MITTEILUNGEN

aus dem

MATHEM. SEMINAR GIESSEN

Herausgegeben von den Professoren
des Mathematischen Instituts der Universität Giessen

Geschäftsführung: D. Gaier, G. Pickert

Heft 130

GIESSEN 1978

SELBSTVERLAG DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS
ISSN 0373 - 8221 CODEN: MMUGAU

STRUKTUREN FÜR DIE MENGE DER AFFINEN ENDOMORPHISMEN EINES MODULS BZW. EINES AFFINEN RAUMES

Rudolf Fritsch und Gerhard Wolff

Einleitung.

G. Pickert hat in [5] die Menge der Endomorphismen eines Parallelogrammraumes mit einer Ringstruktur versehen. Nun sind aber die Endomorphismen eines Parallelogrammraumes, nach beliebiger Wahl eines Grundpunktes, dasselbe wie die affinen Endomorphismen einer abelschen Gruppe. Genauer: Die Parallelogrammstruktur bestimmt zusammen mit einem Grundpunkt eine kommutative Gruppenstruktur derart, daß ein parallelogrammtreuer Endomorphismus dasselbe ist wie ein (bezüglich der induzierten Gruppenstruktur) affiner Endomorphismus[1]. Die Menge der affinen Endomorphismen einer abelschen Gruppe besitzt aber eine kanonische Addition ("punktweise") und Multiplikation (Komposition). Nun liegt es nahe zu fragen:

(1) Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Operationen?

(2) Welcher Zusammenhang besteht mit den von Pickert konstruierten Operationen?

---

[1] Wir sollten in diesem Zusammenhang feststellen: (i) Die Kategorie der Parallelogrammräume mit Grundpunkt und grundpunkttreuen Homomorphismen ist isomorph zur Kategorie der abelschen Gruppen und homomorphen Abbildungen. (ii) Die Kategorie der Parallelogrammräume mit Grundpunkt und "grundpunktignorierenden Homomorphismen" ist isomorph zur Kategorie der abelschen Gruppen und affinen Abbildungen.

Diese Fragen wollen wir im ersten Teil beantworten, wobei wir an Stelle von abelschen Gruppen gleich allgemeiner Moduln über einem kommutativen, unitären Ring R untersuchen. Die Ergebnisse erscheinen uns freilich nicht sehr erhellend; deshalb zeigen wir im zweiten Teil, wieviel klarer und durchsichtiger die Situation wird, wenn man statt der Moduln die affinen Räume im Sinne von W. Bos [1] zugrunde legt.

I. AFFINE THEORIE IN MODULN

1. Vorbereitungen.

Sei R ein unitärer, kommutativer Ring und M ein Modul über R. Eine <u>affine Kombination</u> von Elementen aus M ist eine

Linearkombination $\sum_1^n r_i m_i$ aus M mit $\sum_1^n r_i = 1$.

M' sei ein weiterer Modul; eine <u>affine Abbildung</u> von M nach M' ist eine Mengenabbildung $f : M \to M'$, die mit affinen Kombinationen verträglich ist, d.h. für die gilt

$$f\left(\sum_1^n r_i m_i\right) = \sum_1^n r_i f(m_i) ,$$

falls $\sum_1^n r_i = 1$. Wichtige Beispiele für affine Abbildungen

sind die Translationen eines Moduls und alle konstanten Abbildungen zwischen Moduln. Wir notieren zwei charakteristische Eigenschaften einer affinen Abbildung f, die für konkrete Rechnungen nützlich sind:

$$\text{(i)} \quad f(m + m') = f(m + m' - 0) = f(m) + f(m') - f(0) ,$$

$$\text{(ii)} \quad f(r \cdot m) = f(r \cdot m + (1-r) \cdot 0) = r \cdot f(m) + (1-r) \cdot f(0) .$$

Eine Mengenabbildung $f : M \to M'$ ist offenbar genau dann linear, wenn sie affin ist und $f(0) = 0$ gilt. Sind $f,g : M \to M'$ affine Abbildungen, so auch $f + g$ und $r \cdot f$, $r \in R$; d.h. die affinen Abbildungen $M \to M'$ bilden einen R-Modul. Ferner ist das Kompositum affiner Abbildungen affin.

