Jahrgang 34 · 1981 · Heft 1–8

MNU

Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht

FERD. DÜMMLERS VERLAG
5300 BONN 1 · POSTFACH 1480

DER MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE UNTERRICHT

Organ des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V.

Schriftleitung:

Hauptschriftleitung und Mathematik: OStD a. D. Herbert Noack, Feldstr. 108, 2300 Kiel, (0431) 85596

Physik: MinR Herwig Krüger, Untereisselner Str. 33, 2305 Heikendorf, (0431) 241538

Chemie: StD Ottheinrich Düll, Breidenbornerstr. 8, 6750 Kaiserslautern, (0631) 2883

Biologie: Prof. Dr. Karl-Heinz Berck, Institut für Biologiedidaktik der Universität Gießen, Karl-Glöckner-Str. 21 C, 6300 Gießen

Verlag:

Ferd. Dümmlers Verlag, Postfach 1480; Kaiserstraße 31–37 (Dümmlerhaus), 5300 Bonn 1, Telefon 02 28/22 30 31 und Hirschgraben-Verlag GmbH., Fürstenbergstraße 223, 6000 Frankfurt am Main. Druck: Boss-Druck, Kleve

Anzeigen- und Beilagenverwaltung:

durch den federführenden Verlag:
FERD. DÜMMLER's VERLAG, Postfach 1480; Kaiserstraße 31–37 (Dümmlerhaus), **5300 BONN 1,** Telefon 02 28/22 30 31.
Anzeigen- und Beilagenpreise gemäß Tarif Nr. 20 vom 1. 1. 1981. Für Stellengesuche und Behördenanzeigen gilt ein vergünstigter Tarif. Anzeigenschluß jeweils 4 Wochen vor Erscheinen.

Erscheinungsweise:

8mal jährlich mit je 64 Seiten Umfang: Zum 15. Jan./1. März/15. April/1. Juni/15. Juli/1. Sept./15. Okt./1. Dez.

Bezugsbedingungen:

Pro Jahrgang 8 Hefte = 512 Seiten plus 8 Seiten Jahresinhaltsverzeichnis: DM 64,—, Einzelheft DM 10,—, zuzüglich Versandspesen. Hefte früherer Jahrgänge zu gleichem Preis teilweise noch lieferbar.

Vorzugspreis für Studenten gegen Studienbescheinigung DM 51,20 (nur direkt vom Verlag).

Für Mitglieder des Fördervereins ist der Bezugspreis im Vereinsbeitrag enthalten (vgl. letzte Textseite dieses Heftes).

Einbanddecken: auch früherer Jahrgänge jeweils DM 6,80.

Eine Kündigung des Jahresabonnements kann nur anerkannt werden, falls die Kündigung mindestens 6 Wochen vor Jahresende beim Verlag vorliegt.

Anschriftenänderungen bitte rechtzeitig dem Dümmler Verlag (nicht dem Geschäftsführer des Fördervereins und nicht der Post) mitteilen. Bei Anschriftenänderungen, die nicht mindestens 4 Wochen vor Erscheinen des nächsten Heftes Dümmler gemeldet sind, kann bei Verlust Ersatz nur gegen Berechnung gestellt werden, da die Post Zeitschriften weder nachsendet noch an die Verlage zurückgibt.

Besprechungsstücke: nur an die zuständigen Fachschriftleiter. Für unverlangte Sendungen besteht keine Verpflichtung zur Rezension bzw. zur Erwähnung, noch wird eine Haftung oder Rücksendungsverpflichtung übernommen. **Namentlich** gekennzeichnete Beiträge geben nicht unbedingt in jedem Falle die Meinung der Schriftleitung und des Verlages wieder.

DEUTSCHER VEREIN ZUR FÖRDERUNG DES MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHTS E.V.

Der Verein ist durch Verfügung des Finanzamtes für Körperschaften in Hamburg als gemeinnützig anerkannt.

Geschäftsjahr ist das Kalenderjahr. Der Eintritt kann jederzeit erfolgen. Der Beginn der Mitgliedschaft rechnet je nach Wunsch des Eintretenden vom 1. Januar oder 1. Juli an. Der Austritt ist nur zum 31. Dezember möglich und muß bis zum 1. Oktober dem Geschäftsführer gemeldet werden. Schulen und Hochschulinstitute können nicht Mitglied werden.

