Relative semisimpliziale Approximation

WERNER BOS zum Gedächtnis

Von

RUDOLF FRITSCH

Es sei $A \subset X$ ein Paar von semisimplizialen Mengen. Eine *A enthaltende Unterteilung X' von X* ist eine semisimpliziale Menge X' zusammen mit einem Homöomorphismus $h : |X'| \to |X|$, derart, daß $|X'|$ als Unterteilung von $|X|$ im Sinne von [7] § 9 aufgefaßt werden kann, A semisimpliziale Teilmenge von X' ist und gilt

(1) $\qquad h/|A| = (|A| \subset |X|)$.

Satz 1. *Sei $A \subset X$ ein Paar semisimplizialer Mengen mit endlichem*[1]) *X; ferner sei Y eine beliebige semisimpliziale Menge und $f : |X| \to |Y|$ eine stetige Abbildung mit*

(2) $\qquad f/|A| = |g|$

für eine semisimpliziale Abbildung $g : A \to Y$. Dann gibt es eine A enthaltende Unterteilung X' von X und eine semisimpliziale Abbildung $f' : X' \to Y$ mit

(3) $\qquad |f'| \simeq f \text{ rel. } |A|$.

Für simpliziale Komplexe findet sich dieser Satz z. B. in [8]; Rourke und Sanderson haben eine entsprechende Aussage für simpliziale Mengen[2]) bewiesen ([6] Theorem 5.1). Die semisimpliziale Approximation wurde z. T. bereits von Kan in [4] behandelt (vgl. dazu den Hinweis nach Satz 3).

Aussagen über die Existenz "A enthaltender Unterteilungen von X“ liefert

Satz 2. *Seien* n *eine natürliche Zahl und das Quadrat*

(4)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sd}^{\mathrm{n}} A \arrow[r, "\mathrm{d}^{\mathrm{n}} A"] \arrow[d, "\mathrm{Sd}^{\mathrm{n}}(A \subset X)"'] & A \arrow[d, "{}_{\mathrm{n}} i"] \\ \mathrm{Sd}^{\mathrm{n}} X \arrow[r, "{}_{\mathrm{n}} l"'] & {}_{\mathrm{n}} X \end{tikzcd}$$

ein Pushout. Dann gibt es einen Homöomorphismus ${}_{\mathrm{n}}h : |{}_{\mathrm{n}}X| \to |X|$ mit

(5) $\qquad {}_{\mathrm{n}}h \simeq |{}_{\mathrm{n}}r| \text{ rel. } |A|$,

derart, daß $|{}_{\mathrm{n}}X|$ als Unterteilung von $|X|$ aufgefaßt werden kann.

---

[1]) Da die Inklusion $|A \cup X^n| \subset |X|$ für jedes n die Homotopieerweiterungseigenschaft ([1], 1.2) hat, ergibt ein leichter Induktionsschluß, daß die Behauptung von Satz 1 auch für unendliche X gilt.

[2]) Zur Terminologie vgl. [2], in [6] heißen die simplizialen Mengen „Δ-sets“.

(Hier bezeichnet Sd^{n} die in [4] § 7 definierte n-fache Normalunterteilung und $\mathrm{d}^{\mathrm{n}}: \mathrm{Sd}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{Id}$ die zugehörige natürliche Transformation; ${}_{\mathrm{n}}r : {}_{\mathrm{n}}X \to X$ ist die durch die Gleichung

$$(6) \qquad {}_{\mathrm{n}}r \circ {}_{\mathrm{n}}l = \mathrm{d}^{\mathrm{n}} X$$

eindeutig bestimmte semisimpliziale Abbildung.)

Wir beweisen diesen Satz durch vollständige Induktion nach n.

