

BEWERTUNGSFORTSETZUNGEN UND NICHT-
INJEKTIVE KOLLINEATIONEN

Herrn Hanfried Lenz zu seinem 65. Geburtstag gewidmet

Seit langem ist bekannt, daß aus nicht-archimedischen Bewertungen nicht-triviale Kollineationen (= inzidenzerhaltende Abbildungen) zwischen projektiven Räumen konstruiert werden können (s.z.B. [1] für den ebenen Fall oder [4, Section 3] für höhere Dimensionen). Es handelt sich dabei um surjektive Abbildungen, bei denen die Dimension des Zieles gleich der Dimension der Quelle ist; sie fallen unter den axiomatischen Ansatz von F. Radó [5, Definition 3.1]. In [3, Definition 3] verallgemeinert F. Machala die Radósche Begriffsbildung, indem er auf die von Radó ausdrücklich geforderte Dimensionsinvarianz verzichtet. Aber es ist nicht von vornherein zu übersehen, ob die Axiome von Machala im surjektiven Fall nicht etwa die Dimensionsinvarianz implizieren, zumindest bei solchen Kollineationen zwischen endlich-dimensionalen projektiven Räumen; ein von K. Mathiak am Ende von [4] angegebenes Beispiel führt auf eine Kollineation, deren Quelle überabzählbare und deren Ziel abzählbare Dimension hat.

Im folgenden wollen wir zeigen, wie aus gewissen Bewertungsfortsetzungen surjektive Kollineationen zwischen endlich-dimensionalen projektiven Räumen konstruiert werden können und welche geometrischen Konsequenzen algebraische Eigenschaften dabei haben. Das führt uns auch zu einem expliziten Beispiel für eine nichttriviale Kollineation (im Sinne von Machala), bei der sich die endliche Dimension von Quelle zu Ziel erniedrigt.

Für die benutzten Tatsachen aus der Bewertungstheorie verweisen wir auf das Buch von O. Endler [2]. Sehr danken wir Herrn J. K. Arason, Reykjavik, der uns die entscheidenden Hinweise zur Fertigstellung dieser Note gegeben hat; insbesondere der 3. Abschnitt ist ihm zuzuschreiben.

1. BEWERTUNGSFORTSETZUNGEN UND PROJEKTIVE RÄUME

Es sei k ein Körper und K ein Oberkörper von k mit $[K:k] = n < \infty$. Es bezeichne $\mathfrak{S}K$ den Verband der k -linearen Unterräume von K und $\mathfrak{P}K$ den zugehörigen projektiven (Inzidenz-) Raum. $\mathfrak{P}K$ ist die geordnete Teilmenge von $\mathfrak{S}K$, die aus den Atomen (= Punkten) und Hyperatomen (= Geraden) in $\mathfrak{S}K$ besteht.

Der Körper K sei in dieser Arbeit immer diskret bewertet. Wir versehen

k mit der induzierten Bewertung und bezeichnen mit \bar{K} bzw. \bar{k} die zugehörigen Restklassenkörper. \bar{K} ist ein Oberkörper von \bar{k} mit $[\bar{K}:\bar{k}] \leq [K:k]$; das führt zu dem Verband $\mathfrak{S}\bar{K}$ und dem projektiven Raum $\mathfrak{P}\bar{K}$.

Es bezeichne R den Bewertungsring in K and φ die Restklassenabbildung $R \rightarrow \bar{K}$. Die Zuordnung

$$(1) \quad U \mapsto \psi U := \varphi(U \cap R)$$

für alle $U \in \mathfrak{S}K$ beschreibt eine isotone Abbildung $\psi: \mathfrak{S}K \rightarrow \mathfrak{S}\bar{K}$, die im allgemeinen weder ein Verbandshomomorphismus ist noch sich zu einer strukturerhaltenden Abbildung der zugehörigen projektiven Räume einschränken läßt.

