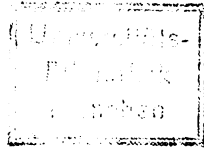


RUDOLF FRITSCH

ZUM FEUERBACHSCHEN KREIS

1975

Im Verlag der
Druckerei und Verlagsanstalt Konstanz
UNIVERSITÄTSVERLAG GMBH



ISBN 3 87940 087 3

T 127 ^e

© Druckerei und Verlagsanstalt Konstanz
Universitätsverlag GmbH Konstanz, 1975

Gesamtherstellung: Druckerei und Verlagsanstalt Konstanz
Universitäts-Druckerei GmbH Konstanz Am Fischmarkt

Vor einigen Jahren blätterte ich einmal in einem ererbten Konversationslexikon und las mich beim Namen Feuerbach fest. Da die Familie Feuerbach mit der Stadt Ansbach, in der ich zur Schule ging, eng verbunden war, wies ich – mehr aus lokalpatriotischen als aus sachlichen Gründen – in einer Fußnote meiner Dissertation [11] * auf sie hin. Mit dadurch angeregt und – wie sich mancher von Ihnen vielleicht erinnert – um mir eine Freude zu machen, behandelte Herr Bos den Feuerbachschen Kreis in seiner Arbeit »Über die Kategorien der affinen und euklidischen Räume« [6]. Seine Darstellung wiederum führte zu meiner Wahl des Themas für diese Antrittsvorlesung.

Da ich persönlich und mathematisch Herrn Bos sehr viel verdanke und sein Todestag** sich übermorgen jährt, widme ich diese Vorlesung seinem Andenken.

* Die Zahlen in [] beziehen sich auf die Literaturangaben am Ende dieses Bandes.

** 24. April 1973.

In einem ersten Abschnitt möchte ich nun reden über »Feuerbach und seinen Kreis«. Da muß ich zunächst diejenigen enttäuschen, die in der Erwartung hierhergekommen sind, beim Feuerbachschen Kreis handle es sich um eine junge, noch unbekannte mehr oder weniger linke Gruppe des politischen oder hochschulpolitischen Lebens oder um einen Kreis von Schülern des Philosophen Ludwig Feuerbach, zu denen vielleicht auch Karl Marx zu rechnen sei. Auch die Schöingeister unter Ihnen werden enttäuscht sein, ich werde nicht über einen Kreis von Künstlern um den idealistischen Maler Anselm Feuerbach sprechen, sondern über einen geometrischen Kreis, der nach seinem Erforscher, dem Mathematiker Karl Wilhelm Feuerbach, benannt ist.

Die genannten Feuerbache stammen jedoch alle aus einer Familie; ihr Zusammenhang ist aus Tabelle 1 ersichtlich.

Tabelle 1 Zur Familie Feuerbach

Vater:

Paul Johann Anselm Ritter von Feuerbach, 1775–1833, Jurist

Söhne:

1) Anselm Feuerbach, 1798–1851, Archäologe

2) Karl Wilhelm Feuerbach, 1800–1834, Mathematiker

3) Eduard August Feuerbach, 1803–1843, Jurist

4) Ludwig Andreas Feuerbach, 1804–1872, Philosoph

5) Friedrich Heinrich Feuerbach, 1806–1880, Orientalist und Philosoph

Sohn von 1):

Anselm von Feuerbach, 1829–1880, Maler

Der Vater des Mathematikers Feuerbach ist der Jurist Anselm Feuerbach, der nicht nur wegen seiner Verwicklung in die Kaspar-Hauser-Affäre [19], sondern vor allem als Schöpfer einer Strafrechtstheorie, der sogenannten psychologischen Zwangs- oder Abschreckungstheorie, berühmt ist.



Das Urteil des Paris



Das Gastmahl des Plato

Der Philosoph Ludwig Feuerbach, der geistesgeschichtlich zwischen Hegel und Marx eingeordnet wird, ist ein Bruder des Mathematikers. Seine bekanntesten Schriften befassen sich mit der Religion; seine Stellung dazu gipfelt – wie Ihnen bekannt sein dürfte – in dem Satz »Der Mensch schuf Gott nach seinem Bilde«.

Der Maler Anselm Feuerbach schließlich ist ein Neffe von Karl Wilhelm Feuerbach, der Sohn seines ältesten Bruders. Sein Hauptwerk bilden Darstellungen von Szenen aus dem mythologischen und klassischen Altertum wie das »Urteil des Paris« (Abbildung). In vielen humanistischen Gymnasien findet man seine Bilder, zum Beispiel das »Gastmahl des Plato« (Abbildung).

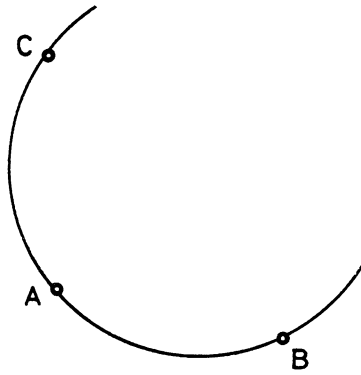
Karl Wilhelm Feuerbach war Professor der Mathematik am Erlanger Gymnasium. Er gehört damit zu der im vorigen Jahrhundert nicht geringen Zahl von Gymnasiallehrern, die bedeutende wissenschaftliche Leistungen erbrachten.* Für die Entwicklung der Mathematik sind zwei seiner Schriften von großer Bedeutung. Die eine, mit dem Titel: »Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks« [8], enthält unter anderem Sätze über den nach ihm benannten Kreis; auf die andere: »Grundriß zu analytischen Untersuchungen der dreiseitigen Pyramide« [9], werde ich nachher im Zusammenhang mit dem Bosschen Kalkül noch kurz zu sprechen kommen.

Was hat es nun mit dem Feuerbachschen Kreis auf sich? Dazu möchte ich zunächst an eine einfache Tatsache aus der elementaren ebenen Geometrie erinnern:

Sind drei Punkte A, B, C , gegeben, die nicht auf einer Geraden liegen, so gibt es immer eine und nur eine Kreislinie, die durch die

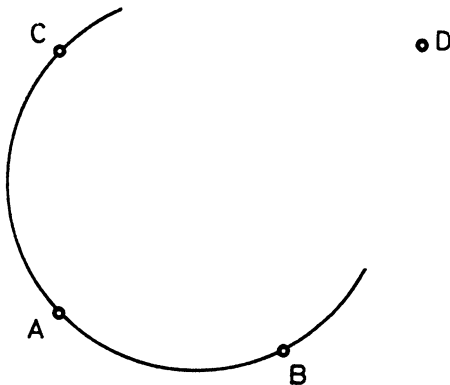
* Daß das heutzutage selten geworden ist, ist eine sehr bedauerliche Entwicklung, die ihre Ursache sicherlich in der allgemeinen Überlastung der Lehrer an den Gymnasien hat, aber jetzt auch aus politischen Gründen vorangetrieben wird. Das zeigt sich deutlich an der bescheidenen Rolle, die dem Fachstudium der Lehramtsbewerber in den Entwürfen für neue Ausbildungs- und Prüfungsordnungen zugewiesen wird.

drei Punkte hindurchgeht, den Umkreis des von den Punkten A, B, C gebildeten Dreiecks (Figur 1).



Figur 1

Geht man dagegen von vier Punkten A, B, C, D aus und fragt, ob es eine Kreislinie gibt, auf der sie alle liegen, so wird das nicht immer der Fall sein: Es gibt ja, wie gesagt, höchstens eine Kreislinie, auf der die drei Punkte A, B, C liegen, nämlich den Umkreis des Dreiecks ABC, und damit kann es nur dann eine Kreislinie durch alle vier Punkte geben, wenn D zufällig auf diesem Umkreis liegt (Figur 2).

