

Proof:

- (i)  $P_2$  and  $P_4$  are eigenspaces of  $\pi_4^1\pi_3^2 + \pi_2^3\pi_1^4$  with corresponding eigenvalues  $0 + \lambda$  and  $\lambda + 0$ . It follows that  $V$  as a whole is an eigenspace with eigenvalue  $\lambda$ .
- (ii) The eigenspaces of  $id - \pi_4^1\pi_2^3$  are  $P_3$  and  $P_4$  with corresponding eigenvalues 1 and  $1 - (1 - \lambda) = \lambda$  (cf. lemma 3.2 (iii)).

Juriaan Simonis and Jan van de Craats

#### REFERENCE

1 M. Berger: Géométrie 1. Cedic Fernand Nathan, Paris 1977.

© 1985 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/85/060063-06\$1.50 + 0.20/0

## Zur Kantenwinkelsumme der regulären Pyramiden

### 1. Einleitung

Eine Pyramide heisst *regulär*, wenn ihre Basis ein regelmässiges Vieleck ist und die Spitze auf dem Mittellot der Basis liegt. Sie ist bestimmt durch die Anzahl  $n$  der Ecken der Basis ( $n \in \mathbf{N}, n > 2$ ), den Radius  $r$  des Umkreises der Basis ( $r \in \mathbf{R}, r > 0$ ) und die Höhe  $h$  der Pyramide ( $h \in \mathbf{R}, h > 0$ ). Der Mantel besteht aus  $n$  Dreiecken, die gegen die Basis alle unter dem gleichen Winkel  $\varphi$  geneigt sind; je zwei benachbarte dieser Dreiecke sind ebenfalls unter immer dem gleichen Winkel  $\psi$  gegeneinander geneigt. Für die Summe  $\Sigma$  der Kantenwinkel gilt

$$\Sigma = n(\varphi + \psi). \quad (1)$$

Da Winkel unter Ähnlichkeitstransformationen invariant bleiben, kann man die Untersuchung von  $\Sigma$  auf den Fall

$$r = 1 \quad (2)$$

beschränken. Bei festem  $n$  gilt dann offensichtlich, dass in Abhängigkeit von  $h$

- (a)  $\varphi = \varphi_n(h)$  monoton von 0 bis  $\frac{1}{2}\pi$  wächst und  
 (b)  $\psi = \psi_n(h)$  monoton von  $\pi$  bis

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \pi. \quad (3)$$

fällt.

Für die Summe der Kantenwinkel ergeben sich damit die Grenzen

$$\Sigma_n(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \Sigma = n \cdot \pi, \tag{4}$$

$$\Sigma_n(\infty) = \lim_{h \rightarrow \infty} \Sigma = \left(\frac{3}{2}n - 2\right) \cdot \pi; \tag{5}$$

insbesondere gilt:

$$\Sigma_3(0) = 3\pi > \Sigma_3(\infty) = \frac{5}{2}\pi, \tag{6}$$

$$\Sigma_4(0) = 4\pi = \Sigma_4(\infty) \tag{7}$$

und

$$\Sigma_n(0) < \Sigma_n(\infty) \tag{8}$$

für  $n > 4$ .

Wegen des gegenläufigen Verhaltens von  $\varphi$  und  $\psi$  ist aber keineswegs klar, welche Werte  $\Sigma$  sonst annimmt. Um dies aufzuklären, soll im folgenden die Funktionenfolge  $(\sigma_n)$ , die gegeben ist durch

$$\sigma_n(h) = \sigma = \varphi + \psi, \tag{9}$$

untersucht werden. Klar sind zunächst die folgenden Abschätzungen und Grenzen:

$$0^\circ < \sigma_n(h) < \frac{3}{2}\pi, \tag{10}$$

$$\sigma(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \sigma_n(h) = \pi, \tag{11}$$

$$\sigma_n(\infty) = \lim_{h \rightarrow \infty} \sigma_n(h) = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{n}\right) \cdot \pi \tag{12}$$

und

$$\sigma_\infty(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(h) = \pi + \varphi_\infty(h), \tag{13}$$

wobei

$$\varphi_\infty(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(h) = \arctan h. \tag{14}$$

Für die Entwicklung der allgemeinen Theorie ist die vorherige Durchrechnung einiger Beispiele nützlich.

## 2. Beispiele

Zunächst seien die regulären Pyramiden betrachtet, bei denen alle Kanten gleich lang sind. Für diese muss gelten, dass die Länge  $s$  jeder Mantelkante («Seitenkante») gleich der Länge  $b$  jeder Basiskante ist, d. h. unter der Voraussetzung (2)

$$s = \sqrt{h^2 + 1} = 2 \cos \frac{1}{2} \alpha_n = b. \quad (15)$$

Es ist anschaulich klar, dass solche Pyramiden nur für  $n = 3, 4, 5$  existieren; formal folgt das aus der Bedingung

$$s > 1, \quad (16)$$

die im Falle der Gültigkeit von (15) äquivalent ist zu

$$\alpha_n < \frac{2}{3} \pi, \quad (17)$$

was nur für diese drei Werte von  $n$  erfüllt ist. Dabei bestehen enge Beziehungen zu den drei von Dreiecken begrenzten platonischen Körpern.