Letzteres ist offensichtlich genau dann möglich, wenn für alle $U \in \mathfrak{S}K$ mit $\dim_k U \leq 2$ gilt

$$(2) \quad \dim_{\bar{k}} \psi U = \dim_k U.$$

Ohne zusätzliche Voraussetzung hat man jedoch nur

$$(3) \quad \dim_{\bar{k}} \psi U \leq \dim_k U$$

für alle $U \in \mathfrak{S}K$.

K. Mathiak hat gezeigt [4; Korollar zu Satz 4], daß (2) für alle $U \in \mathfrak{S}K$ gilt, wenn K ein träge Erweiterung von k ist, d.h. $[\bar{K}:\bar{k}] = [K:k]$ gilt. In diesem Fall induziert die Bewertung auf K die Produkttopologie auf $k^n = K$ und die induzierte Kollineation erhält die Dimension.

Das ist aber mehr, als wir wirklich brauchen. Uns interessiert ja nur die Gültigkeit von (2) für $U \in \mathfrak{S}K$ mit $\dim_k U = 1, 2$. Zunächst können wir feststellen:

LEMMA 1. *ψ bildet genau dann Punkte auf Punkte ab, d.h. (2) gilt genau dann für alle Atome von $\mathfrak{S}K$, wenn K eine unverzweigte Erweiterung von k ist.*

Aus der fundamentalen Ungleichung folgt, daß die Trägheit einer Erweiterung die Unverzweigkeit impliziert, aber die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Wir wollen ja zeigen, daß nicht einmal die zusätzliche Forderung nach der Gültigkeit von (2) für alle Geraden die Trägheit der Erweiterung zur Folge hat. Das entscheidende Hilfsmittel dazu ist eine Umformulierung dieser Bedingung.

SATZ 1. *Ist K ein unverzweigte Erweiterung von k , so gilt die Gleichung (2) genau dann für alle Geraden in $\mathfrak{P}K$, wenn k bezüglich der Bewertungstopologie abgeschlossen in K ist.*

Zum Beweis benötigen wir den folgenden Hilfssatz:

LEMMA 2. *Ist K eine unverzweigte Erweiterung von k , so gilt die Gleichung*

(2) genau dann für alle Geraden, wenn zu jedem $a \in K \setminus k$ Elemente $\alpha, \beta \in k$ so existieren, daß gilt:

$$(4) \quad \alpha a + \beta \in R \wedge \varphi(\alpha a + \beta) \notin \bar{k}.$$

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar: Man betrachte den von 1 und a erzeugten k -linearen Untervektorraum von K . Zum Nachweis der Umkehrung sei U eine Gerade in $\mathfrak{B}K$. Wegen der Unverzweigkeit können wir Erzeugende a, b für U wählen, die Einheiten in R sind. Dann sind $b^{-1}a$ und 1 k -linear unabhängig, also ist $b^{-1}a \in K \setminus k$.

Nach Voraussetzung finden wir $\alpha, \beta \in k$, so daß für $c = ab^{-1}a + \beta$ gilt: $c \in R, \varphi c \notin \bar{k}$. Insbesondere gilt $\alpha \neq 0$, also sind auch bc und b k -linear unabhängige Elemente, d.h. Erzeugende von U . Die Multiplikation mit φb ist ein Isomorphismus von \bar{K} , der den von φc und 1 erzeugten Unterraum in einen Teilraum von $\varphi(U \cap R) = \psi U$ überführt. Damit gilt $\dim_k \psi U \geq 2$ und aus (3) folgt die Behauptung.

