Die Homöomorphie der geometrischen Realisierungen einer semisimplizialen Menge und ihrer Normalunterteilung

Von

Rudolf Fritsch und Dieter Puppe

Für eine semisimpliziale Menge (= CSS-Komplex) X bezeichne $\operatorname{Sd} X$ die (baryzentrische) Normalunterteilung (vgl. [1] oder [3], 7) und $|X|$ die geometrische Realisierung ([4] oder [5], §2). $dX : \operatorname{Sd} X \to X$ sei die in [3], 7 definierte natürliche semisimpliziale Abbildung.

Satz. *Für jede semisimpliziale Menge X gibt es einen Homöomorphismus $h: |\operatorname{Sd} X| \to |X|$, der zu $|dX|$ homotop ist.*

Wir behaupten nicht, daß h in Abhängigkeit von X eine natürliche Transformation ist. Eine solche gibt es nicht einmal für simpliziale Komplexe: Bezeichnet $\Delta[q]$ das q-dimensionale Standardsimplex ([3], 2), so gibt es keine Homöomorphismen $h_q: |\operatorname{Sd} \Delta[q]| \to |\Delta[q]|$, $q = 1, 2$, die mit den beiden surjektiven semisimplizialen Abbildungen $\Delta[2] \to \Delta[1]$ verträglich sind.

Die Behauptung des obigen Satzes ist schon in [1] enthalten. Sie ist aber dort nicht bewiesen, da das Lemma 3.1 falsch ist. Unseres Wissens wird der Satz zum ersten Mal in [2] bewiesen, und zwar als Spezialfall eines allgemeineren Ergebnisses über eine ganze Klasse von Unterteilungen. Wir geben hier einen kurzen expliziten Beweis für die Normalunterteilung, der durch [2] angeregt wurde.

In [1] wird eine simpliziale Zerlegung von $|\operatorname{Sd} X|$ angegeben (Th. 4 [1]) und Lemma 4.1). Aus unserem Satz folgt daher

Korollar. *Die geometrische Realisierung einer semisimplizialen Menge ist triangulierbar.*

Beweis des Satzes. Wir verwenden die Bezeichnungen von [3]. Die monotonen Abbildungen $\alpha: [q] \to [p]$ nennen wir auch Operatoren und lassen sie von rechts auf X wirken. Als geometrische Realisierung von $\Delta[q]$ und $\Delta'[q] = \operatorname{Sd} \Delta[q]$ nehmen wir

$$\Delta_q = \{u = (u_0, \ldots, u_q) \mid u_i \geqq 0 \quad \text{für alle } i, \quad \sum_{i=0}^{q} u_i = 1\} \subset \mathbf{R}^{q+1}.$$

Dann entsteht $|X|$ aus der topologischen Summe

$$FX = \sum_{q=0}^{\infty} X_q \times \Delta_q$$

---

[1]) Die Abschätzung von $\|f(x) - f(y)\|$ auf S. 14 von [1] ist zwar nicht richtig, aber die Stetigkeit dieser Abbildung f läßt sich unabhängig davon verifizieren.

(X_q diskret) durch die Identifizierungen

$$(y\alpha, u) \sim (y, |\Delta\alpha|u)$$

für alle $y \in X_p$, $u \in \Delta_q$, $\alpha:[q] \to [p]$ monoton. Entsprechend entsteht $|\mathrm{Sd}\, X|$ aus FX durch

$$(y\alpha, u) \sim (y, |\Delta'\alpha|u)\,.$$

Wir werden nun für jedes $x \in X_q$ und jedes q eine stetige Abbildung h_x von Δ_q in sich angeben, so daß gilt:

(**A**) *Ist $\alpha:[q] \to [p]$ monoton und $x = y\alpha$, so ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \Delta_q & \xrightarrow{h_x} & \Delta_q \\ {\scriptstyle |\Delta'\alpha|}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle |\Delta\alpha|} \\ \Delta_p & \xrightarrow{h_y} & \Delta_p \end{array} \tag{1}$$

kommutativ.

(**B**) *Ist x nicht entartet, so bildet h_x das Innere*

$$\mathring{\Delta}_q = \{u \mid u \in \Delta_q\,, \quad u_i > 0 \quad \text{für alle } i\}$$

von Δ_q bijektiv auf sich ab.

Das System (h_x) liefert eine Selbstabbildung von FX, die wegen (**A**) eine stetige Abbildung $h:|\mathrm{Sd}\, X| \to |X|$ induziert. Wegen (**B**) ist h bijektiv. Für jedes nicht-entartete x ist h_x wegen (**B**) surjektiv, also eine Identifizierung. Daraus folgt leicht, daß h ein Homöomorphismus ist.