Sei zunächst n = 1. Für jedes $x \in X_q$ und jedes q bezeichne $c_x : \Delta[q] \to X$ die charakteristische Abbildung und $l_x : \Delta_q \to \Delta_x$ den surjektiven Teil von $|{}_1 l \circ \mathrm{Sd}^{\mathrm{n}} c_x|$. Wir definieren ferner Abbildungen $h_x : \Delta_q \to \Delta_q$ wie in [3] unter der Abänderung der Definition der Operatoren ϱ_j (falls $x\mu_j \in A$): In [3] bezeichnet ϱ_j den surjektiven Operator in der kanonischen Darstellung von $x\mu_j$. Ist nun $x\mu_j \in A$, so setzen wir statt dessen $\varrho_j := ([\dim \mu_j] \to [0])$; entsprechend sind natürlich die ϱ_{kj} und $\tilde{\varrho}_{kj}$ abzuändern. Mit diesen Festsetzungen gilt Bedingung (**A**) aus [3] und Bedingung (**B**) aus [3] sinngemäß für nicht entartete x mit $x \notin A$; man beweist das genauso wie in [3]. Ferner ist aber die Transformation $h_x \circ l_x^{-1}$ einwertig und damit stetig; insbesondere ist für $x \in A$

$$(7) \qquad h_x \circ l_x^{-1} = \mathrm{id}\,.$$

Diese Aussagen zusammen liefern, daß die Familie der Abbildungen $h_x \circ l_x^{-1}$ einen Homöomorphismus ${}_1h : |{}_1X| \to |X|$ induziert. Die gesuchte Homotopie erhält man nun noch aus der Tatsache, daß auch die Transformationen $((1-t)\,h_x + t\,d_x) \circ l_x^{-1}$ für alle $t \in [0, 1]$ einwertig und damit stetig sind.

Zum Schluß von n auf n + 1 betrachten wir das Diagramm

$$(8) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Sd}^{\mathrm{n+1}} A \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sd}^{\mathrm{n}} A \arrow[r] \arrow[d, tail] & A \arrow[d, tail] \\ \mathrm{Sd}^{\mathrm{n+1}} X \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{dSd}^{\mathrm{n}}X"'] & \tilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{r}"] & {}_{\mathrm{n+1}}X \arrow[d] \\ & \mathrm{Sd}^{\mathrm{n}} X \arrow[r, "{}_{\mathrm{n}}l"'] & {}_{\mathrm{n}}X \end{tikzcd}$$

Es ist so konstruiert, daß die drei Quadrate Pushouts sind. Der bereits bewiesene Fall n = 1 zeigt, daß $\tilde{X}$ eine $\mathrm{Sd}^{\mathrm{n}} A$ enthaltende Unterteilung von $\mathrm{Sd}^{\mathrm{n}} X$ ist, vermöge eines Homöomorphismus $\tilde{h} : |\tilde{X}| \to |\mathrm{Sd}^{\mathrm{n}} X|$, für den gilt:

$$(9) \qquad \tilde{h} \simeq |\tilde{r}| \text{ rel. } |\mathrm{Sd}^{\mathrm{n}} A|\,.$$

Sei $\tilde{h}_t$ eine solche Homotopie mit $\tilde{h}_0 = \tilde{h}$ und $\tilde{h}_1 = |\tilde{r}|$. Wir definieren nun für alle $t \in [0, 1]$ stetige Abbildungen g_t durch die Forderung, daß die Quadrate

$$(10) \qquad \begin{tikzcd} |\tilde{X}| \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{h}_t"'] & |{}_{\mathrm{n+1}}X| \arrow[d, "g_t"] \\ |\mathrm{Sd}^{\mathrm{n}} X| \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Pushouts sind. Aus der Tatsache, daß dann für jedes t das äußere Rechteck in dem

Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
{|\mathrm{Sd^n} A|} \arrow[rrr] \arrow[d] \arrow[dr] & & & {|A|} \arrow[dl] \arrow[d] \\
{|\tilde{X}|} \arrow[d, "\tilde{r}"'] & {|\tilde{X}|} \arrow[r] \arrow[dl, "\tilde{h}_t"] & {|{}_{\mathrm{n+1}}X|} \arrow[dr, "g_t"'] & {|{}_{\mathrm{n+1}}X|} \arrow[d] \\
{|\mathrm{Sd^n} X|} \arrow[rrr] & & & \bullet
\end{tikzcd}
\tag{11}
$$

ein Pushout ist, ergibt sich, daß die g_t alle das gleiche Ziel $|{}_{\mathrm{n}}X|$ haben und, da sie stetig von t abhängen, eine Homotopie rel. $|A|$ bilden. Da $\tilde{h}_0$ ein Homöomorphismus ist, ist auch g_0 ein Homöomorphismus und die Zusammensetzung ${}_{\mathrm{n+1}}h := {}_{\mathrm{n}}h \circ g_0$ ist ein Homöomorphismus der gewünschten Art.

Zum Beweis von Satz 1 benötigen wir nun noch

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 1 *gibt es eine natürliche Zahl* n *und eine semisimpliziale Abbildung* $f'' : \mathrm{Sd^n} X \to Y$ *mit*

$$|f''| \simeq f \circ |\mathrm{d^n} X| \text{ rel. } |\mathrm{Sd^n} A| . \tag{12}$$

Für $A = \emptyset$ ist das einer der Kanschen Approximationssätze (Theorem (8.5) in [4]). Wir führen den Beweis durch Verfeinerung der Argumente in [4] und verwenden dabei die dortige Notation. Auf Grund des Satzes in II 5.8 von [5] gibt es jedenfalls eine semisimpliziale Abbildung $\tilde{F} : X \to \mathrm{Ex}^\infty Y$ mit

$$|\tilde{F}| \simeq |\mathrm{e}^\infty Y| \circ f \text{ rel. } |A| . \tag{13}$$

Aus der Endlichkeit von X folgt nun ähnlich wie in [4], p. 463, die Existenz einer natürlichen Zahl n und einer semisimplizialen Abbildung $F : X \to \mathrm{Ex^n}\, Y$ mit

$$|F| \simeq |\mathrm{e^n}\, Y| \circ f \text{ rel. } |A| . \tag{14}$$

Komposition mit $\mathrm{d^n} X$ liefert jetzt

$$|F \circ \mathrm{d^n} X| \simeq |\mathrm{e^n}\, Y| \circ f \circ |\mathrm{d^n} X| \text{ rel. } |\mathrm{Sd^n} A| . \tag{15}$$

Für die linke Seite können wir wegen der Natürlichkeit von $\mathrm{d^n}$ schreiben

$$F \circ \mathrm{d^n} X = \mathrm{d^n\, Ex^n}\, Y \circ \mathrm{Sd^n} F . \tag{16}$$

Nun bezeichne $\varepsilon Y : \mathrm{Sd^n Ex^n}\, Y \to Y$ die Coeins der Adjunktion $\mathrm{Ex^n} \to \mathrm{Sd^n}$, d.h. die semisimpliziale Abbildung, die unter dem Adjunktionsisomorphismus in die Identität von $\mathrm{Ex^n}\, Y$ übergeht. Weil $\mathrm{d^n}\, Y$ unter dem Adjunktionsisomorphismus in $\mathrm{e^n}\, Y$ übergeht ([4] Lemma 7.2) gilt

$$\mathrm{d^n}\, Y = \varepsilon Y \circ \mathrm{Sd^n\, e^n}\, Y \tag{17}$$

und daher wegen der Natürlichkeit von $\mathrm{d^n}$

$$\mathrm{d^n Ex^n}\, Y \circ \mathrm{Sd^n\, e^n}\, Y = \mathrm{e^n}\, Y \circ \mathrm{d^n}\, Y = \mathrm{e^n}\, Y \circ \varepsilon Y \circ \mathrm{Sd^n e^n}\, Y . \tag{18}$$