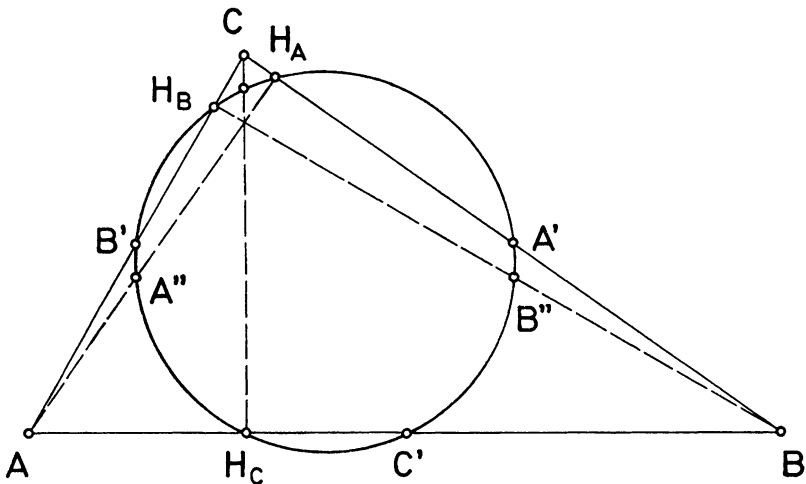


Figur 2

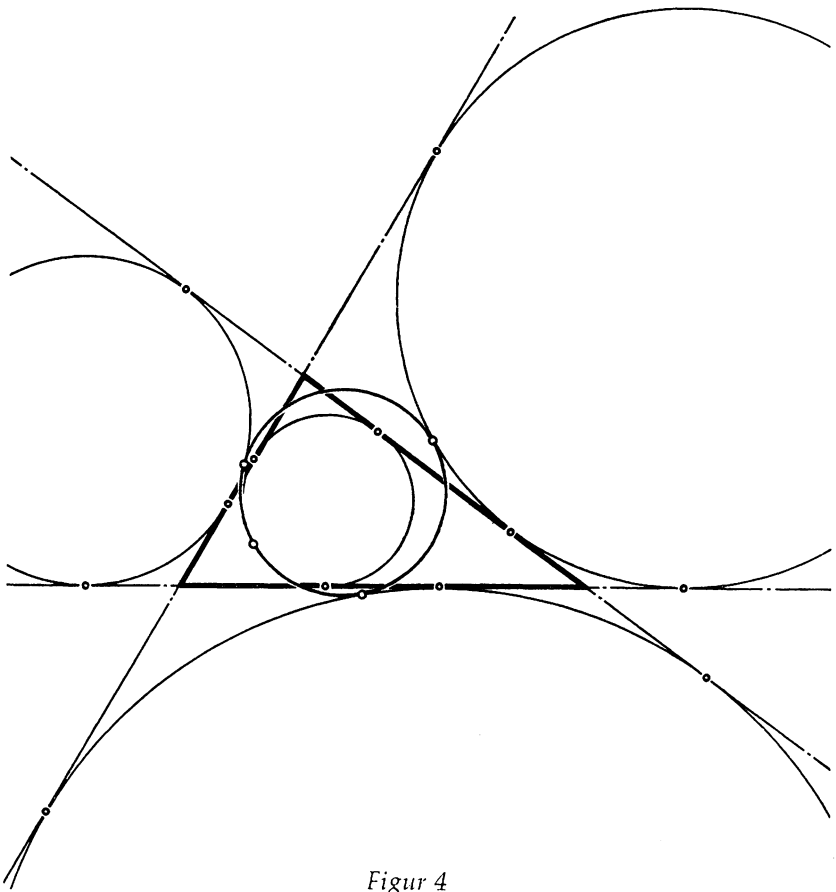
Daß es zu 5 vorgegebenen Punkten einen Umkreis gibt, das heißt eine Kreislinie, die durch diese 5 Punkte geht, ist natürlich noch viel seltener der Fall, und die Wahrscheinlichkeit der Existenz eines Umkreises nimmt mit steigender Zahl der vorgegebenen Punkte rapide ab.

Um so überraschender ist deshalb die Tatsache, daß der Feuerbachsche Kreis Umkreis von im allgemeinen neun in bestimmter Weise vorgegebenen Punkten ist.

Die 9 Punkte können wir folgendermaßen erhalten (Figur 3): Wir gehen von einem beliebigen Dreieck ABC aus. Die ersten 3 Punkte sind die Mittelpunkte A' , B' , C' der Dreieckseiten, dann nehmen wir noch die drei Fußpunkte H_A , H_B , H_C der Höhen hinzu. Schließlich denken wir daran, daß sich die Höhen eines Dreiecks in einem Punkt H schneiden, und wir kommen auf die gewünschte Zahl von 9 Punkten mit Hilfe der Mittelpunkte A'' , B'' , C'' der Verbindungsstrecken vom Höhenschnittpunkt zu den Ecken A , B , C .



Figur 3



Figur 4

Diese neun Punkte liegen nun tatsächlich auf einem Kreis. Den Beweis finden Sie zum Beispiel in der Bosschen Arbeit [6]. Feuerbach selbst bezeichnete ihn als Kreis durch die Fußpunkte der Perpendikel, aber in der sonstigen Literatur ist vom Feuerbachschen Kreis die Rede. Herr Bos empfand die Tatsache, daß diese 9 Punkte auf einem Kreis liegen, als einen der schönsten Sätze der ebenen Geometrie. Feuerbach selbst hat allerdings nur formuliert, daß die Seitenmitten und die Höhenfußpunkte auf einem Kreis liegen,

obwohl sein Beweis bis auf die Schlußfolgerung alle neun Punkte liefert ([8], Satz 9, 6. Abschnitt). Die neun Punkte auf dem Kreis haben schon 1821 – also ein Jahr vor Feuerbach – und unabhängig von ihm die französischen Mathematiker Brianchon und Poncelet gefunden ([7], Theorem IX). Daß der Kreis trotzdem nach Feuerbach benannt wird, beruht auf einer anderen merkwürdigen Eigenschaft, die wirklich von Feuerbach zuerst entdeckt worden ist ([8], § 57). Genauso selten wie vier Punkte auf einem Kreis liegen, gibt es zu vier Kreisen einen weiteren Kreis, der diese vier Kreise berührt. Der Feuerbachsche Kreis berührt den Inkreis und die drei Ankreise eines Dreiecks (Figur 4).

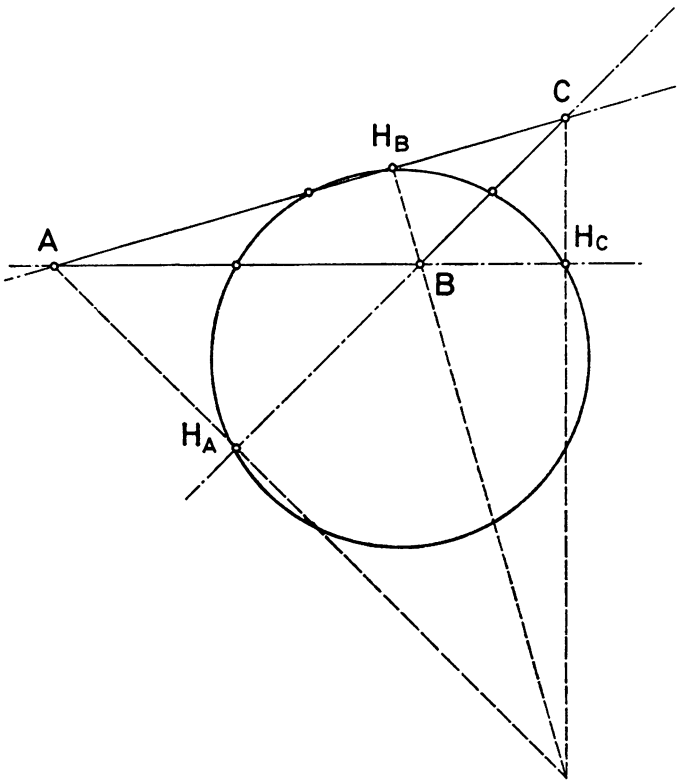
Diese Tatsache ist dafür verantwortlich, daß der Mathematiker Feuerbach gegenüber seinen berühmten Verwandten nicht in Vergessenheit gerät. Im folgenden werde ich mich jedoch nur mit der Neunpunkteigenschaft beschäftigen, die ich zum besseren Verständnis noch etwas analysieren und umformulieren will.

Wie jeder Kreis ist natürlich auch der Feuerbachsche Kreis bereits durch drei auf ihm liegende Punkte, zum Beispiel die Mittelpunkte der Dreiecksseiten, bestimmt, wir können also sagen:

1. Der Feuerbachkreis eines Dreiecks ist der Umkreis der Mittelpunkte seiner Seiten.

Daß der Feuerbachkreis durch die Höhenfußpunkte geht, wollen wir als eine Aussage über seinen Durchschnitt mit den Dreiecksseiten auffassen. Anhand von Figur 3 könnte man versucht sein zu formulieren: Der Feuerbachkreis schneidet aus den Dreiecksseiten die Verbindungsstrecken von Höhenfußpunkt und Mittelpunkt aus. Das ist aber nicht ganz richtig, wenn wir unter »Dreiecksseite« die Verbindungsstrecke zweier Ecken verstehen. Es kann ja vorkommen, daß Höhenfußpunkte außerhalb des Dreiecks liegen (Figur 5). Die folgende Aussage trifft das Richtige:

2. Der Feuerbachkreis schneidet aus der Verbindungsgeraden zweier Ecken die Verbindungsstrecke des auf ihr liegenden Höhenfußpunktes mit dem Mittelpunkt der zugehörigen Seite aus.



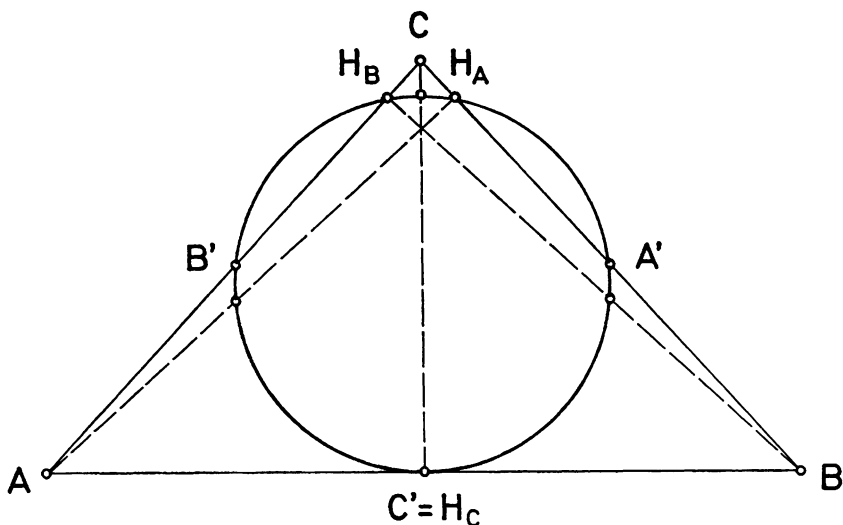
Figur 5

Darüber hinaus können wir feststellen:

Der Feuerbachkreis trifft die Verbindungsgerade zweier Ecken genau dann nur in einem Punkt, wenn der in ihr liegende Höhenfußpunkt mit dem Mittelpunkt der zugehörigen Seite übereinstimmt (Figur 6).

In diesem Fall ist die Gerade eine »Tangente« an den Feuerbachkreis.

Einen besonders wichtigen Aspekt dieser Tatsache möchte ich noch hervorheben. Angenommen, wir halten die Punkte A und B fest und verschieben den Punkt C längs der zugehörigen Höhe h_C . Dann



Figur 6

bleiben der Höhenfußpunkt H_C und damit auch der Durchschnitt des sich verändernden Feuerbachkreises mit der Geraden durch A und B fest, ganz gleich wie hoch hinaus wir den Punkt C schieben, bis an die Decke des Hörsaals oder bis zum Ende der Erdatmosphäre und noch weiter. Auch die Ecken A und B können wir längs ihrer Verbindungsgeraden verschieben, ohne den Durchschnitt des Feuerbachkreises mit dieser Geraden zu verändern, wenn wir das für beide Ecken gleichmäßig tun, das heißt darauf achten, daß der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von A und B festbleibt. Das können wir nun in folgendem Satz zusammenfassen:

- 2'. Der Durchschnitt des Feuerbachkreises mit der Verbindungsgeraden zweier Ecken hängt nur von dem in ihr liegenden Höhenfußpunkt und dem Mittelpunkt der zugehörigen Dreiecksseite ab.