Um $|h| \simeq |dX|$ zu zeigen, braucht man nur zu bemerken, daß $|dX|$ aus den Abbildungen $d_x = |\delta(q)|:\Delta_q \to \Delta_q$ (vgl. [3], 2 und 7) ebenso gewonnen wird, wie h aus (h_x). Die Abbildungen

$$(u, t) \mapsto (1 - t)h_x(u) + t d_x(u)$$

liefern die gesuchte Homotopie.

Konstruktion von h_x. Jeder Punkt $u \in \Delta_q = |\Delta'[q]|$ läßt sich in der Form

$$u = \sum_{j=0}^{n} t_j \langle \mu_j \rangle \tag{2}$$

darstellen. Dabei gilt $t_j \geqq 0$, $\sum t_j = 1$, und die μ_j sind injektive Operatoren mit dem Ziel $[q]$, die ein n-Simplex $(\mu_0, \ldots, \mu_n)$ von $\Delta'[q]$ bilden. $\langle \mu_j \rangle$ bezeichnet den Schwerpunkt der Seite $|\mu_j| =$ Bild $|\Delta\mu_j|$ von Δ_q. (Das ist zugleich die 0-Zelle, die dem 0-Simplex (μ_j) von $\Delta'[q]$ entspricht.) Durch die Formeln

$$\begin{aligned} x\mu_j &= z_j \varrho_j\,, \\ \mu_j &= \mu_k \mu_{kj}\,, \qquad\qquad j \leqq k\,, \\ \varrho_k \mu_{kj} &= \bar{\mu}_{kj} \varrho_{kj} \end{aligned} \tag{3}$$

definieren wir injektive Operatoren μ_{kj}, $\bar{\mu}_{kj}$, surjektive Operatoren ϱ_j, ϱ_{kj} und nicht-entartete Simplizes z_j von X. Für jeden surjektiven Operator $\varrho:[p] \to [r]$ legen wir ein bestimmtes Rechtsinverses $\hat{\varrho}:[r] \to [p]$ durch

$$\hat{\varrho}(i) = \mathrm{Max}\, \varrho^{-1}(i)$$

fest. Nun wird definiert

(4) $$h_x(u) = \sum_{0 \leqq j \leqq n} t_j(1 - t_n - \cdots - t_{j+1}) \langle \mu_j \hat{\varrho}_{jj} \rangle + \sum_{0 \leqq j < k \leqq n} t_j t_k \langle \mu_j \hat{\varrho}_{kj} \rangle .$$

(Man beachte $\varrho_{jj} = \varrho_j$. Für $j = n$ ist $(1 - t_n - \cdots - t_{j+1}) = 1$ zu setzen.)

Hat man zwei verschiedene Darstellungen von $u \in \Delta_q$ in der Form (2), so kann man durch folgende Abänderungen und ihre Inversen von der einen zur anderen gelangen:

(a) Weglassen von $t_j \langle \mu_j \rangle$, wenn $t_j = 0$.

(b) Ersetzen von $t_j \langle \mu_j \rangle + t_{j+1} \langle \mu_{j+1} \rangle$ durch $(t_j + t_{j+1}) \langle \mu_j \rangle$, wenn $\mu_j = \mu_{j+1}$.

In beiden Fällen ändert sich der Wert auf der rechten Seite von (4) nicht. Also ist $h_x(u)$ eindeutig definiert. Offenbar ist $h_x(u) \in \Delta_q$ und die Abbildung $h_x : \Delta_q \to \Delta_q$ stetig.

Beweis von (A). Sei $u \in \Delta_q$ durch (2) dargestellt und

$$(\Delta' \alpha)(\mu_0, \ldots, \mu_n) = (\nu_0, \ldots, \nu_n) \in \Delta'[p] .$$

Das bedeutet

$$\alpha \mu_j = \nu_j \tau_j$$

mit gewissen surjektiven Operatoren τ_j (ν_j injektiv). Wird nun σ_{kj} aus y und $(\nu_0, \ldots, \nu_n)$ ebenso gebildet wie ϱ_{kj} aus x und $(\mu_0, \ldots, \mu_n)$ gemäß (3), so ergibt sich

$$\varrho_{kj} = \sigma_{kj} \tau_j , \qquad j \leqq k .$$

Daraus erhält man

$$\alpha \mu_j \hat{\varrho}_{kj} = \alpha \mu_j \hat{\tau}_j \hat{\sigma}_{kj} = \nu_j \hat{\sigma}_{kj} .$$

Insbesondere ist dieser Operator injektiv, und es folgt weiter

(5) $$|\Delta \alpha| \langle \mu_j \hat{\varrho}_{kj} \rangle = \langle \nu_j \hat{\sigma}_{kj} \rangle .$$

Da andererseits

$$|\Delta' \alpha| \sum_{j=0}^{n} t_j \langle \mu_j \rangle = \sum_{j=0}^{n} t_j \langle \nu_j \rangle$$

ist, folgt die behauptete Kommutativität von (1) aus (5) und der Tatsache, daß $|\Delta \alpha|$ linear ist.