Der Jahresbeitrag beträgt DM 52,– (für Pensionäre DM 42,–); in ihm ist die Belieferung mit der Zeitschrift »Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht« eingeschlossen. Studenten und Studienreferendare, Assessoren, Hochschulassistenten und Junglehrer, die noch nicht die volle tarifliche Besoldung erhalten, bezahlen nur DM 32,– Jahresbeitrag, wenn sie darüber eine mit dem Stempel der Schulleitung oder der Hochschule versehene Bescheinigung dem Geschäftsführer einreichen.

Der Jahresbeitrag ist bis zum 1. Juni im ganzen zu zahlen. Später noch ausstehende Beträge werden zuzüglich der Kosten der Einziehung durch Postnachnahme erhoben.

An- und Abmeldungen sind nur an den Geschäftsführer zu richten. Adressenänderungen müssen spätestens 4 Wochen vor Erscheinen beim Dümmler Verlag vorliegen (alte und neue Adresse). Da die Post Zeitschriften nicht nachsendet, sondern vernichtet, kann verlagsseits Ersatz nur gegen Berechnung geleistet werden.

INHALTSVERZEICHNIS

ABHANDLUNGEN – BEITRÄGE ZUR SCHULPRAXIS

Mathematik

Physik

Chemie

Biologie

Allgemeines

MITTEILUNGEN

BESPRECHUNGEN

Physik

Chemie

Biologie

Allgemeines

MNU Jahrgang 34 (1981). Hefteinteilung

Heft	erschienen	Seiten	Heft	erschienen	Seiten
1	15. 1.	1– 64	5	15. 7.	257–320
2	01. 3.	65–128	6	01. 9.	321–384
3	15. 4.	129–192	7	15. 10.	385–448
4	01. 6.	193–256	8	01. 12.	449–512

Aus der Schulpraxis · Für die Schulpraxis

»Dreiecks«-Ungleichungen für Tetraeder

Von Rudolf Fritsch

Mit 1 Abbildung

In den Lehrplänen für die Leistungskurse Lineare Algebra/ Analytische Geometrie ist eine z. T. sehr ausführliche Behandlung des inneren Produkts vorgesehen, bis hin zum Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren[1]*. Es besteht aber kein Zweifel darüber, daß das innere Produkt in der Schule kein selbständiges Interesse beanspruchen kann, sondern nur im Hinblick auf interessante Anwendungen eingeführt werden sollte, bei denen die bereitgestellten Methoden genutzt werden und die vor allem das räumliche Vorstellungsvermögen der Schüler fördern. Dabei verdient das Tetraeder als 3dimensionales Analogon des Drei-*

ecks besonderes Interesse (s. etwa auch den Beitrag von Tietz [6]). Wir geben nachstehend zwei Beispiele aus der »Tetraedrometrie«, die einerseits den Begriff des inneren Produkts in seiner ganzen Tragweite benötigen, aber andererseits mit den in den Lehrplänen zur Verfügung stehenden Mitteln dargestellt werden können.

1. Einleitung

Es handelt sich um zwei verschiedene Verallgemeinerungen der Dreiecksungleichung. Die Dreiecksungleichung liefert ein Kriterium dafür, daß drei gegebene positive reelle Zahlen als Seitenlängen eines Dreiecks auftreten. Man kann nun einerseits fragen, wann sechs vorgegebene positive reelle Zahlen als Kantenlängen eines Tetraeders möglich sind, und andererseits eine Bedingung an vier positive reelle Zahlen dafür suchen, daß sie als Seitenflächen eines Tetraeders vorkommen.

Unsere Überlegungen spielen sich im $\mathbb{R}^3$ ab. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ und mit $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ das kanonische Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$, d. h.