Sei M'' ein dritter Modul und $b : M \times M' \to M''$ eine Mengenabbildung; b heißt <u>biaffin</u>, wenn alle partiellen Abbildungen $b(m,-) : M' \to M''$ und $b(-,m') : M \to M''$ affin sind, $m \in M$, $m' \in M'$. Genau dann ist $b : M \times M' \to M''$ bilinear, wenn b biaffin ist und die beiden partiellen Abbildungen $b(0,-)$, $b(-,0)$ Nullabbildungen sind.

Eine <u>affine Algebra</u> (über R) ist ein Modul M mit einer biaffinen Multiplikation $M \times M \xrightarrow{\circ} M$; eine solche affine Algebra $(M,\circ)$ ist genau dann eine Algebra, wenn das Nullelement der Addition ein absorbierendes Element für die Multiplikation $\circ$ ist, d.h. $m \circ 0 = 0 = 0 \circ m$, $m \in M$.

2. Die affine Algebra der affinen Endomorphismen.

Sei wieder M ein Modul. Mit EM bezeichnen wir den Modul aller a f f i n e n Endomorphismen von M, s. 1. EM besitzt eine natürliche Multiplikation, die durch die Komposition von Endomorphismen gegeben ist. Das folgende Lemma ist von grundlegender Bedeutung.

Lemma. Die Multiplikation $\circ$ auf EM ist biaffin.

Außer für $M = 0$ ist $\circ$ nicht bilinear.

Beweis. Wie für lineare Abbildungen zeigt man für affine Endomorphismen $f, g_1, \ldots, g_n \in EM$ und $r_1, \ldots, r_n \in R$ mit $\sum_1^n r_i = 1$ die Gleichungen

$$f \circ \left(\sum_1^n r_i g_i\right) = \sum_1^n r_i \,(f \circ g_i), \qquad \left(\sum_1^n r_i g_i\right) \circ f = \sum_1^n r_i \,(g_i \circ f).$$

Der Zusatz folgt aus $f \circ 0 \neq 0$ für jedes $f \in EM$ mit $f(0) \neq 0$.

Zusammenfassend können wir feststellen: EM ist hinsichtlich seiner natürlichen Strukturdaten (Addition, skalare Multiplikation, Komposition) eine affine Algebra, s. 1, aber i.a. keine Algebra.

3. Die Algebra der affinen Endomorphismen eines Moduls.

Unser Ziel ist, die Multiplikation in EM so abzuändern, daß eine Algebra entsteht. Dies gelingt nach einem einfachen allgemeinen Schema, das in der gegebenen Situation angemessen ist.

Sei E ein Modul und $k : E \times E \to E$ eine biaffine Multiplikation. (Der Leser denke an (EM, $\circ$) !)
Dann gibt es für k eine Darstellung der Form

$$k(f,g) = \hat{k}(f,g) + l_1(f) + l_2(g) + e_0$$

mit einer bilinearen Abbildung $\hat{k}$, linearen Abbildungen l_1, l_2 und $e_0 \in E$; dabei sind $\hat{k}$, l_1, l_2 und e_0 eindeutig durch b bestimmt, und zwar ist

$$\text{(i)}\quad \hat{k}(f,g) = k(f,g) - k(f,0) - k(f,g) + k(0,0)$$
$$\text{(ii)}\quad l_1(f) = k(f,0) - k(0,0)$$
$$\text{(iii)}\quad l_2(g) = k(0,g) - k(0,0)$$
$$\text{(iv)}\quad e_o = k(0,0).$$ [2]

Zur biaffinen Multiplikation $\circ$ auf EM gehört also eine in diesem Sinne assoziierte bilineare Multiplikation $\hat{\circ}$; wegen (i) hat man für $f,g \in EM$ die Gleichung

$$f \mathbin{\hat{\circ}} g = f \circ g - f \circ O - O \circ g + O \circ O = f \circ g - f \circ O .$$

Damit erhalten wir den

<u>Satz</u>. $\widehat{EM} = (EM, \hat{\circ})$ ist eine Algebra, wobei die Multiplikation $\hat{\circ}$ durch $f \mathbin{\hat{\circ}} g = f \circ g - f \circ O$ gegeben ist.
(Der direkte Beweis ist einfach.)