Bei  $n = 3$  liegt ein echter platonischer Körper vor, das reguläre Tetraeder. Es hat – unter Annahme (2) – die Höhe

$$h = \sqrt{2} \quad (18)$$

und die Winkel

$$\varphi = \psi = \arccos \frac{1}{3} \approx 0,392 \pi, \quad (19)$$

also

$$\sigma \approx 0,784 \pi < \pi \quad (20)$$

und

$$\Sigma \approx 2,351 \pi < \Sigma_3(0). \quad (21)$$

Bei  $n = 4$  handelt es sich um ein halbes Oktaeder mit

$$h = 1 \quad (22)$$

$$\varphi = \arctan \sqrt{2} \approx 0,304 \pi, \quad \psi = 2\varphi \approx 0,608 \pi \quad (23)$$

also

$$\sigma = 3\varphi \approx 0,912 \pi \quad (24)$$

und

$$\Sigma = 12\varphi \approx 3,649\pi < \Sigma_4(0) = \Sigma_4(\infty). \tag{25}$$

Bei  $n = 5$  kann man die Pyramide als «Haube» eines Ikosaeders ansehen. Mit den Bezeichnungen von Figur 1 lässt sie sich folgendermassen beschreiben. Basis ist das Fünfeck  $ABCDE$ , und die Spitze ist die Ecke  $S$  des Ikosaeders. Das Verhältnis der Höhe  $n$  zum Radius  $r$  ist das Verhältnis des Goldenen Schnitts, also wegen (2)

$$h = h:r = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1). \tag{26}$$

Für die Winkel ergibt sich

$$\varphi = \arctan(3 - \sqrt{5}) \approx 0,208\pi, \tag{27}$$

$$\psi = \pi - \arcsin \frac{2}{3} \approx 0,768\pi, \tag{28}$$

also

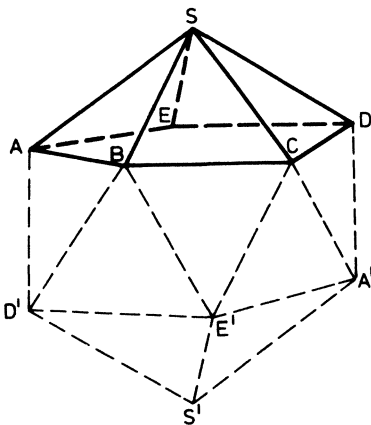
$$\sigma \approx 0,975\pi < \pi < \sigma_3(\infty) = \frac{11}{10}\pi \tag{29}$$

und

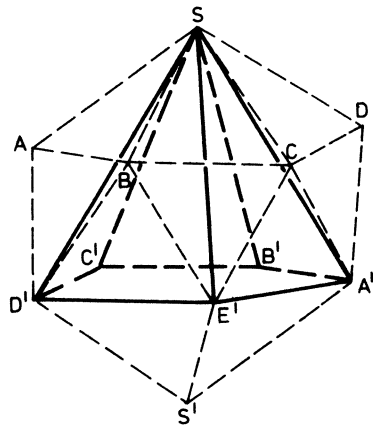
$$\Sigma \approx 4,877\pi < \Sigma_5(0) < \Sigma_5(\infty). \tag{30}$$

Einem Ikosaeder lässt sich noch in anderer Weise eine reguläre fünfseitige Pyramide einbeschreiben. Man wählt (s. Fig. 2) das Fünfeck  $A'B'C'D'E'$  als Basis und wieder die Ecke  $S$  als Spitze. Nun ist das Verhältnis von Radius  $r$  und Höhe  $h$  umgekehrt, also unter der Voraussetzung (2)

