Charakterisierung semisimplizialer Mengen durch Unterteilung und Graphen.

Fritsch, Rudolf

Manuscripta mathematica

Volume 5 / 1971 / Article

manuscripta math. 5, 213 - 227 (1971)

CHARAKTERISIERUNG SEMISIMPLIZIALER MENGEN[1] DURCH UNTERTEILUNG UND GRAPHEN

Rudolf Fritsch

We define a subdivision functor G for semisimplicial sets such that $GX \simeq GY$ implies $X \simeq Y$ for all pairs of semisimplicial sets X,Y and $(GX)^1 \simeq (GY)^1$ implies $X \simeq Y$, too, but only, as far as we know, for pairs of "weakly degenerate" semisimplicial sets X,Y. These results are analogous to theorems on simplicial complexes which have been proved by Finney [1] and Segal [6].

<u>0. EINLEITUNG.</u> In [1] hat R.L.Finney bewiesen, daß (ungeordnete) simpliziale Komplexe simplizial isomorph sind, wenn es ihre Normalunterteilungen sind. J.Segal hat in [5] gezeigt, daß es genügt, die Isomorphie der 1-Gerüste der Normalunterteilungen vorauszusetzen.

Auf geordnete simpliziale Komplexe oder allgemeiner semisimpliziale Mengen kann man diese Ergebnisse jedoch nicht unmittelbar übertragen. In § 5 von [3] findet sich ein einfaches Beispiel eines Paares nichtisomorpher semisimplizialer Mengen, deren Normalunterteilungen (im Sinn von Kan [4]) semisimplizial isomorph sind. Wie dieses Beispiel auch zeigt, liegt das vor allem daran, daß bei der Normalunterteilung semisimplizialer Mengen die

[1] In der Literatur werden semisimpliziale Mengen auch oft als "complete semisimplicial complexes", abgekürzt "css complexes" bezeichnet. Wir halten uns hier im wesentlichen an die Terminologie von K.Lamotke [5].

ursprüngliche Orientierung der Simplizes verloren geht.

Wir beschreiben in §§ 1,2 eine Unterteilung G , die diesen Mißstand beseitigt. Sie geht auf eine Idee von S.Eilenberg zurück, die dieser während der Topologie-Tagung 1964 in Oberwolfach gegenüber D.Puppe äußerte[2] (s.1.1.). In § 3 zeigen wir, daß jeder Isomorphismus zwischen G-Unterteilungen semisimplizialer Mengen von einem Isomorphismus zwischen den semisimplizialen Mengen selbst induziert ist (Satz 2) und daß jeder Isomorphismus zwischen 1-Gerüsten von G-Unterteilungen eine dimensionserhaltende Bijektion zwischen den nichtentarteten Simplizes der ursprünglichen semisimplizialen Mengen induziert (Satz 1).

Wir vermuten, daß sich diese Bijektion ganz allgemein zu einem semisimplizialen Isomorphismus fortsetzen läßt, aber wir können das nur für "schwach entartete" semisimpliziale Mengen beweisen (Satz 3 in § 3); dies skizzieren wir zum Abschluß. Der allgemeinen Vermutung könnte man vielleicht mit graphentheoretischen Methoden zu Leibe rücken, die wir leider nicht beherrschen (1-dimensionale semisimpliziale Mengen sind ja nichts anderes als gerichtete Graphen).

Wir verwenden die Terminologie und Notation von [2] (insbesondere des dortigen § 0); was in [2] nicht erklärt ist, findet sich in [5].[3]

1. DER STANDARD-UNTERTEILUNGSFUNKTOR G

1.1. MOTIVATION UND DEFINITION VON G

Wir konstruieren die "G-Unterteilung" einer semisimplizialen Menge, indem wir zunächst eine Unterteilung

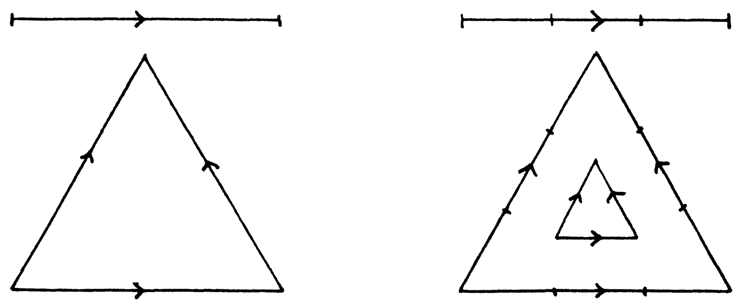
---

[2] Ich danke Herrn D.Puppe für die Mitteilung dieser Idee.