Aus Lemma (7.4) und Lemma (7.5) in [4] folgt, daß $|\mathrm{Sd^n e^n}\, Y|$ eine Homotopieäquivalenz ist. Da $\mathrm{Sd}^n e^n Y$ außerdem injektiv und damit $|\mathrm{Sd}^n e^n Y|$ eine Cofaserung ist, ist $|\mathrm{Sd}^n e^n Y|$ eine Homotopieäquivalenz unter $|\mathrm{Sd}^n Y|$ ([1], (2.29)), woraus folgt

(19) $$|d^n \mathrm{Ex}^n Y| \simeq |e^n Y| \circ |\varepsilon Y| \text{ rel. } |\mathrm{Sd}^n Y|.$$

Komposition mit $|\mathrm{Sd}^n F|$ liefert nun

(20) $$|d^n \mathrm{Ex}^n Y \circ \mathrm{Sd}^n F| \simeq |e^n Y \circ \varepsilon Y \circ \mathrm{Sd}^n F| \text{ rel. } |\mathrm{Sd}^n A|.$$

(15), (16) und (20) zusammen ergeben

(21) $$|e^n Y| \circ |\varepsilon Y \circ \mathrm{Sd}^n F| \simeq |e^n Y| \circ f \circ |d^n X| \text{ rel. } |\mathrm{Sd}^n A|.$$

Weil $|e^n Y|$ eine Homotopieäquivalenz unter $|Y|$ ist ([1], (2.29)), folgt

(22) $$|\varepsilon Y \circ \mathrm{Sd}^n F| \simeq f \circ |d^n L| \text{ rel. } |\mathrm{Sd}^n A|.$$

Also ist $f'' := \varepsilon Y \circ \mathrm{Sd}^n F$ die gesuchte Approximation zu f.

Wir kommen nun zum Beweis von Satz 1. Das gesuchte f' ist durch das Diagramm

(23) $$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sd}^n A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \arrow[ddr, "g"] & \\
\mathrm{Sd}^n X \arrow[r] \arrow[drr, "f''"'] & {}_nX \arrow[dr, "f'"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

gegeben und eindeutig bestimmt (n, f'' wie in Satz 3). Da die geometrische Realisierung Pushouts erhält, liefert die Homotopie in Satz 3 eine Homotopie

(24) $$|f'| \simeq f \circ |{}_n r| \text{ rel. } |A|.$$

Zusammen mit (5) ergibt das die Behauptung (3).

Literaturverzeichnis

[1] T. TOM DIECK, K. H. KAMPS und D. PUPPE, Homotopietheorie. Lecture Notes in Math. 78, Berlin-Heidelberg-New York 1970.

[2] R. FRITSCH, Simpliziale und semisimpliziale Mengen. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 20, 159—168 (1972).

[3] R. FRITSCH und D. PUPPE, Die Homöomorphie der geometrischen Realisierungen einer semisimplizialen Menge und ihrer Normalunterteilung. Arch. Math. 18, 508—512 (1967).

[4] D. M. KAN, On c.s.s. complexes. Amer. J. Math. 79, 449—476 (1957).

[5] K. LAMOTKE, Semisimpliziale algebraische Topologie. Berlin-Heidelberg-New York 1968.

[6] C. P. ROURKE and B. J. SANDERSON, Δ-sets I: homotopy theory. Quart. J. Math. Oxford (2), 22, 321—338 (1971).

[7] J. H. C. WHITEHEAD, Combinatorial homotopy, I. Bull. Amer. Math. Soc. 55, 213—245 (1949).

[8] E. C. ZEEMANN, Relative simplicial approximation. Proc. Cambridge Phil. Soc. 60, 39—43 (1964).

Eingegangen am 8. 12. 1972

Anschrift des Autors:

Rudolf Fritsch
Fachbereich Mathematik, Universität Konstanz, D-775 Konstanz