9.2.2.).

Diese Eigenschaften ergeben zusammen, daß w als „alternierende C^0-Differentialform" angesprochen werden kann (vgl. 11.1.). In den folgenden §§ werden wir nun diese Multilinear- und Differentialformen systematisch untersuchen. Wir bauen dabei die ganze Theorie von den Formen her auf und definieren erst später die „Integration" (s. § 12). Das ist dann gerade die Umkehrung der heuristischen Entwicklungen dieses §.

§ 9 Alternierende Multilinearformen

Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$ sowie p eine positive ganze Zahl. V^p bezeichne das p-fache kartesische Produkt von V.

9.1. Multilineare Abbildungen und Multilinearformen

9.1.1. Definition: (a) Ist $p > 0$, so heißt eine Abbildung $F : V^p \to W$ „multilinear", wenn für beliebige $a_1,\dots,a_p$, $b_1,\dots,b_p \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

((1)) $F(a_1,\dots,a_{i-1}, a_i + b_i, a_{i+1},\dots,a_p) =$

$$= F(a_1,\dots,a_p) + F(a_1,\dots,a_{i-1},b_i,a_{i+1},\dots,a_p) \quad (i=1,\dots,p)$$

((2)) $\lambda\, F(a_1,\dots,a_p) = F(a_1,\dots,a_{i-1}, \lambda a_i, a_{i+1},\dots,a_p)$

$$(i=1,\dots,p)$$

(b) Ist $W = \mathbb{R}$, so heißt eine multilineare Abbildung $F : V^p \to W = \mathbb{R}$ „Multilinearform".

9.1.2. Bemerkung: V^p trägt zwar eine natürliche Vektorraumstruktur, jedoch sind multilineare Abbildungen im obigen Sinn für $p > 1$ nicht lineare Abbildungen bezüglich dieser Vektorraumstruktur (Für lineare Abbildungen müßte z. B. statt 9.1.1. (a) ((2)) gelten:

$$\lambda\, F(a_1,\dots,a_p) = F(\lambda a_1,\dots,\lambda a_p)).$$

9.2. Alternierende multilineare Abbildungen

9.2.1. Satz: Sei $p > 1$. Dann sind für multilineare Abbildungen $F : V^p \to W$ äquivalent:

(a) Bei einer „Nachbarvertauschung" ändert F das Vorzeichen, d.h. $F(a_1,\dots,a_p) = -F(a_1,\dots,a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2},\dots,a_p)$ für beliebige $a_1,\dots,a_p \in V$ und alle $i = 1,\dots,p-1$.

(b) <u>Sind in der Folge $a_1,\dots,a_p$ ($a_i \in V$ für $i = 1,\dots,p$) zwei aufeinanderfolgende Vektoren gleich, so ist</u>

$$\underline{F(a_1,\dots,a_p) = 0.}$$

(c) <u>Für linear abhängige $a_1,\dots,a_p \in V$ gilt:</u>

$$\underline{F(a_1,\dots,a_p) = 0.}$$

<u>Beweis</u>: (a) ⇔ (b) O.B.d.A. sei $p = 2$.

(a) ⇒ (b) ergibt sich aus: $F(a,a) + F(a,a) = 0$.

(b) ⇒ (a) ergibt sich aus

$$\begin{aligned}F(a_1,a_2) &= \\ &= F(a_1,a_1) + F(a_1,a_2) + F(a_2,a_1) + F(a_2,a_2) - F(a_2,a_1) = \\ &= F(a_1+a_2,\ a_1+a_2) - F(a_2,a_1) \quad (\text{nach } 9.1.1.) \\ &= -F(a_2,a_1) \quad \text{nach } (2).\end{aligned}$$

(c) ⇒ (b) ist trivial.

(a), (b) ⇒ (c): O.B.d.A sei $a_p = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j a_j$; dann gilt:

$$F(a_1,\dots,a_p) = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j F(a_1,\dots,a_{p-1},a_j) \quad (\text{nach } 9.1.1.).$$

Nun ist aber für jedes $j = 1,\dots,p-1$ nach (a)

$$\begin{aligned}F(a_1,\dots,a_{p-1},a_j) &= F(a_1,\dots,a_{p-2},a_j,a_{p-1}) = \dots = \\ &= (-1)^{p-1-j} F(a_1,\dots,a_j,\ a_j,\dots,a_{p-1}) = 0 \quad (\text{nach (b)}).\end{aligned}$$

9.2.2. <u>Definition</u>: Eine Abbildung $F : V^p \to W$ heißt <u>alternierende</u> (oder schiefsymmetrische) <u>multilineare Abbildung</u>, wenn

(a) für $p = 1$ F multilinear, d.h. linear ist,

(b) für $p > 1$ F multilinear ist und die Bedingungen (a) - (c) aus 9.2.1. erfüllt sind.

9.2.3. Bemerkung: Betrachtet man Vektorräume über beliebigen Körpern an Stelle von $\underline{\underline{R}}$, so braucht Satz 9.2.1. nicht immer zu gelten. Beim Beweis von (a) ⇒ (b) mußten wir nämlich davon Gebrauch machen, daß die Charakteristik von $\underline{\underline{R}}$ nicht gerade 2 ist.

9.2.4. Satz: Sei $F : V^p \to W$ eine alternierende multilineare Abbildung und σ eine Permutation der Menge $\{1,\dots,p\}$. Dann ist

$$F(a_1,\dots,a_p) = \epsilon_\sigma\, F(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(p)}):$$

wobei $\epsilon_\sigma \;{}_{Df}{=}\; (-1)^k$ ist, wenn k die Anzahl der Paare (i,j) bezeichnet, für die gilt:

$$1 \leq i < j \leq p \quad \text{und} \quad \sigma(i) > \sigma(j).$$

Beweis: Der Satz folgt daraus, daß sich jede Permutation als Nacheinanderausführung von k Nachbarvertauschungen er=zeugen läßt.

9.2.5. Bezeichnung: Die Menge aller Permutationen von $\{1,\dots,p\}$ bezeichen wir im folgenden mit $\mathfrak{S}_p$.

9.3. Abbildungsräume

9.3.1. Satz: (a) Die Menge W^{V^p} aller Abbildungen von V^p in W bildet durch die Festsetzungen:

$(F+G)(x) \;{}_{Df}{=}\; F(x)+G(x)$ für $F,\ G \in W^{V^p}$ und alle $x \in V^p$

$(\lambda F)(x) \;{}_{Df}{=}\; \lambda \cdot F(x)$ für $F \in W^{V^p}$, $\lambda \in \underline{\underline{R}}$ und alle $x \in V^p$ einen Vektorraum über $\underline{\underline{R}}$.

(b) Die Menge $L^p(V,W)$ aller multilinearen Abbildungen von V^p in W bildet einen Untervektorraum von W^{V^p}.

(c) Die Menge $A^p(V,W)$ aller alternierenden Abbildungen von V^p in W bildet einen Untervektorraum von $L^p(V,W)$.

Den ganz einfachen Beweis können wir übergehen.

9.3.2. Wir betrachten nun spezielle Werte für p.
(a) Zunächst ergänzen wir die Definition von $L^p(V,W)$ bzw. $A^p(V,W)$ für den Fall $p = 0$ durch:

$$\underline{L^0(V,W) \ {}_{Df}{=}\ A^0(V,W) \ {}_{Df}{=}\ W.}$$

(b) Ist $p = 1$, so fallen die multilinearen Abbildungen von V^1 in W mit den linearen Abbildungen von $V = V^1$ in W zusammen, deren Gesamtheit wir mit $L(V,W)$ bezeichnet haben. Damit haben wir unter Berücksichtigung von 9.2.2.:

$$L(V,W) = L^1(V,W) = A^1(V,W).$$

(c) Ist $\dim V = n$, so folgt aus $p > n$ wegen 9.2.1.

$$A^p(V,W) = 0.$$

(d) Schließlich betrachten wir den Fall $\dim V = p$, $W = \underline{\underline{R}}$: Dann ist $A^p(V,\underline{\underline{R}})$ der Vektorraum der „<u>Determinantenfunktionen</u>" auf $\underline{\underline{R}}$ (vgl. 4.1: Eine Determinantenfunktion ist eine Abbildung $V^p \to \underline{\underline{R}}$, die die dort aufgeführten Bedingungen (a) - (c) erfüllt). Dieser Vektorraum ist aber isomorph zu $\underline{\underline{R}}$, also haben wir:

$$A^p(V,\underline{\underline{R}}) \cong \underline{\underline{R}}$$

(zum Beweis s. auch 9.4.7.(a)).

9.4. <u>Darstellung von alternierenden multilinearen Abbildungen:</u>

Sei nun $\dim V = n$ $(0 < n < \infty)$ und $e_1,\dots,e_n$ eine Basis von V, sowie $p > 0$.

9.4.1. Sei $F \in A^p(V,W)$. Wir erhalten:

$$F(a_1,\ldots,a_p) = F\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}\, e_{j1},\ldots,\sum_{j_p=1}^{n} a_{pj_p}\, e_{jp}\right) =$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{n} a_{1j_1} \cdots\cdots a_{pj_p}\, F(e_{j1},\ldots,e_{jp})$$

(da F multilinear ist)

$$= \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_p=1 \\ j_l \neq j_m \text{ für } l \neq m}}^{n} a_{1j_1} \cdots\cdots a_{pj_p}\, F(e_{j_1},\ldots,e_{j_p})$$

(da F alternierend ist)

$$= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} \epsilon_\sigma\, a_{1i_{\sigma(1)}} \cdots a_{pi_{\sigma(p)}}\right) \cdot F(e_{i_1},\ldots,e_{i_p})$$

(nach 9.2.4.)

$$= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \cdots\cdots & a_{1i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{pi_1} & \cdots\cdots & a_{pi_p} \end{vmatrix} \cdot F(e_{i_1},\ldots,e_{i_p}) .$$

Damit haben wir den

9.4.2. Hilfssatz: <u>Jede alternierende multilineare Abbildung $F : V^p \to W$ ist durch die $\binom{n}{p}$ Werte $F(e_{i_1},\ldots,e_{i_p})$ $(1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n)$ vollständig bestimmt.</u>

9.4.3. Wir können nun umgekehrt vorgehen:
Wir wählen $\binom{n}{p}$ Elemente $b_{i_1\ldots i_p} \in W$ $(1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n)$ und definieren eine Abbildung $F : V^p \to W$ durch

$$F(a_1,\dots,a_p) \underset{Df}{=} \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \dots & a_{1i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{pi_1} & \dots & a_{pi_p} \end{vmatrix} \cdot b_{i_1\dots i_p} \quad .$$

Die Bedingungen 9.1.1. und 9.2.1. lassen sich nun unmittelbar verifizieren, und wir haben den

9.4.4. <u>Hilfssatz:</u> <u>Zu $\binom{n}{p}$ beliebigen Elementen $b_{i_1\dots i_p} \in W$ $(1 \le i_1 < \dots < i_p \le n)$ gibt es genau ein $F \in A^p(V,W)$, so daß gilt:</u>

<u>$F(e_{i_1},\dots,e_{i_p}) = b_{i_1\dots i_p}$ für alle $i_1,\dots,i_p$ mit:</u>

<u>$1 \le i < \dots < i_p \le n$.</u>

9.4.5. Sei nun $W = \underline{\underline{R}}$ und für jedes p-Tupel $i_1,\dots,i_p$ mit $1 \le i_1 < \dots < i_p \le n$ die alternierende Multilinearform $E_{i_1\dots i_p}$ definiert durch:

$$E_{i_1\dots i_p}(e_{j_1},\dots,e_{j_p}) \underset{Df}{=} \begin{cases} 1 & \text{falls } i_k = j_k \text{ für alle } k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir erinnern bei dieser Gelegenheit an das Kroneckersymbol δ_{ij}: Der zweifach indizierte Buchstabe δ bedeutet „1", wenn die beiden Indizes übereinstimmen, und „0", wenn sie verschieden sind, d.h.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Dann können wir $E_{i_1\dots i_p}$ charakterisieren durch

$$E_{i_1\dots i_p}(e_{j_1},\dots,e_{j_p}) = \delta_{i_1j_1} \cdot \dots \cdot \delta_{i_pj_p} \quad .$$

Wir erhalten damit den

9.4.6. Satz: Die alternierenden Multilinearformen $E_{i_1\dots i_p}$ bilden eine Basis von $A^p(V,\underline{\underline{R}})$.

((*)) Beweis: Sei $F = \sum\limits_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} \lambda_{i_1\dots i_p} E_{i_1,\dots i_p}$.

Dann ist $\lambda_{i_1\dots i_p} = F(e_{i_1},\dots,e_{i_p})$, also durch F eindeutig bestimmt. Um zu zeigen, daß jedes $F \in A^p(V,W)$ so dargestellt werden kann, braucht man nur $\lambda_{i_1\dots i_p}$ durch $F(e_{i_1},\dots,e_{i_p})$ zu definieren. Dann stimmt F mit $\sum \lambda_{i_1\dots i_p} E_{i_1\dots i_p}$ überein, zunächst für $(e_{j_1},\dots,e_{j_p})$, falls $1 \le j_1 <\dots< j_p \le n$ und daher nach 9.4.2. überhaupt.

9.4.7. Folgerung: $\dim A^p(V,\underline{\underline{R}}) = \binom{n}{p}$.

Speziell gilt also:

(a) $\dim A^n(V,\underline{\underline{R}}) = 1$: Jedes $F \in A^n(V,\underline{\underline{R}})$ ist Vielfaches von $E_{1\dots n}$, und wir haben:

$$A^n(V,\underline{\underline{R}}) \cong \underline{\underline{R}} \quad ,$$

wobei der Isomorphismus durch die Zuordnung

$$E_{1\dots n} \longmapsto 1$$

induziert werden kann.