[3] Ich danke auch dem (mir unbekannten) Referenten der "manuscripta" für zahlreiche Vorschläge zur Kürzung und Straffung der Darstellung.

der Standard-Simplizes angeben und diese costetig, d.h. verträglich mit Colimites, auf beliebige semisimpliziale Mengen fortsetzen (vgl. [2.2.).

Ein Standard-Simplex soll so unterteilt werden, daß man nach der Unterteilung die ursprüngliche Orientierung des gegebenen Simplexes wiedererkennt. Anschaulich geht man dazu so vor, daß man in das Innere eines jeden Simplexes konzentrisch ein gleichorientiertes Simplex "einlegt". In den Dimensionen 1 und 2 zeigen das die folgenden Bilder:



Um nun wirklich eine semisimpliziale Zerlegung der Standard-Simplizes zu erhalten, hat man noch die Schale zwischen dem Rand des eingelegten Simplexes und dem des großen geeignet zu unterteilen und eine Orientierung der entstehenden Simplizes anzugeben. Dabei wollen wir jedoch keine weiteren Ecken hinzunehmen. Das bedeutet, daß die Eckenmenge des unterteilten Standard - p - Simplexes $G[p]$ beschrieben werden kann durch

(1.1) $\quad (G[p])_0 = \{(\mu,m) \mid \mu$ Seite von $\Delta[n], m \in [\dim \mu]\}$.

Für diese Menge definieren wir eine lokale Eckenanordnung durch die Festsetzung

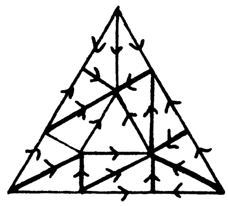
(1.2) $$(\lambda,\ell) \leq (\mu,m) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \subset \mu \\ \lambda\ell \leq \mu m \\ \mu m \in \text{Bild } \lambda \text{ .} \end{cases}$$

(Hier interpretieren wir λ und μ als streng monotone **Abbildungen** $[\dim \lambda] \to [p]$ bzw. $[\dim \mu] \to [p]$ mit

$\ell \in [\dim \lambda]$ und $m \in [\dim \mu]$.). Als k-Simplizes von $G[p]$ nehmen wir nun die $(k+1)$-gliedrigen schwach monoton wachsenden Folgen über $(G[p])_0$ und erklären Seiten- bzw. Entartungsoperatoren wie üblich durch das Weglassen bzw. Wiederholen von Folgengliedern. (Für spätere Anwendungen notieren wir noch, daß aus (1.2) folgt

$$\ell \leq m) \ . \tag{1.3}$$

Damit haben wir eine Beschreibung der semisimplizialen Menge $G[p]$ gegeben. In den Dimensionen 1 und 2 ergeben sich folgende Bilder



Der Funktor G ist ein Standard-Unterteilungsfunktor im Sinne von [2] und es existiert eine Standard-Homotopie für G, d.h. der Hauptsatz von [2] gilt auch für die G-Unterteilung semisimplizialer Mengen. Da wir diese nicht kombinatorischen Aussagen hier nicht benötigen, verzichten wir auf einen Beweis. Wenn wir trotzdem Definitionen und Ergebnisse aus [2] benutzen, handelt es sich um solche, die sich einfach und rein kombinatorisch ableiten lassen.

Die Existenz einer Standard-Homotopie für G impliziert die Existenz einer natürlichen Transformation $|G| \to |\Delta|$. Man kann die Standard-Homotopie so wählen, daß diese natürliche Transformation die geometrische Realisierung der durch

$$(\mu, m) \to \mu m \tag{1.4}$$

für alle $(\mu, m) \in (G[p])_0$ beschriebenen (semisimplizialen) natürlichen Transformation ist.