Dies ist natürlich in 2. bereits enthalten, aber es ist eben der wesentlichste Teil davon. Der Satz über die neun Punkte auf dem

Feuerbachschen Kreis beinhaltet nun noch eine weitere Aussage, nämlich

3. Die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken vom Höhenschnittpunkt zu den Ecken liegen auf dem Feuerbachkreis.

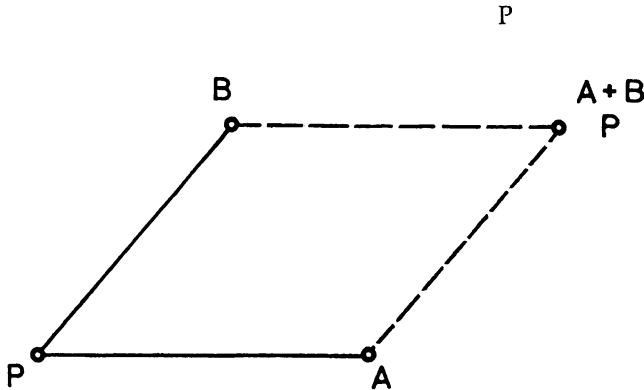
Dazu will ich im Augenblick nichts weiter sagen; Sie werden später sehen, daß sich daraus die vielleicht interessanteste Anregung für weitere Überlegungen ergibt.

Statt dessen sollte ich Ihnen nun wohl das Ziel erläutern, das ich mit den folgenden Ausführungen zu erreichen hoffe. Der Satz vom Feuerbachschen Kreis ist ein Satz der ebenen Geometrie. Die ebene oder zweidimensionale Geometrie ist, weil ihre Probleme leichter anschaulich dargestellt werden können, weitaus besser erforscht als die dreidimensionale. Der Raum, der uns umgibt, und jeder Gegenstand, den wir in die Hand nehmen können, sind aber dreidimensional. Für unser tägliches Leben ist die räumliche Geometrie bedeutend wichtiger als die ebene, und deswegen kann man sich bemühen, aus Sätzen der ebenen Geometrie Erkenntnisse über geometrische Sachverhalte im Raum zu gewinnen. Ein solches Vorgehen will ich Ihnen jetzt vorführen. Ich werde gleich einige Sätze aus der räumlichen Geometrie darlegen, die dem Satz über die neun Punkte auf dem Feuerbachschen Kreis sehr ähnlich sind und auf die man mit Hilfe von solchen Analogieüberlegungen kommt.

Um das aber bequem tun zu können, möchte ich zunächst ein technisches Hilfsmittel bereitstellen, das in Konstanz für solche Zwecke entwickelt worden ist: Das ist »Der Bossche Kalkül«.

Bei diesem Kalkül (s. [6]) setzt man die algebraischen Operationen Addition und Multiplikation in einer unmittelbar der physikalischen Anschauung entnommenen Weise zur Behandlung geometrischer Aufgaben ein.

Zwei Punkte A und B, die irgendwie in der Ebene oder im Raum gegeben sind, kann man nicht so ohne weiteres addieren, jedenfalls ist nicht zu sehen, wie man das in vernünftiger Weise tun könnte. Anders wird die Situation, wenn man einen dritten Punkt P als Bezugspunkt oder Aufpunkt zur Verfügung hat. Dann ergänzt man das Dreieck APB in der in Figur 7 dargestellten Weise zu einem Parallelogramm. Den so erhaltenen vierten Punkt nennt man die Summe von A und B über P, und schreibt $A + B$.



Figur 7

Diese Bildung von $A + B$ ist offensichtlich angelehnt an den physikalischen Begriff des Kräfteparallelogramms.

Die Verwendung des $+$ -Zeichens ist dadurch gerechtfertigt, daß verschiedene Regeln, die man von der Addition von Zahlen her kennt, auch für diese Addition von Punkten über Aufpunkten gelten, zum Beispiel

$$(1) \quad \underset{P}{A} + \underset{P}{B} = \underset{P}{B} + \underset{P}{A}$$

oder

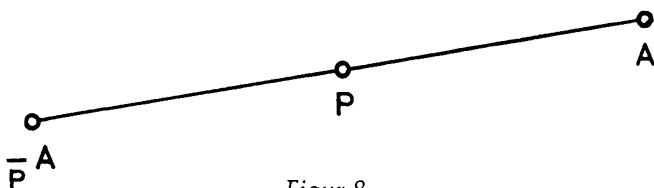
$$(2) \quad \underset{P}{(A + B)} + \underset{Q}{C} = \underset{P}{A} + \underset{Q}{(B + C)}.$$

Wir wollen noch vermerken, daß der Aufpunkt die Rolle der Null übernimmt, das heißt

$$(3) \quad \underset{P}{A} + \underset{P}{P} = \underset{P}{P} + \underset{P}{A} = \underset{P}{A}.$$

Es ist nun wohl auch klar, welchen Punkt wir mit $\underset{P}{-A}$ bezeichnen

werden (Figur 8): Er ist durch die Forderung bestimmt, daß der Aufpunkt P der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von A und $\underset{P}{-A}$ ist.



Figur 8

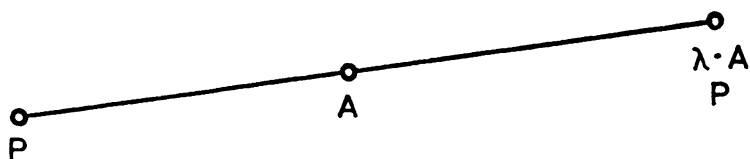
Wie üblich vereinbaren wir jetzt die folgende abkürzende Schreibweise

$$(4) \quad \underset{P}{A - B} = \underset{P}{A} + \underset{P}{(-B)}.$$

Zusätzlich zu dieser Addition benötigen wir noch eine Multiplikation und die Multiplikation von Punkten mit Zahlen. Auch diese läßt sich nur sinnvoll erklären, wenn ein Aufpunkt gegeben ist.

Dazu wollen wir erst den folgenden Fall betrachten: Es sei λ eine nicht-negative Zahl, A ein beliebiger Punkt und P ein von A verschiedener Aufpunkt. Dann bedeute $\lambda \cdot \underset{P}{A}$ den Punkt auf der Halbgeraden von P durch A , dessen Abstand von P

gleich dem λ -fachen des Abstandes von A und P ist (Figur 9).



Figur 9

Unter Verwendung der Bezeichnung $d(A, P)$ für den Abstand der Punkte A und P – der Buchstabe »d« ist von dem Wort »Distanz« entlehnt – kann man also schreiben:

$$(5) \quad d(\lambda \cdot A, P) = \lambda \cdot d(A, P).$$

Insbesondere haben wir also

$$(6) \quad 0 \cdot A = P.$$

Ist λ nun negativ, das heißt

$$(7) \quad \lambda = -|\lambda|,$$

so setzen wir fest

$$(8) \quad \lambda \cdot A = -(|\lambda| \cdot A).$$

Mit der Vorschrift

$$(9) \quad \lambda \cdot P = P$$

ist dann schließlich das Symbol $\lambda \cdot A$ für alle möglichen Zahlen λ ,

Punkte A und Aufpunkte P erklärt. Auch hier ist die Verwendung des Malzeichens dadurch gerechtfertigt, daß viele der für die Multiplikation von Zahlen geltenden Regeln auch für diese Multiplikation gelten, zum Beispiel:

$$(10) \quad (\lambda + \mu) \cdot A = (\lambda \cdot A) + (\mu \cdot A),$$

$$(11) \quad \lambda \cdot (A + B) = (\lambda \cdot A) + (\lambda \cdot B)$$

oder

$$(12) \quad \lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A.$$

Der ganze Kalkül ist in der eingangs erwähnten Arbeit: »Über die Kategorien der affinen und euklidischen Räume« [6] ausführlich beschrieben. Dort lernte ich ihn kennen; wie das in der Mathematik aber häufig vorkommt, sind auch andere Autoren, zum Teil aus anderen Beweggründen, zu einem ähnlichen Ansatz gekommen. Zu nennen wären hier Arbeiten von Schmidt und Ostermann [17], [18] sowie noch unveröffentlichte Ergebnisse von universellen Algebraikern. Bos ist meines Wissens jedoch der einzige, der nicht nur den Kalkül eingeführt, sondern anhand von ganz konkreten Berechnungen zu wirklich geometrischen Aufgaben seine Anwendbarkeit und Nützlichkeit aufgezeigt hat.

Eine wichtige Regel für diese Rechnungen muß ich noch erwähnen. Es ist klar, daß im allgemeinen ein Punkt, der von einem Ausdruck der Form

$$(13) \quad \lambda_1 \cdot \underset{P}{A_1} + \lambda_2 \cdot \underset{P}{A_2} + \dots + \lambda_n \cdot \underset{P}{A_n}$$

beschrieben wird, vom Aufpunkt P abhängig ist. Gilt jedoch zufällig

$$(14) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1,$$

so liefert (13) für jeden Aufpunkt denselben Punkt. Welcher Punkt das ist, läßt sich (zumindest für positive λ_i) physikalisch beschreiben: Bringt man in den Punkten A_1, A_2, \dots, A_n die Massen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ an, so ist (13) der Schwerpunkt des Systems.