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 .$$

Über allgemeine innere Produkte benötigen wir die folgenden Tatsachen (s. z. B. [3]): Ist $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ eine beliebige Basis des $\mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{M} = (m_{ij})$ eine reelle (3, 3)-Matrix, so gibt es genau eine bilineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) = m_{ij} .$$

(Anstelle von $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ werden wir im folgenden kurz $\boldsymbol{x} \underset{\mathrm{M}}{\cdot} \boldsymbol{y}$ schreiben). Die Abbildung f ist ein inneres Produkt, wenn die Matrix $\boldsymbol{M}$ symmetrisch und positiv definit ist. Die letztgenannte Eigenschaft prüft man mit dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren. Jedes innere Produkt führt zu einer Längenfunktion $l\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$l(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{x} \underset{\mathrm{M}}{\cdot} \boldsymbol{x}} ,$$

und aus der sich das innere Produkt zurückgewinnen läßt:

$$l(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2 = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \underset{\mathrm{M}}{\cdot} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = l(\boldsymbol{x})^2 - 2\, \boldsymbol{x} \underset{\mathrm{M}}{\cdot} \boldsymbol{y} + l(\boldsymbol{y})^2 ,$$

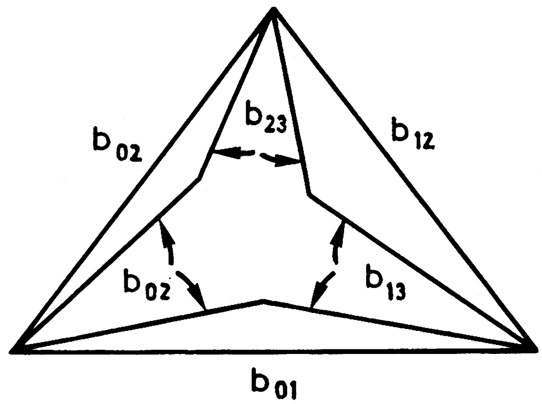

Abb. 1

d. h.

$$\boldsymbol{x} \underset{\mathrm{M}}{\cdot} \boldsymbol{y} = \tfrac{1}{2}\,(l(\boldsymbol{x})^2 + l(\boldsymbol{y})^2 - l(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2).$$

Für das kanonische Skalarprodukt notieren wir noch die wichtige und anschauliche Beschreibung des Betrages:

$$|\,\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}\,| = l(\boldsymbol{x}) \cdot l \text{ (Projektion von } \boldsymbol{y} \text{ auf } \boldsymbol{x}).$$

2. Tetraeder mit vorgegebenen Kantenlängen

Seien nun 6 positive reelle Zahlen $b_{ij} = b_{ji}$ für $0 \leq i < j \leq 3$ gegeben; wir setzen noch $b_{ii} = 0$ für $0 \leq i \leq 3$. Es geht uns um die Existenz eines Tetraeders mit den Ecken $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$, so daß b_{ij} gerade den Abstand von $\boldsymbol{b}_i$ und $\boldsymbol{b}_j$ angibt, ein Problem, das auch für die Statistik Bedeutung erlangt hat [1]. Man könnte zunächst vermuten, daß die offensichtlich notwendige Bedingung »Je drei Größen, die zusammen die Seitenlängen eines Randdreiecks bilden, erfüllen die entsprechende Dreiecksungleichung« auch hinreichend ist ([1], [5]). Aus der Abbildung 1 sieht man jedoch unmittelbar, wie man aus sechs Größen vier Dreiecke bilden kann, die sich nicht zum Rand eines Tetraeders zusammensetzen lassen. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Kantenlängen eines Tetraeders, die wir jetzt herleiten wollen, wurde von M. Fiedler in [2] angegeben, allerdings in einer Form, in der sie in der Schule nicht erarbeitet werden kann[2]).

Zunächst sei ein Tetraeder mit den gewünschten Eigenschaften gegeben. Ohne wesentliche Einschränkung können wir dabei $\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{o}$ annehmen. Die Ecken $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ bilden dann eine Basis des $\mathbb{R}^3$, bezüglich deren

[1]) Im Lehrplan von Baden-Württemberg vom Januar 1977 ist das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren zwar nicht explizit erwähnt, aber es wird als Lernziel verlangt: »*Entscheiden können, ob eine vorgegebene Abbildung* $V \times V \to \mathbb{R}$ *eine Skalarmultiplikation ist*«. Das muß doch wohl mit diesem Verfahren geschehen, da das Kriterium der Positivität der Hauptminoren sicher nicht für den Gymnasialunterricht geeignet ist.

