Mathematisch-Physikalische

Semesterberichte

Zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität

Begründet 1932 von H. Behnke und O. Toeplitz

NEUE FOLGE • BAND XXI

GÖTTINGEN · VANDENHOECK & RUPRECHT · 1974

Gesamtherstellung: Hubert & Co., Göttingen

INHALT

Abhandlungen

Buchbesprechungen

Synthetische Einbettung Desarguesscher Ebenen in Räume

Von RUDOLF FRITSCH in Konstanz

Einleitung

Eine (affine oder projektive) Inzidenzebene kann bekanntlich genau dann in einen entsprechenden (3-dimensionalen) Raum eingebettet werden, wenn in ihr der Satz von DESARGUES gilt. Der Schluß von der Einbettbarkeit auf die Gültigkeit des Satzes von DESARGUES ist sehr einfach und läßt sich rein synthetisch führen ([HD] § 46). Für die Umkehrung benutzt man normalerweise, daß jede desarguessche Ebene bis auf Isomorphie eine Ebene über einem Schiefkörper ist; man kann sie deshalb in den zu diesem Schiefkörper gehörenden Raum einbetten.

Wir wollen hier einen rein synthetischen Beweis dieser Tatsache im affinen Fall angeben[1]). Ein solcher ist auch in [HD] § 52 angedeutet, aber die hier vorgeschlagene Konstruktion läßt sich vielleicht besser motivieren (s. § 1) und in den Einzelheiten einfacher ausführen. Das wesentliche Hilfsmittel dafür bildet der „Fundamentalsatz der affinen Geometrie" (vgl. etwa [R] 7,3) in einer geeigneten Formulierung (s. 3.1.).

Unsere Konstruktion ist *affin,* d.h. den Verhältnissen in der affinen Ebene angepaßt, und liefert einen affinen Raum. Dabei gehen wir davon aus, daß die affinen Räume durch HILBERTs Verknüpfungsaxiome (Satz I–VIII) und das starke Parallelenaxiom (Satz IX) charakterisiert sind, die auf den Grundbegriffen Punkt, Gerade, Ebene aufbauen. Da sich die Ebenen besonders leicht beschreiben lassen, ist ein solches Axiomensystem bequemer als eines der modernen, in dem der Begriff der Ebene abgeleitet erscheint (s. z.B. [LE] oder [T] § 50).

Angeregt wurden diese Überlegungen durch einen Vortrag von J. ANDRÉ in der "Fourth Denison Conference on Projective Geometry and Related Topics" (6.–8. April 1967) über Einbettungen projektiver Räume und eine von E. STIEGELER angefertigte Staatsexamensarbeit. ANDRÉ befaßt sich mit der synthetischen Konstruktion einer Einbettung eines endlich-dimensionalen *projektiven* Raumes in einen höherdimensionalen; das ist ein wesentlich kom-

[1]) Zur Problematik dieses Unterfangens vgl. [LV] S. 46 letzter Absatz.

plizierteres Problem, vor allem, wenn man den Umweg über den affinen Fall, der z.B. in [HD] § 52 eingeschlagen wird, vermeiden will. Man kann mit unseren Methoden auch affine Räume in höherdimensionale einbetten, aber das geht über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus (s. [F]).

Der Verfasser dankt Herrn ANDRÉ für die Überlassung seines Vortragsmanuskriptes, Herrn LAUB für die Mithilfe bei der Anfertigung von Figur 1 und Herrn PICKERT für zahlreiche Vorschläge zur Verbesserung der Darstellung.

§ 1. Motivation

1.1. In einem gegebenen 3-dimensionalen affinen Raum $\mathfrak{A}$, den wir uns der Bequemlichkeit halber in seine projektive Hülle eingebettet denken, sei eine Ebene A als Grundebene und eine A echt schneidende Gerade $\mathfrak{z}$ als „Höhenachse“ („Hohenzähler“) ausgezeichnet; ferner sei eine Parallelprojektion $\pi : \mathfrak{A} \to A$ gewählt, die $\mathfrak{z}$ bijektiv auf eine Gerade $z \subset A$ abbildet. $\rho : \mathfrak{A} \to \mathfrak{z}$ bezeichne die Abbildung, die einen Punkt des Raumes auf den Schnittpunkt der zu A parallelen Ebene, die ihn enthält, mit $\mathfrak{z}$ abbildet. Dann ist $\mathfrak{p} \mapsto (\pi(\mathfrak{p}), (\pi \circ \rho)(\mathfrak{p}))$ eine Bijektion von $\mathfrak{A}$ auf $A \times z$, d.h. *wir können die Punkte des Raumes mit den Elementen von $A \times z$ identifizieren.* Dieses Vorgehen entspricht der in der Darstellenden Geometrie üblichen „kotierten Projektion“ [G].

1.2. Wir wollen nun überlegen, *welche Teilmengen von $A \times z$ den Ebenen in $\mathfrak{A}$ entsprechen.* Offensichtlich gehören dazu die Teilmengen der Formen $g \times z$ für eine Gerade $g \subset A$ und $A \times \{p'\}$ für einen Punkt $p' \in z$; das sind einerseits die „vertikalen“ Ebenen, d.h. diejenigen, die durch π auf eine Gerade projiziert werden, und andrerseits die zu A parallelen Ebenen in $\mathfrak{A}$.