1.2. EIGENSCHAFTEN DER SEMISIMPLIZIALEN MENGEN G[p]

Sei $p \in N$. Wir stellen nun die für den Beweis der Hauptsätze (Satz 1 bis Satz 3) benötigten Eigenschaften von G[p] zusammen. Zur Abkürzung setzen wir

$$\iota_p = id[p] \tag{1.5}$$

und

$$Ip = \big((\iota_p,0),(\iota_p,1), \ \ldots \ , (\iota_p,p)\big) \ ; \tag{1.6}$$

wenn der Index klar ist, schreiben wir auch kurz "ι" anstelle von "ι_p" . Ip ist das "eingelegte" Simplex; seine Ecken bezeichnen wir als die "inneren" Ecken von G[p] . Ein wichtiges Hilfsmittel für die späteren Überlegungen bildet

LEMMA 1. In der i-ten inneren Ecke von G[p] enden genau $2^p + i\cdot 2^{p-1}$ 1-Simplizes.

Beweis. Alle 1-Simplizes ξ in G[p] , die in der i-ten inneren Ecke von G[p] enden, haben die Form

$$\xi = \big((\mu,m) \ , \ (\iota_p,i)\big) \ . \tag{1.7}$$

Wir berechnen zunächst die Zahl der möglichen μ bei festem

$$j := \mu^{-1} \ i \tag{1.8}$$

Das Bild eines solchen μ besteht aus j Elementen, die kleiner sind als i , aus i und schließlich aus einer Teilmenge von $[p] - [i]$. Die Anzahl der möglichen μ ist gleich der Anzahl der möglichen Bilder, also $\binom{i}{j}\cdot 2^{p-i}$.

Zu jedem μ kann m in (1.7) $j + 1$ verschiedene Werte annehmen, also gibt es insgesamt

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{i} (j+1)\cdot\binom{i}{j}2^{p-i} = 2^{p-i}\Big(\sum_{j=1}^{i} j\binom{i}{j} + \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\Big) = \\ &= 2^{p-i} \ i \ \sum_{j=1}^{i}\binom{i-1}{j-1} + 2^p = 2^p + i \cdot 2^{p-1} \end{aligned} \tag{1.9}$$

1-Simplizes der betrachteten Art.

Anschaulich klar sind die beiden folgenden Lemmata:

LEMMA 2. Jedes nichtentartete, innere $(p-1)$-Simplex von $G[p]$ ist Seite von genau zwei nichtentarteten p-Simplizes.

Dabei bezeichnen wir ein Simplex von $G[p]$ als inneres Simplex, wenn eine seiner Ecken eine innere Ecke ist.

LEMMA 3. $G[p]$ wird von den nichtentarteten p-Simplizes erzeugt; je zwei nichtentartete p-Simplizes lassen sich durch eine endliche Folge von p-Simplizes miteinander in der Weise verbinden, daß je zwei aufeinanderfolgende eine nichtentartete $(p-1)$-dimensionale Seite gemeinsam haben.

2. DIE G-UNTERTEILUNG SEMISIMPLIZIALER MENGEN

2.1. DEFINITION DES FUNKTORS $G : \underline{S} \to \underline{S}$

G ordnet der semisimplizialen Menge X die semisimpliziale Menge GX zu, die beschrieben ist durch

$$(GX)_n = \{[x,\xi] \mid x \in X,\ \xi \in (G[\dim x])_n\} \tag{2.1}$$

und

$$[x,\xi]\beta = [x,\xi\beta] \tag{2.2}$$

für alle $[x,\xi] \in GX$ und $\beta \in \Delta[\dim \xi]$; dabei bezeichnet $[x,\xi]$ die Äquivalenzklasse des G-Paares (x,ξ) (vgl. [2] 2.1.).

G ordnet der semisimplizialen Abbildung $f:X \to Y$ die semisimpliziale Abbildung $Gf:GX \to GY$ zu, die beschrieben ist durch

$$Gf[x,\xi] = [fx,\xi] \tag{2.3}$$

für alle $[x,\xi] \in GX$.

2.2. EIGENSCHAFTEN DER G-UNTERTEILUNG EINER SEMISIMPLIZIALEN MENGE X .

LEMMA 4. a) Die Simplizes von GX werden eindeutig durch reguläre G-Paare dargestellt.

b) Ist (x,ξ) ein reguläres G-Paar, so ist $[x,\xi]$ genau dann entartet, wenn ξ entartet ist.