[2]) Die zitierte Arbeit von Fiedler ist eine wahre Fundgrube für hübsche Sätze aus der Tetraedrometrie; leider ist sie nur schwer zugänglich, weil sie in tschechischer Sprache abgefaßt ist.

das kanonische innere Produkt nach der vorherigen Theorie durch die Matrix $\boldsymbol{M} = (m_{ij})$ mit

$$m_{ij} = \tfrac{1}{2}(b_{oi}^2 + b_{oj}^2 - b_{ij}^2)$$

induziert ist. Also muß diese Matrix positiv definit sein, was eine weitere notwendige Bedingung ergibt. Diese Bedingung ist aber nun auch hinreichend. Sind die reellen Zahlen b_{ij} so gegeben, daß die Matrix $\boldsymbol{M} = (m_{ij})$ positiv definit ist, so bestimmt man zunächst mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$ von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des inneren Produktes $\underset{M}{\cdot}$, gebildet über der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^3$. Die lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die gegeben ist durch

$$g(\boldsymbol{c}_i) = \boldsymbol{e}_i \qquad \text{für } 1 \leq i \leq 3\,,$$

ist dann eine Isometrie $(\mathbb{R}^3, \underset{M}{\cdot}) \to (\mathbb{R}^3, .)$, d. h. für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\boldsymbol{x} \underset{M}{\cdot} \boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{y})\,.$$

Man setzt nun

$$\boldsymbol{b}_i = g(\boldsymbol{e}_i) \qquad \text{für } 1 \leq i \leq 3$$

und erhält

$$\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{e}_i \underset{M}{\cdot} \boldsymbol{e}_i = m_{ii} = b_{oi}^2\,,$$

d. h. $\quad l(\boldsymbol{b}_i) = b_{oi}$, und

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{b}_j)^2 &= \boldsymbol{b}_i^2 - 2\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j + \boldsymbol{b}_j^2 \\ &= b_{oi}^2 - 2\boldsymbol{e}_i \underset{M}{\cdot} \boldsymbol{e}_j + b_{oj}^2 = b_{ij}^2\,,\end{aligned}$$

d. h. $\quad l(\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{b}_j) = b_{ij}\,.$

Also hat das Tetraeder $\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ die gewünschten Kantenlängen.

Damit haben wir die folgende Verallgemeinerung des durch die Dreiecksungleichung beschriebenen ebenen Sachverhalts bewiesen:

Zu sechs positiven reellen Zahlen b_{ij}, $0 \leq i < j \leq 3$, gibt es in $\mathbb{R}^3$ genau dann ein Tetraeder mit den Ecken $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ und den Kantenlängen

$$l(\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{b}_j) = b_{ij}\,,\ 0 \leq i < j \leq 3\,,$$

wenn die Matrix $\boldsymbol{M} = (m_{ij})$ mit

$$m_{ij} = \tfrac{1}{2}(b_{oi}^2 + b_{oj}^2 - b_{ij}^2)\,,\ 1 \leq i, j \leq 3\,,$$

positiv definit ist. (Dabei ist $b_{ij} := b_{ji}$ für $1 \leq j < i \leq 3$ und $b_{ii} := 0$ für $1 \leq i \leq 3$.)

Um den Rechenaufwand zu demonstrieren, sei noch Beispiel mit konkreten Zahlen durchgerechnet. Wir wählen

$$b_{01} = 4\,,\ b_{02} = b_{03} = 5\,,\ b_{12} = b_{13} = b_{23} = 3\,.$$

Damit ergibt sich

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 16 \\ 16 & 25 & 20{,}5 \\ 16 & 20{,}5 & 25 \end{pmatrix}.$$

Das Orthonormalisierungsverfahren liefert:

$$\boldsymbol{e}_1 \underset{M}{\cdot} \boldsymbol{e}_1 = 16 \Rightarrow l_M(\boldsymbol{e}_1) = 4 \Rightarrow \boldsymbol{c}_1 = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_2 \underset{M}{\cdot} \boldsymbol{c}_1 = 4 \Rightarrow \boldsymbol{e}_2 - 4\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$l_M\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \boldsymbol{c}_2 = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_3 \underset{M}{\cdot} \boldsymbol{c}_1 = 4,\ \boldsymbol{e}_3 \underset{M}{\cdot} \boldsymbol{c}_2 = \tfrac{3}{2} \Rightarrow \boldsymbol{e}_3 - 3\,\boldsymbol{c}_1 - \tfrac{3}{2}\boldsymbol{c}_2$$

$$= \begin{pmatrix}-0{,}5\\-0{,}5\\1\end{pmatrix} \Rightarrow l_M\begin{pmatrix}-0{,}5\\-0{,}5\\1\end{pmatrix} = \tfrac{3}{2}\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{c}_3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Nun drücken wir die $\boldsymbol{e}_i$ durch die $\boldsymbol{c}_i$ aus