Beweis von (B). Wir stellen jetzt $u \in \Delta_q$ so in der Form (2) dar, daß $n = q$ ist und μ_j für jedes j die Quelle $[j]$ hat, insbesondere also μ_q die Identität von $[q]$ ist. (Das ist immer möglich, wenn man zuläßt, daß gewisse t_j verschwinden.) Dann gibt es eine Permutation φ von $[q]$, so daß

$$\text{Bild } \mu_j = \{\varphi(0), \ldots, \varphi(j)\} .$$

Sei $x \in X_q$ nicht entartet. Dann sind ϱ_{qj} und $\hat{\varrho}_{qj}$ für alle j gleich der Identität von $[j]$. Bezeichnen wir die i-te Koordinate eines Punktes von $\mathbf{R}^{q+1}$ (Zählung von 0 bis q) immer durch Anhängen von i als unteren Index, so gilt

$$h_x(u)_i \geqq t_q \langle \mu_q \hat{\varrho}_{qq} \rangle_i = \frac{t_q}{q+1}$$

für alle $i = 0, \ldots, q$. Aus $u \in \mathring{\Delta}_q$ folgt $t_q > 0$, also auch $h_x(u) \in \mathring{\Delta}_q$.

Um zu zeigen, daß h_x in $\mathring{\Delta}_q$ injektiv ist, betrachten wir $u, u' \in \mathring{\Delta}_q$. Alle für u durchgeführten Konstruktionen wenden wir entsprechend auf u' an und unterscheiden sie durch einen Strich. Sei $h_x(u) = h_x(u')$. Wir müssen $u = u'$ nachweisen. Es ist

$$\langle \mu_j \hat{\varrho}_{kj} \rangle_i = 0 \quad \text{für } i \notin \text{Bild } \mu_j.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{t_q}{q+1} = h_x(u)_{\varphi(q)} = h_x(u')_{\varphi(q)} \geqq \frac{t'_q}{q+1},$$

also $t_q \geqq t'_q$ und aus Symmetriegründen $t_q = t'_q$. In ähnlicher Weise zeigen wir durch absteigende Induktion über $j = q, \ldots, 0$:

(C_j): *Entweder gilt* $t_j = t'_j = 0$, *oder es ist* $\mu_j = \mu'_j$ *und* $t_j = t'_j$.

Beweis. (C_q) haben wir eben bewiesen. Sei $l < q$ und (C_j) richtig für alle $j > l$. Dann ist der Ausdruck

$$T = \sum_{0 \leqq j \leqq l} t_j (1 - t_n - \cdots - t_{j+1}) \langle \mu_j \hat{\varrho}_{jj} \rangle + \sum_{\substack{0 \leqq j \leqq l \\ j < k \leqq q}} t_j t_k \langle \mu_j \hat{\varrho}_{kj} \rangle$$

(der aus der rechten Seite von (4) entsteht, indem man alle Summanden mit $j > l$ wegläßt) gleich dem entsprechenden T' für u'.

Ist $\mu_l \neq \mu'_l$, so gibt es ein $i \in$ Bild μ_l, das nicht in Bild μ'_l liegt. Dann ist

$$\frac{t_l t_q}{l+1} = t_l t_q \langle \mu_l \hat{\varrho}_{ql} \rangle_i \leqq T_i = T'_i = 0,$$

denn die i-te Komponente aller in T' vorkommenden Summanden verschwindet. Also ist $t_l = 0$ und aus Symmetriegründen $t'_l = 0$.

Gilt dagegen $\mu_l = \mu'_l$, so ist der Ausdruck

$$S = (1 - t_n - \cdots - t_{l+1}) \langle \mu_l \hat{\varrho}_{ll} \rangle + \sum_{l < k \leqq q} t_k \langle \mu_l \hat{\varrho}_{kl} \rangle$$

gleich dem entsprechenden S' für u' (nach Induktionsvoraussetzung). Für $i = \varphi(l)$ gilt ferner

$$t_l \cdot S_i = T_i = T'_i \geqq t'_l \cdot S'_i = t'_l \cdot S_i \quad \text{und} \quad S_i \geqq \frac{t_q}{l+1} > 0.$$

Also ist $t_l \geqq t'_l$ und aus Symmetriegründen $t_l = t'_l$.

Damit ist (C_j) bewiesen. (C_j) gilt also für alle $j = q, \ldots, 0$, und daraus folgt unmittelbar $u = u'$.