4. Vergleich mit dem Resultat von Pickert.

Ein Parallelogrammraum bzw. allgemeiner ein R - Parallelogrammraum ([3],[4]) hat kein ausgezeichnetes Element. Die im vorigen Abschnitt beschriebene Konstruktion einer Algebra-Struktur für die Endomorphismenmenge eines solchen Raumes M beruht auf der willkürlichen Auswahl eines Grundpunktes $O \in M$ (s. Einleitung). Dadurch wird aber ein Endomorphismus von M ausgezeichnet,

---

[2] Man hat ganz allgemein eine Isomorphie von Moduln

$$A(M,M';M'') \cong L(M,M';M'') \oplus L(M;M'') \oplus L(M',M'') \oplus M'' ;$$

dabei bezeichnet $A(M,M';M'')$ den Modul der biaffinen Abbildungen $M \times M' \to M''$, $L(M,M';M'')$ den Modul der bilinearen Abbildungen $M \times M' \to M''$, $L(M;M'')$ den Modul der linearen Abbildungen $M \to M''$ und $L(M';M'')$ analog den Modul der linearen Abbildungen $M' \to M''$.

nämlich die zu 0 gehörige konstante Abbildung (sie ist das neutrale Element der Addition). Dies ist unangemessen, denn das einzige "von Natur aus" ausgezeichnete Element der Endomorphismenmenge von M ist die identische Abbildung, das neutrale Element der Komposition. In dieser Situation liegt es nahe, die Algebra-Struktur von EM so zu transferieren, daß die identische Abbildung die Rolle der Null einnimmt. Dies gelingt mit Hilfe der involutorischen Bijektion $EM \to EM$, $f \mapsto 1 - f$. Für die resultierende Algebra-Struktur gilt:

$$\text{(i)}\quad f \underset{1}{+} g = 1 - [(1-f) + (1-g)] = f + g - 1$$

$$\text{(ii)}\quad r \underset{1}{\cdot} f = 1 - [r\cdot(1-f)] = rf + (1-r)\cdot 1$$

$$\text{(iii)}\quad f \underset{1}{\circ} g = 1 - [(1-f) \hat{\circ} (1-g)] = f \hat{\circ} 1 + 1 \hat{\circ} g - f \hat{\circ} g =$$
$$= f \circ 1 - f \circ 0 + 1 \circ g - 1 \circ 0 - f \circ g + f \circ 0 =$$
$$= f + g - f \circ g$$

Diese Algebra-Struktur für EM ergibt im Falle $R = \mathbb{Z}$ gerade die von G. Pickert konstruierte Ringstruktur. Zum Beweis genügt es zu überlegen, daß die Addition in (i) mit Pickerts Addition übereinstimmt, was sich leicht an Hand der Formel (3") von [5] nachweisen läßt.

II. STRUKTUREN FÜR DIE ENDOMORPHISMENMENGE EINES AFFINEN RAUMES

1. Vorbereitungen

Wir betrachten nun affine Räume im Sinne von W. Bos (über dem fest gewählten kommutativen, unitären Grundring R). Danach besteht ein affiner Raum aus einer Menge A und zwei Strukturabbildungen $+ : A \times A \times A \to A$, $(a, b, c) \mapsto a \underset{b}{+} c$ und

$\cdot : R \times A \times A \to A$, $(r,b,c) \mapsto r \underset{b}{\cdot} c$, derart, daß die für jedes feste $b \in A$ definierten zweistelligen Operationen $\underset{b}{+}$ und $\underset{b}{\cdot}$ die Menge A mit einer Modulstruktur versehen und die zu verschiedenen Elementen b und b' gehörenden Modulstrukturen durch "Translation" auseinander hervorgehen, d.h.