Beweis von Satz 1. '⇒' Sei $a \in K \setminus k$. Gemäß Lemma 2 wählen wir $\alpha, \beta \in k$ mit (4). Wäre nun a Häufungspunkt von k , so gäbe es $\gamma \in k$ so nahe bei a , daß ein Widerspruch dazu gelten würde $\varphi(\alpha a + \beta) = \varphi(\alpha \gamma + \beta) \in \bar{k}$! '⇐' Sei wieder $a \in K \setminus k$. Wegen der Unverzweigkeit können wir a als Einheit in R annehmen. Wegen der Abgeschlossenheit von k in K und der Diskretheit der Bewertung finden wir in k ein Element γ , das minimalen Abstand von a hat. Wegen der Unverzweigkeit finden wir darüber hinaus ein δ in k , das den gleichen Wert wie $a - \gamma$ hat. Dann setzen wir $\alpha = 1/\delta$ und $\beta = -\gamma/\delta$, woraus zunächst folgt $\alpha a + \beta \in R$. Wäre nun $\varphi(\alpha a + \beta) \in \bar{k}$, d.h. $\varphi(\alpha a + \beta) = \varphi \varepsilon$ für ein $\varepsilon \in k$, so läge $\gamma + \delta \varepsilon$ näher an a als γ , im Widerspruch zur Wahl von γ . Damit erfüllen diese Werte für α und β die Bedingung (4).

Wir fassen zusammen:

SATZ 2. Ist K eine endliche Erweiterung des diskret bewerteten Körpers k , so induziert die kanonische Abbildung $\psi: \mathfrak{S}K \rightarrow \mathfrak{S}\bar{K}$ genau dann eine Kollineation $\mathfrak{S}K \rightarrow \mathfrak{B}\bar{K}$, wenn die Erweiterung unverzweigt und k in K (topologisch) abgeschlossen ist.

Wir bemerken noch, daß die Bedingung der Abgeschlossenheit in einem speziellen Fall leicht nachzuprüfen ist:

LEMMA 3 Ist $n = [K:k]$ eine Primzahl, so ist k genau dann topologisch abgeschlossen in K , wenn der topologische Abschluß von k in K echt in K enthalten ist.

Beweis. Dies folgt unmittelbar daraus, daß es keine echten Zwischenkörper gibt, wenn $[K:k]$ eine Primzahl ist.

2. EIN KONKRETES BEISPIEL

Es sei k der Körper \mathbb{Q} der rationalen Zahlen, 7-adisch bewertet. Wir betrachten das Polynom $P = X^5 - 2X^2 + 14X + 14$. Dieses Polynom ist nach Eisenstein in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel. Modulo 7 zerfällt es in die teilerfremden Faktoren X^2 und $X^3 - 2$, wobei $X^3 - 2$ irreduzibel ist. Also spaltet P in $\mathbb{Q}_7[X]$ nach Hensel einen irreduziblen Faktor Q vom Grad 3 ab, wobei \mathbb{Q}_7 die Kompletterung von \mathbb{Q} bezeichnet. Wir setzen $L = \mathbb{Q}_7[X]/(Q)$ und bezeichnen die Restklasse der Unbestimmten X in L mit a . L ist eine Erweiterung von \mathbb{Q}_7 , auf die sich die 7-adische Bewertung von \mathbb{Q}_7 eindeutig fortsetzt. In L betrachten wir den Teilkörper $K = k[a]$ versehen mit der induzierten Bewertung. Dann sehen wir zunächst $3 = [\bar{K}:\bar{k}] < [K:k] = 5$, also ist K keine träge Erweiterung von k . Jedoch gilt trotzdem:

SATZ 3. Die kanonische Abbildung $\psi: \mathfrak{S}K \rightarrow \mathfrak{S}\bar{K}$ induziert eine Kollineation $\mathfrak{P}K \rightarrow \mathfrak{P}\bar{K}$.

Beweis. Wir haben die Voraussetzungen von Satz 2 nachzuprüfen. Die Unverzweigtheit ergibt sich unmittelbar aus der fundamentalen Ungleichung: $e \cdot 3 \leq 5$ impliziert $e = 1$. Im Hinblick auf Lemma 3 genügt es nun noch zu zeigen, daß a nicht im topologischen Abschluß \tilde{k} von k in K liegt. Da \mathbb{Q}_7 der topologische Abschluß von k in L ist, folgt $\tilde{k} \subset K \cap \mathbb{Q}_7$. Nach Konstruktion gilt aber $a \notin \mathbb{Q}_7$!

