Ein "affiner" Beweis des Satzes von v. Staudt - Schleiermacher.

Fritsch, Rudolf

in: Monatshefte für Mathematik | Monatshefte für Mathematik | Article

177 - 184

Mh. Math. 86, 177—184 (1978)

Monatshefte für
Mathematik

Ein „affiner" Beweis des Satzes von v. Staudt—Schleiermacher

Von

Rudolf Fritsch, Konstanz

Mit 8 Abbildungen

(Eingegangen am 19. Januar 1978)

Abstract

An "Affine" Proof of the Theorem of v. Staudt—Schleiermacher. The Theorem of v. STAUDT—SCHLEIERMACHER asserts that a projective incidence plane is pappian if every projectivity with 5 fixed points is the identity. SCHLEIERMACHER's original proof needs different treatments for a lot of cases. We give a simpler proof based on the fact that Desargues' and Pappos' theorems hold in a projective plane if this is true for some affine specializations.

1. Einleitung. Der auf C. G. CH. v. STAUDT [8] (S. 50) zurückgehende Fundamentalsatz der projektiven Geometrie (P_3): „Jede Projektivität mit 3 Fixpunkten ist die Identität", enthält den Satz von Pappos [4] (S. 884/886)[1] als Spezialfall [2] (S. 82ff.; in [2] wird allerdings der Satz von Pappos als „Satz von Pascal" bezeichnet). A. SCHLEIERMACHER [6] bewies, daß der Satz von Pappos bereits aus der schwächeren Aussage (P_5): „Jede Projektivität mit 5 Fixpunkten ist die Identität", hergeleitet werden kann. Der Hauptteil seines Beweises besteht darin, aus (P_5) den projektiven Satz von Desargues [1] (S. 340) zu folgern, wobei er eine ganze Reihe von Fallunterscheidungen abhandeln muß; damit findet er einen Koordinatenschiefkörper K und die Anwendung von (P_5) auf die Projektivität $K \to K$, $r \mapsto k^{-1}rk$, $\infty \to \infty$ (für $k \in K$ mit $k \neq 0, 1, -1$) mit den Fixpunkten $0, 1, k, k^{-1}, \infty$ liefert das gewünschte Resultat. M. WAGENER [9] (S. 56—62) hat diesen letzten Schritt in die Geometrie übersetzt, d. h. anstelle der Kommutativität der Multiplikation in K zeigt er die Vertauschbarkeit gewisser Projektivi-

[1] Ein besonders hübscher Beweis des Satzes von Pappos, der auf der Existenz des Höhenschnittpunktes eines Dreiecks beruht, wurde von F. SCHUR [7] gegeben.

0026—9255/78/0086/0177/$ 01.60

täten, die durch die Konfiguration des Satzes von Pappos gegeben sind; dabei wird deutlich, daß der projektive Satz von Desargues gar nicht in seiner vollen Schärfe benötigt wird. Das ist weiter nicht verwunderlich, da ja bereits der große *affine* Satz von Desargues die projektive Fassung nach sich zieht [5] (S. 83).

Im folgenden wollen wir aus (P_5) den großen affinen Satz von Desargues und den großen affinen Satz von Pappos herleiten; im Vergleich mit [6] und [9] ist dieses Vorgehen vielleicht einfacher, unseres Erachtens aber auf jeden Fall durchsichtiger. Da die affinen Kerne einer desarguesschen projektiven Ebene alle untereinander isomorph sind (s. Anhang), folgt dann auch der volle Satz von Pappos.

2. *Bezeichnungen.* $\mathfrak{A} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{J})$ sei eine affine Inzidenzebene, in deren projektiver Hülle (P_5) gilt. Die Punkte von $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir durch große, die Geraden durch kleine lateinische Buchstaben. Ist g eine Gerade in $\mathfrak{A}$, so sei $\bar{g}$ der uneigentliche Punkt auf g; die uneigentliche Gerade von $\mathfrak{A}$ heiße u. Die Perspektivität von g nach h mit Zentrum Z (g, h, Z können eigentlich oder uneigentlich sein) notieren wir als $g\,Z\,h$, Projektivitäten durch Hintereinandersetzen der erzeugenden Perspektivitäten, wobei wir die auftretenden Doppelbuchstaben durch einfache ersetzen, also z. B. $g\,Z\,h \bigcirc h\,Y\,k = g\,Z\,h\,Y\,k$. Als allgemeine Symbole für Projektivitäten verwenden wir kleine griechische Buchstaben, das Argument steht links davon: $(P)\,\tau$ ist das Bild von P unter τ.

