

SM 600 B284

*Schriften des Deutschen Vereins zur Förderung  
des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V.*

**Heft 30**

---

## **Bericht**

über die 8. Tagung der Fachleiter für Mathematik  
an den Studienseminaren für Lehrerausbildung in der  
Bundesrepublik Deutschland einschließlich des Landes Berlin

**MATHEMATIKUNTERRICHT IN GRUNDKURSEN**  
(und in der Sekundarstufe I)

**UNVERZICHTBARER KERNSTOFF DES MATHEMATIKUNTERRICHTS**  
**FACHDIDAKTISCHE AUSBILDUNG DER REFERENDARE**

*Diese Tagung wurde vom Deutschen Verein zur Förderung  
des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V.  
in der Reinhardswaldschule in Fulda/Kassel*

vom 27. September bis 1. Oktober 1982 veranstaltet

unter der Leitung von  
Friedrich Barth, München

Organisation:  
Klaus-Jochem Mank, Steinheim

– Als Manuskript gedruckt –

1982

Zeitplan der TagungMontag, 27.9.82

Anreise  
 Begrüßung der Teilnehmer  
 Erörterung organisatorischer Fragen

Dienstag, 28.9.82

vormittags

FRITSCH:  
 Geometrie im Grundkurs

FÜHRER:  
 Analysis für alle? Begründungen, Ziele  
 und Schwerpunkte im Pflichtbereich.

nachmittags

STRICK:  
 Methoden der beurteilenden Statistik im  
 Grundkurs Stochastik

HALLER:  
 Historische Aspekte im Stochastikunter-  
 richt

Mittwoch, 29.9.82

vormittags

HÜRTE:  
 Die Mathematik an allg. bildenden Schu-  
 len zwischen Handwerk und Mathematik

MEYER:  
 Räumliche Geometrie in den Klassen 5-9.

nachmittags

KASSEL

Donnerstag, 30.9.82

vormittags

Diskussion:  
 Gibt es in der Mathematik einen allge-  
 mein verbindlichen unverzichtbaren Kern-  
 stoff? Was würde dazu zählen?

nachmittags

WUNDERLING:  
 Analysis-Grundkurs und Computergrafik

Freitag, 1.10.82

vormittags

SCHMIDT:

Probleme der Grundkurse und mögliche Konsequenzen, speziell für die Lehrerausbildung der 2. Phase

ENGERT/REIFENKUGEL:

Fachdidaktische Ausbildung der Referendare an Studienseminaren in Hessen

LEHRNBECHER:

Beurteilungskriterien bei der Seminarbildung.

## Geometrie im Grundkurs

Referent: R. Fritsch, München

Lineare Gleichungssysteme haben Anwendungen in vielen Bereichen, gerade auch außerhalb der Mathematik. Deshalb bildet heute neben der Analysis die lineare Algebra einen wesentlichen Bestandteil der Oberstufenmathematik, wodurch leider die klassische analytische Geometrie ziemlich verdrängt wurde. Insbesondere im Grundkurs sind dabei die Möglichkeiten zur Behandlung geometrischer Probleme sehr eingeschränkt. Im folgenden soll nun gezeigt werden, wie man auf der Basis der Behandlung der linearen Gleichungssysteme doch zu interessanten geometrischen Aussagen kommen kann. Es handelt sich dabei vor allem um Sätze der 3-dimensionalen Elementargeometrie, die einerseits das räumliche Anschauungsvermögen fördern und andererseits aber auch zum Verständnis der Methoden der linearen Algebra beitragen, indem diese eine geometrische Interpretation erhalten.

1. Vorkenntnisse

Auch bei einem Grundkursschüler darf man voraussetzen, daß er schon gewisse geometrische Vorstellungen hat. Über die folgende bescheidene Liste dürfte wohl Einigkeit bestehen.

(1) Deutung von Zahlenpaaren und Zahlentripeln als Punkte der Ebene bzw. des Raumes in einem rechtwinkligen Koordinatensystem sowie als Ortsvektoren. Hier wird man allerdings die zukünftige Notation vereinbaren müssen. Mein Vorschlag lautet: Punkte in Anlehnung an die Elementargeometrie mit großen lateinischen Buchstaben zu bezeichnen, ebenso die entsprechenden Ortsvektoren (Die Schreibweise mit dem Pfeil  $\rightarrow$  über einem kleinen Buchstaben ist nicht schön; Vektoren kann man auch als spezielle Matrizen auffassen und diese werden üblicherweise auch mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet). Die Koordinaten eines Punktes werden dann durch den entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben und Anhängen der Indizes 1, 2, 3 beschrieben, also etwa

$$A = (a_1 | a_2 | a_3), \quad X = (x_1 | x_2 | x_3)$$

Eine Bedeutung für kleine lateinische Buchstaben ohne Index wird nicht festgelegt; sie kann von Fall zu Fall verschieden sein.