$$a \underset{b'}{+} c = (a \underset{b}{+} c) \underset{b'}{+} b \ , \ r \underset{b'}{\cdot} c = r \underset{b}{\cdot} c \underset{b}{+} (1-r) \underset{b}{\cdot} b' \ ,$$

(s. [1],[7]); sind $(A,+,\cdot)$ und $(A',+,\cdot)$ affine Räume, so heißt eine Abbildung $f : A \to A'$ <u>affin</u>, wenn sie mit den Strukturen verträglich ist, d.h.

$$f(a \underset{b}{+} c) = f(a) \underset{f(b)}{+} f(c) \ , \ f(r \underset{b}{\cdot} c) = r \underset{f(b)}{\cdot} f(c) \ .$$

Wie sonst auch üblich, bezeichnen wir im folgenden einen affinen Raum einfach durch seine Menge A statt ausführlich durch $(A,+,\cdot)$.

Die Kategorie der R-Parallelogrammräume ist isomorph zu der hier beschriebenen Kategorie der affinen Räume [8][3]. Ein entscheidender Vorteil dieser Axiomatik ist, daß so die affinen Räume gleichungsdefinierte Algebren sind und damit allgemeine Konstruktionsmethoden der universellen Algebra anwendbar werden (s.2.).

---

[3] In [8] werden nach einem auch auf W. Bos zurückgehenden Vorschlag die hier beschriebenen Strukturen "R-Kreisel" genannt, um Verwechslungen mit anderen (natürlich gleichwertigen) Definition von affinen Räumen (etwa Bourbaki's [2], Ch. 2. § 9) zu vermeiden. Wir halten aber Bos' Vorgehen unter den Gesichtspunkten der affinen Geometrie für so angemessen, daß wir doch den Ausdruck "affiner Raum" dafür in Anspruch nehmen wollen.

Sind A, A' und A'' affine Räume, so heißt eine Abbildung $f : A \times A' \to A''$ <u>biaffin</u>, wenn jede der partiellen Abbildungen $f(a,-) : A' \to A''$, $f(-,a') : A \to A''$, $a \in A$, $a' \in A'$ affin ist.

Eine <u>affine Algebra</u> besteht aus einem affinen Raum E und einer biaffinen Abbildung $\circ : E \times E \to E$, $(a,b) \mapsto a \circ b$ [4]. Ein Element $e \in E$ ist <u>linksneutral</u> (<u>rechtsneutral</u>) bezüglich $\circ$, wenn gilt:

$$e \circ c = c \quad (c \circ e = c), \quad c \in E ;$$

e ist eine <u>Eins</u> - symbolisch "1" - , wenn es links- und rechtsneutral ist. Ein Element $a \in E$ ist <u>linksabsorbierend</u> (<u>rechtsabsorbierend</u>) bezüglich $\circ$, wenn gilt

$$a \circ c = a \quad (c \circ a = a), \quad c \in E ;$$

a ist eine <u>Null</u> - symbolisch "O" - , wenn es links- und rechtsabsorbierend ist. Zu gegebener Multiplikation $\circ$ gibt es höchstens eine Eins und höchstens eine Null. Die linksabsorbierenden Elemente bilden ein Ideal, d.h. einen affinen Unterraum $\mathrm{Lab}\, E$ mit $a \circ b \in \mathrm{Lab}\, E$, falls $a \in \mathrm{Lab}\, E$ oder $b \in \mathrm{Lab}\, E$, $a,b \in E$. Ist $(E,\circ)$ eine affine Algebra, so erhält man nach Wahl eines beliebigen Punktes $b \in E$ als Grundpunkt eine affine Algebra E_b im Sinne von I.1. E_b ist genau dann eine Algebra, wenn b eine Null ist.