$$h = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1). \tag{31}$$



Figur 1



Figur 2

Damit folgt für die Winkel

$$\varphi = \arctan 2 \approx 0,352 \pi, \quad (32)$$

$$\psi = \pi - \arctan 2 \approx 0,648 \pi, \quad (33)$$

also

$$\sigma = \pi \quad (34)$$

und

$$\Sigma = 5\pi = \Sigma_5(0) < \Sigma_5(\infty). \quad (35)$$

Der gefundene Wert (34) für  $\sigma$  lässt sich auch elementar, ohne Trigonometrie, begründen: Die Dreiecke  $A'E'S$  und  $D'E'S$  sind unter dem Winkel  $\psi$  gegeneinander geneigt. Das Dreieck  $D'E'S$  liegt in der Ebene des Fünfecks  $AD'ECS$ , das Dreieck  $A'E'S$  in der Ebene des Fünfecks  $A'DSBE'$ ; aus letzterem erhält man durch Spiegelung am Mittelpunkt des Ikosaeders das parallele Fünfeck  $AD'S'B'E$ . Da sich  $E$ -Winkel zu  $\pi$  ergänzen, ist dieses Fünfeck gegen das Dreieck  $AD'C$ , das auch in der Ebene des Fünfecks  $AD'ECS$  liegt, unter dem Winkel  $\pi - \psi$  geneigt. Die Pyramide mit dem Fünfeck  $AD'S'B'E$  als Basis und der Ecke  $C$  als Spitze ist aber kongruent zur ursprünglich betrachteten Pyramide, d. h. der eben beschriebene Winkel ist kongruent zu  $\varphi$ :

$$\pi - \psi = \varphi. \quad (36)$$

Zum Abschluss sei noch eine vierseitige Pyramide erwähnt, bei der sich alle Kantenwinkel elementar berechnen lassen. Man nehme als Basis eine Seite eines Würfels und als Spitze die Mitte desselben Würfels. Dann erhält man

$$\varphi = \frac{1}{4} \pi, \quad \psi = \frac{2}{3} \pi, \quad (37)$$

also

$$\sigma = \frac{11}{12} \pi < \pi \quad (38)$$

und

$$\Sigma = \frac{7}{2} \pi < 4\pi = \Sigma_4(0) = \Sigma_4(\infty). \quad (39)$$

Diese Kantenwinkel sind rationale Vielfache von  $\pi$ , also ist diese Pyramide einem Würfel zerlegungsgleich [1].

Frage: Gibt es andere reguläre Pyramiden mit dieser Eigenschaft?

### 3. Die $\pi$ -Grenze für die Werte von $\sigma$

Mit Hilfe des Kosinussatzes und der Additionstheoreme erhält man

$$\sin \sigma = h \frac{s \cos \alpha + \cos \beta}{(s + \cos \beta) \sqrt{s^2 - \cos^2 \beta}} \quad (40)$$

und

$$\cos \sigma = - \frac{\sin \beta (2s^2 \cos \beta + s - \cos \beta)}{(s + \cos \beta) \sqrt{s^2 - \cos^2 \beta}}, \tag{41}$$

wobei  $s$  wie in (15) die Länge der Mantelkante bezeichnet und darüber hinaus zur Abkürzung

$$\alpha = \alpha_n, \quad \beta = \frac{1}{2} \alpha_n \tag{42}$$

gesetzt ist. Da  $2s^2 - 1$  sicher positiv ist, gilt allgemein

$$\cos \sigma < 0, \tag{43}$$

und damit lässt sich die untere Schranke für  $\sigma$  verbessern (vgl. (10)).

$$\sigma > \frac{1}{2} \pi. \tag{44}$$

Nun interessiert die Frage, wann

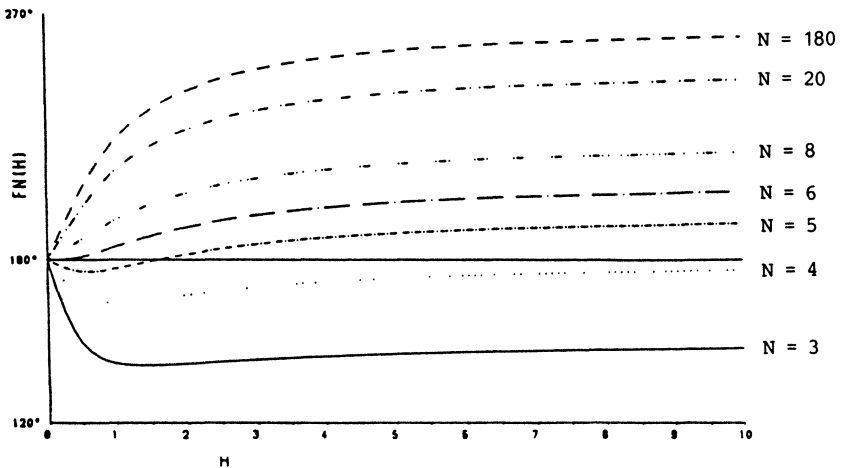
$$\sigma = \pi, \tag{45}$$

d. h.

$$s \cos \alpha + \cos \beta = 0 \tag{46}$$

ist. Da  $s$  und  $\cos \beta$  immer positiv sind, muss

$$\cos \alpha_n < 0, \tag{47}$$



Figur 3

d. h.