Unter der Voraussetzung (14) schreibt man statt (13) auch abkürzend

$$(15) \quad \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n$$

und man nennt die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ wegen der eben angegebenen physikalischen Bedeutung auch die baryzentrischen Koordinaten des Punktes (15).^{1*}

Gestatten Sie mir hier eine historische Zwischenbemerkung. Daß dem ursprünglich physikalisch eingeführten Begriff des Schwer-

* Hochgestellte kleine Ziffern verweisen auf die Anmerkungen im Anhang.

punkts unabhängig von der Physik eine rein mathematische Bedeutung zukommt, ist schon lange bekannt. Zwei Mathematiker machten – unabhängig voneinander – etwa zur gleichen Zeit darauf aufmerksam:

Der eine ist Karl Wilhelm Feuerbach, der seine »Methode der koordinierten Koeffizienten« in der schon genannten Schrift »Grundriß zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide« [9] darstellt. Aus dem Vorwort geht hervor, daß er – anscheinend um seine Priorität zu wahren – hier nur einen kleinen Teil seiner Ergebnisse zusammenstellt, wohl im Hinblick auf das im gleichen Jahre erschienene umfassende Werk von August Ferdinand Möbius: »Der barycentrische Kalkül« [14].*

Tabelle 2 Zur Familie Möbius

Vater:

August Ferdinand Möbius, Mathematiker, 1790–1868

Söhne:

1) Theodor Möbius, Germanist, 1821–1890

2) Paul Heinrich August Möbius, Schulmann, 1825–1889

Söhne von 2):

1) Paul Julius Möbius, Neurologe, 1853–1907

2) Martin Möbius, Botaniker, 1859–1946

* Kein Mathematiker, der auf August Ferdinand Möbius zu sprechen kommt, kann es unterlassen, auf dessen Enkel, den Neurologen Paul Julius Möbius, hinzuweisen (*Tabelle 2*), dem neben einer unserem Selbstgefühl sehr wohltuenden Abhandlung »Über die Anlage zur Mathematik« [15] eine überaus bedeutende wissenschaftliche Leistung gelang: Er erbrachte den »Nachweis«, daß das normale Weib im Vergleich zum Mann schwachsinnig ist [16].

III Die Feuerbachkugel

Nun will ich in einem dritten Abschnitt den Satz vom Feuerbachschen Kreis auf den Raum² übertragen.

Die Kugel ist offensichtlich das dreidimensionale Analogon zum zweidimensionalen Kreis. Ihre Oberfläche besteht aus allen Punkten, die von einem festen Punkt einen festen Abstand haben. Was ist nun das dreidimensionale Analogon zum zweidimensionalen Dreieck? Ein Dreieck wird erzeugt von 3 Punkten, die nicht in einer Geraden liegen. Das entsprechende dreidimensionale Gebilde wird von 4 Punkten erzeugt, die nicht in einer Ebene liegen. Es handelt sich dabei um einen Körper, der unter dem Namen dreiseitige oder dreieckige Pyramide oder *Tetraeder* bekannt ist.

Eine erste Übertragung eines ebenen Sachverhaltes auf die räumliche Geometrie bildet der folgende Satz:

Ein Tetraeder hat eine eindeutig bestimmte Umkugel, das heißt, zu einem Tetraeder gibt es genau eine Kugel, deren Oberfläche die Ecken des Tetraeders enthält.

Das entspricht der Tatsache, daß ein Dreieck einen eindeutig bestimmten Umkreis besitzt.

Um nun zu einem gegebenen Tetraeder eine Feuerbachkugel zu finden, erinnern wir uns daran, daß der Feuerbachkreis bestimmt war als Umkreis der Mittelpunkte der Dreiecksseiten. Ein Tetraeder hat vier zweidimensionale Seiten, es sind Dreiecke. Um eine Kugel festzulegen, brauchen wir vier Punkte, also liegt es nahe, in jedem der Seitendreiecke einen bestimmten Punkt auszuwählen, einen Punkt im zweidimensionalen Dreieck, der dem Mittelpunkt der eindimensionalen Strecke entspricht. Dafür bieten sich an

- α) der Schwerpunkt, da der Mittelpunkt einer Strecke ja im physikalischen Sinn der Schwerpunkt der Strecke ist,
- β) der Umkreismittelpunkt; es ist der Punkt, von dem die Ecken eines Dreiecks gleichen Abstand haben; vom Mittelpunkt einer Strecke haben ihre Endpunkte auch den gleichen Abstand.

Nun wollen wir diese vier Punkte so auswählen, daß sie eine Umkugel haben; das bedeutet: sie dürfen nicht in einer Ebene liegen. Es gibt aber Tetraeder, bei denen die Umkreismittelpunkte der Seitendreiecke in einer Ebene liegen.³ Da wir jedoch ein Verfahren suchen, mit dem wir jedem Tetraeder eine Feuerbachkugel zuordnen können, scheiden diese Punkte aus.

Da andererseits die Schwerpunkte der Seitendreiecke eines Tetraeders nie in einer Ebene liegen,⁴ setzen wir nun fest:

1. Die Feuerbachkugel eines Tetraeders ist die Umkugel der Schwerpunkte seiner Seitendreiecke.⁵

Das ist also das Analogon zum 1. Teil unserer Analyse des Satzes vom Feuerbachschen Kreis. Wie steht es nun mit den beiden anderen Aussagen? Zunächst wollen wir die Tatsache ins Auge fassen, daß der Feuerbachkreis eines Dreiecks durch die Höhenfußpunkte geht. Man kann das – wie schon oben ausgeführt wurde – als Aussage über den Durchschnitt des Feuerbachkreises mit den Verbindungsgeraden von je zwei Ecken, das heißt den Geraden, in denen die Dreiecksseiten liegen, auffassen.

Nun bestimmen je drei Punkte im Raum, die nicht in einer Geraden liegen, eindeutig eine Ebene, ihre *Verbindungsebene*. Die Verbindungsebene von drei Ecken unseres Tetraeders enthält natürlich das durch diese drei Ecken bestimmte Seitendreieck, das heißt die Seite, die der vierten Ecke gegenüberliegt. Es geht nun um den Durchschnitt der Feuerbachkugel mit diesen Ebenen.

Prinzipiell bestehen für den Durchschnitt einer Kugel und einer Ebene im Raum drei Möglichkeiten:

α) Der Durchschnitt ist leer, das heißt Kugel und Ebene haben keinen Punkt gemeinsam.

β) Der Durchschnitt besteht aus genau einem Punkt, das heißt die Kugel berührt die Ebene oder die Ebene ist Tangentialebene der Kugel. In diesem Fall steht die Verbindungsgerade von Kugelmittelpunkt und Berührungspunkt senkrecht auf der Ebene.

γ) Der Durchschnitt ist ein Kreis. Ist das der Fall, so ist der Mit-

telpunkt dieses Kreises der Schnittpunkt der Ebene mit der zu ihr senkrechten Geraden durch den Kugelmittelpunkt, das heißt der Fußpunkt des Lotes vom Kugelmittelpunkt auf die Ebene.

Wenden wir uns nun unserer Situation zu. Sei a die Verbindungsebene von drei Ecken des Tetraeders Δ und A die gegenüberliegende Ecke. Der Schwerpunkt A' des in a liegenden Seitendreiecks gehört nach Definition der Feuerbachkugel zu ihr, also liegt er im Durchschnitt von a mit der Feuerbachkugel. Damit trifft für unsere Fragestellung immer β oder γ zu. Für eine genauere Aussage werden noch die beiden folgenden Punkte eine Rolle spielen:

der Höhenfußpunkt H_A an a , das heißt der Schnittpunkt der zur Ebene a senkrechten Geraden durch A ; daß es auf diesen Punkt ankommen wird, ist wegen der Analogie zum zweidimensionalen Fall zu erwarten, und dazu noch

der Umkreismittelpunkt M_A des Seitendreiecks von Δ in a . Damit läßt sich nun der folgende Satz formulieren

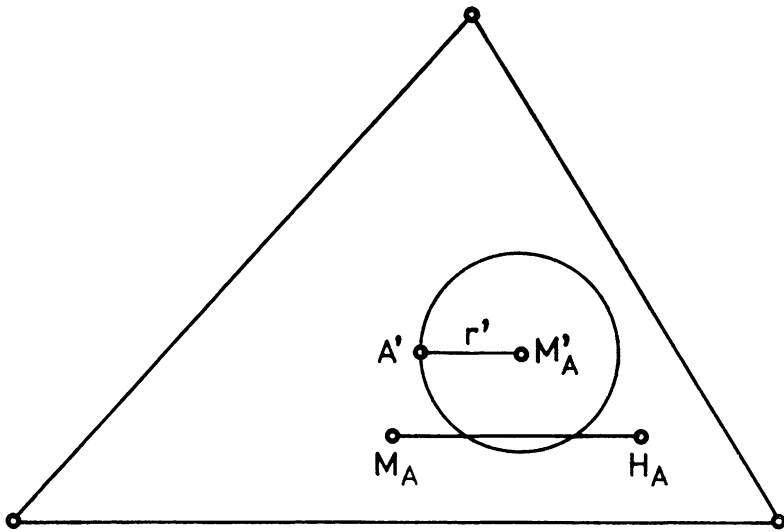
2. Ist $H_A \neq M_A$, so schneidet die Feuerbachkugel aus der Ebene a einen Kreis mit dem Mittelpunkt $A' + \frac{1}{3}(H_A - M_A)$ aus, dessen Radius gleich einem Drittel des Abstandes von H_A und M_A ist (Figur 10).

Ist $H_A = M_A$, so berührt die Feuerbachkugel die Ebene a im Punkt A' .⁶

Was bedeutet dieser Satz? Wir können zunächst feststellen:

2'. Der Durchschnitt der Feuerbachkugel mit der Ebene a hängt nur vom Höhenfußpunkt H_A sowie von Schwerpunkt A' und Umkreismittelpunkt M_A des in a liegenden Seitendreiecks ab.

Wenn wir also ähnlich wie vorhin die Ecke A abändern, so daß der Höhenfußpunkt H_A festbleibt, das heißt, wenn wir A längs einer Senkrechten zu a verschieben, dann bleibt der Durchschnitt der Feuerbachkugel mit der Ebene a erhalten, auch wenn wir A bis in die Umlaufbahn des Mondes oder noch weiter ins All hinaus bewegen.