(b) $\dim A^{n-1}(V,\underline{\underline{R}}) = \dim A^1(V,\underline{\underline{R}}) = n$. Im ersten Fall schreiben sich die Basen $E_{1\dots\hat{i}\dots n}$ für $i = 1,\dots,n$ („ˆ" bedeutet, daß das darunter stehende Glied aus der Folge herausgelassen wird), im zweiten Fall: $E_1,\dots,E_n$. Wir haben Isomorphismen

$$A^{n-1}(V,\underline{\underline{R}}) \cong V \text{ und}$$
$$A^1(V,\underline{\underline{R}}) \cong V \ ,$$

die z. B. durch die Zuordnung

$$E_{1\ldots i\ldots p} \longmapsto (-1)^{i-1}\, e_i \qquad i = 1,\ldots,n$$

bzw.

$$E_i \longmapsto e_i \qquad i = 1,\ldots,n$$

induziert sein können (vgl. 10.4.1.-2.).

9.4.8. Wir haben die Symbole $E_{i_1\ldots i_p}$ bisher nur für p-Tupel $i_1,\ldots,i_p$ mit $1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n$ erklärt und wollen diese Definition jetzt auf beliebige p-Tupel $i_1,\ldots,i_p$ mit $1 \le i_1,\ldots,i_p \le n$ erweitern.
Dazu beachten wir, daß es zu einem p-Tupel $i_1,\ldots,i_p$ von ganzen Zahlen mit $i_l \neq i_m$ für $l \neq m$ genau eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ gibt, so daß gilt:

$$i_{\sigma(1)} < i_{\sigma(2)} < \ldots < i_{\sigma(p)} .$$

Wir definieren dann

$$E_{i_1\ldots i_p} = \begin{cases} 0 & \text{falls nicht alle } i_k \text{ verschieden } (1 \le k \le p) \\ \varepsilon_\sigma E_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(p)}} & \text{sonst, wobei } \sigma \text{ die oben bezeichnete Permutation aus } \mathfrak{S}_p \text{ bedeutet und } E_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(p)}} \text{ dann nach 9.4.5. erklärt ist} \end{cases}$$

und erhalten den

9.4.9. <u>Satz:</u> (a) $E_{i_1\ldots i_p}$ <u>ist charakterisiert durch:</u>

$$\underline{E_{i_1,\ldots i_p}(e_{j_1},\ldots,e_{j_p})} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i_k = j_k \text{ für alle } k \ (1 \le k \le p) \text{ und } i_l \neq i_m \text{ für } l \neq m \\ 0, & \text{falls } \{i_1,\ldots,i_p\} \neq \{j_1,\ldots,j_p\}. \end{cases}$$

(b)

$$\underline{E_{i_1 \ldots i_p}(a_1, \ldots, a_p)} = \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \ldots & a_{1i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{pi_1} & \ldots & a_{pi_p} \end{vmatrix} .$$

Der Beweis ist trivial.

§ 10. Äußere Multiplikation von alternierenden Multilinearformen.

Sei V ein Vektorraum über $\underline{\underline{R}}$ und $p \geq 0$. Wir schreiben zur Abkürzung A^p für $A^p(V,\underline{\underline{R}})$ und L^p für $L^p(V,\underline{\underline{R}})$.

10.1. Alternierung

Mit dem Begriff „Alternierung" bezeichnen wir eine Operation die jeder Multilinearform eine alternierende Multilinearform zuordnet.

10.1.1. Definition: Die Abbildung $a : L^p \to \underline{\underline{R}}^{V^p}$ ist gegeben durch:

$$a\,F \underset{Df}{=} F \qquad \text{für } p = 0$$

und

$$(aF)\,(a_1,\ldots,a_p) \underset{Df}{=} \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon_\sigma\, F(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(p)})$$

für $p > 0$.

10.1.2. Satz: Ist F eine beliebige Multilinearform aus L^p, so ist aF eine alternierende Multilinearform aus A^p; ist F einer alternierende Multilinearform, so ist aF = F.

Beweis: Der Fall $p \leq 1$ ist trivial. Sei nun $p > 1$; die Multilinearität von aF folgt aus der Multilinearität von F. Wir betrachten nun $(aF)\,(a_1,\ldots,a_p)$, wobei für ein i $(1 \leq i < p)$ gelten möge: $a_i = a_{i+1}$.

Dann heben sich in der Summe $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon_\sigma\, F(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(p)})$ die Summanden paarweise auf, und wir haben

$$(a\,F)\,(a_1,\ldots,a_p) = 0,$$

d.h. aF ist eine alternierende Multilinearform (vgl. 9.2.1. und 9.2.2.).

Ist $F \in A^p$, so folgt $aF = F$ aus 9.2.4. und der Tatsache, daß $\mathfrak{S}_p$ genau $p!$ Permutationen enthält.

10.1.3. Bemerkung: Aus 10.1.2. folgt, daß die Abbildung $a : L^p \to \underline{\underline{R}}^{V^p}$ einen Epimorphismus des Vektorraumes L^p auf den Vektorraum A^p induziert.

10.2. Tensorprodukt

10.2.1. Definition: Die bilineare Abbildung

$\otimes : L^p \times L^q \to L^{p+q}$, die durch $(F,G) \longmapsto F \otimes G$,

$(F \otimes G)(a_1,\ldots,a_{p+q}) =_{Df} F(a_1,\ldots,a_p) \cdot G(a_{p+1},\ldots,a_{p+q})$

für $p, q \neq 0$ sowie durch

$$(F \otimes G)(a_1,\ldots,a_q) =_{Df} F \cdot G(a_1,\ldots,a_q)$$

für $p = 0$ und für $q = 0$ analog gegeben ist, heißt Tensorprodukt.

10.2.2. Bemerkungen: (a) Die Definition für $p = 0$ (bzw. $q = 0$) ist durch 9.3.2. (a) motiviert: F ist in diesem Fall ein Element aus $\underline{\underline{R}}$.

(2) $F \otimes G$ ist zwar eine Multilinearform, braucht aber im allgemeinen nicht alternierend zu sein, selbst wenn F und G selbst alternierend sind: Sei z.B. $\dim V = n$ $(0 \leq n < \infty)$ und $p = q = n$. Sind F und G alternierend, so sind F und G Determinantenfunktionen und $F \otimes G$ ist sicherlich nur dann identisch 0, wenn F oder G identisch Null ist, Wäre $F \otimes G$ jedoch alternierend, so müßte $F \otimes G$ wegen $p+q = 2n > n$ nach 9.3.2. identisch 0 sein.

10.3. Äußeres Produkt

10.3.1. Definition: Die bilineare Abbildung

$$\wedge : A^p \times A^q \to A^{p+q}, \text{ die durch}$$

$$(F, G) \longmapsto F \wedge G \underset{Df}{=} \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\, a\,(F \otimes G)$$

gegeben ist, heißt „äußeres Produkt".

(Die Bilinearität folgt aus der Bilinearität von $\otimes$ und der Linearität von a).

10.3.2. Bemerkung: Ist p = 0, also $F \in \underline{\underline{R}}$ (vgl. 10.2.2.(a)), so liefert die Definition:

$$F \wedge G = a(F \otimes G) = a(F \cdot G) = F \cdot aG = F \cdot G$$

(Die analoge Gleichung gilt für q = 0).

10.3.3. Satz: Für $F \in A^p$ und $G \in A^q$ gilt bei $p + q > 0$:

(a) $(F \wedge G)\,(a_1, \ldots, a_{p+q}) =$

$$= \sum_{1 \le l_1 < \ldots < l_p \le p+q} \varepsilon_\tau\, F(a_{l_1}, \ldots, a_{l_p}) \cdot G(a_{l_{p+1}}, \ldots, a_{l_{p+q}}) .$$

Die Zahlen $l_{p+1}, \ldots, l_{p+q}$ sind bei gegebenen $l_1, \ldots, l_p$ durch die folgenden Vorschriften eindeutig bestimmt:

$$1 \le l_{p+1} < \ldots < l_{p+q} \le p+q$$

$$\{l_1, \ldots, l_{p+q}\} = \{1, \ldots, p+q\}$$

und außerdem ist

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & p+q \\ l_1 & . & . & . & . & l_{p+q} \end{pmatrix} .$$

Ist dim V = n $(0 < n < \infty)$ und $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V, so gilt (vgl. 9.4.8.) bei $p, q > 0$

(b) $E_{i_1 \ldots i_p} \wedge E_{j_1 \ldots j_p} = E_{i_1 \ldots i_p,\, j_1 \ldots j_p}$.

Beweis: (a) Wir teilen $\mathfrak{S}_{p+q}$ in Äquivalenzklassen auf, indem wir zwei Permutationen σ und τ äquivalent nennen, wenn gilt:

$$\{\sigma(1),\ldots,\sigma(p)\} = \{\tau(1),\ldots,\tau(p)\}.$$

Jede dieser Äquivalenzklassen enthält genau $p!q!$ Permutationen und läßt sich eindeutig durch eine Zahlenfolge $l_1,\ldots,l_p$ mit

$$1 \leq l_1 < \ldots < l_p \leq p+q$$

beschreiben. (Jeder solchen Zahlenfolge wird die Äquivalenzklasse zugeordnet, die durch die Permutationen

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots\ldots & p+q \\ l_1 & \ldots\ldots & l_{p+q} \end{pmatrix}$$ repräsentiert wird, wobei die $l_{p+1},\ldots,l_{p+q}$ wie oben bestimmt sind.)

Wir behaupten nun: Ist τ wie eben definiert und liegt in der gleichen Äquivalenzklasse, so gilt

$$\varepsilon_\tau \cdot F(a_{l_1},\ldots,a_{l_p}) \cdot G(a_{l_{p+1}},\ldots,a_{l_{p+q}}) =$$

$$= \varepsilon_\sigma\, F(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(p)}) \cdot G(a_{\sigma(p+1)},\ldots,a_{\sigma(p+q)}).$$

Wir haben nämlich Permutationen $\tau_p \in \mathfrak{S}_p$ und $\tau_q \in \mathfrak{S}_q$, so daß gilt:

$$a_{\sigma(i)} = a_{l_{\tau_p(i)}} \qquad \text{für } 1 \leq i \leq p \quad \text{bzw.}$$

$$a_{\sigma(i)} = a_{l_{\tau_q(i-p)}} \qquad \text{für } p+1 \leq i \leq p+q$$

und $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau \cdot \varepsilon_{\tau_p} \cdot \varepsilon_{\tau_q}$,

also erhalten wir diese Behauptung aus:

$$\varepsilon_{\tau_p} F(a_{\tau(1)},\dots,a_{\tau(p)}) = F(a_{l_1},\dots,a_{l_p}) \text{ und}$$

$$\varepsilon_{\tau_q} G(a_{\tau(p+1)},\dots,a_{\tau(p+q)}) = G(a_{l_{p+1}},\dots,a_{l_{p+q}}) \text{ (nach 9.2.4.).}$$

Damit können wir nun den 1. Teil des Satzes beweisen.

Sei $S_{l_1 \dots l_p}$ die Äquivalenzklasse aus $\mathfrak{S}_{p+q}$, die durch $l_1,\dots,l_p$ beschrieben wird. Wir erhalten aus der Definition des äußeren Produktes:

$$(F \wedge G)(a_1,\dots,a_{p+q}) = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\,[a(F \otimes G)]\,(a_1,\dots,a_{p+q})$$

$$= \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon_\sigma F(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(p)}) \cdot G(a_{\sigma(p+1)},\dots,a_{\sigma(p+q)}) =$$

$$= \frac{1}{p!\,q!} \sum_{0 \le l_1 < \dots < l_p \le p+q} \; \sum_{S_{l_1 \dots l_p}} \varepsilon_\sigma F(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(p)}) \cdot G(\dots)$$

$$(\dots) = (a_{\sigma(p+1)},\dots,a_{\sigma(p+q)})$$

$$= \frac{1}{p!q!} \sum_{0 \le l_1 < \dots < l_p \le p+q} p!q!.\,\varepsilon_\tau F(a_{l_1},\dots,a_{l_p}) \cdot G(a_{l_{p+1}},\dots,a_{l_{p+q}})$$

$$= \sum_{0 \le l_1 < \dots < l_p \le p+q} \varepsilon_\tau F(a_{l_1},\dots,a_{l_p}) \cdot G(a_{l_{p+1}},\dots,a_{l_{p+q}}) .$$

(b) Wir haben nach (1) für paarweise verschiedne $i_1,\dots,i_p$, $j_1,\dots,j_q$:

$$(E_{i_1 \dots i_p} \wedge E_{j_1,\dots j_q})\,(e_{i_1},\dots,e_{i_p},\, e_{j_1},\dots,e_{j_q}) =$$

$$= \sum_{1 \le l_1 < \ldots < l_p \le p+q} \varepsilon_\tau \, E_{i_1 \ldots i_p}(e_{k_{l_1}}, \ldots, e_{k_{l_p}}) \cdot E_{j_1 \ldots j_q}(\ldots\ldots)$$

$$(\ldots\ldots) = (e_{k_{l_{p+1}}}, \ldots, e_{k_{l_{p+q}}}) \quad ,$$

wobei gilt:

$$k_m = \begin{cases} i_m & \text{für } 1 \le m \le p \\ j_{m-p} & \text{für } p+1 \le m \le p+q \; . \end{cases}$$

In dieser Summe ist nach 9.4.9. höchstens ein Summand von 0 verschieden, nämlich der einzige, für den gilt:

$$\{k_{l_1}, \ldots, k_{l_p}\} = \{i_1, \ldots, i_p\} \; .$$

In diesem Fall haben wir zwei Permutationen $\tau_p \in \mathfrak{S}_p$ und $\tau_q \in \mathfrak{S}_q$, so daß

$$k_{l_{\tau_p(m)}} = i_m \quad \text{für } 1 \le m \le p \quad \text{bzw.}$$

$$k_{l_{\tau(m)+p}} = j_m \quad \text{für } 1 \le m \le q \quad \text{und}$$

$$\varepsilon_\tau = \varepsilon_{\tau_p} \circ \varepsilon_{\tau_q} \quad .$$

Also folgt:

(*) $(E_{i_1 \ldots i_p} \wedge E_{j_1 \ldots j_q})(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}) =$

$$= E_{i_1, \ldots, i_p}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \cdot E_{j_1 \ldots j_q}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}) = 1$$

für paarweise verschiedene $i_1, \ldots, i_p, \; j_1, \ldots, j_q$.