Sei nun $\mathfrak{e}$ eine Ebene in $\mathfrak{A}$, die weder vertikal, noch zu A parallel ist. Da $\mathfrak{e}$ durch π bijektiv auf A abgebildet wird, haben wir eine Abbildung $\pi^{\#}$ von A nach $\mathfrak{e}$ mit

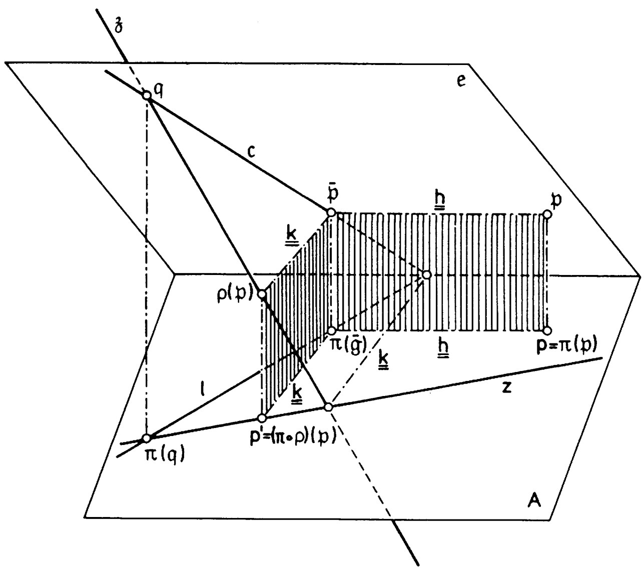
$$(1.1) \qquad (\pi \circ \pi^{\#})(p) = p$$

für alle Punkte p in A und (nach der Identifizierung der Punktmenge von $\mathfrak{A}$ mit $A \times z$)

$$(1.2) \qquad \mathfrak{e} = \{(p, p') \mid p \in A \text{ und } p' = (\pi \circ \rho \circ \pi^{\#})(p)\},$$

d.h. $\mathfrak{e}$ ist nichts anderes als die Abbildung $\pi \circ \rho \circ \pi^{\#}$, falls man Abbildungen als Paarmengen auffaßt.

$\pi \circ \rho \circ \pi^{\#}$ ist eine Abbildung der Ebene A in sich, die aber mit Hilfe räumlicher Konstruktionen definiert ist. Der Witz der folgenden Überlegungen liegt nun darin, daß diese Abbildung auch durch Konstruktionen in A allein beschrieben werden kann (Figur 1). Dazu seien ein gemeinsamer Punkt $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{e}$



Figur 1

und $\mathfrak{z}$ (eigentlich oder uneigentlich) und eine Gerade $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{q} \in \mathfrak{l}$ und $l = \pi(\mathfrak{l}) \neq z$, die nicht „Höhenlinie" von $\mathfrak{e}$, d.h. nicht parallel zu $\mathfrak{e} \cap A$ ist, fest gewählt; falls $\mathfrak{z} \not\subset \mathfrak{e}$ ist $\mathfrak{q}$ eindeutig bestimmt. Sei nun p ein beliebiger Punkt in A, $\mathfrak{p} = \pi^{\#}(p)$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ der Schnittpunkt von $\mathfrak{l}$ mit der Höhenlinie durch $\mathfrak{p}$. Dann ist

(1.3) $\qquad \pi(\bar{\mathfrak{p}}) = h_l(p)$,

wobei $\boldsymbol{h}$ die Parallelschar in $\mathfrak{A}$, die die Höhenlinien von $\mathfrak{e}$ enthält, und $\boldsymbol{h}_l$ die Parallelprojektion von A auf l in Richtung $\boldsymbol{h}$ bezeichnet. Ist $\mathfrak{p} \neq \rho(\mathfrak{p})$, so ist die Verbindungsgerade von $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\rho(\mathfrak{p})$ parallel zur Verbindungsgeraden von $A \cap \mathfrak{z}$ und $A \cap \mathfrak{l}$[2]. Bezeichnet nun noch $\boldsymbol{k}$ die Parallelschar, die diese Geraden enthält, und $\boldsymbol{k}_z$ die Parallelprojektion von A auf z in Richtung $\boldsymbol{k}$, so gilt:

(1.4) $\qquad (\pi \circ \rho \circ \pi^{\#})(p) = (\pi \circ \rho)(\mathfrak{p}) = (\boldsymbol{k}_z \circ \boldsymbol{h}_l)(p)$.

---

[2]) Man überlege sich, daß unter den genannten Voraussetzungen $A \cap \mathfrak{z} \neq A \cap \mathfrak{l}$ gelten muß und die Verbindungsgerade von $A \cap \mathfrak{z}$ und $A \cap \mathfrak{l}$ nicht parallel zu z sein kann.

Diese Gleichung ist sicher auch im Falle $\bar{\mathfrak{p}} = \rho(\mathfrak{p})$ richtig, also haben wir ganz allgemein

(1.5) $\quad \pi \circ \rho \circ \pi^{\#} = \boldsymbol{k}_z \circ \boldsymbol{h}_l,$

wobei $\boldsymbol{k}_z$ und $\boldsymbol{h}_l$ Abbildungen sind, zu deren Definition keine räumliche Betrachtung mehr notwendig ist.