Figur 10

$$(16) \quad M'_A = A' + \frac{1}{3} (H_A - M_A)$$

$$(17) \quad r' = \frac{1}{3} d(H_A, M_A)$$

Die Analogie zum zweidimensionalen Fall geht aber noch weiter. A' und M_A sind Punkte, die nur von dem der Ecke A gegenüberliegenden Seitendreieck abhängen.

Wir haben vorhin festgestellt, daß wir sowohl den Schwerpunkt als auch den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks als zweidimensionale Analoga zum Mittelpunkt der eindimensionalen Strecke auffassen können. Das läßt sich aber auch umgekehrt ausdrücken: Im Eindimensionalen fallen die im Höherdimensionalen sorgfältig zu trennenden Begriffe Schwerpunkt und Umkreismittelpunkt immer zusammen. Der Mittelpunkt einer Strecke hat also in diesem Sinn immer eine doppelte Bedeutung. Das ist der tiefere Grund dafür, daß der Durchschnitt des Feuerbachkreises mit der Verbindungs-

dungsgeraden zweier Ecken des Dreiecks nur von zwei Punkten abhängt, während im Fall der Feuerbachkugel drei Punkte ins Spiel kommen.

Wenn Sie jetzt noch einmal den zweiten Teil von 2. ansehen: Die Feuerbachkugel trifft die Ebene a genau dann nur in einem Punkt, wenn H_A gleich M_A ist, so haben Sie die völlige Analogie zum zweidimensionalen Fall: Der Feuerbachkreis trifft genau dann die Verbindungsgerade zweier Ecken nur in einem Punkt, wenn Höhenfußpunkt und Mittelpunkt der Dreiecksseite zusammenfallen.

In ähnlicher Weise kann man nun auch noch den ersten Teil von 2. mit der entsprechenden Aussage über den Feuerbachkreis vergleichen und eine nahe Verwandtschaft zwischen beiden feststellen.⁷ Das möchte ich jedoch jetzt nicht ausführen, denn ein interessantes Problem haben wir noch vor uns:

Auf dem Feuerbachkreis liegen ja noch die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken des Höhenschnittpunkts mit den Ecken des Dreiecks, und man kann fragen, ob sich auch dazu eine entsprechende Aussage für die Feuerbachkugel finden läßt. Nun ja, wenn das nicht ginge, hätte ich diese Fragestellung gar nicht erwähnt. Aber die Schwierigkeit liegt darin, daß sich die Höhen eines Tetraeders nicht in einem Punkt zu treffen brauchen; zwei Höhen eines Tetraeders brauchen sich überhaupt nicht zu schneiden!

Wenn wir trotzdem ein Ergebnis in der gewünschten Richtung erzielen wollen, müssen wir uns nach einem andern merkwürdigen Punkt H des Tetraeders umsehen, den wir an die Stelle des nicht vorhandenen Höhenschnittpunktes setzen können. Welche Eigenschaften müßte nun ein solcher Feuerbachpunkt – wie ich ihn nennen will* – haben?

i) H soll ein »merkwürdiger« Punkt des Tetraeders sein. Im Rah-

* Mir ist nicht bekannt, ob der Punkt, auf den diese Überlegungen hinauslaufen, schon von irgend jemanden beschrieben und mit einem Namen belegt worden ist.

men dieser Vorlesung ist es nicht möglich zu präzisieren, was das heißt.⁸ Für die Fachleute unter Ihnen sei gesagt, daß man das einerseits im Zusammenhang mit den symmetrischen Produkten, die einen interessanten Gegenstand der aktuellen mathematischen Forschung, insbesondere der algebraischen Topologie, bilden, sehen und andererseits Beziehungen zu den von Bos eingeführten Mittelwertstrukturen herstellen kann.* Eine gewisse Vorstellung von dem, was das Eigenschaftswort »merkwürdig« hier bedeutet, können Sie vielleicht gewinnen, wenn ich sage, daß es die gemeinsamen Eigenschaften von Schwerpunkt, Umkreis- oder Umkugelmittelpunkt, Inkreis- oder Innenkugelmittelpunkt, Höhenschnittpunkt (falls vorhanden) usw. subsumieren soll.

ii) Falls sich die Höhen des Tetraeders in einem Punkt schneiden, soll H der Höhenschnittpunkt sein. Diese Forderung ist kanonisch, da wir davon ausgegangen sind, daß der Feuerbachpunkt als Ersatz für einen nicht vorhandenen Höhenschnittpunkt dient.

iii) Die Verbindungsstrecken von H mit den Ecken sollen die Oberfläche der Feuerbachkugel in besonderen Punkten treffen. Das ist ja das eigentliche Ziel, auf das wir hinauswollen im Hinblick auf die Übertragung der Eigenschaften vom Feuerbachkreis auf die Feuerbachkugel. Aber diese Forderung muß noch etwas präzisiert werden. Dazu erst noch einen Blick auf den Feuerbachkreis. Die uns im Augenblick interessierende Tatsache, daß die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken vom Höhenschnittpunkt zu den Ecken auf dem Feuerbachkreis liegen, können wir mit Hilfe des Bosschen Kalküls so ausdrücken: Für alle Ecken A liegt der Punkt

$$(18) \quad A'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{H}$$

* Letztere hängen mit dem Thema der Konstanzer Antrittsvorlesung von Herrn Bos zusammen, an die sich vielleicht mancher von Ihnen erinnern kann. Das Literaturverzeichnis enthält die diesbezüglichen Arbeiten, soweit sie mir bekanntgeworden sind ([1]–[5], [12]).

auf dem Feuerbachkreis. Wenn wir das nun für die Feuerbachkugel formulieren, wollen wir bezüglich des Zahlenfaktors $\frac{1}{2}$ etwas vorsichtig sein. Es ist denkbar, daß dieser etwas mit der Dimension 2 zu tun hat und bei dreidimensionalen Betrachtungen durch einen anderen Faktor zu ersetzen ist.

Deswegen stellen wir nun die folgende präzise Bedingung an den Feuerbachpunkt H: Es soll eine positive Zahl λ geben, derart daß für alle Ecken A der Punkt

$$(19) \quad \underset{H}{A''} = \lambda \cdot A$$

auf der Oberfläche der Feuerbachkugel liegt.

Tatsache ist nun, daß durch diese Forderung allein der Punkt H und die »Feuerbachzahl« λ eindeutig bestimmt sind. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes.

3. Es gibt einen Punkt H und eine positive Zahl λ , derart daß der Punkt

$$(20) \quad \underset{H}{A''} = \lambda \cdot A$$

für jede Ecke A des Tetraeders auf der Oberfläche der Feuerbachkugel liegt. H und λ sind eindeutig bestimmt.

Zur Bestimmung von H und λ kann man folgendermaßen vorgehen: Ist A eine Ecke von Δ , so muß gelten

$$(21) \quad d(A'', M') = r',$$

da auf der Oberfläche der Feuerbachkugel die Punkte liegen, die von ihrem Mittelpunkt M' den Abstand r' haben, wobei r' den Radius bezeichnet. Da ein Tetraeder vier Ecken hat, sind das 4 Gleichungen für die Unbekannten λ und H und dieses Gleichungssystem besitzt unter Berücksichtigung der Tatsache, daß λ positiv sein soll, eine eindeutig bestimmte Lösung, nämlich

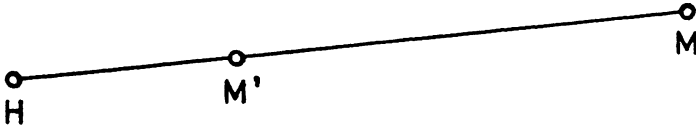
$$(22) \quad \lambda = \frac{1}{3}$$

und

$$(23) \quad H = -\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{M'}$$

wobei M den Mittelpunkt der Umkugel bezeichnet.⁹

Die gegenseitige Lage von M, M' und H zeigt Figur 11.



Figur 11

Dies Ergebnis zeigt zunächst, daß die Vorsicht hinsichtlich des Wertes von λ angebracht war.

Durch die Forderung iii) allein sind also H und λ eindeutig bestimmt. Was ist nun mit unseren Wünschen i) und ii) an den Punkt H?

Die »Merkwürdigkeit« von H ist aus (23) direkt abzulesen,¹⁰ darauf möchte ich aber nicht weiter eingehen.

Auch Forderung ii) ist erfüllt, das besagt der folgende Satz:

4. Besitzt Δ einen Höhenschnittpunkt, so ist dies der Feuerbachpunkt von Δ .

Auch diesen Beweis kann ich Ihnen hier nicht im Detail vorführen, er beruht auf einem Hilfssatz, der auch für sich interessant ist:

Hilfssatz: Besitzt Δ einen Höhenschnittpunkt, so sind die Höhenfußpunkte die Höhenschnittpunkte der Seitendreiecke.¹¹

Damit möchte ich diese Vorlesung beenden. Sie sollte Ihnen am Beispiel des Feuerbachschen Kreises zeigen, wie man aus Sätzen der ebenen Geometrie durch Analogiebetrachtungen Erkenntnisse über die räumliche Geometrie gewinnen kann.

Für Interessenten sei bemerkt, daß ich die hier nicht ausgeführten Beweise, in denen sich erst die ganze Tragfähigkeit des Bosschen Kalküls erweist, der Veröffentlichung in der Reihe der Konstanzer Universitätsreden beifügen werde (siehe hier S. 31 ff.).

Danken möchte ich zum Abschluß Herrn Sund für seine freundliche Einführung und allen, die mir bei der Vorbereitung dieser Vorlesung geholfen haben; das gilt insbesondere für die Universitätsbibliothek, mit der wir Mathematiker zwar manchen Strauß ausfechten, ohne deren soliden Bestand aber die Zusammenstellung der historischen Daten nicht möglich gewesen wäre. Eine der angeführten Jahreszahlen konnte ich allerdings trotz sachkundiger Hilfe hier nicht ermitteln; diese hat dankenswerterweise Herr Bos junior in Frankfurt festgestellt.