Nun sei $\{i_1, \ldots, i_p, \; j_1, \ldots, j_q\} \neq \{k_1, \ldots, k_{p+q}\}$.

Dann ist für jedes $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}$ entweder

$$\{i_1, \ldots, i_p\} \neq \{k_{\sigma(1)}, \ldots, k_{\sigma(p)}\} \quad \text{oder}$$

$$\{j_1, \ldots, j_q\} \neq \{k_{\sigma(p+1)}, \ldots, k_{\sigma(p+q)}\}.$$

Das bedeutet aber nach 9.4.5, daß in der Gleichung

$$E_{i_1 \ldots i_p} \wedge E_{j_1 \ldots j_q} (e_{k_1}, \ldots, e_{k_{p+q}}) =$$

$$= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} E_{i_1 \ldots i_p} (k_{\sigma(1)}, \ldots, k_{\sigma(p)}) \cdot E_{j_1 \ldots j_q} (\ldots .)$$

$$(\ldots .) = (k_{\sigma(p+1)}, \ldots, k_{\sigma(p+q)})$$

auf der rechten Seite jeder Summand verschwindet, also

$$(**) \quad E_{i_1 \ldots i_p} \wedge E_{j_1 \ldots j_p} (e_{k_1}, \ldots, e_{k_{p+q}}) = 0 \quad \text{für}$$

$$\{i_1, \ldots, i_p, \; j_1, \ldots, j_p\} \neq \{k_1, \ldots, k_{p+q}\}.$$

Nach 9.4.5. folgt aber aus (*) und (**) die Behauptung.

10.3.4. <u>Satz: Für das äußere Produkt gilt:</u>

(a) <u>$(F \wedge G) \wedge H = F \wedge (G \wedge H)$, d.h. „$\wedge$" ist assoziativ.</u>

(b) <u>$F \wedge G = (-1)^{pq} G \wedge F$ für $F \in A^p$, $G \in A^q$,</u>
<u>d.h. „$\wedge$" ist „graduiert kommutativ".</u>

(c) <u>$1 \wedge F = F = F \wedge 1$ mit: $1 \in \underline{\underline{R}} \cong A^0$.</u>

<u>Beweis:</u> (a) folgt im Falle endlicher Dimension von V unmittelbar aus der Formel 10.3.3.(b), im Falle beliebiger Dimension aus der Formel 10.3.3.(a), wobei noch einige leichte Überlegungen dem Leser überlassen bleiben.

(b) Ist für die Folge $l_1,\ldots,l_{p+q}$ mit $1 \le l_1 < \ldots < l_p \le p+q$

$1 \le l_{p+1} < \ldots < l_{p+q} \le p+q$, $l_i \neq l_j$ für $i \neq j$

$$\sigma =_{Df} \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots p+q \\ \\ l_1 \ldots\ldots l_{p+q} \end{pmatrix} \quad \tau =_{Df} \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots q, & q+1 \ldots\ldots p+q \\ \\ l_{p+1} \ldots l_{p+q}, & l_1 \ldots\ldots l_p \end{pmatrix}$$

so gilt: $\epsilon_\sigma = (-1)^{pq}\epsilon_\tau$, und daraus folgt mit Hilfe der Formel 10.3.3.(a) die Behauptung.

(c) folgt aus 10.3.2.

10.3.5. Bemerkungen: (a) Die Formel 10.3.3.(b) für $i_1 < \ldots < i_p$, $j_1 < \ldots < j_q$ könnte auch zur Definition des äußeren Produktes verwendet werden. Dann müßte aber die Unabhängigkeit von der Wahl der Basis noch gesondert gezeigt werden.

(b) Aus der Assoziativität des äußeren Produktes zusammen mit der Formel 10.3.3.(b) folgt:

$$E_{i_1 \ldots i_p} = E_{i_1} \wedge \ldots\ldots \wedge E_{i_p}.$$

(c) Durch das äußere Produkt wird

$$A =_{Df} (A^p \mid p = 0,1,\ldots)$$

zu einer „graduierten kommutativen Algebra über $\underline{\underline{R}}$ mit Einselement", die durch $E_1,\ldots,E_n$ erzeugt wird.

10.4. Beispiele:

10.4.1. Sei in V ein inneres Produkt (,) gegeben. (In $\underline{\underline{R}}^n$ z.B. durch die Formel: $(a_1,a_2) = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}a_{2i}$).

Dann ist für ein festes $a \in V$ die Abbildung

$F_a : V \to \underline{\underline{R}}$, die durch

$$F_a(x) = (a,x) \quad \text{für alle } x \in V$$

gegeben ist, eine lineare Abbildung, also nach 9.2.2.

$$F_a \in A^1 .$$

Sei nun $\dim V = n$ und $e_1,\dots,e_n$ eine orthonormierte Basis von V, d.h. $(e_i,e_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq n$. Dann erhalten wir aus

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

$$F_a e_j = (a,e_j) = \alpha_j \quad \text{für } j = 1,\dots,n$$

und

$$F_a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i \quad (\text{vgl. } 9.4.5.).$$

Daraus folgt aber, daß die durch $a \longmapsto F_a$ definierte Abbildung von V in A^1 der Isomorphismus aus 9.4.7. ist.

10.4.2. Seien a und F_a wie in 10.4.1, sei

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \in V \text{ und } F_b \in A^1 \text{ gegeben durch}$$

$$F_b(x) = (b,x) \quad \text{für alle } x \in V.$$

Wir erhalten:

$$F_a \wedge F_b = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\beta_j \;(E_i \wedge E_j) = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} (\alpha_i\beta_j - a_j\beta_i)\, E_{ij} .$$

Das liefert für $n = 3$:

$$F_a \wedge F_b = (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\, E_{23}+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)E_{31}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)E_{12} .$$

Der Isomorphismus $A^2 \cong V$ aus 9.4.7. definiert nun die Zuordnung:

$$F_a \wedge F_b \to [a,b],$$

wobei $[a,b]$ wie üblich das <u>Vektorprodukt</u> der Vektoren a und b bedeutet.

In der analyt. Geometrie zeigt man, daß gleichorientierte Orthonormalbasen gleiche, entgegengesetzt orientierte Orthonormalbasen jedoch entgegengesetzt gleiche Vektorprodukte definieren..

10.4.3. Sei $\dim V = n$ $(0 < n < \infty)$, $e_1,\ldots,e_n$ eine Basis von V und $a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, e_j \in V$ $(i = 1,\ldots,n)$ sowie

$$F_i \underset{\mathrm{Df}}{=} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, E_j \quad (i = 1,\ldots,n).$$

Dann ist:

$$F_1 \wedge \ldots \wedge F_n = \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} \alpha_{1j_1} \cdots a_{nj_n}\, E_{j_1\ldots j_n} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots\cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{n1} & \cdots\cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \cdot E_{1\ \ldots\ n}$$

geht also durch den Isomorphismus von 9.4.7. in $\mathrm{Det}\,(a_1,\ldots,a_n)$ über.

10.4.4. <u>Allgemeiner Laplacescher Entwicklungssatz:</u>

Sei $\dim V = n$ $(0 < n < \infty)$, $e_1,\ldots,e_n$ eine Basis von V und $a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j \in V$ $(i = 1,\ldots,n)$. Wir haben nach 9.4.9.(b):

$$\mathrm{Det}(a_1,\dots,a_n) = E_{1\dots n}(a_1,\dots,a_n) =$$

$$= (E_{i_1\dots i_p} \wedge E_{j_1\dots j_{n-p}})(a_1,\dots,a_n) \quad \text{für}$$

$$\{i_1,\dots,i_p,\ j_1,\dots,j_{n-p}\} = \{1,\dots,n\} \quad \text{(nach 10.3.3.)}$$

$$= \sum_{1\le l_1<\dots<l_p\le n} \varepsilon_\tau \, E_{i_1\dots i_p}(a_{l_1},\dots,a_{l_p}) \cdot E_{j_1\dots j_{n-p}}(a_{l_{p+1}},\dots,a$$

(nach 10.3.3

$$= \sum_{1\le l_1<\dots<l_p\le n} \varepsilon_\tau \begin{vmatrix} \alpha_{l_1 i_1} & \dots & \alpha_{l_1 i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{l_p i_1} & \dots & \alpha_{l_p i_p} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{l_{p+1} j_1} & \dots & \alpha_{l_{p+1} j_{n-p}} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{l_n j_1} & \dots & \alpha_{l_n j_{n-p}} \end{vmatrix}$$

(nach 9.4.9.).

Das ist aber gerade die Formel, durch die der allgemeine Laplacesche Entwicklungssatz in den Lehrbüchern der Analytischen Geometrie beschrieben wird.

§ 11. Alternierende Differentialformen

Sei $V = \mathbb{R}^n$, $A^p = A^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und X eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$.

11.1. Definitionen.

11.1.1. Definition: (a) Eine alternierende Differentialform p-ten Grades in X ist eine Abbildung

$$\alpha : X \to A^p.$$

(b) Die Menge der alternierenden Differentialformen p-ten Grades in X bezeichen wir mit: „$A^p(X)$".

11.1.2. Eine alternierende Differentialform p-ten Grades in X. $\alpha : X \to A^p$ induziert für jedes p-Tupel $(a_1, \ldots, a_p)$ von Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, p)$ eine Abbildung

$$\alpha(a_1, \ldots, a_p) : X \to \mathbb{R} \quad ,$$

die definiert ist durch

$$\alpha(a_1, \ldots, a_p)(x) \;{}_{Df}\!= \alpha(x)\,(a_1, \ldots, a_p) \quad \text{für alle } x \in X.$$

11.1.3. Definition: (a) Eine alternierende Differentialform p-ten Grades in X, $\alpha : X \to A^p$ heißt C^r-Differentialform p-ten Grades in X, wenn für alle p-Tupel $(a_1, \ldots, a_p)$ von Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, p)$ die (gemäß 11.1.2) induzierten Abbildungen $\alpha(a_1, \ldots, a_p) : X \to \mathbb{R}$ C^r-Abbildungen sind.

(b) Die Menge der C^r-Differentialformen p-ten Grades in X bezeichnen wir mit: „$C^r A^p(X)$".

11.1.4. Satz: (a) Sind $\alpha, \beta \in A^p(X)$ bzw. $C^r A^p(X)$, so sind auch $\alpha + \beta$ und $\lambda\,\alpha \in A^p(X)$ bzw. $C^r A^p(X)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei $\alpha + \beta$ durch

$$(\alpha+\beta)(x) \;{}_{Df}\!= \alpha(x) + \beta(x) \quad \text{(Addition rechts nach 9.3.1.)}$$

und $\lambda\ \alpha$ durch

$$(\lambda\alpha)(x) \ {}_{Df}{=} \ \lambda\cdot\alpha(x) \quad \text{(Multiplikation rechts nach 9.3.1.)}$$

gegeben ist.

(b) Ist $\alpha \in A^p(X)$ bzw. $C^r\ A^p(X)$ und $\beta \in A^q(X)$ bzw. $C^rA^q(X)$, so ist $\alpha \cdot \beta \in A^{p+q}(X)$ bzw. $C^rA^{p+q}(X)$, wobei $\alpha \cdot \beta$ durch $(\alpha \cdot \beta)(x) \ {}_{Df}{=} \ \alpha(x) \wedge \beta(x)$ (s. 10.3.1.).
gegeben ist.

Der Beweis ist trivial.

11.1.5. Bemerkung: Satz 10.3.4. gilt sinngemäß auch für das in 11.1.4.(b) definierte Produkt von Differentialformen.

Damit wird

$$A(X) \ {}_{Df}{=} \ (A^p(X) \mid p = 0,1,\dots) \text{ bzw}$$

$$C^rA(X) \ {}_{Df}{=} \ (C^rA^p(X) \mid p = 0,1,\dots)$$

zu einer „graduierten kommutativen Algebra über $\underline{\underline{R}}$ mit Einselement". Hierbei ist das Einselement die konstante Abbildung $\alpha : X \to A^0 \cong \underline{\underline{R}}$ (vgl. 9.3.2.(a)), die durch $\alpha(x) = 1 \in A^0$ (s. 10.3.5.) für alle $x \in X$ gegeben ist.

11.1.6. Sei $e_1,\dots,e_n$ die natürliche Basis von $\underline{\underline{R}}^n$ und $\alpha \in A^p(X)$ $(p > 0)$. Dann können wir schreiben:

$$\alpha(x) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} f_{i_1\dots i_p}(x)\ E_{i_1\dots i_p}$$

(nach 9.4.6.). Die $f_{i_1\dots i_p} : X \to \underline{\underline{R}}$ $(1\le i_1<\dots<i_p\le n)$ erhalten wir aus α durch die Beziehung:

$$f_{i_1\dots i_p} = \alpha(e_{i_1},\dots,e_{i_p}) \quad \text{(s. 11.1.2.).}$$

11.1.7. Satz: $\alpha \in A^p(X)$ ist genau dann eine C^r-Differentialform wenn die Funktionen $f_{i_1 \ldots i_p} \underset{Df}{=} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) : X \to \underline{\underline{R}}$ für alle $i_1, \ldots, i_p$ $(1 \leq i_j \leq n,\ j = 1, \ldots, p)$ C^r-Abbildungen sind.