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1 &= 4\,\boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 &= 4\,\boldsymbol{c}_1 + 3\,\boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 &= 4\,\boldsymbol{c}_1 + \tfrac{3}{2}\boldsymbol{c}_2 + \tfrac{3}{2}\sqrt{3}\,\boldsymbol{c}_3\end{aligned}$$

und erhalten das gesuchte Tetraeder mit den Ecken

$$\boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix}4\\1{,}5\\1{,}5\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

3. Tetraeder mit vorgegebenen Maßzahlen für die Seitenflächen

Wenden wir uns nun den Seitenflächen zu. Wir wollen eine in [4: Theorem 5.1] angegebene Bedingung herleiten, die zwar sehr einfach zu formulieren ist, aber doch etwas Aufwand mit mehreren anschaulich-geometrischen Einsichten erfordert. Seien a_0, a_1, a_2, a_3 reelle Zahlen, von denen wir ohne wesentliche Einschränkung

$$0 < a_3 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0 \tag{1}$$

annehmen können. Haben wir ein Tetraeder mit diesen Zahlen als Seitenflächen, so stellen wir es auf die Seite mit der Fläche a_0 und projizieren die ganze Figur senkrecht auf die Grundebene. Dann sieht man unmittelbar die Notwendigkeit der Ungleichung

$$a_0 < a_1 + a_2 + a_3\,. \tag{2}$$

Zum Nachweis, daß diese Ungleichung auch hinreichend ist, stellen wir zunächst eine Vorüberlegung an. Seien $\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{o}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ die Ecken eines Tetraeders T und $\boldsymbol{h}_0, \boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3$ die zugehörigen Höhenfußpunkte. Für $0 \leq i \leq 3$ bezeichne $\boldsymbol{f}_i$ das positive Vielfache des Vektors $\boldsymbol{h}_i - \boldsymbol{b}_i$ mit der Länge a_i. Ferner sei v das Volumen des Tetraeders. Dann gelten die folgenden Gleichungen:

$$\boldsymbol{f}_0 \cdot \boldsymbol{b}_j = 3v \qquad \text{für } 1 \leq j \leq 3$$

(die Länge von $\boldsymbol{f}_0$ ist a_0, die Länge der Projektion von $\boldsymbol{b}_j$ auf $\boldsymbol{f}_0$ ist $l(\boldsymbol{h}_0)$, die Länge der zugehörigen Höhe des Tetraeders),

$$\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 0 \qquad \text{für } 1 \leq i \leq 3\,,\ 0 \leq j \leq 3\,,\ j \neq i\,,$$

(für diese Indizes i, j ist $\boldsymbol{f}_i$ senkrecht zu $\boldsymbol{b}_j$), und

$$\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{b}_i = -3v \qquad \text{für } 1 \leq i \leq 3\,.$$

($\boldsymbol{f}_i$ hat die Länge a_i, die Projektion von $\boldsymbol{b}_i$ auf $\boldsymbol{f}_i$ hat die zugehörige Höhe als Länge und ist entgegengesetzt zu $\boldsymbol{f}_i$ gerichtet.) Damit berechnet man

$$(\boldsymbol{f}_0 + \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3) \cdot \boldsymbol{b}_i = 0 \qquad \text{für } 1 \leq i \leq 3\,.$$

Da nur der Nullvektor auf dem ganzen $\mathbb{R}^3$ senkrecht steht, folgt

$$\boldsymbol{f}_0 + \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{o}\,. \tag{3}$$

Das ist eine für sich interessante Gleichung, die außerdem den Schlüssel zur Konstruktion eines Tetraeders mit gewünschten Seitenflächen liefert [4].