Ein G-Paar (x,ξ) ist regulär, wenn x nicht entartet und ξ inneres Simplex von $G[\dim x]$ ist. Der Beweis von Lemma 4 findet sich in [2] 2.1.

LEMMA 5. Die Nullsimplizes von GX werden eindeutig durch Paare (x,i) mit nichtentartetem $x \in X$ und $i \in [\dim x]$ dargestellt.

Beweis. Nach Lemma 4 läßt sich ein 0-Simplex $\mathfrak{r} \in GX$ eindeutig in der Form

$$\mathfrak{r} = [x,(\iota_{\dim x},i)] \tag{2.4}$$

mit nichtentartetem x und $i \in [\dim x]$ darstellen.

Im folgenden bezeichnen ein Paar der Form (x,i) immer das durch (2.4) dargestellte 0-Simplex von GX, insbesondere ist das in dem Symbol (x,i) auftretende x immer ein nichtentartetes Simplex von X.

LEMMA 6. Ist x ein nichtentartetes p-Simplex von X und $i \in [p]$, so enden in (x,i) genau $2^p + i\cdot 2^{p-1}$ 1-Simplizes.

Beweis. Lemma 1 und Lemma 4.

3. DIE SÄTZE

X und Y seien semisimpliziale Mengen.

SATZ 1. Ist $h : (GX)^1 \to (GY)^1$ ein semisimplizialer Isomorphismus, so gibt es eine bijektive Abbildung $h^*: X^+ \to Y^+$ [4], mit

$$\dim h^*x = \dim x \tag{3.1}$$

[4] X^+ und Y^+ bezeichnen die Mengen der nicht entarteten Simplizes von X bzw. Y.

und

(3.2) $$h(x,i) = (h^* x,i) .$$

Mit anderen Worten: Eine Ecke (x,i) von GX wird durch h auf eine Ecke der Form (y,i) abgebildet, wobei y nur von x, aber nicht von i abhängt.

Beweis durch induktive Konstruktion von h^*. Mit Hilfe von Lemma 6 ergibt sich: Die Ecken von GX der Form $(x,0)$ mit 0-dimensionalem x sind genau diejenigen Ecken von GX in denen genau ein 1-Simplex endet. Da diese Eigenschaft von einem semisimplizialen Isomorphismus der 1-Gerüste erhalten und reflektiert werden muß, ergibt sich daraus $h^* | X_0^+$ als Bijektion zwischen X_0^+ und Y_0^+.

Nun sei $h^* | \left(X^{p-1}\right)^+$ bereits als injektive Abbildung mit Bild $\left(X^{p-1}\right)^+$ so konstruiert, daß (3.1) und (3.2) für h und analog für h^{-1} gelten. Sei $x \in X_p^+$ und

(3.3) $$h(x,0) = (y,j) .$$

Da h semisimplizialer Isomorphismus ist, müssen in $(x,0)$ und (y,j) gleichviele 1-Simplizes enden. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß aus der Induktionsvoraussetzung

(3.4) $$\dim y \geq p$$

folgt, ist das nach Lemma 6 nur möglich, wenn

(3.5) $$\dim y = p$$

und

(3.6) $$j = 0$$

ist. Deshalb können wir

(3.7) $$h^* x = y$$

definieren. Durch Anwendung dieses Schlusses auf h^{-1} erhalten wir, daß diese Festsetzung eine Bijektion zwischen X_p^+ und Y_p^+ induziert.

Es bleibt (3.2) zu zeigen, was sich durch eine weitere Induktion nach i ergibt. Sei (3.2) für alle Vorgänger von i bewiesen. Wir betrachten nun das 1-Simplex

(3.8) $$\mathfrak{r} = [x,((\iota,0),(\iota,i))]$$

in GX . $h\mathfrak{r}$ beginnt in $(h^*x,0)$ und landet in einem Simplex der Form (y,j) . Das ist nur möglich, wenn h^*x Seite von y ist. Wäre nun

(3.9) $$\dim y > p$$

so wäre

(3.10) $$j = 0 ;$$

denn alle 1-Simplizes, die in (y,j) enden müßten in $G(Y^p)$ beginnen, da alle 1-Simplizes, die in (x,i) enden, in Ecken von GX beginnen, die auf Grund der Induktionsvoraussetzungen durch h in $G(Y^p)$ abgebildet werden. Lemma 6 würde nun aber liefern