Beweis: Aus $\alpha \in C^rA^p(X)$ folgt gemäß der Definition 11.1.3, daß alle $f_{i_1 \ldots i_p}$ C^r-Abbildungen sind. Umgekehrt sind zunächst die Differentialformen $\alpha_{i_1 \ldots i_p}$, die durch:

$$\alpha_{i_1 \ldots i_p}(x) \underset{Df}{=} E_{i_1 \ldots i_p} \qquad \text{für alle } x \in X$$

gegeben sind, aus $C^rA^p(X)$ (Die induzierten Abbildungen sind konstant, also beliebig oft differenzierbar). Damit ist aber

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} \; E_{i_1 \ldots i_p} \in C^r A^p X.$$

11.1.8. Bemerkung: Wir können in Satz 11.1.7. auch o.B.d.A. voraussetzen:

$$1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n .$$

11.2. Der Differentialoperator

11.2.1. Nach unseren Definitionen (vgl. 9.3.2.(a) und 11.1.3.) sind die C^r-Differentialformen 0-ten Grades in X nichts anderes als die C^r-Abbildungen $f : X \to \underline{\underline{R}}$. Das Differential d_xf einer C^r-Abbildung $f : X \to \underline{\underline{R}}$ ist eine lineare Abbildung von $\underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{R}}$, d.h.

$$d_xf \in L^1(\underline{\underline{R}}^n, \underline{\underline{R}}) = A^1 \qquad \text{(nach 9.3.2.);}$$

wir erhalten dann eine alternierende Differentialform 1-ten Grades $df : X \to A^1$, indem wir definieren:

$$(df)(x) \underset{Df}{=} d_xf.$$

Bezeichnen wir mit $D_i f$ die partielle Ableitung von f nach der i-ten Variablen, so ergibt 11.1.6. wegen $(d_x f)(e_i) = (D_i f)($ für alle $x \in X$:

$$(df)(x) = d_x f = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x) \cdot E_i \; .$$

Da f C^r-Abbildung ist, sind die $D_i f : X \to \underline{\underline{R}}$ für $i = 1,\ldots,n$ C^{r-1}-Abbildungen und Satz 11.1.7. ergibt: $df \in C^{r-1} A^1(X)$.
Sei nun $p_i : X \to \underline{\underline{R}}$ die i-te Projektion, d.h.

$$p_i(x) \underset{Df}{=} x_i \quad \text{für alle } x \in X \subset \underline{\underline{R}}^n.$$

Dann ist $(D_j p_i)(x) = \delta_{ij}$ für alle $x \in X$ (vgl. 9.4.5.), und wir haben:

$$E_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} E_j = (dp_i)(x) = d_x p_i .$$

$(dp_i)(x)$ ist also unabhängig von der speziellen Wahl des Punktes $x \in X$, und wir schreiben dafür auch in Anlehnung an ältere Bezeichnungsweisen „dx_i". Für $D_i f$ gebraucht man oft auch das Symbol $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, und wir erhalten damit die bekannte Formel für das Differential einer Funktion von n Variablen:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \; dx_i .$$

Für Differentialformen p-ten Grades können wir nun auch schreiben (nach 10.3.5.(b) und 11.1.6.).

$$\alpha = \sum f_{i_1 \ldots i_p} \; dx_{i_1} \; dx_{i_2} \ldots dx_{i_p} .$$

11.2.2. Wir wollen nun im Hinblick auf das Vorige allgemein eine Abbildung

$$d : C^r A^p(X) \to C^{r-1} A^{p+1}(X)$$

den sogen. Differentialoperator definieren. Beim gewöhnlichen Differential einer Funktion gilt die Produktregel:
$d(fg) = (df)g + f(dg)$, und aus f unabhängig von x folgt: $df = 0$.
Dadurch bietet sich ein rekursives Verfahren zur Definition des Differentialoperators an: Läßt sich die Differentialform p-ten Grades als Produkt einer Differentialform α q_1-ten Grades und einer Differentialform β q_2-ten Grades schreiben ($q_1 \neq 0 \neq q_2$), und ist der Differentialoperator für alle $q < p$ schon definiert, so kann man versuchen $d(\alpha\beta)$ durch

$$d(\alpha\beta) = (d\alpha)\beta \pm \alpha(d\beta)$$

zu definieren und zusätzlich zu verlangen, daß für konstante, das heißt von x unabhängige α gilt:

$$d\alpha = 0.$$

Diese Überlegungen führen uns zu der

11.2.3. Definition: Für $r > 0$ und $\alpha \in C^rA^p(X)$

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} \, dx_{i_1} \ldots dx_{i_p} \in C^rA^p(X) \quad (r > 0)$$

ist der Differentialoperator d definiert durch:

$$d\alpha \underset{Df}{=} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} df_{i_1 \ldots i_p} \, dx_{i_1} \ldots dx_{i_p} \in C^{r-1} A^{p+1}(X)$$

($df_{i_1 \ldots i_p}$ bedeutet dabei das Differential der Funktion $f_{i_1 \ldots i_p}$, wie es in 11.2.1. dargestellt ist).

11.2.4. Satz: Für den Differentialoperator
$d : C^rA^p(X) \to C^{r-1}A^{p+1}(X)$ gilt:

(a) d ist linear, d.h.

$d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$ für $\alpha, \beta \in C^1A^p(X)$

$d(\lambda\alpha) = \lambda d\alpha$ für $\alpha \in C^1A^p(X)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) d ist eine „graduierte Derivation", d.h.

$d(\alpha\beta) = (d\alpha)\beta + (-1)^p \alpha(d\beta)$ für $\alpha \in C^1A^p(X)$ und $\beta \in C^1A^q(X)$.

(c) d ist ein „Randoperator", d.h.

$d\,d(\alpha) = 0$ für $\alpha \in C^2A^p(X)$.

(d) $d\alpha = 0$ falls α von x unabhängig.

Beweis: (a) folgt aus $d(f+g) = df + dg$ und $d(\lambda f) = \lambda(df)$ für C^r-Abbildungen $f, g : X \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Nach (1) genügt es,

$$\alpha = f\, dx_{i_1} \ldots . dx_{i_p}$$

$$\beta = g\, dx_{j_1} \ldots . dx_{j_q}$$

zu betrachten. Wir schreiben zur Abkürzung:

$$\xi = dx_{i_1} \ldots . dx_{i_p}$$

$$\eta = dx_{j_1} \ldots . dx_{j_q}$$

und erhalten:

$d(\alpha\beta) = d(fg\xi\eta) =$ ($\xi\eta$ ist entweder Null oder $\pm\, dx_{k_1} \ldots dx_{k_r}$
$= d(fg)$ für eine Folge $k_1, \ldots, k_r$ mit $1 \leq k_1 < \ldots < k_r \leq n$).

$= [(df)g + f(dg)] =$

$= (df)\xi g\eta + (-1)^p f\xi(dg)\eta$ (wegen $(dg)\cdot\xi = (-1)^p \xi(dg)$!)

$= (d\alpha)\beta + (-1)^p\, \alpha\cdot(d\beta)$.

(c) Nach (1) genügt es, für

$$\alpha = f\, dx_{i_1} \ldots . x_{i_p} = f\xi \quad (\xi \text{ wie oben})$$

$d(d\alpha) = 0$ zu beweisen. Es gilt:

$$d(d\alpha) = d(df\xi) = d((df)\circ\xi) = (ddf)\xi - (df)(d\xi) =$$

$$= (ddf)\xi \qquad \text{wegen } (df)(d\xi) = (df)(d1)\circ\xi = 0$$

und

$$ddf = d\sum_{i=1}^{n}(D_i f)dx_i = \sum_{i=1}^{n} d(D_i f)\, dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(D_j D_i f)\, dx_j\, dx_i =$$

$$= \sum_{1\le j<i\le n}(D_j D_i f - D_i D_j f)\, dx_j dx_i = 0,$$ da aus $\alpha \in C^2A^p(X)$

nach 11.1.7. folgt, daß f eine C^2-Abbildung ist, und damit gilt:

$$D_j(D_i f) = D_i(D_j f) \quad \text{für } 1 \le i,\ j \le n.$$

(d) folgt aus der Definition und der entsprechenden Aussage für die Funktionen $f_{i_1\ldots i_p}$.

11.2.5. <u>Beispiele:</u> (a) Da $\underline{\underline{R}}^n \cong A^1$ (vgl. 9.4.7.) ist, entspricht $A^1(X)$ eineindeutig der Menge der Vektorfelder auf X. Für eine differenzierbare Abbildung $f : X \to \underline{\underline{R}}$ bezeichnet man den Vektor

$$\text{grad } f(x) \underset{Df}{=} (D_1 f(x), \ldots, D_n f(x))$$

als den <u>Gradienten</u> von f an der Stelle x. Dem Vektorfeld „grad f" ist durch den erwähnten Isomorphismus das Differential $df = \sum_{i=1}^{n}(D_i f)\, dx_i$ zugeordnet.

(b) Sei $v = (v_1, \ldots, v_n) : X \to \underline{\underline{R}}^n$ ein Vektorfeld. Die zugehörige alternierende Differentialform aus $A^1(X)$ (vgl. (1)) können wir nach 11.1.6. in der Form

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} v_i \, dx_i$$

schreiben und erhalten:

$$d\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} (D_j v_i) \, dx_j dx_i = \sum_{1 \le j < i \le n} (D_j v_i - D_i v_j) \, dx_j \, dx_i \, .$$

Im Falle $n = 3$ ist $A^2 \cong \underline{\underline{R}}^3$ (s. 9.4.7.), d.h. auch $A^2(X)$ entspricht eineindeutig der Menge der Vektorfelder auf X. Wir erhalten:

$$d\alpha = (D_2v_3 - D_3v_2)dx_2dx_3 + (D_3v_1 - D_1v_3)dx_3dx_1 + (D_1v_2 - D_2v_1)dx_1dx_2$$

und durch den in 9.4.7. angegebenen Isomorphismus das als „Rotation von v" („rot v") bezeichnete Vektorfeld auf X.

Ist nun $f : X \to \underline{\underline{R}}$ eine C^2-Abbildung, X offen in $\underline{\underline{R}}^3$ und setzen wir

$$v_{Df} = \text{grad } f \quad (\text{vgl. } (1)),$$

so erhalten wir aus $ddf = 0$ (s. 11.2.4.) die bekannte Formel

$$\text{rot grad } f = 0.$$

(c) Allgemein haben wir nach 9.4.7.: Die Menge der Vektorfelder auf X entspricht eineindeutig der Menge $A^{n-1}(X)$. Gemäß einer solchen Beziehung können wir dem stetig differenzierbaren Vektorfeld $v = (v_1, \ldots, v_n)$ die C^1-Differentialform

$$\alpha_{Df} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \, v_i \, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n$$

eineindeutig zuordnen. Dann erhalten wir:

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{i=1}^{n} (D_j v_i) dx_j \, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} D_i v_i \right) \quad dx_1 \ldots dx_n \in A^n(X)$$

und durch den in 9.4.7. angegebenen Isomorphismus ergibt sich die als „Divergenz von v" („div v") bezeichnete Funktion $X \to \underline{\underline{R}}$.

Ist nun $\bar{v}$ ein C^2-Vektorfeld auf $X \subset \underline{\underline{R}}^3$, und setzen wir $v_{Df} = \text{rot } \bar{v}$, so erhalten wir aus $dd\alpha = 0$ die bekannte Formel:

$$\text{div rot } \bar{v} = 0.$$

11.2.6. Bemerkung: Wir haben in 11.2.4. bewiesen, daß für jede C^1-Differentialform β, die sich in der Form $\beta = d\alpha$ mit einer geeigneten C^2-Differentialform α schreiben läßt, gilt:

$$d\beta = dd\alpha = 0.$$

Nun kann man fragen, ob sich dieser Schluß umkehren läßt, d.h. ob es zu jeder C^1-Differentialform β mit $d\beta = 0$ eine C^2-Differentialform α mit $d\alpha = \beta$ gibt.

Aus der Analysis mag bekannt sein, daß jedes Vektorfeld $v : \underline{\underline{R}}^3 \to \underline{\underline{R}}^3$, dessen Rotation verschwindet, sich als Gradient einer (skalaren) Funktion $f : \underline{\underline{R}}^3 \to \underline{\underline{R}}$ schreiben läßt. Ähnliches gilt für ein Vektorfeld $v : \underline{\underline{R}}^3 \to \underline{\underline{R}}^3$, dessen Divergenz verschwindet: Es läßt sich als Rotation eines Vektorfeldes $\bar{v} : \underline{\underline{R}}^3 \to \underline{\underline{R}}^3$ darstellen.

Die allgemeine Beantwortung unserer Frage hängt natürlich von der Teilmenge X in $\underline{\underline{R}}^n$ ab, auf der β definiert ist. Es ist nicht immer möglich, ein α mit der gewünschten Eigenschaft zu bestimmen; ein Beispiel dazu findet man in [DH] § 11.3. Andererseits besagt der „Poincarésche Satz": Ist X eine zum ganzen $\underline{\underline{R}}^n$ diffeomorphe Teilmenge in $\underline{\underline{R}}^n$, ($X$ heißt dann auch „differenzierbare n-Zelle"), so gibt es zu jedem $\beta \in C^1A^p(X)$ ($p \geq 1$ mit: $d\beta = 0$ eine C^2-Differentialform α mit $d\alpha = \beta$.

Den Beweis dieses Satzes können wir hier übergehen, er steht z.B. in [DH] § 11.4. oder auch in [F] § 3.6.

Für den mit der algebraischen Topologie Vertrauten sei noch eine Verallgemeinerung des Satzes von Poincaré angegeben: Es gibt genau dann zu jedem $\beta \in C^1A^p(X)$ $(p \geq 1)$ mit: $d\beta = 0$ eine C^2-Differentialform α mit: $d\alpha = \beta$, wenn die p-te (singuläre) Cohomologiegruppe von X mit reellen Koeffizienten verschwindet. Näheres s. bei Claude Chevalley und Samuel Eilenberg: „Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras" Transactions of the American Mathematical Society, Band 63 (1948, S. 85 - 124, § 4 f).