Anmerkungen

Im Gegensatz zum vorstehenden Text, der in Anbetracht der Öffentlichkeit dieser Antrittsvorlesung auch für Nichtmathematiker verständlich sein sollte, werden beim Leser dieser Anmerkungen einige wenige mathematische Kenntnisse über die Allgemeinbildung hinaus vorausgesetzt.

¹ In späteren Anmerkungen wird gebraucht, daß auch das übliche Skalarprodukt in den Bosschen Kalkül übertragen werden kann. Wir schreiben $A \cdot B$ für das Skalarprodukt der Punkte A und B über dem Aufpunkt P. Wie üblich ist

$$(A1) \quad A \cdot B = 0$$

im Falle $A \neq P \neq B$ die Bedingung dafür, daß die Verbindungsgerade von A und P senkrecht auf der Verbindungsgeraden von B und P steht. Außerdem gilt, daß ein Skalarprodukt der Form

$$(A2) \quad (A - A') \cdot (B - B')$$

bei festen Punkten A, A', B, B' für jeden Aufpunkt P denselben Wert hat.

² Die folgenden Sätze und die in den Anmerkungen gegebenen Beweise lassen sich ohne besondere Schwierigkeiten auf den \mathbb{R}^n übertragen. Das wird in [10] ausgeführt.

³ Als Beispiel betrachte man das Tetraeder mit den Ecken $A=(0,0,0)$, $B=(1,0,0)$, $C=(0,1,0)$ und $D=(0,0,1)$. Die Umkreismittelpunkte sind $M_A = \frac{1}{3}(B+C+D)$, $M_B = \frac{1}{2}(C+D)$, $M_C = \frac{1}{2}(B+D)$, $M_D = \frac{1}{2}(B+C)$, dabei bezeichnet M_X den Umkreismittelpunkt der der Ecke X gegenüberliegenden Seite. Diese Punkte liegen offensichtlich alle in der von den Ecken B, C und D aufgespannten Ebene.

⁴ ABCD sei ein Tetraeder. A', B', C', D' seien die Schwerpunkte der den Ecken A, B, C, D gegenüberliegenden Seiten. Dann gilt

$$(A3) \quad A' = \frac{1}{3}(B+C+D),$$

und entsprechende Formeln hat man für B', C' und D' . Daraus erhält man durch einfache Umrechnung

$$(A4) \quad A = B' + C' + D' - 2A'$$

und entsprechende Formeln für B, C, D. Würden nun die Punkte A', B', C' und D' alle in einer Ebene liegen, so würde wegen (A4) auch A zu dieser Ebene gehören, ebenso B, C, D. Das ist aber nicht möglich, weil ABCD nach Voraussetzung ein Tetraeder ist.

⁵ Für spätere Beweise wollen wir gleich eine Aussage über Mittelpunkt und Radius der Feuerbachkugel festhalten:

Sei Δ ein Tetraeder, Δ' das von den Schwerpunkten der Seiten von Δ erzeugte Tetraeder und S der Schwerpunkt von Δ . Ist nun A eine Ecke von Δ und A' die gegenüberliegende Ecke von Δ' , so gilt bekanntlich

$$(A5) \quad A' = -\frac{1}{3} \cdot A.$$

Daraus folgt, daß sich Δ' aus Δ durch zentrische Streckung von S aus um den Faktor $-\frac{1}{3}$ ergibt. Also gilt für den Mittelpunkt M' der Feuerbachkugel

$$(A6) \quad M' = -\frac{1}{3} \cdot M,$$

wobei M den Mittelpunkt der Umkugel von Δ bezeichnet. Da sich Längen bei zentrischen Streckungen um den Betrag des Streckungsfaktors verändern, haben wir außerdem

$$(A7) \quad r' = \frac{1}{3} r,$$

wenn r' den Radius der Feuerbachkugel und r den Radius der Umkugel von Δ bezeichnet.

- ⁶ Auf Grund der allgemeinen Ausführungen über den Durchschnitt von Ebene und Kugel im Raum genügt es zum Beweis dieser Aussagen zu zeigen, daß die Senkrechte zu a durch M' die Ebene a in dem Punkt

$$(A8) \quad M'_A = A' + \frac{1}{3}(H_A - M_A)$$

schneidet. Im Bosschen Kalkül bedeutet das (s. Anm. 1)

$$(A9) \quad (M' - M'_A) \cdot (Y - M'_A) = 0$$

für alle Punkte Y in a .

Rechnung mit Aufpunkt S und

$$(A10) \quad Z = Y - M'_A$$

ergibt

$$(A11) \quad M' - M'_A = -\frac{1}{3}M + \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}(H_A - M_A) = \frac{1}{3}((A - H_A) - (M - M_A))$$

und

$$(A12) \quad (M' - M'_A)(Y - M'_A) = \frac{1}{3}((A - H_A) \cdot (Z + H_A - H_A) - (M - M_A) \cdot (Z + M_A - M_A)) = \frac{1}{3}(A \cdot (Z + H_A) - M \cdot (Z + M_A))$$

$Z + H_A$ und $Z + M_A$ sind Punkte in a . Da die Senkrechten zu a durch A und S

M_A die Ebene a in H_A bzw. M_A schneiden, verschwinden die beiden Terme in der Klammer und daraus ergibt sich die Behauptung.

- ⁷ Dazu muß man zunächst feststellen, daß das eindimensionale Analogon zum zweidimensionalen Kreis und zur dreidimensionalen Kugel eine Strecke ist: Ein Kreis in einer Ebene besteht aus allen Punkten der Ebene, die von einem festen Punkt aus einen Abstand kleinergleich einer festen positiven Zahl r haben.

Die gleiche Beschreibung gilt für Kugeln im Raum und für Strecken in einer Geraden.

Überträgt man nun den zweiten Teil von Satz 2 auf die Situation einer Dimension niedriger, so erhält man die folgende Aussage (man beachte $M_A = A'$):

Ist $H_A \neq A'$, so ist dieser Durchschnitt eine Strecke mit dem Mittelpunkt

$$(A13) \quad A' + \frac{1}{2}(H_A - A') = \frac{1}{2}(H_A + A'),$$

deren halbe Länge gleich der Hälfte des Abstandes von H_A und A' ist.

Das ist (für den Fall $H_A \neq A'$) – umständlicher ausgedrückt – genau die Tatsache, die wir unter 2. in der Analyse des Feuerbachschen Satzes festgehalten haben.

»Merkwürdig« könnte z. B. folgendermaßen präzisiert werden:

Man betrachte die Menge

$$(A14) \quad \mathfrak{S}\mathfrak{P} = \left\{ (A_0, A_1, A_2, A_3) \left| \begin{array}{l} A_i \in \mathbb{R}^3 \text{ für } i=0,1,2,3 \\ \langle A_0, A_1, A_2, A_3 \rangle = \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \right\}$$

($\langle A_0, A_1, A_2, A_3 \rangle = \mathbb{R}^3$ besagt, daß die vier Punkte A_0, \dots, A_3 nicht in einer Ebene liegen) und Abbildungen $\mathfrak{S}\mathfrak{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Solche Abbildungen ordnen also jedem Tetraeder einen Punkt zu; z. B. kann man die Abbildung S betrachten, die jedem Tetraeder seinen Schwerpunkt zuordnet. Diese hat die folgenden Eigenschaften:

α) Verträglichkeit mit Permutationen, das heißt für jede Permutation π der Ziffern 0,1,2,3 gilt

$$(A15) \quad S(A_0, A_1, A_2, A_3) = S(A_{\pi 0}, A_{\pi 1}, A_{\pi 2}, A_{\pi 3}).$$

β) Verträglichkeit mit Bewegungen: Ist f eine Bewegung im \mathbb{R}^3 , so gilt

$$(A16) \quad S(fA_0, fA_1, fA_2, fA_3) = fS(A_0, A_1, A_2, A_3).$$

Die gleichen Eigenschaften haben die Abbildungen, die jedem Tetraeder den Mittelpunkt seiner Umkugel oder den seiner Feuerbachkugel zuordnen.

Unter einem »merkwürdigen« Punkt versteht man dann ganz allgemein eine Abbildung $\mathfrak{S}\mathfrak{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$, die die Eigenschaften α) und β) erfüllt.

A_0, A_1, A_2, A_3 seien die Ecken des Tetraeders. Wir rechnen über M' . Dann haben wir die folgenden Gleichungen für $i=0,1,2,3$:

$$(A17) \quad (\lambda A_i + (1-\lambda)H)^2 = r'^2$$

(vgl. Anm. 1); das heißt

$$(A18) \quad \lambda^2 A_i^2 + 2\lambda(1-\lambda)A_i H + (1-\lambda)^2 H^2 = r'^2.$$

Durch Gleichsetzen erhält man daraus

$$(A19) \quad \lambda^2 A_i^2 + 2\lambda(1-\lambda)A_i H = \lambda^2 A_0^2 + 2\lambda(1-\lambda)A_0 H.$$

für $i=0,1,2,3$. Wir suchen $\lambda > 0$, also können wir diese Gleichungen unbesorgt durch λ^2 dividieren und erhalten

$$(A20) \quad A_i^2 + 2 \frac{1-\lambda}{\lambda} A_i H = A_0^2 + 2 \frac{1-\lambda}{\lambda} A_0 H,$$

für $i=0,1,2,3$. Setzen wir nun

$$(A21) \quad \bar{H} = \frac{\lambda-1}{\lambda} H$$

und ergänzen wir auf beiden Seiten der Gleichungen (A20) \bar{H}^2 , so ergibt sich

$$(A22) \quad (A_i - \bar{H})^2 = (A_0 - \bar{H})^2$$

für $i=0,1,2,3$. Das besagt aber, daß die Punkte A_i von \bar{H} den gleichen Abstand haben, das heißt

$$(A23) \quad \bar{H} = M.$$

Da keine Lösung des Gleichungssystems (A17) mit $\lambda=1$ möglich ist, ergibt sich aus (A21) und (A23):