Im Hinblick auf (1.2) kann man nun auch schreiben

(1.6) $\quad \mathfrak{e} = \{(p, p') \mid p \in A \text{ und } p' = (\boldsymbol{k}_z \circ \boldsymbol{h}_l)(p)\},$

d.h. $\mathfrak{e}$ ist durch die „ebenen" Daten $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}, l$ eindeutig bestimmt.

Das ist der Hintergrund unser Konstruktion (s. § 4); es ist für den Leser nützlich, im folgenden gelegentlich daran zu denken.

§ 2. Bezeichnungen

2.1. Wir gehen von einer festen desarguesschen affinen Ebene A mit Punktmenge p [3]) und Geradenmenge G aus. Die Geraden, also die Elemente von G, sollen Teilmengen von P sein. Als Variable für Punkte und Geraden, d.h. Elemente von P bzw. G, verwenden wir kleine lateinische Buchstaben $p, q, r, \ldots$ bzw. $g, h, k, \ldots$ [4]).

2.2. Sind p, q verschiedene Punkte in E, so bezeichnet pq ihre Verbindungsgerade. Sind g, h verschiedene Geraden in E, so bezeichnet gh ihren (eigentlichen oder uneigentlichen) Schnittpunkt; dazu stellen wir uns die Ebene A in ihre projektive Hülle eingebettet vor.

2.3. Mit fetten, kleinen, lateinischen Buchstaben $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}, \ldots$ [4]) bezeichnen wir die Richtungen in A, d.h. die Äquivalenzklassen paralleler Geraden, und mit $\boldsymbol{G}$ die Menge der Richtungen. Ist g eine Gerade, so bezeichnet (g) die Richtung, die g enthält.

2.4. Ist $\boldsymbol{h}$ eine Richtung und l eine Gerade mit $l \notin \boldsymbol{h}$, so bezeichnet $\boldsymbol{h}_l$ die Parallelprojektion von A auf l in Richtung $\boldsymbol{h}$, die wir als Abbildung von P nach P auffassen. Verwenden des Symbols $\boldsymbol{h}_l$ soll stets $l \notin \boldsymbol{h}$ voraussetzen.

---

[3]) Von nun an unterscheiden wir in unserer Darstellung zwischen der affinen Ebene A und ihrer Punktmenge P, was wir in § 1 nicht getan haben.

[4]) An den Buchstaben können zusätzlich Indizes und sonst übliche Verzierungen wie $-$, $'$, $''$, ... angebracht sein.

§ 3. Der Fundamentalsatz der affinen Geometrie

3.1. z sei eine beliebige, im folgenden aber festgehaltene Gerade.

3.2. (*Fundamentalsatz der affinen Geometrie*)

(a) *Zu* $p_1, p_2 \in P$ *mit* $p_1 \neq p_2$ *und* $p'_1, p'_2 \in z$ *gibt es* $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}, l$ *mit* $l \neq z$ *und*

$$(3.1) \qquad p'_i = (\boldsymbol{k}_z \circ \boldsymbol{h}_l)(p_i)$$

für $i = 1, 2$.

(b) *Bei festem* $\boldsymbol{h}, \bar{\boldsymbol{h}}, \boldsymbol{k}, \bar{\boldsymbol{k}}, l, l$ *folgt aus*

$$(3.2) \qquad (\boldsymbol{k}_z \circ \boldsymbol{h}_l)(p) = (\bar{\boldsymbol{k}}_z \circ \bar{\boldsymbol{h}}_{\bar{l}})(p)$$

für $p = p_1$ *und* $p = p_2$ *mit* $p_1 \neq p_2$ (3.2) *für alle* $p \in p_1p_2$.

3.3. Die Existenzaussage (a) gilt in jeder affinen Ebene, deswegen wird oft die Eindeutigkeitsaussage (b) allein als „Fundamentalsatz" bezeichnet. Sie ist äquivalent zum Satz von Desargues. Unsere Formulierung ist einerseits schwächer als die übliche, weil nur Projektivitäten (s. [HD] § 26) der Länge 2 mit fester Zielgerade z in Betracht gezogen werden, andererseits allgemeiner, weil $p_1p_2 = z$ sowie $p_1p_2 \in \boldsymbol{h}$ und $l \in \boldsymbol{k}$ zugelassen sind. In den beiden letztgenannten Fällen ist (b) jedoch trivial. Ansonsten hat man $p_1p_2 \neq z$ und $p_1p_2 = z$ zu unterscheiden; wir wollen den Beweis kurz andeuten.

3.4. Ist $p_1p_2 \neq z$, also o.w.E.[5]) $p_1 \notin z$, so beweist man zunächst mit Hilfe des Satzes von Desargues: Bei gegebenem $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}, l, \bar{l}$ mit

$$(3.3) \qquad z \neq \bar{l} \neq l$$

und

$$(3.4) \qquad \bar{l}z \neq (\boldsymbol{k}_z \circ \boldsymbol{h}_l)(\bar{l}(p_1p_2))$$

existieren $\bar{\boldsymbol{h}}$ und $\bar{\boldsymbol{k}}$ mit (3.2) für alle $p \in p_1p_2$, wenn zusätzlich eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$(3.5) \qquad lz = \bar{l}z$$

oder

$$(3.6) \qquad l(p_1p_2) = \bar{l}(p_1p_2).$$

(Figur 2 zeigt den Fall $lz = \bar{l}z$).