---

[4] Genau genommen müßte man sagen "Algebra in der Kategorie der affinen Räume"; bei dem in I.1. eingeführten Begriff würde es sich entsprechend um eine "Algebra in der Kategorie der Moduln und affinen Abbildungen"handeln. Der Einfachheit halber verwenden wir für beides den Terminus "affine Algebra".

2. Die affine Algebra der Endomorphismen eines affinen Raumes.

Durch reine Routineüberlegungen der universellen Algebra ergeben sich speziell die folgenden Aussagen[5].

(1) Für jeden affinen Raum A und jede Menge X trägt die Menge A^X aller Mengenabbildungen $X \to A$ eine affine Struktur, die durch die Struktur von A induziert ist. (Beispielsweise ist für $f, g, h : X \to A$ die Abbildung $+(f,g,h)$ "punktweise" erklärt, d.h. als Kompositum

$$X \xrightarrow[\text{(Diag.)}]{\Delta} X \times X \times X \xrightarrow{f\times g\times h} A \times A \times A \xrightarrow{+} A.)$$

(2) Für jedes Paar (A',A) affiner Räume bildet die Menge $\mathrm{Hom}(A',A)$ aller affinen Abbildungen $A' \to A$ einen affinen Raum (genauer gesagt einen Unterraum im Raum aller Mengenabbildungen $A' \to A$, s.(1)).

(3) Für jedes Tripel (A'',A',A) affiner Räume ist die Komposition $\mathrm{Hom}(A'',A') \times \mathrm{Hom}(A',A) \to \mathrm{Hom}(A'',A)$ biaffin.

Aus (2) und (3) ergibt sich sofort: Die Endomorphismen eines R-affinen Raumes A bilden hinsichtlich der natürlichen Strukturdaten $(+,\cdot)$ nicht nur einen affinen Raum End A, sondern zusammen mit der Komposition $\circ$ als Multiplikation sogar eine asso-

---

[5] Falls der Leser eine der "klassischen" Definitionen für affine Räume zugrundelegt, gelten diese Aussagen ebenso; ihr Beweis ist jedoch vergleichsweise mühsam.

ziative affine Algebra. Das ist die Struktur, die die Menge der Endomorphismen eines affinen Raumes bzw. eines R-Parallelogrammraumes unseres Erachtens in natürlicher Weise trägt. (End $A, \circ$) hat eine Eins, die Identität, und linksabsorbierende Elemente, die konstanten Abbildungen, aber keine Null.
Bei Bedarf kann man der Menge End A jedoch auch Algebrenstrukturen aufprägen, was wir im nächsten Abschnitt vorführen.

3. Algebrastrukturen für den Endomorphismenraum eines affinen Raumes.

Solche kann man auf zwei prinzipiell verschiedenen im wesentlichen aber gleichwertigen Wegen konstruieren.
(K1) Sei A ein affiner Raum. Da End A i.a. keine Null enthält, erhalten wir durch Auswahl eines Punktes als Grundpunkt zwar einen Modul und eine affine Algebra, aber keine Algebra. Eine Algebra gewinnen wir dann aber (wie in I.3.) dadurch, daß wir den bilinearen Anteil der biaffinen Multiplikation als neue Multiplikation nehmen. Führen wir das speziell für die Eins durch, so ergibt sich die folgende Multiplikation δ: $(\text{End } A)_1 \times (\text{End } A)_1 \to (\text{End } A)_1$:

$$f \,\delta\, g = f \circ g \underset{1}{-} f \circ 1 \underset{1}{-} 1 \circ g \underset{1}{+} 1 \circ 1 = f \circ g \underset{1}{-} f \underset{1}{-} g \,.$$

(Man beachte, daß hier 1 neutrales Element sowohl bezüglich der Addition $\underset{1}{+}$ als auch bezüglich der biaffinen Multiplikation $\circ$ ist.) Die so erhaltene R-Algebra bezeichnen wir mit $\hat{E}$.
(K2) Sei $(E,+,\cdot)$ ein affiner Raum (Man denke an E = End A !)