(3.11) $$2^p + i \cdot 2^{p-1} = 2^{\dim y} .$$

Das ist jedenfalls im Falle $i = 1$ nicht möglich. Im Falle $i > 1$ würde das 1-Simplex $[x,((\iota,1),(\iota,i))]$ wegen (3.10) durch h in ein 1-Simplex abgebildet, das nach Induktionsvoraussetzung in $(h^*x,1)$ beginnt und in $(y,0)$ endet, was wegen (1.3) nicht möglich ist.

Also kann (3.9) nicht eintreten; dann muß aber

(3.12) $$h^*x = y$$

sein. Der Rest folgt nun wieder aus Lemma 6 .

Ist also $h : (GX)^1 \to (GY)^1$ ein semisimplizialer Isomorphismus, so induziert die in Satz 1 konstruierte Abbildung h^* eine dimensionserhaltende Bijektion f von X nach Y , die gegeben ist durch

(3.13) $$fx = (h^*x^+)x^\rho$$ [5)]

für alle $x \in X$. Diese Abbildung f ist offensichtlich mit Entartungsoperatoren verträglich. Hat man zusätzlich

(3.14) $$f(x\delta_i) = (fx)\delta_i$$

für alle nicht entarteten $x \in X$ und $i \in [\dim x]$, so ist f ein semisimplizialer Isomorphismus. Wir vermuten, daß (3.14) allgemein gilt, können das aber vorläufig nur unter zusätzlichen Voraussetzungen beweisen.

SATZ 2. Ist $h : GX \to GY$ ein semisimplizialer Isomorphismus, so gibt es genau einen semisimplizialen Isomorphismus $f : X \to Y$ mit

$$Gf = h \ . \tag{3.15}$$

Beweis. Wenden wir Satz 1 auf die Einschränkung von h auf die 1-Gerüste von GX und GY an, so erhalten wir eine Bijektion $h^* : X^+ \to Y^+$ mit (3.1) und (3.2) und können eine Abbildung $f : X \to Y$ durch (3.13) definieren. Es bleiben (3.14), (3.15) und die Eindeutigkeitsaussage zu zeigen.

Aus (3.2) folgt zunächst

$$h\left[x,I[\dim x]\right] = \left[h^*x,I[\dim x]\right] = \left[fx,I[\dim x]\right] \ . \tag{3.16}$$

für alle $x \in X^+$. Das ergibt die gewünschte Eindeutigkeitsaussage.

Nun zeigen wir

$$h[x,\xi] = [h^*x,\xi] \tag{3.17}$$

für alle $x \in X^+$ und $\xi \in G[\dim x]$. Sei dazu ein $x \in X^+$ vorgelegt und sei zur Abkürzung

$$p = \dim x \quad . \tag{3.18}$$

Da h eine semisimpliziale Abbildung ist, genügt es zum Nachweis von (3.17) nichtentartete ξ mit

$$\dim \xi = p \tag{3.19}$$

zu betrachten, die nach Lemma 3 ein Erzeugendensystem von $G[p]$ bilden

Aus (3.16) folgt diese Behauptung für $\xi = I[p]$. Wegen Lemma 3 genügt es nun zu zeigen, daß die Behauptung für ein nichtentartetes $\eta \in (G[p])_p$ gilt, falls sie für ein ξ gilt, das mit η eine nichtentartete (p-1)-dimensionale Seite ξ gemeinsam hat. Das folgt nun aber einfach daraus, daß es höchstens zwei nichtentartete p-Simplizes in $G[p]$ gibt, die ein solches gegebenes ξ als gemeinsame Seite haben.