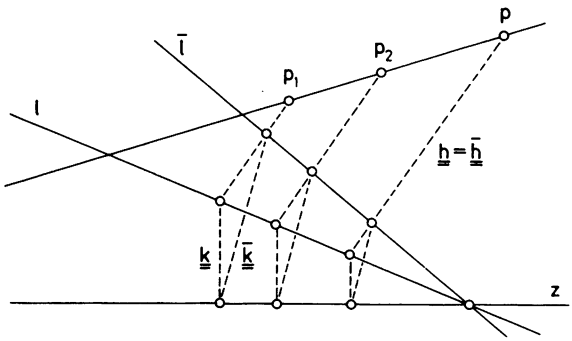
---

[5]) Ohne wesentliche Einschränkung.

Durch mehrfache Anwendung dieser Tatsache reduziert man die Behauptung auf den Fall $l = \bar{l}$ mit $p_1 \in l$ und dann ist sie trivial.

3.5. Ist $p_1 p_2 = z$, so folgt aus dem Satz von Desargues (bis auf den trivialen Ausnahmefall mit

(3.7) $\quad k_z \circ h_l(p) = p$



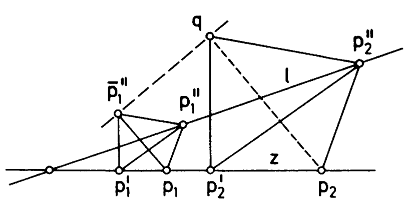
Figur 2

für alle $p \in z$), daß (3.5) gilt (vgl. Figur 3a): o.w.E. kann man $k \neq \bar{k}$ und $p_i \notin l$ für $i = 1, 2$ voraussetzen; sei p_i' durch (3.1) definiert und

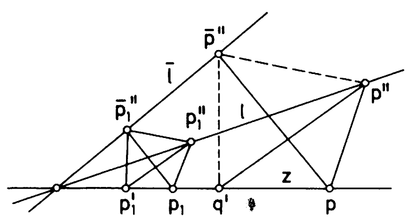
(3.8) $\quad p_i'' = h_l(p_i)$

für $i = 1, 2$, sowie

(3.9) $\quad \bar{p}_1'' = \bar{h}_{\bar{l}}(p_1)$;



Figur 3a



Figur 3b

bezeichnet nun q den Schnittpunkt der Parallelen zu $p_1'\bar{p}_1''$ durch p_2' mit der Parallelen zu $p_1''\bar{p}_1''$ durch p_2'', so folgt aus der Umkehrung des Satzes von Desargues die Kollinearität von lz, $\bar{p}_1''$ und q; der Satz von Desargues selber liefert dann $p_2 q \in \bar{h}$ und daraus folgt

(3.10) $\quad q = \bar{h}_{\bar{l}}(p_2)$;

also ist $q \in \bar{l}$ bzw.

(3.11) $(lz)\, q = \bar{p}_1''\, q = \bar{l}$,

das ist gerade die Aussage (3.5).

Für beliebiges $p \in p_1 p_2$ erhält man nun die Gleichung (3.2) folgendermaßen (vgl. Figur 3b): sei

(3.12) $p'' = \boldsymbol{h}_l(p)$,

(3.13) $p' = \boldsymbol{k}_z(p'') = \boldsymbol{k}_z \circ \boldsymbol{h}_l(p)$

und

(3.14) $\bar{p}'' = \bar{\boldsymbol{h}}_{\bar{l}}(p)$;

aus dem Satz von Desargues folgt nun zunächst $p''\bar{p}'' \parallel p_1''\bar{p}_1''$ und damit $p'\bar{p}'' \parallel p_1'\bar{p}_1''$; das bedeutet aber

(3.15) $p' = \bar{\boldsymbol{k}}_z(\bar{p}'') = \bar{\boldsymbol{k}}_z \circ \bar{\boldsymbol{h}}_{\bar{l}}(p)$.

3.6. Im Zusammenhang mit dem Fundamentalsatz wollen wir noch festhalten: *Gilt die Gleichung* (3.3) *bei festen* $\boldsymbol{h}, \bar{\boldsymbol{h}}, \boldsymbol{k}, \bar{\boldsymbol{k}}, l, \bar{l}$ *für drei nichtkollineare Punkte* p, *so gilt sie für alle Punkte* p *der Ebene.*

Liegen auf jeder Geraden der Ebene mindestens drei Punkte, so ergibt sich diese Aussage durch mehrfache Anwendung von (b). Ist A eine Ebene der Ordnung 2, gibt es also nur 4 Punkte, so folgt die Behauptung daraus, daß die Zahl der Urbilder eines Punktes von z bezüglich einer Abbildung der Form $\boldsymbol{k}_z \circ \boldsymbol{h}_l$ gerade ist.