Dazu bemerken wäre zunächst noch, daß keine drei der Vektoren $\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ linear abhängig sind, d. h. in einer Ebene liegen. Wären nämlich etwa $\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ linear abhängig, so wären die Kanten $(\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_3)$, $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3)$, $(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ des Tetraeders parallel und könnten nicht in $\boldsymbol{b}_3$ zusammenlaufen. Damit läßt sich zeigen, daß das Tetraeder T aus den Vektoren $\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ zurückgewonnen werden kann. Wir bestimmen zunächst einen Vektor $\tilde{\boldsymbol{b}}_1$ als eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_0 \cdot \tilde{\boldsymbol{b}}_1 &= 1 \\ \boldsymbol{f}_2 \cdot \tilde{\boldsymbol{b}}_1 &= 0 \\ \boldsymbol{f}_3 \cdot \tilde{\boldsymbol{b}}_1 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

und notieren als Folgerung aus (3)

$$\boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 = -\boldsymbol{f}_0 \cdot \boldsymbol{b}_1 = -1\,. \tag{5}$$

Analog finden wir $\tilde{\boldsymbol{b}}_2$ und $\tilde{\boldsymbol{b}}_3$. Bezeichnen wir nun mit $\tilde{v}$ das Volumen des von $\tilde{\boldsymbol{b}}_0 = \boldsymbol{o}, \tilde{\boldsymbol{b}}_1, \tilde{\boldsymbol{b}}_2, \tilde{\boldsymbol{b}}_3$ aufgespannten Tetraeders $\tilde{T}$ und mit $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ dessen Seitenflächen, so finden wir für die Höhen dieses Tetraeders nach (4)

$$\frac{3\tilde{v}}{\tilde{a}_0} = \frac{1}{a_0}\,,$$

da die Projektion von $\tilde{\boldsymbol{b}}_i$ auf $\tilde{\boldsymbol{f}}_0$ gerade die 0te Höhe von $\tilde{T}$ liefert, bzw. nach (5)

$$\frac{3\tilde{v}}{\tilde{a}_i} = \frac{1}{a_i} \qquad \text{für } 1 \leq i \leq 3\,,$$

da sich die i-te Höhe von $\tilde{T}$ als die Länge der Projektion von $\tilde{\boldsymbol{b}}_i$ auf $\tilde{\boldsymbol{f}}_i$ ergibt.

Damit hat man

$$a_i = \frac{\tilde{a}_i}{3\tilde{v}} \qquad \text{für } 0 \leq i \leq 3\,,$$

d. h. das ursprüngliche Tetraeder T ergibt sich aus $\tilde{T}$ durch zentrische Streckung von $\boldsymbol{o} = \boldsymbol{b}_0 = \tilde{\boldsymbol{b}}_0$ aus mit dem Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{3\tilde{v}}}\,.$$

Diese Überlegung zeigt auch, daß es zur Konstruktion eines Tetraeders mit vorgeschriebenen Seitenflächen a_0, a_1, a_2, a_3 genügt, Vektoren $\boldsymbol{f}_i$ für $0 \leq i \leq 3$ so zu bestimmen, daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(a) $\quad l(\boldsymbol{f}_i) = a_i \quad$ für $0 \leq i \leq 3$.

(b) $\quad \boldsymbol{f}_0 + \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{o}$.

(c) Je drei der Vektoren $\boldsymbol{f}_i$ sind linear unabhängig.

Dazu seien $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ so gegeben, daß die Ungleichungen (1) und (2) erfüllt sind. Damit konstruiert man sich zunächst ein ebenes Viereck mit den Seiten a_0, a_1, a_2, a_3, was auf Grund der Ungleichungen offensichtlich möglich ist. Indem man ein Teildreieck dieses Vierecks etwas um die entsprechende Diagonale dreht, erhält man ein nichtebenes Viereck mit den gleichen Seitenlängen. Die Ecken dieses Vierecks seien $\boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{o}, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$. Wir setzen nun

$$\boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{c}_1\,,\ \boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{c}_2 - \boldsymbol{c}_1\,,\ \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{c}_3 - \boldsymbol{c}_2\,,\ \boldsymbol{f}_3 = -\boldsymbol{c}_3\,.$$