Für jede Multiplikation $\circ: E \times E \to E$ sei $\circ^*: E \times E \to E$ definiert durch[6]

$$x \circ^* y = x - x \circ y + y \quad (= +(x, x \circ y, y)).$$

Man beweist leicht die folgenden Aussagen:

(1) $\circ^{**} = \circ$

(2) $\circ$ biaffin (biaffin und assoziativ) $\Leftrightarrow$

$\circ^*$ biaffin (biaffin und assoziativ)

Für ein $x_0 \in E$ gilt ferner die Äquivalenz:

(3) x_0 ist links- bzw. rechtsneutral für $\circ \Leftrightarrow$

x_0 ist links- bzw. rechtsabsorbierend für $\circ^*$.

Mit anderen Worten: Die Zuordnung $\circ \mapsto \circ^*$ definiert eine involutorische Bijektion auf der Menge aller (aller biaffinen) Multiplikationen von E; dabei korrespondieren die Multiplikationen mit 1 mit den Multiplikationen mit 0.

Für eine affine Algebra $E = (E, \circ)$ sei $E^* = (E, \circ^*)$. Nach dem Vorangehenden definiert die Zuordnung $E \mapsto E^*$ eine Bijektion zwischen den affinen Algebren mit 1 und den affinen Algebren mit 0; letztere sind aber im wesentlichen dasselbe wie R-Algebren (s.1.).

Nach 2. ist $E = (\text{End } A, \circ)$ eine affine Algebra mit $1 = id_A$; also ist E^* eine affine Algebra mit 1 als absorbierendem Element, d.h.

---

[6] Für eine Ringmultiplikation $\circ$ ist $\circ^*$ als das "Sternprodukt" (zu $\circ$) bekannt. [6] § 97)

$E^* = (\mathrm{End}\ A, \circ^*)$ ist eine Algebra, wobei

$f \circ^* g = f \underset{1}{-} f \circ g \underset{1}{+} g$.

Offenbar ist $E \not\cong E^*$, falls E keine O hat, wie beispielsweise $E = \mathrm{End}\ A$ für einen nichttrivialen Raum A. Es gilt jedoch $\hat{E} \cong E^*$; genauer gesagt ist die Spiegelung am Grundpunkt 1, $S: E \to E,\ f \mapsto \underset{1}{-} f$, ein Isomorphismus der gewünschten Art. Schließlich stellen wir fest: Ist A ein $\mathbb{Z}$-affiner Raum (Parallelogrammraum), dann ist $E^* = (\mathrm{End}\ A, \circ^*)$ wiederum identisch mit Pickerts "Endomorphismenring".

4. Eine Kennzeichnung der affinen Algebren, die zu einer affinen Endomorphismenalgebra isomorph sind.

Wir behandeln jetzt die Frage, unter welchen Bedingungen eine affine Algebra E als Endomorphismenalgebra eines affinen Raumes A darstellbar ist.[7] Der Angelpunkt der folgenden Argumentation ist die Einsicht, daß man allein aus der multiplikativen Struktur einer Endomorphismenalgebra End A den Raum A (bis auf Isomorphie) zurückgewinnen kann. Wir betrachten dazu die kanonische Abbildung $i: A \to \mathrm{End}\ A$, die jedem $a \in A$ die zugehörige konstante Abbildung $\bar{a} \in \mathrm{End}\ A$ zuordnet. Offenbar ist i eine affine Injektion, deren Bild gerade der affine Teilraum K (End A) der konstanten Endomorphismen ist. Nun sind aber die konstanten Endomorphismen genau die linksabsorbierenden Elemente von End A:

$$f \text{ konstant} \Leftrightarrow f \circ g = f \text{ für alle } g \in \mathrm{End}\ A.$$

---

[7] Diese Frage, wie auch unsere Antwort, sind durch die Überlegungen inspiriert, die G. Pickert in [5], S. 143 - 145 anstellt.