Nun berechnen wir für alle $x \in X_p^+$ und $i \in [p]$ [5]

$$\begin{aligned}
&\left[h^*(x\delta_i)^+,\ I[\dim(x\delta_i)^+]\right](x\delta_i)^0 = \\
&= h\left[x\delta_i;\ I[p-1]\right] = \\
&= h\left[x,(G\delta_i)I[p-1]\right] = \\
&= \left[h^*,(G\delta_i)I[p-1]\right] = \\
&= \left[\left((h^*x)\delta_i\right)^+,\ I[\dim\left((h^*x)\delta_i\right)^+]\right]\left((h^*x)\delta_i\right)^0 \quad .
\end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit der kanonischen Darstellung liefert jetzt

$$\left((h^*x)\delta_i\right)^+ = h^*(x\delta_i)^+ \tag{3.20}$$

und

$$\left((h^*x)\delta_i\right)^0 = (x\delta_i)^0 \quad . \tag{3.21}$$

Diese beiden Gleichungen zusammen aber ergeben (3.14). (3.15) folgt nun unmittelbar aus (3.17).

Wir bezeichnen eine semisimpliziale Menge X als "schwach entartet", wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

Für alle $x \in X^+$ und $i \in [\dim x]$ gilt entweder

$$\dim x - \dim(x\delta_i)^+ \leq 2 \tag{3.22}$$

oder

$$\dim(x\delta_i)^+ = 0 \quad . \tag{3.23}$$

Dann haben wir

<u>SATZ 3.</u> Sind X und Y schwach entartet und ist $h:(GX)^1 \to (GY)^1$ ein semisimplizialer Isomorphismus, so ist die durch (3.16) definierte Abbildung $f : X \to Y$ auch ein semisimplizialer Isomorphismus.

---

[5] Für alle Simplizes x einer semisimplizialen Menge bezeichnet x^+ das nichtentartete Simplex und x^0 den surjektiven Operator in der kanonischen Darstellung von x (s.[5] I.3.9).

BEMERKUNGEN. a) Schwach entartete semisimpliziale Mengen sind z.B. die in [2] § 3 eingeführten nichtentarteten semisimplizialen Mengen, für die in Verschärfung von (3.22) gilt

$$\dim x - \dim(x\delta_i)^+ = 1 \tag{3.24}$$

für alle $x \in X^+$ und $i \in [\dim x]$, die semisimplizialen Sphären, bei denen immer der Fall (3.23) auftritt, und die semisimplizialen Mengen X mit

$$\dim X \leq 3 . \tag{3.25}$$

b) Am Beispiel der semisimplizialen 2-Sphäre S^2 machen wir uns leicht klar, daß der semisimpliziale Isomorphismus h in Satz 3 nicht die Einschränkung von Gf auf die 1-Gerüste zu sein braucht: Auf S^2 gibt es nur einen Automorphismus; in GS^2 gibt es verschiedene 1-Simplizes, die in Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen und jede Permutation solcher 1-Simplizes läßt sich zu einem semisimplizialen Automorphismus von $(GS^2)^1$ fortsetzen. Satz 2 zeigt natürlich, daß es auf GS^2 selbst auch nur einen Automorphismus gibt.

c) Diese Überlegung zeigt, daß in diesem semisimplizialen Fall gerade umgekehrte Verhältnisse vorliegen, wie in dem von Finney [1] und Segal [6] behandelten simplizialen Fall: Im Analogen zu unserem Satz 2 ist dort die (3.15) entsprechende Beziehung nicht notwendig erfüllt, während jeder Isomorphismus zwischen 1-Gerüsten von (simplizialen) Normalunterteilungen von einem Isomorphismus der Unterteilungen selbst induziert ist.

Wir skizzieren nun noch den Beweis von Satz 3, d.h. genauer den Beweis von (3.14) unter den Voraussetzungen von Satz 3. Dazu zeigt man durch Induktion nach

$$p = \dim x \tag{3.26}$$

die folgenden Implikationen

$$x\mu \in X^+ \Leftrightarrow (h^*x)\,\mu \in Y^+ \tag{3.27}$$

und

(3.28) $\quad x\mu \in X^{+}\left(\nu(h^{*}x)\ \mu \in Y^{+}\right) \Rightarrow h^{*}(x\mu) = (h^{*}x)\mu$

für alle $x \in X_{p}^{+}$. Der Induktionsschritt erfolgt nun durch eine weitere Induktion nach einer geeignet definierten totalen Ordnung auf der endlichen Menge der möglichen μ, deren minimales Element ι_{p} ist. Außerhalb dieser Induktion lassen sich die fraglichen Beziehungen für $\mu:[0] \to [p]$ direkt beweisen. (Deswegen konnten wir bei der Definition von "schwach entartet" (3.23) zulassen).