$$n > 4 \quad (48)$$

sein. Andererseits führt die Bedingung  $s > 1$  auf die Einschränkung

$$n < 6. \quad (49)$$

Damit ist die unter den Beispielen geschilderte fünfseitige reguläre Pyramide mit (31) die einzige, bei der  $\sigma$  den Wert  $\pi$  annimmt. Ansonsten ergibt sich aus den allgemeinen Grenzwerten und den Beispielen

$$\sigma_n(h) < \pi \quad \text{für } n = 3, 4 \quad \text{und alle } h, \quad (50)$$

$$\sigma_5(h) < \pi \quad \text{für } h < \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1), \quad (51)$$

$$\sigma_5(h) > \pi \quad \text{für } h > \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \quad \text{und} \quad (52)$$

$$\sigma_n(h) > \pi \quad \text{für } n > 5 \quad \text{und alle } h. \quad (53)$$

#### 4. Extremstellen und Monotonie

Da  $\sigma$  nur Werte zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und  $\frac{3}{2}\pi$  annimmt, folgt aus (40)

$$\sigma_n(h) = \pi - \arcsin \left\{ h \frac{s \cos \alpha + \cos \beta}{(s + \cos \beta) \sqrt{s^2 - \cos^2 \beta}} \right\} \quad (54)$$

und damit

$$\frac{d\sigma_n}{dh} = \sin \beta \cdot \frac{s - 2 \cos \beta}{s(s^2 - \cos^2 \beta)}. \quad (55)$$

Also verschwindet die Ableitung genau dann, wenn (15) gilt, d. h. wenn alle Kanten der Pyramide gleich lang sind. Die möglichen regulären Pyramiden mit dieser Eigenschaft wurden in Kapitel 2 diskutiert. Es handelt sich für  $n = 3, 4, 5$  offensichtlich jeweils um die Pyramide mit minimaler Kantenwinkelsumme. Damit findet man das folgende Monotonieverhalten der Funktionen  $\sigma_n$

- $\sigma_3$  fällt zwischen 0 und  $\sqrt{2}$  (s. (18)) von  $\pi$  auf  $0,784\pi$  (s. (20)) und wächst dann monoton auf  $\frac{2}{3}\pi$  (s. (12)),
- $\sigma_4$  fällt zwischen 0 und 1 (s. (22)) von  $\pi$  auf  $0,912\pi$  (s. (24)) und wächst dann monoton wieder auf  $\pi$  (s. (12)),
- $\sigma_5$  fällt zwischen 0 und  $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$  (s. (26)) auf  $0,975\pi$  (s. (29)) und wächst dann monoton auf  $\frac{11}{10}\pi$  (s. (12)),

— für  $n > 5$  wächst  $\sigma_n$  im ganzen Definitionsbereich monoton von  $\pi$  auf  $\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{n}\right) \cdot \pi$  (s. 12).

Man bemerkt noch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d\sigma_6}{dh} = 0, \tag{56}$$

d. h. der Graph der Funktion  $\sigma_6$  hat für  $h \rightarrow 0$  eine horizontale Asymptote.

### 5. Graphen

Nachstehend ein Teil der Graphen der Funktionen  $\sigma_n$  für  $n = 3, 4, 5, 6, 8, 20, 180$ . Sie wurden von Fräulein C. Rademacher im Rechenzentrum des Mathematischen Instituts der Ludwig-Maximilians-Universität München produziert. Man beachte, dass sie ausser von der Wahl des Parameters  $h$  auch von der ebenfalls willkürlichen Normierung (2) abhängen. Es ergeben sich zum Beispiel weder der Grenzwert (14) noch Monotonie für die Folgen  $(\sigma_n h)_N$  ( $h$  fest), wenn man die Seitenlänge des Basisviecks zu 1 normiert.

R. Fritsch  
Math. Institut, Universität München

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 J.P. Sydler: Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions. Comment. Math. Helv. 40, 43-80 (1965).

© 1985 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/85/060068-08\$1.50 + 0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 908.** Show that the length of a side of the Morley triangle of a given triangle  $T$  is less than one third the length of the smallest side of  $T$ . (The Morley triangle of  $T$  is the equilateral triangle formed by the intersection in pairs of the angle trisectors of  $T$ .)

M. S. Klamkin, Alberta, CDN  
R. Spira, Ashland, Oregon, USA

Lösung: Es seien  $a, b, c$  die Seiten,  $\alpha, \beta, \gamma$  die Innenwinkel und  $R$  der Umkreisradius des Dreiecks  $T$ ; die Seitenlänge des zu  $T$  gehörenden Morley-Dreiecks sei mit  $s$  bezeichnet. O.B.d.A. sei  $a$  die kleinste Seite von  $T$ .

Es gilt bekanntlich:

$$a = 2R \sin \alpha, \tag{1}$$

$$s = 8R \sin(\alpha/3) \sin(\beta/3) \sin(\gamma/3). \tag{2}$$