11.3. Invarianz des Differentialoperators

11.3.1. Definition: Sei $f : X \to \mathbb{R}$ C^1-Abbildung und $v \in \mathbb{R}^n$. Die Richtungsableitung von f in Richtung v ist die Abbildung $(D_v f) \underset{Df}{=} (df)\, v : X \to \mathbb{R}$.

11.3.2. Satz: Sei $\alpha \in C^rA^p(X)$ und $r \geq 1$. Dann ist

$$(d\alpha)(a_1,\ldots,a_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} D_{a_i}(\alpha(a_1,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_{p+1}))$$

(vgl. 11.1.2.).

Beweis: O.B.d.A. sei $\alpha = f\, dx_{i_1}\ldots dx_{i_p} = f\xi$, $\xi = dx_{i_1}\ldots dx_{i_p}$.

Dann gilt:

$$(d\alpha)(a_1,\ldots,a_{p+1}) = (df)\,\xi\,(a_1,\ldots,a_{p+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1}\, df(a_i)\cdot\xi\,(a_1,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_{p+1}) \quad \text{(nach 10.3.3.)}.$$

$\xi(a_1,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_{p+1})$ ist für jedes i $(1 \leq i \leq p+1)$ ein von x unabhängiges Element aus $\underline{\underline{R}}$, kann demnach unter das Differential gezogen werden, und der obige Ausdruck ist also

$$= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \, d(f \circ \xi(a_1,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_{p+1}))(a_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \, D_{a_i}(\alpha(a_1,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_{p+1})) \text{ (nach Definition).}$$

11.3.3. Bemerkung: Man kann den Differentialoperator auch anstatt durch 11.2.3. mit Hilfe der Formel aus dem Satz 11.3.2. einführen. Das wird z.B. in [DH] § 10.4. gemacht, Satz 11.3.2. zeigt die Gleichwertigkeit dieser beiden Definitionen.

11.4. Zurückholen von Differentialformen

Sei X offen in $\underline{\underline{R}}^n$, Y offen in $\underline{\underline{R}}^m$ und $t : X \to Y$ eine C^{r+1}-Abbildung.

11.4.1. Definition: $t^* : A(Y) \to A(X)$ ist die Abbildung, die gegeben ist durch:

$(t^*\alpha)(x)(a_1,\ldots,a_p) \underset{Df}{=} (\alpha \cdot t)(x)((d_x t)a_1,\ldots,(d_x t)a_p)$

für $\alpha \in A^p(Y)$.

($t^*\alpha(x)$ ist multilinear, weil $d_x t$ linear ist; die Bedingung 9.2.1. ist offensichtlich erfüllt, da $\alpha(tx)$ ja nach Voraussetzung alternierend ist, also ist auch $t^*\alpha(x)$ eine alternierende Multilinearform für jedes $x \in X$).

11.4.2. Satz: Für die Abbildung $t^* : A(X) \to A(X)$ gilt:

(a) t^* ist linear,

(b) $t^*(\alpha \cdot \beta) = t^*(\alpha) \cdot t^*(\beta)$,

(c) $t^*(1) = 1$,

d.h. t^* ist ein Homomorphismus von graduierten Algebren mit Einselement.

Beweis: (a) folgt aus 11.1.4.

(b) folgt aus 11.1.4. und 10.3.1.

(c) folgt unmittelbar aus der Definition des Einselementes (vgl. 11.1.5.).

11.4.3. Satz: Für alle $\alpha \in C^rA^p(Y)$ gilt:

(a) $t^*\alpha \in C^rA^p(X)$ $(r \geq 0)$

(b) $dt^*\alpha = t^*d\alpha$ $(r > 0)$

Beweis: Nach 11.2.1. läßt sich jedes $\alpha \in C^rA^p(Y)$ in der Form $\sum f_{i_1 \ldots i_p} dp_{i_1} \ldots dp_{i_p}$ darstellen, wobei die $f_{i_1 \ldots i_p}$ C^r-Abbildung[en] und die p_i C^∞-Abbildungen für $i = 1,\ldots,n$ sind. Wegen der Linearität von t^* und der Verträglichkeit mit der Multiplikation (11.4.2.) sowie der Linearität von d (11.2.4.(a)) genügt es, die Behauptungen für die f und dp_i zu beweisen:

Ist f C^r-Abbildung, so ch $t^*f = f \cdot t$, d.h. (a) ist für $f \in C^rA^o(Y)$ erfüllt. Weiterhin gilt:

$d_xt^*f = d_x(f \cdot t) = d_{tx}f \cdot d_xt = t^*d_{tx}f$, also ist (b) für $f \in C^rA^o(Y)$.erfüllt.

Für dp_i $(i = 1,\ldots,n)$ haben wir (unter Benutzung des oben Bewiesenen):

$t^*dp_i = dt^*p_i = d(p_i \cdot t) \in C^rA^1(X)$, also (a) und

$dt^*dp_i = ddt^*p_i = 0 = t^*ddp_i$, also (b).

11.4.4. Satz: (a) Ist $id : X \to X$ die identische Abbildung, so ist $id^*\alpha = \alpha$.

(b) Für C^{r+1}-Abbildungen $t : X \to Y$ und $s : Y \to Z$ gilt: $(st)^* = t^*s^*$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar durch Einsetzen der Definition 11.4.1.

11.5. Der Träger von Differentialformen.

11.5.1. Definiton: Sei X offen in $\underline{\underline{R}}^n$ und $\alpha \in A^p(X)$. Die abgeschlossene Hülle $\operatorname{Tr} \alpha$ von $\{x \mid x \in X \text{ und } \alpha(x) \neq 0\}$ heißt der „Träger von α" (analog zu 4.3.5.).

11.5.2. Satz: Sei X offen in $\underline{\underline{R}}^n$ und $\alpha \in C^o A^p(X)$. Ist x_o ein Randpunkt von $\operatorname{Tr} \alpha$ und $x_o \in X$, so ist

$$\alpha(x_o) = 0.$$

Beweis: $\{x \mid x \in X \text{ und } \alpha(x) \neq 0\}$ ist eine offene Menge. Jeder ihrer Punkte ist also innerer Punkt dieser Menge und damit erst recht von $\operatorname{Tr} \alpha$.

11.5.3. Satz: Sei X offen in $\underline{\underline{R}}^n$ und $\alpha \in C^1 A^p(X)$. Dann gilt:

$$\operatorname{Tr} d\,\alpha \subset \operatorname{Tr} \alpha.$$

Beweis: Sei $x \in X - \operatorname{Tr} \alpha$. Da $\operatorname{Tr} \alpha$ abgeschlossen ist, gibt es eine offene Menge V in $\underline{\underline{R}}^n$ mit:

$$x \in V \subset X - \operatorname{Tr} \alpha.$$

Bezeichnet nun $i : V \to X$ die natürliche Inklusion, so haben wir:

$$d\alpha(x) = (d\alpha|V)(x) = i^* d\alpha(x) = d(i^*\alpha)(x) =$$

$$= d(\alpha|V)(x) = 0 \quad \text{nach 11.2.4,}$$

da $\alpha|V$ konstant gleich Null ist.

11.5.4. Folgerung: Sei X offen in $\underline{\underline{R}}^n$ und $\alpha \in C^1 A^p(X)$. Ist x_o ein Randpunkt von $\operatorname{Tr} \alpha$ und $x_o \in X$, so ist

$$d\alpha(x_o) = 0.$$

Beweis: 11.5.2. und 11.5.3.

§ 12. Integration von Differentialformen

12.1. Integration von Differentialformen n-ten Grades

Sei X offen in $\underline{\underline{R}}^n$ und $\alpha \in A^n(X)$, d.h. eine Differentialform n-ten Grades. Nach unseren Überlegungen in 11.2.1. können wir schreiben:

$$\alpha = f\, dx_1 \ldots dx_n,$$

wobei $f : X \to \underline{\underline{R}}$ eine geeignete Funktion bedeutet.

Außerdem sei O_X die Orientierung von X, die sich durch die Einschränkung der natürlichen Orientierung von $\underline{\underline{R}}^n$ auf X ergibt (X ist ja eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit in $\underline{\underline{R}}^n$).

12.1.1. Definition: Ist L eine Teilmenge in X, so heißt die alternierende Differentialform $\alpha = f\, dx_1 \ldots dx_n$ integrierbar über $(L; X, O_X)$, wenn f über L (Lebesgue-) integrierbar ist. In diesem Fall heißt der Ausdruck

$$\int_{(L;X,O_X)} \alpha \overset{\mathrm{Df}}{=} \int_L f$$

das Integral von α über $(L; X, O_X)$.

(α ist nach 2.8. sicher dann über $(L; X, O_X)$ integrierbar, wenn $\alpha \in C^0A^n(X)$ und L kompakt ist.)

12.1.2. Seien X und Y offene Teilmengen in $\underline{\underline{R}}^n$ sowie $t : X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus, der die Orientierung O_X in die entsprechende Orientierung O_Y von Y überführt, d.h.

$$\mathrm{Det}\, Jt(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in X.$$

Für $\alpha = f\, dy_1 \ldots dy_n \in A^n(Y)$ gilt dann:

$$t^*\alpha = (t^*f)(t^*dy_1)\ldots(t^*dy_n) \quad \text{(nach 11.4.2.), also}$$

$$t^*\alpha = (f \cdot t) \cdot dt_1 \ldots dt_n \quad (t(x) = (t_1(x), \ldots, t_n(x))!).$$

Nun haben wir aber für $i = 1, \ldots, n$:

$$dt_i = \sum_{j=1}^{n} (D_j t_i) \; dx_j,$$

also entsprechend der Rechnung in 9.4.1.:

$$dt_1 \ldots dt_n = \sum_{j_1=1}^{n} (D_{j_1} t_i) \, dx_{j1} \ldots \sum_{j_n=1}^{n} (D_{j_n} t_n) dx_{jn}$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} (D_{j_1} t_1) \ldots (D_{j_n} t_n) \cdot dx_{j_1} \ldots dx_{j_n}$$

$$= \text{Det}\,(Jt) \cdot dx_1 \ldots dx_n.$$

Daraus erhalten wir:

$$t^*\alpha = (f \cdot t) \cdot \text{Det}(Jt) \cdot dx_1 \ldots dx_n \;.$$

Sei nun $t^*\alpha$ über $(L;\, X,\, O_X)$ integrierbar. Dann folgt:

$$\int_{(L;\, X,\, O_X)} t^*\alpha = \int_L (f \cdot t) \cdot \text{Det}\,(Jt) \qquad \text{nach 12.1.1.}$$

$$= \int_{tL} f \quad \text{nach dem Transformationssatz 4.2.2.}$$

$$= \int_{(tL;Y,O_Y)} \alpha \qquad \text{nach 12.1.1.}$$

Der Transformationssatz 4.2.2. liefert außerdem:

α ist genau dann über $(tL;\, Y,\, O_Y)$ integrierbar, wenn $t^*\alpha$ über $(L;\, X,\, O_X)$ integrierbar ist.

Wir fassen diese Berechnungen zusammen in dem

12.1.3. <u>Satz:</u> Seien X und Y offene Teilmengen in $\underline{\underline{R}}^n$, sowie $t : X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus, der die natürliche

Orientierung O_X von X in die natürliche Orientierung O_Y von Y überführt. Ist $L \subset X$ und $\alpha \in A^n(Y)$, so ist α genau dann über $(tL;\ X,\ O_Y)$ integrierbar, wenn $t^*\alpha$ über $(L;\ X,\ O_X)$ integrierbar ist; in diesem Fall gilt:

$$\int_{(L:X,O_X)} t^*\alpha = \int_{(tL;\ Y,\ O_Y)} \alpha .$$

12.2. Verallgemeinerung:

12.2.1. Wir suchen nun nach einem Integralbegriff über Teilmengen L von beliebigen p-dimensionalen, orientierten C^r-Mannigfaltigkeiten (M,O), mit dem wir alternierende Differentialformen α p-ten Grades integrieren können. In Analogie zur vorigen Schreibweise bedeutet das die Definition eines Ausdruckes der Form

$$\int_{(L;\ M,\ O)} \alpha .$$

Dazu benötigen wir noch einige Vorbereitungen:

12.2.2. Definition: Sei (M,O) eine p-dimensionale orientierte C^1-Mannigfaltigkeit, $g : U' \to M$ eine orientierte Karte von M, X eine offene Menge in $\underline{\underline{R}}^n$ und L eine Teilmenge in $M \cap X$.
Eine Differentialform $\alpha \in A^p(X)$ mit

$$\mathrm{Tr}\,\alpha \cap L \subset g(U')$$

heißt integrierbar über $(L;\ M,O)$, wenn $g^*\alpha$ über $(g^{-1}(L);\ U',\ O_{U'})$ im Sinne von 12.1.1. integrierbar ist. In diesem Fall heißt der Ausdruck

$$\int_{(L;M,O)} \alpha \ {}_{\mathrm{Df}}{=} \int_{(g^{-1}(L);U',O_{U'})} g^*\alpha$$

das Integral von α über $(L;\ M,\ O)$.

Um diese Definition zu rechtfertigen, beweisen wir den

12.2.3. Hilfssatz: Unter den Voraussetzungen von 12.2.2. gilt:

(a) $$\int_{(L;M,O)} \alpha = \int_{(g^{-1}(L\cap \mathrm{Tr}\,\alpha);U',\,O_{U'})} g^*\alpha .$$

(Das Integral existiert sicher, falls L kompakt und $\alpha \in C^0A^p(X)$ ist).