3. *Der große affine Satz von Desargues.* Da jede Inzidenzebene einer Ordnung $\leqslant 5$ desarguessch ist [5] (S. 302), setzen wir in diesem Abschnitt zusätzlich Ordnung $\mathfrak{A} > 5$ voraus.

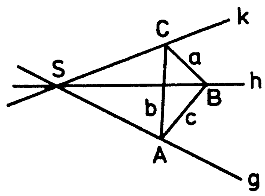

Abb. 1

Der große affine Satz von Desargues besagt, daß die aus einer Konfiguration wie in Abb. 1 abgeleitete Projektivität $\tau = g\,\bar{c}\,h\,\bar{a}\,k\,\bar{b}\,g$ die Identität ist.

Um das einzusehen, nehmen wir zunächst noch $a \nparallel g$ und $c \nparallel k$ an. A, S und $\bar{g}$ sind offensichtlich Fixpunkte von τ; wegen (P_5) genügt es zwei weitere zu finden. Wegen Ordnung $\mathfrak{A} > 5$ gibt es auf k wenigstens zwei von $S, C, (A)g\bar{a}k$ und $(A)g\bar{c}k$ verschiedene eigentliche Punkte C'. Wir zeigen: Ist C' ein solcher Punkt, so ist $A' = (C')k\bar{a}h\bar{c}g$ ein weiterer Fixpunkt von τ. Dazu setzen wir $a' = C'\bar{a}$ und gemäß [6] und [9] $\varrho = g\bar{c}a'S\bar{c}\bar{a}kAuC'g$ (Abb. 2).

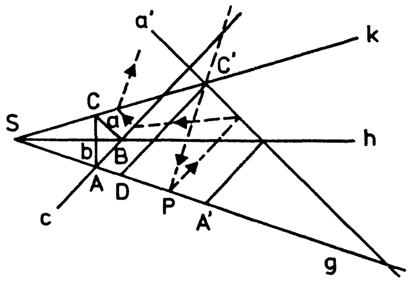

Abb. 2

ϱ hat die paarweise verschiedenen Fixpunkte $A, S, \bar{g}, g \cap a'$ und $D = (C'\bar{c}) \cap g$. Also ist ϱ die Identität auf g und damit $(A')\varrho = A'$. Das liefert $A'C' \| b$ und damit $(A')\tau = A$.

Wir müssen uns nun noch von den Voraussetzungen $a \nparallel g$, $c \nparallel k$ befreien[2]. Sei etwa $c \| k$, aber $a \nparallel g$. Wir wählen auf a einen von B und C verschiedenen, nicht auf g liegenden Punkt C_1 und setzen $b_1 = AC_1$, $k_1 = C_1S$ (Abb. 3).

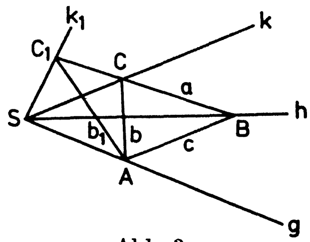

Abb. 3

Auf Grund des bereits Bewiesenen sind die Projektivitäten $\tau_1 = g\bar{c}h\bar{a}k_1\bar{b}_1g$ und $\tau_2 = g\bar{b}_1k_1\bar{a}k\bar{b}g$ gleich der Identität. Wegen $\tau = \tau_1 \odot \tau_2$ ergibt sich daraus die Behauptung für τ.

[2] Wagener [9] begnügt sich zwar mit dem bis hierher bewiesenen Teil des Satzes von Desargues, muß aber deshalb später mehr Fallunterscheidungen machen.