Es handelt sich hierbei um eine Kollineation des 4-dimensionalen projektiven Raumes über \mathbb{Q} auf die projektive Ebene über $\mathbb{Z}/(7)$. Interessant wäre ein Algorithmus zur expliziten Berechnung dieser Kollineation. Daneben stellt sich natürlich auch das Problem der Klassifikation dieser Art von Kollineationen; einen ersten Schritt dazu enthält der nächste, abschließende Abschnitt.

3. DER GALOISSCHE FALL

SATZ 4. Ist K eine unverzweigte Galois-Erweiterung von k , derart, daß k in K topologisch abgeschlossen ist, so gilt $[\bar{K}:\bar{k}] = [K:k]$.

Beweis. K ist eine endliche und separable Erweiterung von k , also gibt es nach dem Satz vom primitiven Element ein $a \in K$ mit $K = k[a]$. Wir wählen ein solches $a \in K$ und bezeichnen mit P sein Minimalpolynom. Dann ist $n = [K:k]$ der Grad von P .

Sei \hat{k} die Kompletterung von k . In $\hat{k}[X]$ zerfalle P in der Form $P = Q_1 \cdot Q_2$, wobei Q_1 und Q_2 normierte Polynome sind. Die Koeffizienten von Q_1 und Q_2 sind dann symmetrische Funktionen der Nullstellen von P , liegen also in K . Sie sind aber auch Häufungspunkte von k und damit in k selbst enthalten,

da k nach Voraussetzung ja abgeschlossen in K ist. Die Zerlegung von P findet also schon in $k[X]$ statt, also ist P auch in $\hat{k}[X]$ irreduzibel. Nun erhalten wir die Kompletterung \hat{K} von K als Zerfällungskörper von P über \hat{k} und es gilt $n = e \cdot [\hat{K} : \hat{k}]$ wobei e den Verzweigungsindex der Erweiterung \hat{K} von \hat{k} bezeichnet. Da aber K als unverzweigte Erweiterung von k vorausgesetzt ist, gilt $e = 1$.

Geometrisch besagt dieses Ergebnis:

SATZ 5. *Induziert die Galoiserweiterung K von k eine Kollineation $\mathfrak{P}K \rightarrow \mathfrak{P}\hat{K}$, so gilt $\dim \mathfrak{P}\hat{K} = \dim \mathfrak{P}K$.*

LITERATUR

1. André, J.: 'Über Homomorphismen projektiver Ebenen'. *Abh. Math. Sem. Hamburg* **34** (1970), 98–114.
2. Endler, O.: *Valuation Theory* (Hochschultexte, Universitexts) Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
3. Machala, F.: 'Homomorphismen von projektiven Räumen und verallgemeinerte semilineare Abbildungen'. *Časopis pro Pěstování matematiky* **100** (1975), 142–154.
4. Mathiak, K.: 'Kennzeichnende Eigenschaften bewerteter Vektorräume'. *J. Reine Angew. Math.* **260** (1973), 127–132.
5. Radó, F.: 'Darstellung nicht-injektiver Kollineationen eines projektiven Raumes durch verallgemeinerte semilineare Abbildungen'. *Math. Z.* **110**, (1969), 153–170.

Anschrift der Verfasser:

Rudolf Fritsch,
 Mathematisches Institut,
 Ludwig-Maximilians-Universität,
 Theresienstr. 39,
 D-8000 München 2
 W. Germany

Alexander Prestel,
 Fakultät für Mathematik,
 Universität Konstanz,
 Universitätsstr. 10,
 D-7750 Konstanz,
 W. Germany

(Eingegangen am 11. November 1981)