(b) Ist $h : V' \to M$ eine weitere orientierte Karte von M mit:

$$\mathrm{Tr}\,\alpha \cap L \subset h(V'),$$

so ist

$$\int_{(g^{-1}(L\cap \mathrm{Tr}\,\alpha);\,U',\,O_{U'})} g^*\alpha = \int_{(h^{-1}(L\cap \mathrm{Tr}\,\alpha);\,V',\,O_{V'})} h^*\alpha ,$$

d.h. die Definition 12.2.2. ist unabhängig von der Auswahl der orientierten Karte.

Beweis: (a) $g^*\alpha(x') = 0$ für $g(x') \notin \mathrm{Tr}\,\alpha$; daraus folgt die Gleichung. Aus 11.4.3. folgt:

$$g^*\alpha \in C^0A^p(U'), \text{ falls } \alpha \in C^0A^p(X) \text{ ist.}$$

$g^{-1}(L\cap \mathrm{Tr}\,\alpha)$ ist kompakt, also existiert

$$\int_{(g^{-1}(L\cap \mathrm{Tr}\,\alpha);\,U',\,O_{U'})} g^*\alpha \quad \text{(vgl. den letzten Satz in 12.1.1.).}$$

(b) Sei $A' \underset{Df}{=} g^{-1}(g(U')\cap h(V'))$ und

$B' \underset{Df}{=} h^{-1}(g(U')\cap h(V'))$. Dann gibt es nach 5.4. und 5.6.3. einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $t : A' \to B'$, der durch $h^{-1}g$ induziert wird. Außerdem gilt:

$$L\cap \mathrm{Tr}\,\alpha \subset g(U')\cap h(V'),$$

$t\,g^{-1}(L\cap \mathrm{Tr}\,\alpha) = h^{-1}(L\cap \mathrm{Tr}\,\alpha)$, sowie

$$h|B' \circ t = g|A',$$

also nach 11.4.4.

$g^*\alpha|A' = (g|A')^*\alpha = t^*(h|B')^*\alpha = t^*h^*\alpha|B'$.

Die Behauptung folgt nun aus 12.1.3.

12.3. Die „Zerlegung der Eins"

12.3.1. Um nach dem Verfahren von 12.2.2.

$$\int\limits_{(L;\ M,\ O)} \alpha$$

für beliebige $\alpha \in A^p(X)$ zu definieren, zerlegt man α so in Differentialformen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$:

$$\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k,$$

daß für jedes $\alpha_i (i = 1, \ldots, k)$ die Voraussetzungen von 12.2.2. erfüllt sind. Dazu konstruiert man Funktionen $\varphi_i : L \to \mathbb{R}$ (genau genommen ist der Definitionsbereich der φ_i eine offene Umgebung von L) mit geeignetem Träger, so daß für alle $x \in L$

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) = 1$$

gilt und setzt dann

$$\alpha_i \ {}_{Df}{=} \ \varphi_i \alpha.$$

Wegen der Eigenschaft (*) spricht man von einer „Zerlegung der Eins" (oder auch Teilung, Partition der Einheit). Die Existenz solcher Funktionen beweisen wir in dem folgenden

12.3.2. Satz: Sei L eine kompakte Teilmenge in $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{W} = (W_j \mid j \in J)$ eine offene Überdeckung von L (durch in $\mathbb{R}^n$ offene Mengen). Dann gibt es eine offene Menge V, die L umfaßt, und C^∞-Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_k : V \to [0,1]$, so daß gilt:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) = 1$ für alle $x \in L$.

(b) <u>Zu jedem i $(1 \le i \le k)$ gibt es ein $j_i \in J$ mit der Eigenschaft:</u>

$$\underline{\mathrm{Tr}\,\varphi_i \subset W_{j_i} \text{ und } \mathrm{Tr}\,\varphi_i \text{ kompakt.}}$$

<u>Beweis:</u> Sei $\chi : \underline{\underline{R}} \to [0,\infty[$ gegeben durch

$$\chi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \le 0 \end{cases} .$$

Dann ist $\chi \in C^\infty A^0(\underline{\underline{R}})$. Zu $a, b \in \underline{\underline{R}}$ mit $a < b$ bilden wir die Funktion $\Psi_{a,b} \in C^\infty A^0(\underline{\underline{R}})$ durch die Festsetzung

$$\Psi_{a,b}(t) = \chi(t-a) \cdot \chi(b-t) \quad \text{für alle } t \in \underline{\underline{R}}.$$

Hier haben wir:

$$\mathrm{Tr}\,\Psi_{a,b} = [a,b]$$

und

$$\Psi_{a,b}(t) \in [0,\infty[.$$

Sei nun Q ein offener Quader in $\underline{\underline{R}}^n$ (vgl. 1.1.1.), d.h.

$$Q = \{x \mid a < x < b\} \in \underline{\underline{R}}^n$$

$(a = (a_1,\dots,a_n),\ b = (b_1,\dots,b_n))$. Dann definieren wir $\Psi_Q \in C^\infty A^0(\underline{\underline{R}}^n)$ durch:

$$\Psi_Q(x) \ {}_{Df}\!= \prod_{l=1}^{n} \Psi_{a_l,b_l}(x_l)$$

für alle $x = (x_1,\dots,x_n) \in \underline{\underline{R}}^n$. Jetzt gilt

$$\mathrm{Tr}\,\Psi_Q = \bar{Q},$$

wobei $\bar{Q}$ die abgeschlossene Hülle von Q bedeutet, und

$$\Psi_Q(x) \in [0,\infty[\quad \text{für alle } x \in \underline{\underline{R}}^n.$$

Nun wählen wir zu jedem $x \in L$ einen offenen Quader Q_x mit: $x \in Q_x$ und $\bar{Q}_x \subset W_{j_x}$ für ein geeignetes $j_x \in J$; da die $W_j (j \in J)$ eine offene Überdeckung von L bilden, ist das immer möglich.

Nach dem Überdeckungssatz von Heine-Borel gibt es dann endlich viele Punkte $x_1,\ldots,x_k \in L$, so daß $L \subset \bigcup_{i=1}^{k} Q_{x_k}$ ist.

Zur Abkürzung schreiben wir nun $j_i \;{}_{Df}\!= j_{x_i}$, $Q_i \;{}_{Df}\!= Q_{x_i}$ und $\Psi_i \;{}_{Df}\!= \Psi_{Q_i}$ $(i = 1,\ldots,k)$ und setzen:

$$V \;{}_{Df}\!= \bigcup_{i=1}^{k} Q_i$$

$$\Psi \;{}_{Df}\!= \sum_{i=1}^{k} \Psi_i \,.$$

Dann haben wir $\Psi(x) \in]0,\infty[$ für alle $x \in V$ und $L \subset V$, so daß wir die C^∞-Funktionen $\varphi_i : V \to [0.1]$ definieren können durch

$$\varphi_i \;{}_{Df}\!= \Psi_i/\Psi \quad \text{für } i = 1,\ldots,k.$$

Wir erkennen nun unmittelbar

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) = 1 \qquad \text{für alle } x \in V \supset L$$

und

$$\operatorname{Tr} \varphi_i = \operatorname{Tr} \Psi_i = \bar{Q}_{x_i} \subset W_{j_i} \,.$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. Allgemein sagen wir:

12.3.3. <u>Definition:</u>

$(V;\ \varphi_1,\ldots,\varphi_k : V \to \underline{\underline{R}};\quad j_1,\ldots,j_k \in J)$

<u>heißt eine Zerlegung der Eins auf L bezüglich der Überdeckung $\mathfrak{W}$.</u>

12.4. <u>Allgemeine Definition des Integrals von Differentialforme</u>

Wir betrachten in $\underline{\underline{R}}^n$ eine orientierte, p-dimensionale Teilmanngifaltigkeit (M,O). Ist $\mathfrak{A} = (g_j : U_j' \to M \mid j \in J)$ ein orientierter Atlas für M, so gibt es zu jeder orientierten Karte $g_j : U_j' \to M$ $(j \in J)$ nach der Definition der lokalen Karten.

in 5.2.1. eine offene Menge V_j mit $V_j \cap M = g_j(U'_j)$. Die Familie $\mathfrak{W} =_{Df} (V_j \mid j \in J)$ bildet eine offene Überdeckung von M. Außerdem ist eine in $\underline{\underline{R}}^n$ offene Menge X gegeben. Wir wollen im folgenden immer annehmen:

(a) $M \subset X$

(b) $V_j \subset X$ für alle $j \in J$.

Diese Bedingungen bedeuten keine Beschränkung der Allgemeinheit: Ist (a) nicht erfüllt, so können wir an Stelle von M immer die orientierte, p-dimensionale Mannigfaltigkeit $(M \cap X, O|M \cap X)$ betrachten, für die (a) offensichtlich gilt. Ist (b) nicht erfüllt, so ist - unter der Voraussetzung von (a) - $\mathfrak{W}_o =_{Df} (V_j \cap X \mid j \in J)$ eine offene Überdeckung von M mit den gewünschten Eigenschaften.

Nun sei L eine beschränkte Menge in M mit $\bar{L} \subset M$ und $(V; \varphi_1, \ldots, \varphi_k : V \to \underline{\underline{R}}; j_1, \ldots, j_k \in J)$ eine Zerlegung der Eins auf $\bar{L}$ ($\bar{L}$ ist kompakt!) bezüglich der Überdeckung $\mathfrak{W}$. ($\mathfrak{W}$ ist als offene Überdeckung von M natürlich auch offene Überdeckung von $\bar{L}$.)

Aus (a) folgt $\bar{L} \subset X$ und (b) liefert

$$\mathrm{Tr}\, \varphi_i \subset X \qquad \text{für } i = 1, \ldots, k.$$

Deshalb können wir o.B.d.A. noch annehmen:

(c) $V = X$.

Nun sind wir bereit für die folgende

<u>Definition:</u> Eine Differentialform $\alpha \in A^p(X)$ heißt <u>integrierbar über (L; M, O)</u>, wenn $\varphi_i \alpha$ für $i = 1, \ldots, k$ gemäß 12.2.2. über (L; M, O) integrierbar ist. In diesem Fall heißt der Ausdruck:

$$\underline{\underline{\int_{(L;M,O)} \alpha =_{Df} \sum_{i=1}^{k} \int_{(L;M,O)} \varphi_i \alpha}}$$

das Integral von α über $(L; M, O)$. (Die Integrale auf der rechten Seite der Gleichung sind nach 12.2.2. erklärt, weil $\mathrm{Tr}\,\varphi_i\alpha \cap L \subset \mathrm{Tr}\,\varphi_i \cap M \subset V_{j_i} \cap M = g_{j_i}(U'_{j_i})$ für $i = 1,\ldots,k$ gilt.)

12.4.2. Zur Rechtfertigung dieser Definition müssen wir noch die Unabhängigkeit von der speziellen Auswahl der Zerlegung der Eins und der Überdeckung beweisen, wobei allerdings nur solche $\mathfrak{W}$ zu betrachten sind, die wie in 12.4.1. mit Hilfe eines Atlasses konstruiert worden sind.

(a) Unabhängigkeit von der Auswahl der Zerlegung der Eins: Sei

$(X; \Psi_1,\ldots,\Psi_l : X \to \underline{\underline{R}},\ j'_1,\ldots,j'_l \in J)$ eine andere Zerlegung der Eins auf $\bar{L}$ bezüglich der Überdeckung $\mathfrak{W}$. Dann haben wir zu beweisen:

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{(L;M,O)} \varphi_i\alpha = \sum_{r=1}^{l} \int_{(L;M,O)} \Psi_r\alpha .$$

Nun gilt für jedes i $(i = 1,\ldots,k)$

$$\varphi_i(x) = \sum_{r=1}^{l} \varphi_i \Psi_r(x) \quad \text{für } x \in X$$

und deswegen:

$$\int_{(L;M,O)} \varphi_i\alpha = \sum_{r=1}^{l} \int_{(L;M,O)} \varphi_i\Psi_r\alpha .$$

(Diese Gleichung folgt aus der entsprechenden Gleichung für das Lebesguesche Integral in 2.1.1., sowie aus den Definitionen in 12.1.1. und 12.2.2. wegen

$$\mathrm{Tr}\,\varphi_i \Psi_r \alpha \subset g_{j_i}(U'_{j_i}) \quad \text{für } i = 1,\ldots,k).$$

Die Summation über i ergibt nun

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{(L;M,O)} \varphi_i \alpha = \sum_{i=1}^{k} \sum_{r=1}^{l} \int_{(L;M,O)} \varphi_i \Psi_r \alpha .$$

Analog erhalten wir

$$\sum_{r=1}^{l} \int_{(L;M,O)} \Psi_l \alpha = \sum_{r=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} \int_{(L;M,O)} \varphi_i \Psi_r \alpha .$$

Da wir die Summationen auf der rechten Seite der angegebenen Gleichungen vertauschen dürfen, folgt die Behauptung.

(b) Unabhängigkeit von der Auswahl der Überdeckung $\mathfrak{W}$.

Zunächst treffen wir noch folgende Festsetzung:

Sind $(A_i \mid i \in I)$ und $(B_j \mid j \in J)$ zwei Familien, dann setzt man $(A_i \mid i \in I) \vee (B_j \mid j \in J) = (C_l \mid l \in L)$, wobei $L = I \times \{0\} \cup J \times \{1\}$ und $C_{(i,0)} = A_i$ und $C_{(j,1)} = B_j$.

Sei $\mathfrak{W}_o$ mittels eines Atlasses $\mathfrak{A}_o$ konstruiert. Dann betrachten wir den Atlas $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}_o$ und die Überdeckung $\mathfrak{W} \vee \mathfrak{W}_o$ = $(V_j \mid j \in J) \vee (V_{j_o} \mid j_o \in J_o)$. Eine Zerlegung der Eins bezüglich der Überdeckung $\mathfrak{W}$ (bzw. $\mathfrak{W}_o$) ist dann auch eine Zerlegung der Eins bezüglich $\mathfrak{W} \vee \mathfrak{W}_o$. Die Behauptung folgt dann aus (a).