§ 4. Definition der Grundbegriffe

4.1. Wir wollen einen (3-dimensionalen) affinen Raum $\mathfrak{A}$ konstruieren, in den A eingebettet werden kann.

4.2. Als Punkte von $\mathfrak{A}$ nehmen wir die Elemente von $\mathfrak{P} = P \times z$. Als Variable für sie verwenden wir kleine deutsche Buchstaben $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \ldots$[4]). Mit „Spur" und „Höhe" bezeichnen wir die Projektion von $\mathfrak{P}$ auf den ersten bzw. zweiten Faktor, d.h. die Abbildungen $(p, p') \mapsto p$ bzw. $(p, p') \mapsto p'$ von $\mathfrak{P}$ auf P.

4.3. Als Ebenen von $\mathfrak{A}$ nehmen wir die Teilmengen von der Form

(4.1) $g \times z$

für ein $g \in G$ oder

(4.2) $\langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}, l\rangle =_{\text{def}} \{(p, p') \mid p \in P,\ p' = (\boldsymbol{k}_z \circ \boldsymbol{h}_l)(p)\}$, wobei $h, k \in G$, $l \in G$ mit $l \notin h$, $z \notin k$, $l \neq z$. Falls man Abbildungen als Paarmengen auffaßt, ist $\langle h, k, l\rangle$ nichts anderes als die Abbildung $k_z \circ h_l$. Mit $\mathfrak{E}$ bezeichnen wir die Menge dieser Ebenen; als Variable für Ebenen verwenden wir auch kleine deutsche Buchstaben $\mathfrak{e}$, ...[4]). Die Ebenen der Form $g \times z$ nennen wir vertikale Ebenen.

4.4. Als Geraden von $\mathfrak{A}$ nehmen wir die Teilmengen von $\mathfrak{P}$ der Form

$$\{p\} \times z \tag{4.3}$$

für ein $p \in P$ oder

$$\mathfrak{e}_1 \cap \mathfrak{e}_2, \tag{4.4}$$

wobei $\mathfrak{e}_1$ eine Ebene der Form (4.1) und $\mathfrak{e}_2$ eine Ebene der Form (4.2) bezeichnet. Mit $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir die Menge dieser Geraden; als Variable für Geraden verwenden wir kleine deutsche Buchstaben $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, ...[4]). Die Geraden der Form (4.3) nennen wir vertikale Geraden. Die Geraden der Form (4.4) können auch in der Form

$$\{(p, p') \mid p \in g,\ p' = (k_z \circ h_l)(p)\} \tag{4.5}$$

dargestellt werden, wobei $g \in G$, $h, k \in G$, $l \in g$ mit $l \notin h$, $z \notin k$, $l \neq z$; falls man Abbildungen als Paarmengen auffaßt, ist die durch (4.5) dargestellte Gerade nichts anderes als die Einschränkung von $k_z \circ h_l$ auf g.

4.5. A kann auf mannigfacher Weise in $\mathfrak{A}$ eingebettet werden; z.B. induziert für jedes $q \in z$ die Abbildung $p \mapsto (p, q)$ von P in $\mathfrak{P}$ eine Einbettung.

§ 5. Die ebenen Axiome der Verknüpfung

5.1. In diesem Abschnitt weisen wir nach, daß die von Hilbert als die ebenen Axiome der Verknüpfung bezeichneten Aussagen (Satz I–III) in dem von uns konstruierten Raum $\mathfrak{A}$ erfüllt sind.

5.2. Satz I. *Zu zwei Punkten (p, p'), (q, q') gibt es stets eine Gerade, die beide enthält.*

Ist $p = q$, so enthält die vertikale Gerade $\{p\} \times z$ beide Punkte. Ist $p \neq q$, so liefert die Existenzaussage des Fundamentalsatzes 3.1. eine Ebene $\langle h, k, l\rangle$, die beide Punkte enthält und

$$(pq \times z) \cap \langle h, k, l\rangle \tag{5.1}$$

ist eine Gerade der gewünschten Art.

5.3. Satz II. *Zu zwei Punkten* (p, p'), (q, q') *mit* $(p, p') \neq (q, q')$ *gibt es nicht mehr als eine Gerade, die beide enthält.*

5.4. Vor dem Beweis von Satz II bemerken wir, daß aus $(p, p') \in \langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{l} \rangle$, $(q, q') \in \langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{l} \rangle$ und $p = q$ folgt

$$(5.2) \qquad p' = (\boldsymbol{k}_z \circ \boldsymbol{h}_l)(p) = (\boldsymbol{k}_z \circ \boldsymbol{h}_l)(q) = q'.$$

5.5. Wir kommen nun zum Beweis von Satz II. Aus 5.4. ergibt sich, daß im Falle $p = q$ nur eine vertikale Gerade und deshalb nur $\{p\} \times z$ beide Punkte enthalten kann. Ist $p \neq q$, so folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeitsaussage des Fundamentalsatzes 3.2. Die Einschränkung der Abbildung $\boldsymbol{k}_z \circ \boldsymbol{h}_l$ auf pq hängt nur von den Bildern p', q' der Punkte p, q bei $\boldsymbol{k}_z \circ \boldsymbol{h}_l$ ab und nicht von der speziellen Wahl von $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$.