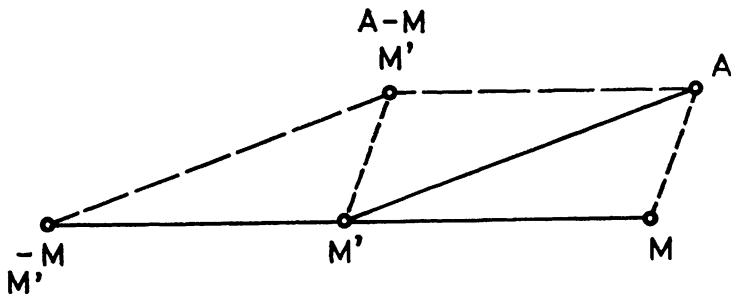
$$(A24) \quad H = \frac{\lambda}{\lambda-1} \cdot M.$$

Nun rechnet man aus (20) eine Darstellung von A'' mit Aufpunkt M' aus. Das ergibt

$$\begin{aligned} (A25) \quad A'' &= \lambda \cdot A + (1-\lambda) \cdot H = && \\ & \frac{M'}{M'} \cdot A + (1-\lambda) \cdot \frac{M'}{M'} \cdot M && \text{nach (A24)} \\ &= \lambda \cdot A + (1-\lambda) \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda-1} \right) \cdot M && \\ &= \lambda \cdot A - \lambda \cdot M = && \text{nach (12)} \\ & \frac{M'}{M'} \cdot A - \lambda \cdot \frac{M'}{M'} \cdot M = && \\ &= \lambda \cdot (A-M) && \text{nach (11)} \\ & \frac{M'}{M'} \cdot M' && \end{aligned}$$

Für Abstand von A'' und M' erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned} (A26) \quad d(A'', M') &= && \\ &= d(\lambda \cdot (A-M), M') = && \text{nach (A24)} \\ & \frac{M'}{M'} \cdot M' && \\ &= \lambda d(A-M, M') = && \text{nach (5)} \\ & \frac{M'}{M'} && \\ &= \lambda \cdot d(A, M) = && \text{nach Figur 12} \\ &= \lambda \cdot r, && \end{aligned}$$



Figur 12

wobei r den Radius der Umkugel von Δ bezeichnet. Nach (21) soll dieser Ausdruck gleich r' sein, also finden wir

$$(A27) \quad \lambda = \frac{r'}{r}.$$

Aus (A7) folgt nun (22), und zusammen mit (A24) ergibt sich daraus auch (23).

¹⁰ Da M und M' merkwürdige Punkte im Sinne der Beschreibung in Anm. 8 sind, ist auch $-\frac{1}{2} \cdot M$ ein solcher merkwürdiger Punkt.
 M'

¹¹ Beweis des Hilfssatzes.

Seien A, B, C, D die Ecken des Tetraeders und H sein Höhenschnittpunkt. H_A sei der Fußpunkt der Höhe durch A . Es genügt zu zeigen, daß die Verbindungsgerade von B und H_A senkrecht auf der Verbindungsgeraden von C und D steht, das heißt (vgl. Anm. 1)

$$(A28) \quad (B-H_A) \cdot (C-D) = 0.$$

Da die Verbindungsgerade von B und H die durch B gehende Höhe des Tetraeders ist, haben wir

$$(A29) \quad (B-H) \cdot (C-D) = 0,$$

das heißt

$$(A30) \quad (B-H_A + H_A-H)(C-D) = 0$$

oder

$$(A31) \quad (B-H_A) \cdot (C-D) + (H_A-H)(C-D) = 0.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung unmittelbar im Fall $H_A = H$. Ist $H_A \neq H$, so ist die Verbindungsgerade von A und H die Höhe durch A , und auch dann ist

$$(A32) \quad (H_A-H)(C-D) = 0,$$

woraus mit (A31) die Behauptung (A28) folgt.

Beweis von 4.

Wir zeigen, daß der Feuerbachpunkt H auf jeder Höhe liegt. Unter Verwendung der im Beweis des Hilfssatzes eingeführten Bezeichnungen genügt dafür der Nachweis, daß H auf der Verbindungsgeraden von H_A und A liegt. Nach dem Hilfssatz wissen wir, daß dabei H_A der Höhenschnittpunkt des Dreiecks BCD ist. Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden:

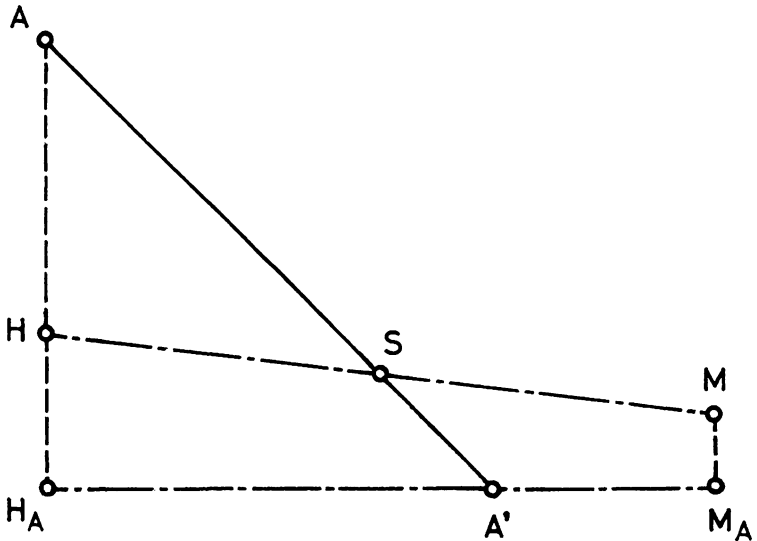
1. Im Dreieck BCD fallen Schwerpunkt A' und Umkreismittelpunkt M_A zusammen. Dann ist dieses Dreieck gleichseitig, und es gilt

$$(A33) \quad H_A = A' = M_A.$$

Daraus folgt aber, daß S und M und damit auch M' und H auf der Verbindungsgeraden von A und H_A liegen.

* Ohne wesentliche Einschränkung können wir $B \neq H_A$ annehmen.

2. Es sei $M_A \neq A'$. Dann liegt H_A auf der Eulerschen Geraden des Dreiecks BCD und damit auch M'_A , der Mittelpunkt des Durchschnitts der Feuerbachkugel mit der von B, C und D aufgespannten Ebene. Die restlichen Überlegungen spielen sich nun in der von A und der Eulerschen Geraden des Dreiecks BCD aufgespannten Ebene ab (vgl. Figur 13).



Figur 13

Es ist zu zeigen, daß im Falle $H \neq H_A$ die Verbindungsgerade von H und H_A senkrecht auf der Eulerschen Geraden des Dreiecks BCD steht, d. h.

$$(A34) \quad (H-H_A)(A'-H_A)=0.$$

Dazu beweisen wir zunächst: Ist A' Aufpunkt, so gilt

$$(A35) \quad H-H_A = \frac{3}{2}(M'-M'_A) - \frac{1}{2}(M-M_A).$$

Das ergibt sich aus folgenden Beziehungen

$$(A36) \quad H = -\frac{1}{2} \cdot \dot{M}' \cdot M = \frac{3}{2} \cdot M' - \frac{1}{2} \cdot M \quad \text{nach (26)}$$

$$(A37) \quad H_A = 3 \cdot A' - 2 \cdot \dot{M}_A \cdot M_A \quad \text{nach (25)}$$

$$(A38) \quad M'_A = A' + \frac{1}{3}(H_A - M_A) = \bar{A} \cdot M_A \quad \text{nach (16)}.$$

Setzt man diese Werte für H, H_A und M'_A in (A35), so erkennt man unmit-

telbar die Gültigkeit dieser Beziehung.

Darüber hinaus hat man aber

$$(A39) \quad (M' - M'_A) (A' - H'_A) = 0$$

und

$$(A40) \quad (M - M_A) (A' - H'_A) = 0$$

zusammen mit (A35) folgt daraus die Behauptung (A34).

Literatur

- [1] WERNER BOS, *Axiomatische Charakterisierung des arithmetischen Mittels*, Math.-phys. Semesterber. 18, 45–53 (1971).
- [2] WERNER BOS, *Zur Axiomatik des arithmetischen Mittels*, Konstanzer Universitätsreden 44, Druckerei und Verlagsanstalt Konstanz Universitätsverlag GmbH, Konstanz 1972.
- [3] WERNER BOS, *Mittelwertstrukturen*, Math. Ann. 198, 317–333 (1972).
- [4] WERNER BOS, *Die Einbettung von Mittelwertstrukturen in Q -Vektorräume*, Math. Z. 128, 207–216 (1972).
- [5] WERNER BOS, *Die Charakterisierung einer Mittelwertstruktur durch deren zweistellige Mittelwertfunktion*, Archiv Math. (Basel), 24, 397–401 (1973).
- [6] WERNER BOS, *Über die Kategorien der affinen und euklidischen Räume*, Seminarmanuskript, Konstanz 1973.
- [7] CHARLES-JULIEN BRIANCHON – VICTOR PONCELET, *Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère au moyen de quatres conditions données*, Annales de Mathématiques pures et appliquées (Gergonne) 9, 205–220 (1821).
- [8] KARL WILHELM FEUERBACH, *Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks*, Riegel und Wießner, Nürnberg 1822.
- [9] KARL WILHELM FEUERBACH, *Grundriß zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide*, In Commission bei Riegel und Wießner, Nürnberg 1827.
- [10] RUDOLF FRITSCH, »Höhenschnittpunkte« für n -Simplizes, erscheint voraussichtlich in: Elemente Math.
- [11] RUDOLF FRITSCH, *Zur Unterteilung semisimplizialer Mengen, I*, Math. Z. 108, 329–367 (1969).
- [12] KLAUS HEINER KAMPS, *Die Einbettung von zweistelligen Mitteln*, erscheint in: Archiv Math. (Basel).
- [13] JULIUS LANGE, *Geschichte des Feuerbachschen Kreises*, Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht der Friedrich-Werderschen Ober-Realschule zu Berlin, Ostern 1894; R. Gaertners Verlagsbuchhandlung, Berlin 1894.
- [14] AUGUST FERDINAND MÖBIUS, *Der barycentrische Kalkül*, J. A. Barth, Leipzig 1827; auch zu finden in: *Gesammelte Werke*, Band I, Dr. M. Sändig, Wiesbaden 1967.
- [15] PAUL JULIUS MÖBIUS, *Über die Anlage zur Mathematik*, J. A. Barth, Leipzig 1900.
- [16] PAUL JULIUS MÖBIUS, *Über den physiologischen Schwachsinn des Weibes*, Sammlung zwangloser Abhandlungen aus dem Gebiete der Nerven- und Geisteskrankheiten, III. Band, Heft 3, C. Marhold, Halle 1900.