Wir haben also einen affinen Isomorphismus
$j_A: A \xrightarrow{\cong} \mathrm{Lab}(\mathrm{End}\ A)$. Daraus ergibt sich übrigens die Implikation:
$\mathrm{End}\ A \cong \mathrm{End}\ A' \Rightarrow A \cong A'$.

Der Isomorphismus $j_A: A \to \mathrm{Lab}(\mathrm{End}\ A)$ induziert den Algebren-Isomorphismus $l_{\mathrm{End}\ A}: \mathrm{End}\ A \to \mathrm{End}(\mathrm{Lab}(\mathrm{End}\ A))$, $f \mapsto j_A \circ f \circ j_A^{-1}$.
Somit haben alle Endomorphismen von Lab(End A) die Form $l_{\mathrm{End}\ A}(f)$ und sind offenbar nichts anderes als Linksmultiplikationen mit Elementen von End A:
$l_{\mathrm{End}\ A}(f)\ (\bar{a}) = j_A \circ f(a) = \overline{f(a)} = f \circ \bar{a}$, $a \in A$.

Sei nun E eine beliebige assoziative affine Algebra mit 1. Lab E, die Menge der linksabsorbierenden Elemente von E, bildet ein Ideal; die Multiplikation $\circ$ auf E läßt sich also einschränken zu einer Linksoperation $E \times \mathrm{Lab}\ E \to \mathrm{Lab}\ E$ von E auf Lab E. Diese induziert den Algebrenhomomorphismus $l_E: E \to \mathrm{End}(\mathrm{Lab}\ E)$, $a \mapsto (a \circ -)$. (Die Bezeichnung l_E steht in Übereinstimmung mit der obigen Definition von $l_{\mathrm{End}\ A}$.)

<u>Satz.</u> Für E wie oben sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Zu E existiert ein affiner Raum A mit $E \cong \mathrm{End}\ A$

(2) l_E ist ein Isomorphismus.

(3) a) Jeder Endomorphismus $\mathrm{Lab}\ E \to \mathrm{Lab}\ E$ läßt sich als Linksmultiplikation mit einem Element von E darstellen.

b) Die eingeschränkte Multiplikation $E \times \mathrm{Lab}\ E \to \mathrm{Lab}\ E$ besitzt kein linksneutrales Element außer 1.

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Trivial

(2) ⇔ (3): Offenbar ist (3) a) gleichwertig mit der Surjektivität von 1_E. Es genügt also zu überlegen, daß (3) b) mit der Injektivität gleichwertig ist. Wie eine einfache Überlegung zeigt, ist (3) b) nichts anderes als eine Umformulierung der Bedingung, daß die Faser 1_E^{-1} (1), der "Kern von 1_E", nur aus der 1 besteht. Dies impliziert aber für eine affine Abbildung die Injektivität.

Literatur

[1] W.Bos - G. Wolff. Affine Räume. Mitt.Math.Sem. Giessen Heft 129 (1978)

[2] N. Bourbaki. Algebra I. Hermann, Paris (1974)

[3] F. Ostermann - J. Schmidt. Begründung der Vektorrechnung aus Parallelogrammeigenschaften. Math.-Phys. Semesterber. 10, 47 - 64 (1963)

[4] F. Ostermann - J. Schmidt. Der baryzentrische Kalkül als axiomatische Grundlage der affinen Geometrie. J. Reine angew. Math. 224, 44 - 57 (1966)

[5] G. Pickert. Der Endomorphismenring eines Parallelogrammraumes Mitt.Math.Sem. Giessen 121, 139 - 146 (1976)

[6] B.L. van der Waerden. Algebra II. Heidelberger Taschenbücher 23. Springer-Verlag (1967)

[7] G. Wolff. "Kreisel". Elem. Math. 31, 141 - 145 (1976)

[8] G. Wolff. Parallelogrammräume und "Kreisel". Mitt. Math. Sem. Gießen, Heft 130, S.84-92 (1978)

Eingang: 9. November 1977

Anschrift der Verfasser:

Fachbereich Mathematik
Universität Konstanz
Postfach 7733

D 7750 Konstanz