12.4.3. Satz: (a) Sind $\alpha, \beta \in A^p(X)$ über $(L; M, O)$ integrierbar, so ist auch $\alpha + \beta$ über (L, M, O) integrierbar, und es gilt:

$$\int_{(L,M,O)} (\alpha+\beta) = \int_{(L,M,O)} \alpha + \int_{(L,M,O)} \beta .$$

(b) $\alpha \in A^p(X)$ ist genau dann über (L,M,O) integrierbar, wenn $\lambda\alpha$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ über (L,M,O) integrierbar ist, und es gilt in diesem Fall:

$$\int\limits_{(L,M,O)} \lambda\alpha = \lambda \int\limits_{(L,M,O)} \alpha .$$

(c) ist $\alpha \in A^p(X)$ mit $\alpha | L \equiv 0$, so ist $\int\limits_{(L;M,O)} \alpha = 0$.

(d) Ist L' eine weitere beschränkte Menge mit $\bar{L}' \subset M$ und $\alpha \in A^p(X)$ über $(L;M,O)$ und (L',M,O) integrierbar, so ist α auch über $(L \cap L', M,O)$ und $(L' \cup L,M,O)$ integrierbar, und es gilt:

$$\int\limits_{(L\cup L',M,O)} \alpha + \int\limits_{(L\cap L',M,O)} \alpha = \int\limits_{(L,M,O)} \alpha + \int\limits_{(L',M,O)} \alpha .$$

Beweis: (a) und (b) folgen aus den entsprechenden Formeln für das Lebesguesche Integral nach Einsetzung der Definition.

(d) folgt genauso, wenn man berücksichtigt, daß eine Zerlegung der Eins auf $L \cup L'$ auch eine Zerlegung der Eins auf L, L und $L \cap L'$ darstellt.

(c) ist trivial.

§ 13. Der Allgemeine Satz von Stokes

13.1. Satz: Sei (M,O) eine orientierte, p-dimensionale C^2-Mannigfaltigkeit in $\underline{\underline{R}}^n$ $(p \geq 2)$, X eine offene Menge in $\underline{\underline{R}}^n$ und K eine kompakte Menge in $M \cap X$, deren Randpunkte in M alle regulär sind. Sei ferner $\alpha \in C^1A^{p-1}(X)$.

Dann gilt:

$$\int_{(K;M,O)} d\alpha = \int_{(\partial K;\partial K,\partial O)} \alpha \quad .$$

(Beide Integrale sind erklärt, denn α und $d\alpha$ sind stetige Differentialformen und mit K ist auch $\partial K = Rd_M K$ kompakt.)

Beweis: (1) Wir machen zunächst die Voraussetzung:

(*) Es gibt eine orientierte Karte $g : U' \to M$, so daß gilt:

$$Tr\ \alpha \cap K \subset g(U') \subset X.$$

Aus 11.5.3. folgt dann:

$$Tr\ d\alpha \cap K \subset g(U').$$

Nach der Definition von d (11.2.3.) ist $d\alpha \in C^oA^p(X)$ und aus 11.4.3. folgt

$$g^*d\alpha \in C^oA^p(U').$$

$g^{-1}(K \cap Tr\ \alpha)$ ist kompakt, also ist $g^*d\alpha$ nach 2.8. und 12.1.1. über $(g^{-1}(K \cap Tr\ \alpha);\ U',\ O_{U'})$, damit aber auch über $(g^{-1}(K);\ U',\ O_{U'})$ integrierbar; nach 12.2.2. ist $d\alpha$ nun über $(K;\ M,\ O)$ integrierbar, und es gilt:

$$\int_{(K;M,O)} d\alpha = \int_{(g^{-1}(K);U',O_{U'})} g^*d\alpha \quad .$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung können wir nach 11.4.3. ersetzen durch

$$\int_{(g^{-1}(K);U',O_{U'})} dg^*\alpha \quad .$$

Dabei ist $g^*\alpha \in C^1A^{p-1}(U')$ (ebenfalls nach 11.4.3.),
d.h. es gibt C^1-Funktionen $f_1,\ldots,f_p : U' \to \underline{\underline{R}}$, so daß gilt:

$$g^*\alpha = \sum_{s=1}^{p} f_s \, dx_1 \ldots \widehat{dx_s} \ldots dx_p \quad ,$$

und wir haben

$$dg^*\alpha = \sum_{s=1}^{p} df_s \, dx_1 \ldots \dot{dx_s} \ldots dx_p \quad \text{(nach 11.2.3.)}$$

$$= \sum_{s=1}^{p} (-1)^{s-1} \, (D_s f_s) \, dx_1 \ldots dx_p \quad \text{(nach 11.2.1.).}$$

Damit erhalten wir aus 12.4.3.

$$\int_{(K;\, M,\, O)} d\alpha = \int_{(g^{-1}(K);U',O_{U'})} dg^*\alpha =$$

$$= \sum_{s=1}^{p} (-1)^{s-1} \int_{(g^{-1}(K);U',O_{U'})} (D_s f_s) \, dx_1 \ldots dx_p =$$

$$= \sum_{s=1}^{p} (-1)^{s-1} \int_{g^{-1}(K)} D_s f_s \quad \text{(nach 12.1.1.).}$$

Nun können wir 2 Fälle unterscheiden:

((1)) $Tr\, \alpha \subset K$

((2)) $Tr\, \alpha \not\subset K$.

Im Fall ((1)) folgt aus 11.5.2.

$$\alpha|\partial K = 0$$

und damit nach 12.4.4.

$$\int_{(\partial K;\partial K,\partial O)} \alpha = 0.$$

Wir haben also zu zeigen:

$$\int_{(K;M,O)} d\alpha = 0.$$

Dazu genügt es nach dem obigen für alle $s = 1,\ldots,p$

$$\int_{g^{-1}(K)} D_s f_s = 0$$

zu beweisen.

Da wir bereits nachgewiesen haben, daß $D_s f_s$ über $g^{-1}(K)$ integrierbar ist, können wir die Integration von $D_s f_s$ über $g^{-1}(K)$ nach dem Satz von Fubini (3.2.1.) in zwei Schritte zerlegen, indem wir zunächst nur über die s-te Koordinate integrieren. Hierbei ist nun f_s eine Stammfunktion von $D_s f_s$ und wegen

$$\text{Tr } f_s \subset g^{-1}(K)$$

folgt aus 11.5.2., daß f_s an den Rändern des Integrationsbereiches verschwindet. Damit verschwindet aber auch das innere Integral, und es folgt die Behauptung:

$$\int_{g^{-1}(K)} D_s f_s = 0 \qquad \text{für } s = 1,\ldots,p.$$

Nun betrachten wir den Fall ((2)). Wir wollen ihn noch etwas spezialisieren:

(**) Die orientierte Karte aus (*) sei eine Randkarte von K in M (vgl. 5.7.1.).

Dann gibt es nach 5.7.2. eine zu g gehörige lokale Karte $h : U'' \to \partial K$ von ∂K mit

$$h(U'') = g(U' \cap (0 \times \underline{\underline{R}}^{p-1})) = g(U') \cap \partial K,$$

und es folgt

$$\text{Tr } \alpha \cap \partial K \subset g(U') \cap \partial K = h(U''),$$

also

$$\int_{(\partial K;\partial K,\partial 0)} \alpha = \int_{(h^{-1}(\partial K);\, U'',\, 0_{U''})} h^*\alpha \quad .$$

Ist $i : \underline{\underline{R}}^{p-1} \to \underline{\underline{R}}^p$ die durch

$$i(x) =_{Df} (0,x) \quad \text{für alle } x \in \underline{\underline{R}}^{p-1}$$

gegebene natürliche Inklusion, so erhalten wir weiter

$$\int_{(\partial K;\partial K,\partial 0)} \alpha = \int_{(h^{-1}(\partial K);\, U'',0_{U''})} i^*g^*\alpha \quad ,$$

und wir haben nun zu beweisen:

$$\sum_{s=1}^{p} (-1)^{s-1} \int_{g^{-1}(K)} D_s f_s = \int_{(h^{-1}(\partial K);\, U'',0_{U''})} i^*g^*\alpha \quad .$$

Den Ausdruck auf der rechten Seite formen wir um zu

$$= \sum_{s=1}^{p} \int_{(h^{-1}(\partial K);U'',0_{U''})} i^* (f_s \, dx_1 \ldots \hat{dx_s} \ldots dx_p)$$

$$= \int_{(h^{-1}(\partial K);U'',0_{U''})} (f_1 \circ i) \, dx_1 \ldots dx_{p-1}$$

$$= \int_{h^{-1}(\partial K)} f_1(0,x_1,\ldots,x_{p-1}) \, dx_1 \ldots dx_{p-1} \quad .$$

Die Summanden auf der linken Seite verschwinden mit Ausnahme des 1. (s = 1) aus dem gleichen Grund wie in Fall ((1)). Es genügt also zu zeigen:

$$\int_{g^{-1}(K)} D_1 f_1 \, dx_1 \ldots dx_p = \int_{h^{-1}(\partial K)} f_1(0,x_2,\ldots,x_p) \, dx_2 \ldots dx_n$$

(Die Umnumerierung der Koordinaten auf der rechten Seite der Gleichung ändert nichts am Wert des Ausdrucks.)
f_1 ist nach Definition eine C^1-Funktion $U' \to \underline{\underline{R}}$ mit $\operatorname{Tr} f_1 \subset U'$; wir können f_1 zu einer C^1-Funktion $\underline{\underline{R}}^p \to \underline{\underline{R}}$ fortsetzen, die außerhalb von U_1 konstant 0 ist. Diese fortgesetzte Funktion bezeichnen wir der Einfachheit halber auch mit f_1. O.B.d.A. nehmen wir U_1 als beschränkt an; dann ist $\operatorname{Tr} f_1$ kompakt, und f_1 verschwindet im Unendlichen, im Bereich $]-\infty,0] \times \underline{\underline{R}}^{p-1}$ sogar außerhalb von $g^{-1}(K)$, das gleiche gilt für die C^0-Funktion $D_1 f_1$. Damit erhalten wir

$$\int_{g^{-1}(K)} D_1 f_1 \quad dx_1 \ldots dx_p = \int_{]-\infty,0] \times \underline{\underline{R}}^{p-1}} D_1 f_1 \quad dx_1 \ldots dx_p =$$

$$= \int_{\underline{\underline{R}}^{p-1}} dx_2 \ldots dx_p \int_{]-\infty,0]} D_1 f_1 \quad dx_1 \qquad \text{(nach dem Satz von Fubini)}$$

$$= \int_{\underline{\underline{R}}^{p-1}} f_1(0,x_2,\ldots,x_p) \quad dx_2 \ldots dx_p \qquad \text{(da } f_1 \text{ Stammfunktion von } D_1 f_1 \text{ bezüglich } x_1 \text{ ist).}$$

$$= \int_{h^{-1}(\partial K)} f_1 \, (0,x_2,\ldots,x_p) \qquad \text{(da } f_1(0,x_2,\ldots,x_p) \text{ höchstens für di Punkte aus } h^{-1}(\partial K) \text{ einen Null verschiedenen Wert besitzt).}$$

Damit ist die in Frage stehende Gleichung bewiesen.

(2) Nun wollen wir uns von den Voraussetzungen (*) und (**) befreien:
Wir wählen zu jedem inneren Punkt x von K, d.h. $x \in K - \partial K$ eine orientierte Karte $g_x : U'_x \to M$, so daß gilt:

$$g_x(U'_x) \subset K$$

und zu jedem Punkt $x \in \partial K$ eine Randkarte von K in $M \cap X$. Eine solche Auswahl von Karten ist unter unseren Voraussetzungen immer möglich. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß

$$\mathcal{O}\!\iota_{Df} = (g_x : U'_x \to M / x \in K)$$

ein orientierter Atlas von M ist und bilden wie in 12.4.1. eine offene Überdeckung $\mathcal{W}$ von $M \cap X$ sowie eine Zerlegung der Eins auf K bezüglich $\mathcal{W}$:

$$(X; \varphi_1, \dots, \varphi_k : X \to \underline{\underline{R}}) .$$

Ist $\alpha \in C^1A^{p-1}(X)$, so ist nun für jedes $\varphi_i\alpha$ $(i = 1, \dots, k)$ die Voraussetzung (*), sowie, falls $\mathrm{Tr}\, \varphi_i\alpha \cap \partial K \neq 0$ ist, auch die Voraussetzung (**) erfüllt; wir erhalten also:

$$\int\limits_{(K;M,O)} d\alpha = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{(K;M,O)} \varphi_i d\alpha = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{(K;M,O)} d(\varphi_i\alpha) - (d\varphi_i)\alpha =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{(\partial K;\partial K,\partial O)} \varphi_i\alpha - \int\limits_{(K;M,O)} (d \sum_{i=1}^{k} \varphi_i)\, \alpha =$$

$$= \int\limits_{(\partial K;\partial K,\partial O)} \alpha - \int\limits_{(K;M,O)} (d\, 1)\, \alpha = \int\limits_{(\partial K;\partial K,\partial O)} \alpha .$$

13.2. Bemerkungen: (a) Der Satz gilt auch für C^1-Mannigfaltigkeiten, was wir hier jedoch nicht beweisen. (Der Beweis beruht darauf, daß stetige Funktionen durch differenzierbare approximiert werden können.)

(b) Die Voraussetzung $p \geq 2$ in der Formulierung des Satzes ist zunächst notwendig, da im Falle $p = 1$ und $\partial K \neq \emptyset$ ∂K eine nulldimensionale Mannigfaltigkeit darstellt, für die wir noch keine Orientierung erklärt haben.