5.6. Unmittelbar klar ist auf Grund unserer Definitionen das ebene Reichhaltigkeitsaxiom.

Satz III: *Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.*

§ 6. Die räumlichen Axiome der Verknüpfung

6.1. Den meisten Aufwand erfordert das erste räumliche Verknüpfungsaxiom.

Satz IV. *Zu irgend drei Punkten* (p_i, p_i'), $i = 1, 2, 3$, *gibt es stets eine Ebene, die sie enthält.*

6.2. Zum Nachweis dieses Axioms erledigen wir zunächst einige triviale Spezialfälle in 6.3. und 6.4. Danach können wir uns auf den Fall beschränken, daß die Geraden in A mindestens drei Punkte enthalten (s. 6.5.). Mit Hilfe des in 6.6. eingeführten Begriffes der affinen Hülle einer Punktmenge läßt sich dann das allgemeine Problem auf zwei einfache Fälle zurückführen (s. 6.8., 6.10., 6.11.).

6.3. Liegen die p_i, $i = 1, 2, 3$ alle in einer Geraden g, so ist $g \times z$ eine Ebene, die die drei Punkte enthält. Wir können also voraussetzen, daß die p_i nicht kollinear sind.

6.4. Ist $p_1' = p_2'$, so setzen wir $\boldsymbol{h} = (p_1 p_2)$ und wählen eine Richtung $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{h}$ mit $z \notin \boldsymbol{k}$. Bezeichnet h_i die Gerade durch p_i in $\boldsymbol{h}$ und k_i die Gerade durch p_i' in $\boldsymbol{k}$, so ist nach 6.3. $h_1 \neq h_3$ und damit $h_1 k_1 \neq h_3 k_3$. Setzen wir nun $l = (h_1 k_1)(h_3 k_3)$, so enthält $\langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}, l \rangle$ die drei betrachteten Punkte.

6.5. Aus Symmetriegründen können wir nun die p_i' als paarweise verschieden voraussetzen. Dann enthält aber z und damit jede Gerade in A mindestens drei Punkte, was für die folgenden Überlegungen wichtig ist.

6.6. Sei $\mathfrak{b}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathfrak{P}$. Die *affine Hülle* $\bar{\mathfrak{b}}$ *von* $\mathfrak{b}$ ist die kleinste Teilmenge von $\mathfrak{P}$, die $\mathfrak{b}$ und mit je zwei Punkten ihre Verbindungsgerade enthält. *Ist eine Teilmenge* $\mathfrak{b}$ *von* $\mathfrak{P}$ *in einer Ebene* $\mathfrak{e}$ *enthalten, so auch ihre affine Hülle* $\bar{\mathfrak{b}}$. Das folgt aus:

6.7. Satz V. *Lieben zwei Punkte in einer Ebene* $\mathfrak{e}$, *so liegt auch ihre Verbindungsgerade in* $\mathfrak{e}$.

Ist die Verbindungsgerade vertikal, so ist $\mathfrak{e}$ nach 5.4. vertikal. Andernfalls kann die Verbindungsgerade als Durchschnitt von $\mathfrak{e}$ und einer weiteren Ebene dargestellt werden (vgl. 5.2.).

6.8. Zum weiteren Beweis von Satz IV stellen wir nun fest, daß wir von drei Punkten ausgehen können, in deren affiner Hülle die ursprünglich gegebenen liegen. Da auf jeder Geraden mindestens drei Punkte liegen sollen, bedeutet das, daß wir $p_1 \notin z$, $p_2 p_3 = z$ annehmen können.

6.9. Die Menge

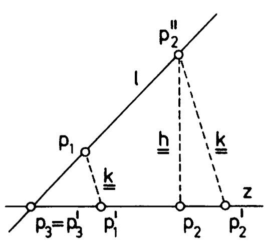
(6.1) $\quad \mathfrak{z} = \{(r, r) \mid r \in z\}$

ist eine Gerade; ist $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{G}$ mit $z \notin \boldsymbol{h}$ und $l \in g$ mit $z \neq l \notin \boldsymbol{h}$, so gilt nämlich

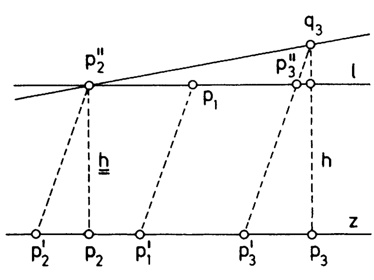
(6.2) $\quad \mathfrak{z} = (z \times z) \cap \langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}, l \rangle$.

6.10. Hat nun die Verbindungsgerade $\mathfrak{g}$ von (p_2, p_2') und (p_3, p_3') einen Punkt mit $\mathfrak{z}$ gemeinsam, so können wir (vgl. 6.8.) sogar voraussetzen, daß (p_3, p_3') ein solcher Punkt ist, d.h.

(6.3) $\quad p_3 = p_3'$.



Figur 4



Figur 5

Wir setzen dann $\boldsymbol{k} = (p_1 p_1')$, $l = p_1 p_3$, $p_2'' = \boldsymbol{k}_l(p_2')$ und $\boldsymbol{h} = (p_2 p_2'')$ (s. Figur 4). Die so definierte Ebene $\langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}, l \rangle$ enthält die betrachteten Punkte.