Daß $h_x(\mathring{\Delta}_q) = \mathring{\Delta}_q$ ist, ergibt sich nun automatisch: Nach dem Satz von der Gebietsinvarianz ist $h_x(\mathring{\Delta}_q)$ offen in $\mathring{\Delta}_q$. Wegen $h_x(\mathring{\Delta}_q) = \mathring{\Delta}_q \cap h_x(\Delta_q)$ ist es aber auch abgeschlossen. Da es nicht leer ist, muß es gleich $\mathring{\Delta}_q$ sein.

Bemerkung. Sei $f_x : \Delta[q] \to X$ diejenige semisimpliziale Abbildung, die die Identität von $[q]$ in $x \in X_q$ überführt. Der Zusammenhang zwischen h_x und h im obigen Beweis wird auch durch die Kommutativität von

(6)
$$\begin{array}{ccc} \Delta_q & \xrightarrow{h_x} & \Delta_q \\ {\scriptstyle |\mathrm{Sd} f_x|} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle |f_x|} \\ |\mathrm{Sd}\, X| & \xrightarrow{h} & |X| \end{array}$$

charakterisiert. Bei uns ist $h_x(u)$ eine *quadratische* Funktion der Koordinaten t_j in der Darstellung (2). Früher wurde versucht, eine in den t_j *lineare*[2]) Abbildung h_x für alle x oder wenigstens für alle nicht-entarteten Simplizes x von X so zu konstruieren, daß durch (6) ein Homöomorphismus h definiert wird. Das ist nicht möglich, wie folgendes Beispiel zeigt:

X entstehe aus $\Delta[4]$ durch die Identifizierungen

$$(0,1,2,3) \sim (0,2,3)\eta_0\,, \tag{7}$$

$$(0,1,2,4) \sim (0,2,4)\eta_1\,. \tag{8}$$

Dabei steht $(\alpha(0), \ldots, \alpha(p))$ für den Operator $\alpha:[p] \to [4]$ und $\eta_i:[p+1] \to [p]$ sind die üblichen Ausartungsoperatoren. Der Kürze halber schreiben wir $m_{i_0 \ldots i_p}$ für $\langle(i_0, \ldots, i_p)\rangle$ und z für das Bild von $(0, 1, 2, 3, 4)$ in X_4. Angenommen, es gibt einen Homöomorphismus h und zu jedem nicht-entarteten Simplex x von X eine in den t_j lineare Abbildung h_x, so daß (6) kommutativ ist. Dann muß h_z jede Seite von Δ_4 in sich abbilden (Verträglichkeit mit allen h_x). Ferner muß der Schwerpunkt jeder Seite in einen inneren Punkt dieser Seite übergehen (sonst könnte man unter Verwendung der Verbindungsstrecken mit m_{01234} zeigen, daß h_z in $\mathring{\Delta}_4$ nicht topologisch ist). Für alle $0 \leqq t < 1$ gilt

$$|\Delta\eta_0|\, h_z((1-t)m_{0123} + t m_{012}) = |\Delta\eta_0|\, h_z((1-t)m_{023} + t m_{02})$$

(wegen (7) und weil (0, 2, 3) nicht entartet). Durch Grenzübergang $t \to 1$ folgt

$$|\Delta\eta_0|\, h_z(m_{012}) = |\Delta\eta_0|\, h_z(m_{02})\,. \tag{9}$$

Analog erhält man aus (8)

$$|\Delta\eta_1|\, h_z(m_{012}) = |\Delta\eta_1|\, h_z(m_{02})\,. \tag{10}$$

Die rechten Seiten von (9) und (10) sind gleich. Da $h_z(m_{012})$ ein innerer Punkt der Seite $|(0, 1, 2)|$ ist, können die linken Seiten nicht gleich sein. Das widerlegt unsere Annahme.

Literaturverzeichnis

[1] M. G. Barratt, Simplicial and semisimplicial complexes. Vervielfältigtes Manuskript, Princeton 1956.

[2] R. Fritsch, Zur Unterteilung semisimplizialer Mengen. Erscheint voraussichtlich als Dissertation, Saarbrücken 1967.

[3] D. M. Kan, On c.s.s. complexes. Amer. J. Math. **79**, 449—476 (1957).

[4] J. Milnor, The geometric realization of a semi-simplicial complex. Ann. of Math., II. Ser. **65**, 357—362 (1957).

[5] D. Puppe, Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen- und Monoidkomplexen. I. Math. Z. **68**, 367—406 (1958).

Eingegangen am 15. 6. 1967

Anschrift der Autoren:

Rudolf Fritsch

Dieter Puppe
Mathematisches Institut
Universität des Saarlandes
66 Saarbrücken 15

[2]) d. h. h_x ist affin auf jedem (geometrischen) Simplex der barzyentrischen Unterteilung von Δ_q.