Voraussetzung und Behauptung des Satzes sind invariant bei zyklischer Permutation der Paare $(a,g),(b,h),(c,k)$; damit ergibt sich auch der Fall $a \| g, c \nparallel k$.

Haben wir $a \| g$ und $c \| k$, so wählen wir C_1 wie eben und erhalten (durch Zurückführen auf den schon erledigten Fall) wieder $\tau = \tau_1 \odot \tau_2$ mit $\tau_i = \mathrm{id} g$ für $i = 1,2$, womit alles bewiesen ist.

4. Folgerungen. Da $\mathfrak{A}$ nunmehr als desarguessch erkannt ist, gelten noch die folgenden Schließungssätze [3]:

(4.1) der Scherensatz (in [3] als Schließungssatz (A) bezeichnet),

(4.2) der kleine affine Satz von Desargues,

(4.3) der kleine affine Satz von Pappos.

5. Der große affine Satz von Pappos. Gegeben sei eine Konfiguration wie in Abb. 4 mit $a_2 \| a_5$ und $a_3 \| a_6$.

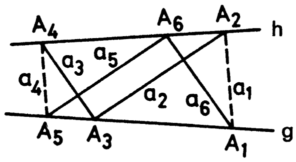

Abb. 4

Die Behauptung des großen affinen Satzes von Pappos lautet dann: $a_1 \| a_4$. Wegen (4.3) können wir zum Beweis zusätzlich annehmen, daß $S = h \cap g$ ein eigentlicher Punkt ist. Wir definieren $B = g \cap (A_6 \bar{a}_1)$ und $C = g \cap (A_2 \bar{a}_6)$. Ist $B = C$ (Abb. 5),

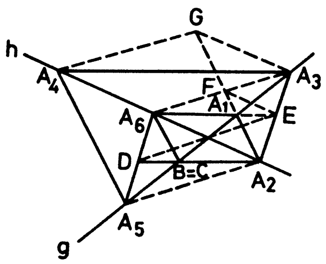

Abb. 5

so liefert der große affine Satz von Desargues zunächst bei Anwendung auf die Dreiecke A_6BD und A_2A_1E mit $D = a_5 \cap (A_2C)$, $E = a_2 \cap a_6$ die Kollinearität von D, S und E, dann bei Anwendung auf die Dreiecke A_2A_5D und A_6A_3E die Parallelität $A_2A_5 \| A_3A_6$ und bei Anwendung auf die Dreiecke $A_2A_6A_5$ und FEA_3 mit $F=E\bar{h}\cap(A_3A_6)$ die Inzidenz FIa_1, schließlich bei Anwendung auf die Dreiecke A_6EF und A_4A_3G mit $G=(A_3\bar{h})\cap a_1$ die Parallelität $A_6F\|A_4G$. Nun können wir auf die Dreiecke A_2A_3G und $A_5A_6A_4$ den kleinen affinen Satz von Desargues (4.2) anwenden und erhalten wie gewünscht $a_1\|a_4$. (Der hier behandelte Sonderfall des Satzes von Pappos entspricht algebraisch der Kommutativität $\alpha\beta=\beta\alpha$ im Falle $\alpha^2=1$; da diese quadratische Gleichung auch bei Schiefkörpern nur die Lösungen $\alpha=\pm 1$ hat, ist klar, daß zur Herleitung nur der Satz von Desargues nötig ist. Man könnte hoffen, daß auf ähnliche Weise auch der Satz von Wedderburn über die Kommutativität der endlichen Körper geometrisch gezeigt werden könnte.) Von nun an können wir also $B\neq C$ annehmen.

Nun betrachten wir gemäß [9] die Projektivität

$$\tau=gA_6uA_2g\bar{a}_6h\bar{a}_1g\,.$$

Sie hat zumindest die 4 Fixpunkte A_1,B,S und $\bar{g}$.