6.11. Hat $\mathfrak{g}$ keinen Punkt mit $\mathfrak{z}$ (s. 6.9.) gemeinsam, so wählen wir als l die Parallele zu z durch p_1 und setzen $\boldsymbol{k} = (p_1p_1')$, $p_i'' = \boldsymbol{k}_l(p_i')$ für $i = 2, 3$, sowie $\boldsymbol{h} = (p_2p_2'')$.

Dann bleibt $p_3p_3'' \in \boldsymbol{h}$ zu zeigen (s. Figur 5).

Dazu sei h die Gerade durch p_3 in $\boldsymbol{h}$ und $q = \boldsymbol{k}_h(p_3')$. Dann ist $\langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}, p_2''q\rangle$ eine Ebene, die (p_2, p_2') und (p_3, p_3') enthält, und

(6.4) $\quad \mathfrak{g} = (z \times z) \cap \langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}, p_2''q\rangle.$

Wäre nun $q \neq p_3''$, so hätten z und $p_2''q$ einen Schnittpunkt r und (r, r) wäre ein gemeinsamer Punkt von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{z}$.

6.12. Die weiteren räumlichen Axiome der Verknüpfung lassen sich nun leicht nachweisen.

Satz VI. *Zu irgend drei Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen, gibt es nur eine Ebene die sie enthält.*

Liegen nämlich ihre Spuren auf einer Geraden g, so ist die vertikale Ebene $g \times z$ die einzige Ebene, die alle drei Punkte enthält. Im anderen Fall folgt die Behauptung aus 3.6.

6.13. Satz VII. *Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, haben sie wenigstens zwei Punkte gemeinsam.*

Ist eine der beteiligten Ebenen vertikal, so ist die Behauptung trivial; andernfalls ist zu zeigen:

6.14. *Gilt die Gleichung (3.2) bei festem $\boldsymbol{h}, \bar{\boldsymbol{h}}, \boldsymbol{k}, \bar{\boldsymbol{k}}, l, \bar{l}$, für einen Punkt, so gilt sie mindestens für einen weiteren.*

Die Gleichung (3.2) gelte für p_1; ist $l \in \boldsymbol{k}$ oder $\boldsymbol{h} = \bar{\boldsymbol{h}}$, so gilt sie auch für alle anderen p mit

(6.5) $\quad \bar{\boldsymbol{h}}_{\bar{l}}(p) = \bar{\boldsymbol{h}}_{\bar{l}}(p_1).$

Wir können also $l \notin \boldsymbol{k}$, $\bar{l} \notin \bar{\boldsymbol{k}}$ und $\boldsymbol{h} \neq \bar{\boldsymbol{h}}$ annehmen. Nun wählen wir $p_2' \in z$ mit $p_2' \neq (\boldsymbol{k}_z \circ \boldsymbol{h}_l)(p_1)$ und setzen $p_2'' = \boldsymbol{k}_l(p_2')$, $\bar{p}_2'' = \bar{\boldsymbol{k}}_{\bar{l}}(p_2')$. Bezeichnen dann h und $\bar{h}$ die Geraden durch p_2'' bzw. $\bar{p}_2''$ in $\boldsymbol{h}$ bzw. $\bar{\boldsymbol{h}}$, so gilt (3.2) auch für $h\bar{h}$.

6.15. Den Abschluß der räumlichen Axiome bildet eine hier triviale Reichhaltigkeitsaussage:

Satz VIII. *Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.*

§ 7. Das Parallelenaxiom

7.1. Zwei Geraden in $\mathfrak{A}$ sind *parallel,* wenn sie in einer Ebene liegen und entweder gleich sind oder keinen Punkt gemeinsam haben. Das starke Parallelenaxiom besagt:

Satz IX. *Zu einer Geraden* $\mathfrak{g}$ *gibt es durch einen Punkt* $\mathfrak{p}$ *genau eine Parallele.*

7.2. Ist $\mathfrak{g}$ eine vertikale Gerade, so ist jede Ebene die sie enthält, vertikal; jede nicht vertikale Gerade einer solchen Ebene hat mit $\mathfrak{g}$ einen Punkt gemeinsam. Also sind zur einen vertikalen Geraden nur vertikale Geraden parallel (vgl. (4.5.)). Zwei vertikale Geraden sind aber offensichtlich immer parallel und durch jeden Punkt $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ gibt es genau eine vertikale Gerade. Damit ist dieser Fall erledigt.

7.3. Wir können nun annehmen, daß

$$(7.1) \qquad g = \text{Spur}\,(\mathfrak{g})$$

eine Gerade ist. Sei

$$(7.2) \qquad p = \text{Spur}\,(\mathfrak{p});$$

wir unterscheiden zwei Fälle: $p \notin g$ (s. 7.4.) und $p \in g$ (s. 7.5.).

7.4. Sei also $p \notin g$. Nach § 6 gibt es genau eine Ebene $\mathfrak{e}$, die $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{g}$ enthält. Ist $\bar{g}$ die Parallele zu g durch p, so ist

$$(7.3) \qquad \bar{\mathfrak{g}} = (\bar{g} \times z) \cap \mathfrak{e}$$

die einzige Parallele zu $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{p}$.