Die Definition der Orientierung läßt sich jedoch sehr leicht erweitern; der Satz ist dann auch für $p = 1$ richtig. (Genaueres s. [DH] S. 223 f.).

(c) Ist M selbst kompakt, so folgt, indem wir $K = M$ setzen:

$$\partial K = \emptyset,$$

und wir erhalten unmittelbar

$$\int\limits_{(M;M,O)} d\alpha = 0.$$

(d) Außerdem gilt der Satz, falls K nicht nur reguläre Randpunkte enthält, für Differentialformen $\alpha \in C^1A^{p-1}(X)$ mit der Eigenschaft:

$$\mathrm{Tr}\,\alpha \cap \mathfrak{S}K = \emptyset \qquad \text{(vgl. 5.7.1.).}$$

Das ist in unserem Beweis mit enthalten.

(e) Ohne Beweis vermerken wir noch, daß die Bedingung in (d) abgeschwächt werden kann zu:

$$m_{p-1}\,(\mathrm{Tr}\,\alpha \cap \mathfrak{S}K) = 0.$$

(Dabei bedeutet m_{p-1} das $(p-1)$-dimensionale Minkowski-Maß.)
Für den Fall des Integralsatzes von Gauß findet sich ein Beweis bei H. König: „Ein einfacher Beweis des Integralsatzes von Gauß" im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Band 66 (1964), S. 119 - 138, wo auch auf weitere Verallgemeinerungen hingewiesen wird.
Der allgemeine Fall läßt sich analog behandeln.

§ 14. Die klassischen Sätze der Vektoranalysis.

14.1. Der Integralsatz von Gauß

Aus dem allgemeinen Satz von Stokes (§ 13) erhält man als Spezialfall den Satz von Gauß, indem man $p = n$ setzt. Dann ist M eine offene Teilmenge von $\underline{\underline{R}}^n$. Ohne wesentliche Einschränkung kann man annehmen, daß die Orientierung O von M durch Einschränkung der natürlichen Orientierung von $\underline{\underline{R}}^n$ entsteht, d.h. daß die Identität von M eine orientierte Karte von (M,O) ist. Die gegebene Differentialform $\alpha \in C^1A^{n-1}(X)$ läßt sich als

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i \, dx_1 \ldots \hat{dx_i} \ldots dx_n$$

darstellen (und man kann übrigens $X = M$ annehmen). Dann ist

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{i=1}^{n} D_i f_i \, dx_1 \ldots dx_n \\ &= \operatorname{div} f \, dx_1 \ldots dx_n \end{aligned}$$

mit $f = (f_1, \ldots, f_n)$ (vgl. 11.2.5.(c)).

Auf der linken Seite der Stokesschen Formel steht also

$$\int_{(K;M,O)} d\alpha = \int_K \operatorname{div} f \qquad \text{(vgl. 12.1.1.)}.$$

Das Integral auf der rechten Seite

$$\int_{(\partial K;\partial K,\partial O)} \alpha$$

erstrecken wir zunächst nur über eine Teilmenge $L \subset \partial K$, so daß es eine orientierte Karte $h : U' \to \partial K$ für $(\partial K, \partial O)$ gibt mit $L \subset h(U')$. Dann ist

$$\int\limits_{(L;\partial K,\partial O)} \alpha = \int\limits_{(h^{-1}L;\; U',O_{U'})} h^*\alpha \qquad \text{(vgl. 12.2.2.).}$$

Ferner gilt:

$$(h^*\alpha)\,(x)\,(e_1,\dots,e_{n-1})$$

$$= \alpha h\,(x)\,((d_x h)\,e_1,\dots,(d_x h)\,e_{n-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i\, f_i\; h\,(x)\; dx_1\dots\widehat{dx_i}\dots dx_n\,(D_1h(x),\dots,D_{n-1}h(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i\, f_i\; h\,(x) \cdot \begin{vmatrix} D_1h_1 & \dots & D_{n-1}h_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \widehat{D_1h_i} & \dots & \widehat{D_{n-1}h_i} \\ \vdots & & \vdots \\ D_1h_n & \dots & D_{n-1}h_n \end{vmatrix}\,(x)$$

$$= \operatorname{Det}\,(f\circ h,\, D_1h,\dots,D_{n-1}h)\,(x),$$

also $\quad h^*\alpha = \operatorname{Det}\,(f\circ h,\, D_1h,\dots,D_{n-1}h)\circ dx_1\dots dx_{n-1}.$

Sei $\mathcal{N}(y)$ der Einheitsvektor, der auf $T_y\partial K$ senkrecht steht und der die Eigenschaft hat, daß $\operatorname{Det}\,(\mathcal{N}(y),v_1,\dots,v_{n-1}) > 0$ ist, wenn $v_1,\dots,v_{n-1}$ eine positiv orientierte Basis von $T_y\partial K$ ist. Dann gilt weiter:

$$\operatorname{Det}\,(f\circ h,\, D_1h,\dots,D_{n-1}h)$$
$$(f,\mathcal{N})\circ h\circ \operatorname{Det}\,(\mathcal{N}\circ h,\, D_1h,\dots,D_{n-1}h),$$

denn $(f-(f,\mathcal{N})\circ\mathcal{N})(h(x))$ liegt in dem von $D_1h(x),\dots,$ $D_{n-1}h(x)$ aufgespannten Tangentialraum an K im Punkt $h(x)$. Schließlich ist $\operatorname{Det}\,(\mathcal{N}(hx),\, D_1h(x),\dots,D_{n-1}h(x))$ das Volumen des von $\mathcal{N}(hx)$, $D_1h(x),\dots,D_{n-1}h(x)$ aufgespannten n-dimensionalen Parallelotops und daher auch das Volumen des von $D_1h(x),\dots$ $D_{n-1}h(x)$ aufgespannten (n-1)-dimensionalen Parallelotops. Diese Volumen wird auch durch

$$W(x) = \sqrt{\operatorname{Det}\,((D_ih(x),\, D_jh(x))\mid i,j=1,\dots,n-1)}$$

gegeben (vgl. 6.5.2.).

Also ist

$$\int_{(L;\partial K,\partial O)} \alpha = \int_{h^{-1}L} ((f,\mathfrak{n}) \circ h) \circ W .$$

Für das letzte Integral schreibt man auch

$$\int_{(L,\partial K)} (f,\mathfrak{n}) \ do \quad ,$$

wobei do als „Oberflächenelement" von ∂K angesehen wird.
(Eine Rechtfertigung dafür ist, daß

$$\int_{(L,\partial K)} do = \int_{h^{-1}L} W$$

das (n-1)-dimensionale (Minkowskische) Maß von L ergibt (vgl. 6.6.2.). Eine entsprechende Schreibweise wird nun auch für Teilmengen L von ∂K benutzt, die nicht ganz im Bild einer Karte liegen, und man erhält den Gaußschen Satz in der geläufigen Form

$$\int_K \operatorname{div} f = \int_{\partial K} (f,\mathfrak{n}) \ do.$$

Streng genommen können wir diese rechte Seite nur als neues Symbol für $\int_{(\partial K;\partial K,\partial O)} \alpha$ ansehen (das allerdings durch die gerade durchgeführten Überlegungen motiviert wird).
Andererseits kann man für irgendeine Funktion F auf ∂K und eine Teilmenge $L \subset K$ ein „Oberflächenintegral"

$$\int_{(L,\partial K)} F \ do$$

definieren, indem man es gleich

$$\int_{h^{-1}L} (F \circ h) \circ W$$

setzt, wenn $L \cap \operatorname{Tr} F$ im Bild der Karte h enthalten ist, und im allgemeinen Fall Zerlegungen der Eins benutzt (analog wie wir es in § 12 für das Integral von Differentialformen gemacht haben).

Dann ist die rechte Seite der Gaußschen Formel in diesem Sinn zu verstehen.

(Selbstverständlich kann diese Definition des „Oberflächenintegrals" auch für andere Mannigfaltigkeiten als ∂K eingeführt werden - auch für solche von anderer Dimension.)

Wir wollen schließlich die geometrische Bedeutung des Vektors $\mathfrak{n}$ noch etwas genauer beleuchten:

Gehen wir von einer orientierten Randkart g von K in M aus, so erhält man eine orientierte Karte h von ∂K durch

$$h(x) = g(0,x).$$

Dann ist

$$D_i h(x) = D_{i-1} g(0,x), \quad i = 2,\ldots,n$$

und $D_1 g,\ldots,D_n g$ ist positiv orientiert, also liegt $D_1 g(0,x)$ auf derselben Seite des Tangentialraumes von ∂K im Punkt $h(x)$ wie $\mathfrak{n}(hx)$. Nach Definition der Randkarte zeigt der Vektor $D_1 g(0,x)$ „in das Komplement von K". Also ist $\mathfrak{n}$ derjenige Einheitsnormalenvektor an K, der in das Komplement von K zeigt."

(Diese Ausdruckweise kann präzisiert werden. Wir verzichten aber auf weitere Einzelheiten.)

14.2. Der klassische Satz von Stokes

Der ursprüngliche Satz von Stokes ergibt sich aus dem allgemeinen Satz in § 13, indem man $n = 3$, $p = 2$ spezialisiert. Dann ist M eine Fläche in $\underline{\underline{R}}^3$. Sei

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3} f_i \, dx_i$$

die gegebene Differentialform. Dann ist

$$d\alpha = g_1 \, dx_2 \, dx_3 + g_2 \, dx_3 \, dx_1 + g_3 \, dx_1 \, dx_2$$

mit

$$g = (g_1, g_2, g_3) = \text{rot } f$$

(vgl. 11.2.5.(b)). Die linke Seite der Stokesschen Formel lautet dann unter Verwendung der zu 14.1. analogen Bezeichnungen

$$\int_{(K;M,O)} d\alpha = \int_{(K,M)} (\text{rot } f, \mathfrak{n}) \; do,$$

wobei $\mathfrak{n}(y)$ der Einheitsvektor ist, der auf T_yM senkrecht steht und die Eigenschaft hat, daß $\operatorname{Det}(\mathfrak{n}(y), v_1, v_2) > 0$, wenn v_1, v_2 eine positiv orientierte Basis von T_yM ist.

Für das Integral auf der rechten Seite betrachten wir wieder eine orientierte Karte $h : U' \to \partial K$ für $(\partial K, \partial O)$ und integrieren zunächst nur über eine Teilmenge $L \subset h(U')$. Ohne wesentliche Einschränkung kann man annehmen, daß $\| h'(x) \| = 1$ für alle $x \in U'$ (d.h. wir wählen die Bogenlänge als Parameter). Dann ist

$$\int_{(L;\partial K,\partial O)} \alpha = \int_{(h^{-1}L;\, U', O_{U'})} h^*\alpha$$

und

$$(h^*\alpha)(x)(e_1) = \alpha h(x)((d_xh)\, e_1)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} f_i h(x)\, dx_i\, (h'(x))$$

$$= \sum_{i=1}^{3} f_i h(x) \cdot h_i'(x)$$

$$= (f \circ h, h').$$

Bezeichnet $\mathfrak{t}(y)$ den Einheitstangentenvektor an ∂K in y, der die Orientierung ∂O liefert, so ist $\mathfrak{t}h(x) = h'(x)$. Also gilt:

$$\int_{(L;\partial K,\partial O)} \alpha = \int_{h^{-1}L} (f,\mathfrak{t}) \circ h\,,$$

wofür man auch

$$\int_{(L,\partial K)} (f,\mathfrak{t})\ ds$$

mit dem „Längenelement" ds schreibt. Wie in 14.1. verallgemeinert man diese Schreibweise auf den Fall, daß L nicht ganz im Bild einer Karte liegt und erhält den Stokesschen Satz in der geläufigen Form

$$\int_{(K,M)} \langle \operatorname{rot} f, \mathfrak{n} \rangle\ do = \int_{\partial K} \langle f, \mathfrak{t} \rangle\ ds.$$

Der Leser überlege sich, daß die Orientierungen so festgelegt sind, daß der durch $\mathfrak{t}$ gegebene „Umlaufungssinn" von K zusammen mit $\mathfrak{n}$ eine „Rechtsschraube" bildet.

14.3. Die Greenschen Formeln

Sie ergeben sich aus dem Integralsatz von Gauß (14.1.) für spezielle Differentialformen $\alpha \in C^1A^{n-1}(X)$. Sei zunächst

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\ (f \cdot D_i g)\ dx_1 \ldots \hat{dx_i} \ldots dx_n$$

für geeignete Funktionen $f,g \in C^1A^0(X)$; dann erhalten wir die 1. Greensche Formel:

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\int_{(K;M,O)} D_i f \cdot D_i g\ dx_1 \ldots dx_n + \int_{(K;M,O)} f \cdot D_i^2 g\ dx_1 \ldots dx_n \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_{(\partial K;\partial K,\partial O)} (f \cdot D_i g)\ dx_1 \ldots \hat{dx_i} \ldots dx_n\ .$$

Unter Verwendung der klassischen Symbole:

$$\operatorname{grad} f \underset{Df}{=} (D_1 f, \ldots, D_n f)$$

grad g analog

$$\Delta g \underset{Df}{=} \sum_{i=1}^{n} D_i^2 g$$

(Δ ist als Laplace-Operator bekannt), können wir diese Formel auch schreiben:

$$\int_K (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)\, dv + \int_K f \cdot \Delta g\, dv = \int_{\partial K} (f \cdot \operatorname{grad} g, n)\, do.$$

Schließlich setzen wir noch

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (f \cdot D_i g - D_i f \cdot g)\, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n$$

und erhalten die zweite Greensche Formel, gleich klassisch geschrieben:

$$\int_K (f \cdot \Delta g - \Delta f \cdot g)\, dv = \int_{\partial K} ((f \cdot \operatorname{grad} g - g \cdot \operatorname{grad} f), \mathfrak{n})\, do.$$

I n d e x