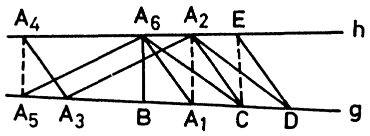

Abb. 6

Wir behaupten, daß auch C ein Fixpunkt von τ ist. Um das einzusehen, setzen wir $D=(C)gA_6uA_2g$ und $E=(D)g\bar{a}_6h$. Nun können wir auf die Vierecke $A_1CA_2A_6$ und $CDEA_2$ (4.1) anwenden und erhalten $EC\|a_1$, woraus $(C)\tau=C$ unmittelbar folgt. Damit ist $\tau=\mathrm{id}g$ und es folgt

$$A_5=(A_5)\tau=(A_3)g\bar{a}_6h\bar{a}_1g=(A_4)h\bar{a}_1g\,,$$

also $a_4=A_4A_5\|a_1$, womit alles bewiesen ist.

6. Anhang. Ist $\mathfrak{E}$ eine projektive Ebene, so nennen wir jede affine Ebene, die aus $\mathfrak{E}$ durch Herausnahme einer Geraden und der mit ihr inzidenten Punkte entsteht, einen *affinen Kern* von $\mathfrak{E}$. Bei der Reduktion der Sätze von Desargues und Pappos auf ihre affinen Fassungen haben wir benutzt, daß die Gültigkeit des großen affinen Satzes von Desargues in einem affinen Kern von $\mathfrak{E}$ die Gültigkeit des projektiven Satzes von Desargues in $\mathfrak{E}$ nach sich zieht und daß alle affinen Kerne einer desarguesschen projektiven

Ebene zueinander isomorph sind. Beide Tatsachen sind eine einfache Konsequenz des folgenden Satzes.

Satz: *Ist $\mathfrak{A}$ eine desarguessche affine Ebene, so ist jeder affine Kern $\mathfrak{A}_1$ der projektiven Hülle $\overline{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ isomorph zu $\mathfrak{A}$.*

Um deutlich zu machen, daß wir bei unserer Reduktion die Schwierigkeiten nicht einfach in diesen Satz verschoben haben, wollen wir einen elementaren Beweis dieser Aussage kurz skizzieren[3].

Sei also $\mathfrak{A}_1$ ein von $\mathfrak{A}$ verschiedener affiner Kern von $\overline{\mathfrak{A}}$ und u_1 die uneigentliche Gerade von $\mathfrak{A}_1$. Wir wählen einen Punkt S in $\mathfrak{A}$, der nicht auf u_1 liegt und setzen die Perspektivität uSu_1 zu einem Isomorphismus $\varkappa\colon \overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{A}}$ mit Fixpunkt S fort, woraus sich die Behauptung unmittelbar ergibt. Es gibt höchstens einen solchen Isomorphismus $\varkappa$. Für einen in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ eigentlichen Punkt $A \neq S$ bestimmt sich $(A)\varkappa$ folgendermaßen:

Wir wählen eine nicht zu u_1 parallele Gerade $c \neq AS$ durch A, und setzen $g = SA$, $B = c \cap u_1, B'' = (S\bar{c}) \cap u_1$, $h = SB$. Dann ist $(A)\varkappa = A' = (B''\bar{h}) \cap g$ (s. Abb. 7). Die einzige Schwierigkeit

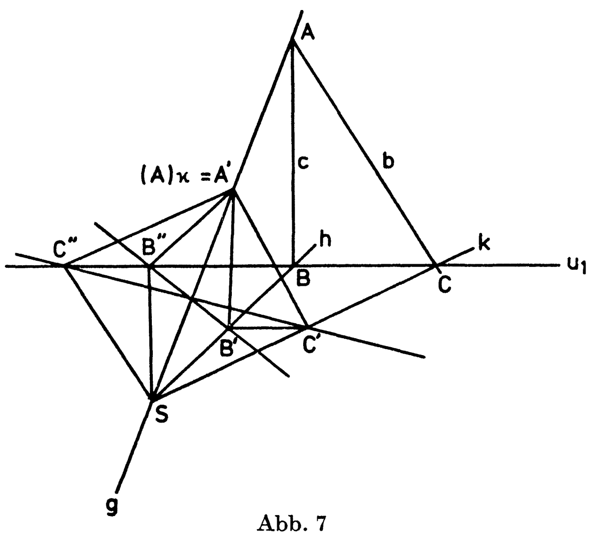

Abb. 7

besteht nun im Nachweis der Unabhängigkeit von der Auswahl von c. Um diese einzusehen, wählen wir noch eine nicht zu u_1

[3] Einen solchen haben wir in der Literatur nicht gefunden.

parallele Gerade $b \neq c$, AS durch A und setzen $C = b \cap u_1$, $C'' = (S\bar{b}) \cap u_1$, $k = SC$.