Für diese Vektoren $\boldsymbol{f}_i$ sind von den geforderten Eigenschaften die ersten beiden, (a) und (b), offensichtlich erfüllt. Da das Viereck $(\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$ nicht eben ist, sind die Vektoren $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$ linear unabhängig, woraus sich nun leicht auch die Eigenschaft (c) ergibt. Damit sind wir am Ziel. Unser Ergebnis ist also eine »Vierecks«-Ungleichung:

Sind a_0, a_1, a_2, a_3 positive reelle Zahlen mit

$$a_3 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0\,,$$

so gibt es genau dann ein Tetraeder, dessen Seitendreiecke die Flächen a_i, $0 \leq i \leq 3$ haben, wenn gilt

$$a_0 < a_1 + a_2 + a_3\,.$$

Zum Abschluß wollen wir auch hierfür ein konkretes Beispiel durchrechnen. Wir wählen

$$a_0 = 2625\,,\; a_1 = 1365\,,\; a_2 = 1365\,,\; a_3 = 735\,.$$

Als nichtebenes Viereck mit den Kantenlängen a_i wählen wir

$$c_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\; c_1 = \begin{pmatrix}2520\\735\\0\end{pmatrix},\; c_2 = \begin{pmatrix}1260\\735\\525\end{pmatrix},\; c_3 = \begin{pmatrix}0\\735\\0\end{pmatrix}.$$

Dann ergeben sich die f_i zu

$$f_0 = \begin{pmatrix}2520\\735\\0\end{pmatrix},\; f_1 = \begin{pmatrix}-1260\\0\\525\end{pmatrix},\; f_2 = \begin{pmatrix}-1260\\0\\-525\end{pmatrix},$$

$$f_3 = \begin{pmatrix}0\\-735\\0\end{pmatrix}.$$

Die b_i, $1 \leq i \leq 3$, berechnen wir aus linearen Gleichungssystemen:

$$\begin{array}{lll} 2520x + 735y & = 1 & \\ -1260x \quad -525z & = 0 & \Rightarrow \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2520}\\0\\-\frac{1}{1050}\end{pmatrix} \\ -735y & = 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2520x + 735y & = 1 & \\ -1260x \quad +525z & = 0 & \Rightarrow \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2520}\\0\\\frac{1}{1050}\end{pmatrix} \\ -735y & = 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2520x + 735y & = 1 & \\ -1260x \quad +525z & = 0 & \Rightarrow \tilde{b}_3 = \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{735}\\0\end{pmatrix}. \\ -1260x \quad -525z & = 0 & \end{array}$$

Das von $\tilde{b}_0 = b_0 = o$, $\tilde{b}_1$ und $\tilde{b}_2$ aufgespannte Dreieck hat die Fläche $(15 \cdot 420^2)^{-1}$. Also ist das Flächenverhältnis zwischen dem gesuchten Tetraeder und dem Tetraeder $\tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$

$$735 \cdot 420^2 \cdot 15 = (105 \cdot 420)^2.$$

Damit finden wir schließlich b_1, b_2, b_3 durch Streckung um den Faktor $105 \cdot 420$:

$$b_1 = \begin{pmatrix}17{,}5\\0\\-42\end{pmatrix},\; b_2 = \begin{pmatrix}17{,}5\\0\\42\end{pmatrix},\; b_3 = \begin{pmatrix}0\\60\\0\end{pmatrix}.$$

Literatur

[1] H. DRYGAS: Über multidimensionale Skalierung. – Statist. Hefte (N. F.) **19** (1978) 63–66.
[2] M. FIEDLER: Geometrie simplexu v E_n (prvni cást). – Casopis Pest. Mat. **79** (1954) 297–320.
[3] R. FRITSCH: Eine geometrische Hinführung zum inneren Produkt. – DdM **8** (1980) 133–147.
[4] L. GERBER: The orthocentric simplex as an extreme simplex. – Pacific J. Math. **56** (1975) 97–111.
[5] A. KIRSCH: Bermerkung zu K. Drygas, »Über multidimensionale Skalierung«. – Stat. Hefte (N. F.) **19** (1978) 211–212.
[6] H. TIETZ: Die Raumhöhen des Tetraeders. – MNU **25** (1972) 19–20.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. R. Fritsch, Universität Konstanz, Fakultät für Mathematik, Postfach 5560, 7750 Konstanz