7.5. Sei nun $p \in g$. Wir wählen eine Gerade $\tilde{\mathfrak{g}}$ mit $\tilde{\mathfrak{g}} \| \mathfrak{g}$ und Spur $(\tilde{\mathfrak{g}}) \neq g$. Nach 7.4. gibt es genau eine Gerade $\bar{\mathfrak{g}}$ durch $\mathfrak{p}$, die parallele zu $\tilde{\mathfrak{g}}$ ist.

Die Konstruktion von $\bar{\mathfrak{g}}$ in 7.4. zeigt:

$$(7.4) \qquad \text{Spur}\,(\bar{\mathfrak{g}}) = g.$$

Also liegen $\bar{\mathfrak{g}}$ und $\mathfrak{g}$ in einer Ebene, nämlich $g \times z$. Wir zeigen, daß $\bar{\mathfrak{g}}$ und $\mathfrak{g}$ gleich sind, falls sie einen Punkt gemeinsam haben, d.h. $\bar{\mathfrak{g}} \| \mathfrak{g}$. Dazu nehmen wir an, es gebe einen Punkt $\mathfrak{q} \in \mathfrak{g} \cap \bar{\mathfrak{g}}$. Sei $\mathfrak{e}$ die eindeutig bestimmte Ebene, die $\tilde{\mathfrak{g}}$ und $\mathfrak{q}$ enthält. Wegen $\tilde{\mathfrak{g}} \| \mathfrak{g}$ und $\tilde{\mathfrak{g}} \| \bar{\mathfrak{g}}$ muß $\mathfrak{e}$ die Geraden $\mathfrak{g}$ und $\bar{\mathfrak{g}}$ enthalten, also folgt

$$(7.5) \qquad \mathfrak{g} = (g \times z) \cap \mathfrak{e} = \bar{\mathfrak{g}}.$$

Es ist nun doch die Eindeutigkeit nachzuweisen. Dazu zeigen wir: Ist $\bar{\mathfrak{g}}$ eine Parallele zu $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{p}$, so ist $\bar{\mathfrak{g}} \| \tilde{\mathfrak{g}}$. Sei also $\bar{\mathfrak{g}}$ eine solche Gerade und $\mathfrak{g}$ ein Punkt in $\tilde{\mathfrak{g}}$. Seien nun $\mathfrak{e}$, $\bar{\mathfrak{e}}$ die Ebenen, die von $\mathfrak{g}$ und $\tilde{\mathfrak{g}}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{g}}$ und $\mathfrak{g}$ aufgespannt werden; sie haben die Form (4.2). O.w.E. können wir $\mathfrak{p} \notin \mathfrak{g}$, d.h. $\mathfrak{e} \neq \bar{\mathfrak{e}}$ annehmen. Wegen $\mathfrak{g} \in \mathfrak{e} \cap \bar{\mathfrak{e}}$ folgt nun aus Satz VII (vgl. 6.13.), daß $\mathfrak{e} \cap \bar{\mathfrak{e}}$ eine Gerade ist. Wäre nun

(7.6) $\quad \mathrm{Spur}\,(\mathfrak{e} \cap \bar{\mathfrak{e}}) \cap g \neq \emptyset$

so hätten wegen 5.4. $\mathfrak{g}$ und $\bar{\mathfrak{g}}$ einen Punkt gemeinsam, was nicht möglich ist. Also haben wir

(7.7) $\quad \mathrm{Spur}\,(\mathfrak{e} \cap \bar{\mathfrak{e}}) = \mathrm{Spur}\,\tilde{\mathfrak{g}},$

und erneute Benutzung von 5.4. zeigt

(7.8) $\quad \mathfrak{e} \cap \bar{\mathfrak{e}} = \tilde{\mathfrak{g}};$

das liefert aber unmittelbar $\tilde{\mathfrak{g}} \parallel \bar{\mathfrak{g}}$.

Literatur

[F] RUDOLF FRITSCH, Einbettung affiner Räume, erscheint in: Mathematisch-Physikalische Semersterberichte Bd XXII, 1975, Heft 1.

[G] ULRICH GRAF, Darstellende Geometrie, 9. Auflage, Quelle & Meyer – Heidelberg 1968.

[HD] GERHARD HESSENBERG und JUSTUS DILLER, Grundlagen der Geometrie, 3. Auflage, Walter de Gruyter & Co. – Berlin 1967.

[LE] HANFRIED LENZ, Ein kurzer Weg zur analytischen Geometrie, Mathematisch-Physikalische Semesterberichte 6 (1958), 57–67.

[LV] HANFRIED LENZ, Vorlesungen über projektive Geometrie, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.G. – Leipzig 1965.

[R] KURT REIDEMEISTER, Grundlagen der Geometrie, Berichtigter Nachdruck, Springer-Verlag – Berlin, Heidelberg, New York 1968.

[T] OLAF TAMASCHKE, Projektive Geometrie II, B. I. Hochschulskriptum 838 a/b, Bibliographisches Institut – Mannheim 1972.