- [17] FRITZ OSTERMANN – JÜRGEN SCHMIDT, *Begründung der Vektorrechnung aus Parallelogrammeigenschaften*, Math.-phys. Semesterber. 10, 47–64 (1963).
- [18] FRITZ OSTERMANN – JÜRGEN SCHMIDT, *Der baryzentrische Kalkül als axiomatische Grundlage der affinen Geometrie*, J. reine, angew. Math. 224, 44–57 (1966).
- [19] HERMANN PIES, *Kaspar Hauser – Fälschungen, Falschmeldungen und Tendenzberichte*, Ansbacher Museumsverlag, Ansbach 1973.



Dr. rer. nat. Rudolf FRITSCH, Wissenschaftlicher Rat und Professor im Fachbereich Mathematik der Universität Konstanz, wurde am 30. September 1939 in Johannisburg (Ostpreußen) geboren. Nach dem Abitur am humanistischen Gymnasium »Carolinum illustre« in Ansbach (Mittelfranken) studierte er von 1958 bis 1967 an den Universitäten München und Saarbrücken die Fächer Mathematik und Physik, wo er von 1962 an verschiedene Positionen in den mathematischen Instituten inne hatte. 1963 legte er in München die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an den Höheren Schulen ab und promovierte in Saarbrücken 1968 während der Referendarzeit mit einer Arbeit über semisimpliziale Mengen. Nach der pädagogischen Prüfung für das Lehramt an Gymnasien unterrichtete er von 1968 bis 1969 als Studienassessor am Aufbaugymnasium in Dudweiler (Saar). Auf Anregung von Werner Bos wurde er im Oktober 1969 an die Universität Konstanz versetzt, wo er bis zum Herbst 1973 als Akademischer Rat tätig war. Er habilitierte sich im Sommer 1973 mit Arbeiten zur semisimplizialen algebraischen Topologie und zur Theorie der Kategorien und Funktoren.

Die Arbeiten von Fritsch liefern Beiträge zu geometrischen und kombinatorischen Fragen der semisimplizialen algebraischen Topologie, zum abstrakten Zusammenhang einiger tiefliegender Sätze der Algebra und zu elementaren Problemen der Geometrie. Einen besonderen Schwerpunkt seiner Tätigkeit in Konstanz bildet die Pflege des Kontaktes des Fachbereichs Mathematik zu den Fachkollegen der Gymnasien, der im Sommersemester 1969 von Werner Bos aufgenommen wurde.

Der hier wiedergegebene Text entspricht dem Manuskript der öffentlichen Antrittsvorlesung, die am 22. April 1974 an der Universität Konstanz gehalten wurde, ergänzt um die dabei nicht ausgeführten Beweise.

KONSTANZER UNIVERSITÄTSREDEN
HERAUSGEGEBEN VON GERHARD HESS

1. Gerhard Hess: Probleme der deutschen Hochschule und die Neugründungen
2. Waldemar Besson: Die großen Mächte
3. Hans Robert Jauß: Literaturgeschichte als Provokation der Literaturwissenschaft
4. Hans Aebli: Natur und Kultur in der Entwicklung des Menschen
5. Friedrich Kambartel: Was ist und soll Philosophie?
6. Ralf Dahrendorf: Die Soziologie und der Soziologe — Zur Frage von Theorie und Praxis
7. Franz Georg Maier: Archäologie und Geschichte · Ausgrabungen in Alt-Paphos
8. Horst Sund: Evolution und Struktur der Proteine
9. Manfred Fuhrmann: Die Antike und ihre Vermittler · Bemerkungen zur gegenwärtigen Situation der klassischen Philologie
10. Peter Hemmerich: Anorganische Aspekte des Lebens
11. Wolfgang Pfeleiderer: Organische Chemie — gestern, heute, morgen
12. Dirk Pette: Zellphysiologie des Stoffwechsels
13. Wolfgang Preisendanz: Über den Witz
14. Herbert Nesselhauf: Der Ursprung des Problems »Staat und Kirche«
15. Jurij Striedter: Dichtung und Geschichte bei Puškin
16. Gerhard Hess: Die Universität Konstanz — Reform als ständige Aufgabe
17. Arno Borst: Geschichte an mittelalterlichen Universitäten
18. Rolf-Richard Grauhan: Modelle politischer Verwaltungsführung
19. Frederic Vester: Planung, Forschung, Kommunikation im Team
20. John Francis Embling: Die neuen britischen Universitäten als Instrumente der Reform
21. Horst Rabe: Autorität — Elemente einer Begriffsgeschichte
22. Wolfgang Brezinka: Über Absicht und Erfolg der Erziehung · Probleme einer Theorie der erzieherischen Wirkung

23. Karl-Heinz Flehsig: Die technologische Wendung in der Didaktik
24. Detlef Kantowsky: Indien – am Vorabend der Revolution?
25. Fritz Scharpf: Demokratietheorie zwischen Utopie und Anpassung
26. Eberhardt Weiler: Immunitätsforschung und das Dogma der molekularen Biologie
27. Gerhard Neubauer: Kalkül und Figur – Von Descartes zu Hilbert
28. Wolfgang Iser: Die Appellstruktur der Texte · Unbestimmtheit als Wirkungsbedingung literarischer Prosa
29. Ulrich Gaier: Form und Information – Funktionen sprachlicher Klangmittel
30. Hubert Schleichert: Logik und Denken
31. Josef Schrenk: Zum Größeninventar einer Theorie des Satzes
32. Wolf-Dieter Stempel: Linguistische Aspekte des Verstehens
33. Peter Hartmann: Aufgaben und Perspektiven der Linguistik
34. Friedrich Sixtl: Die Gültigkeit von Prädiktoren bei nicht identifizierbaren Merkmalsträgern
35. Gerold Adam: Die Steuerung des Ionentransportes durch die Zellmembran
36. Hans Batzer: Über die Bedeutung synthetischer Makromoleküle
37. Wolrad Vogell: Struktur und Funktion der Zelle
38. Rudolf Klein: Quantenflüssigkeiten
39. Rudolf Cohen: Zum Begriff der Angst in der Differentiellen Psychologie
40. Kurt Badt: Das Spätwerk Cézannes
41. Friedrich Kübler: Juristenausbildung im Zielkonflikt
42. Ernst Florey: Aufgaben und Zukunft der Biologie
43. Peter Läger: Die Photosynthese der grünen Pflanzen
44. Werner Bos: Zur Axiomatik des Arithmetischen Mittels
45. Heinz Dehnen: Über den Endzustand der Materie
46. Alexander Demandt: Geschichte als Argument · Drei Formen politischen Zukunftsdenkens im Altertum
47. David Daube: Gewaltloser Frauenwiderstand im Altertum
48. Reinhard Bendix: Der Glaube an die Wissenschaft
49. Rainer Martin: Riesenneurone und schnelle Reizübermittlung
50. Jürgen Mittelstraß: Das praktische Fundament der Wissenschaft und die Aufgabe der Philosophie

51. Bernhard Kadenbach: Die Biogenese der Mitochondrien
52. Dietrich Korn: Grenzen des Wissens, anhand von Beispielen aus der Physik
53. Gerhard Thielcke: Die Wirkung erlernter Signale auf die Artbildung
54. Fritz M. Pohl: Einfache Muster aus großen Informationsmengen
55. Peter L. Schmidt: Politik und Dichtung in der Panegyrik Claudians
56. Johannes C. Jochims: Die magnetische Kernresonanz als Werkzeug des Stereochemikers
57. Fritz Stern: Um eine neue deutsche Vergangenheit
58. Edward Verhofstadt: Über die Universitätsreform in Belgien
59. Hans Robert Jauß: Kleine Apologie der ästhetischen Erfahrung · Mit kunstgeschichtlichen Bemerkungen von Max Imdahl
60. Gerhard Hess: Zukunft der Universität – Zukunft der Jugend
61. Erhard R. Wiehn: Ungleichheit unter Menschen als soziologisches Problem
62. Hein Kötz: Über den Stil höchstrichterlicher Entscheidungen
63. Friedrich Kübler: Kommunikation und Verantwortung
64. Bernd Rütters: Tarifautonomie und gerichtliche Zwangsschlichtung
65. Peter Janich: Zweck und Methode der Physik aus philosophischer Sicht
66. Theodor Eschenburg: Was ist die »neue Mitte«?
67. Paul Kellermann: Kritik des Bildungsgesamtplans · Über Struktur und Tendenzen der Expansion organisierter Bildung
68. Helmut Sauer: Entwicklungsbiologie · Experimente an Eiern und Pilzen
69. Peter Berthold: Endogene Jahresperiodik · Innere Jahreskalender als Grundlage der jahreszeitlichen Orientierung bei Tieren und Pflanzen
70. Armin-Dietmar Karpf: Struktur der Elementarteilchenmaterie
71. Josef Jäckle: Schallwellen in festen Körpern
72. Rudolf Fritsch: Zum Feuerbachschen Kreis
73. Götz Wienold: Über das Arbeiten an einer Theorie des Zweitsprachenerwerbs
74. Alfred Grosser: Was ist deutsche Außenpolitik?

Die Reihe Konstanzer Universitätsreden wird fortgesetzt