Die Induktionsvoraussetzungen liefern dann die Behauptung für solche μ beschränkt, die eine echte Aufspaltung der Form

(3.29) $$\mu = \mu'\mu''$$

mit

(3.30 $$\overline{(x\mu')^{0}} < \mu''$$ [6]

zulassen. Da X als schwach entartet vorausgesetzt ist, läßt jedes μ mit

(3.31) $$0 < \dim \mu < p-2$$

eine solche Aufspaltung zu. Man hat dann nur noch die Fälle

(3.32) $$\dim \mu = p-1$$

und

(3.33) $$\dim \mu = p-2$$

zu untersuchen.

Im Fall (3.32) hat μ die Form

(3.34) $$\mu = \delta_{i}$$

mit $i \in [p]$. Diesen Fall erledigt man durch absteigende Induktion nach i, indem man h auf die 1-Simplizes $\left[x,\left((\delta_{i},i-1),(\iota,i-1)\right)\right]$ bzw. h^{-1} auf die 1-Simplizes

---

[6] Ist α ein Entartungsoperator, so bezeichnet $\overline{\alpha}$ den im Sinn der obigen Ordnung minimalen zu α rechtsinversen Seitenoperator.

$\left[h^*x,\left((\delta_i,i-1),(\iota,i-1)\right)\right]$ anwendet, je nachdem ob $x\delta_i$ oder $(h^*x)\delta_i$ nicht entartet ist; sind beide entartet, so hat man nichts zu beweisen.

Im Fall (3.33) hat man μ's der Form

$$\mu = \delta_i\delta_j \tag{3.35}$$

mit

$$0 \leq j < i \leq p \tag{3.36}$$

zu betrachten, wobei man voraussetzen kann, daß $x\mu$ nicht entartet ist und gilt

$$(x\delta_i)^\circ = \sigma_{j-1},\ (x\delta_j)^\circ = \sigma_{i-2}\quad . \tag{3.37}$$

Man betrachtet nun

$$h\left[x,\left((\delta_i\delta_j,m-1),(\iota,j-1)\right)\right] = \left[h^*x,\left((\nu,j-1)\right)(\iota,j-1)\right]. \tag{3.38}$$

Die vorher bereits benutzten Schlüsse versagen jetzt nur, falls ν die Form

$$\nu = \delta_{i'}\,\delta_j \tag{3.39}$$

mit

$$j < i' < i-1 \tag{3.40}$$

besitzt und gilt

$$(h^*x)\delta_{i'} = h^*(x\mu)\sigma_{j-1}\ ,\ (h^*x)\delta_j = h^*(x\mu)\sigma_{i'-2+e} \tag{3.41}$$

mit $e \in [1]$.

Nun zeigt aber eine einfache, jedoch langwierige Abzählung, daß es unter diesen Voraussetzungen in GX mehr 1-Simplizes gibt, die in $(x\mu,j-1)$ beginnen und in (x,i') enden, als solche die in $(x\mu,j-1)$ beginnen und in (x,i) enden, während in GY von den in $((h^*x)\mu,j-1)$ beginnenden 1-Simplizes mehr in (h^*x,i) als in (h^*x,i') enden. Da h ein semisimplizialer Isomorphismus ist, kann dieser Fall also nicht eintreten.

Literatur

[1] FINNEY, R.L.: The Insufficiency of Barycentric Subdivision. Michigan Math. J. 12, 263-272 (1965).

[2] FRITSCH, R.: Zur Unterteilung semisimplizialer Mengen. I. Math. Z. 108, 329-367 (1969).

[3] FRITSCH, R.: Some Remarks on S.Weingram: On the Triangulation of a Semisimplicial Complex. Illinois J. Math. 14, 529-535 (1970).

[4] KAN, D.M.: On CSS-Complexes. Amer. J. Math. 79, 449-476 (1957).

[5] LAMOTKE, K.: Semisimpliziale algebraische Topologie. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1968.

[6] SEGAL, J.: Isomorphic Complexes. Bull.Amer.Math.Soc. 71, 571-572 (1965).

Rudolf Fritsch

D 775 Konstanz

Universität Fachbereich Mathematik

(Eingegangen am 23. April 1971)