Zu verifizieren ist

$$A' C'' \parallel k. \tag{6.1}$$

Dazu sei $B' = (A'\bar{c}) \cap h$ und $C' = (A'\bar{b}) \cap k$. Aus dem großen affinen Satz von Desargues folgt nun durch Anwendung auf die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ zunächst

$$B'C' \parallel BC = u_1, \tag{6.2}$$

dann durch Anwendung auf die Dreiecke $A'B'C'$ und $SB''C''$

$$(B'B'' \cap C'C'')\, I\, g \tag{6.3}$$

und schließlich durch Anwendung auf die Dreiecke $SB'C'$ und $A'B''C''$ die Behauptung (6.1).

Man hat natürlich auch nachzuprüfen, daß aus

$$AA_1 \parallel u_1 \tag{6.4}$$

folgt:

$$(A)\varkappa (A_1)\varkappa \parallel u_1. \tag{6.5}$$

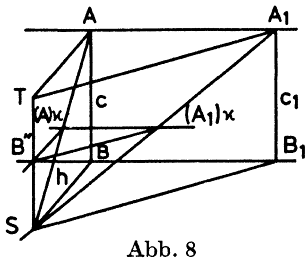

Abb. 8

Aber das ist einfach (Abb. 8): Zur Konstruktion von $(A)\varkappa$ und $(A_1)\varkappa$ wählen wir c und c_1 parallel zueinander. Dann definieren wir $T = A\bar{h} \cap S\bar{c}$ und erhalten durch Anwendung des kleinen affinen Satzes von Desargues auf die Dreiecke SBB_1 und TAA_1

$$TA_1 \parallel SB_1. \tag{6.6}$$

Nun wenden wir den großen affinen Satz von Desargues auf die Dreiecke TAA_1 und $B''(A)\varkappa(A_1)\varkappa$ an, woraus sich

$$(A)\varkappa (A_1)\varkappa \parallel AA_1 \tag{6.7}$$

ergibt. Wegen (6.4) liefert das gerade die Behauptung (6.5).

Literatur

[1] BOSSE, A.: Manière universelle de M. DESARGUES, pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le géométral, ensemble les places et proportions des fortes et faibles touches, teintes ou couleurs. Paris, Impr. de P. Deshayes. 1648.

[2] HESSENBERG, G., and J. DILLER: Grundlagen der Geometrie. Berlin: de Gruyter & Co. 1967.

[3] KLINGENBERG, W.: Beziehungen zwischen einigen affinen Schliessungssätzen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **18**, 120—143 (1952).

[4] Πάππος, Ἀλεξανδρεύς: Συναγωγή. Amsterdam: A. M. Hakkert. 1965.

[5] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. 2. Aufl. Berlin—Heidelberg—New York: Springer. 1975.

[6] SCHLEIERMACHER, A.: Bemerkungen zum Fundamentalsatz der projektiven Geometrie. Math. Z. **99**, 299—304 (1967).

[7] SCHUR, F.: Zur Proportionslehre. Math. Ann. **57**, 205—208 (1903).

[8] v. STAUDT, C. G. CH.: Geometrie der Lage. Nürnberg: Bauer und Raspe (Julius Merz). 1847.

[9] WAGENER, M.: Schließungssätze und Projektivitäten. Diplomarbeit, Karlsruhe 1976.

R. FRITSCH
Fachbereich Mathematik
Universität Konstanz
Postfach 7733
D-7750 Konstanz, Bundesrepublik Deutschland