- (2) Vektoraddition und ihre geometrische Darstellung mit Hilfe der Parallelogrammkonstruktion
- (3) Dabei speziell Vektorsubtraktion zur Darstellung des Vektors von  $A$  nach  $B$  ( $= B-A$ )
- (4) Skalarmultifikation mit der geometrischen Interpretation von  $\{rA \mid r \in \mathbb{R}\}$  für  $A \neq 0$  als Gerade durch den Ursprung.
- (5) Als Folgerung aus dem Satz von Pythagoras: Abstand eines Punktes  $A$  von Ursprung = Länge des Vektors  $A = |A| = \sqrt{a_1^2 + 0}$

## 2. Eine lineare Gleichung

Wir haben im Grundkurs vor allem die beiden Typen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = a, \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a$$

zu untersuchen. Dabei ist es bequem, Koeffizienten und Unbekannte jeweils zu einem Vektor  $A = (a_1, a_2, a_3)$  bzw.  $X = (x_1, x_2, x_3)$  zusammenzufassen und zur Vektorschreibweise

$$A \cdot X = a$$

für die Gleichung überzugehen. Dabei definiert man allgemein für zwei Vektoren (gleicher Dimension).

$$A \cdot X = a_1 x_1 + a_2 x_2 (+ a_3 x_3), \text{ speziell } |A|^2 = A^2.$$

Nun liegt es nahe, den Koeffizientenvektor  $A$  und die Lösungsvektoren  $X$  als Punkte im Koordinatensystem aufzufassen und nach einer geometrischen Beziehung zwischen ihnen zu fragen. Wir betrachten zunächst eine homogene Gleichung  $A \cdot X = 0$  mit  $A \neq 0$  und dabei den Abstand einer Lösung  $X$  von den Punkten der Geraden  $\{rA \mid r \in \mathbb{R}\}$ :

$$|X - rA|^2 = |X|^2 - 2rAX + r^2|A|^2 = |X|^2 + r^2|X|^2 \geq |X - 0|^2$$

d.h. der Ursprung ist der Punkt der Geraden, der von  $X$  kürzesten Abstand hat: Der Vektor  $X$  steht auf der Geraden und damit auf dem Vektor  $A$  senkrecht.

Auch die Umkehrung ist leicht zu sehen: Steht ein Vektor  $X$

senkrecht auf dem Koeffizientenvektor  $A$ , so gilt für alle  $r \in \mathbb{R}$

$$X^2 - 2rAX + r^2A^2 \geq X^2$$

also

$$-2rAX + r^2A^2 = r(rA^2 - 2AX) \geq 0.$$

Wäre nun  $AX \neq 0$  und wählt man  $r = \frac{AX}{A^2}$  so erhielte man aber

$$r(rA^2 - 2AX) = \frac{AX}{A^2} (AX - 2AX) = -\frac{(AX)^2}{A^2} < 0!$$

Damit besteht die Lösungsmenge der Gleichung  $AX = 0$  genau aus allen zu  $A$  senkrechten Vektoren, also aus allen Punkten einer Geraden bzw. Ebene durch den Ursprung. Von hier aus kommt man nun leicht zur geometrischen Deutung der Lösungsmenge einer inhomogenen Gleichung. Sie ergibt sich durch Translation aus der Lösungsmenge der zugehörigen homogenen Gleichung und ihre algebraische Beschreibung führt dann zur Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen. Die Details kann ich mir hier sparen, sie sind klassischer Stoff.

### 3. Lineare Unabhängigkeit

Der Begriff der linearen Unabhängigkeit erscheint zunächst bei der algebraischen Beschreibung der Lösungsmenge einer dreidimensionalen homogenen Gleichung, dann vor allem bei Gleichungssystemen, wo er für die Systeme der Koeffizientenvektoren von entscheidender Bedeutung ist. Damit läßt sich dann aber auch der wichtigste Grundbegriff der Elementargeometrie in die Entwicklung einbeziehen:

Drei Punkte  $A, B, C$  bilden ein Dreieck, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen, d.h. etwa die Vektoren  $A-C$  und  $B-C$  linear unabhängig sind!

Zur Pflege des räumlichen Anschauungsvermögens ist es nun wichtig, gleich auch das 3-dimensionale Analogon des Dreiecks zu betrachten.

Vier Punkte  $A, B, C, D$ , die nicht in einer Ebene liegen, d.h. so daß  $D-A$ ,  $D-B$ ,  $D-C$  linear unabhängig sind, bilden ein Tetraeder.

Häufig wird man ein Tetraeder als dreiseitige Pyramide mit ausgezeichnetem Basisdreieck  $ABC$  und der vierten Ecke als Spitze ansehen; dann empfiehlt es sich, diese vierte Ecke durch  $S$  zu

bezeichnen, wie es im folgenden geschieht.

#### 4. Umkugel

Eine der einfachsten und damit schönsten Anwendungen der Theorie der linearen Gleichungssysteme ist die Berechnung von Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$  der Umkugel eines Tetraeders. Man sollte dazu aber, zunächst die Existenz der Umkugel elementar-geometrisch begründen: Gesucht ist ein Punkt  $M$ , der von allen vier Ecken eines gegebenen Tetraeder gleichen Abstand hat. Nun liegen alle Punkte im Raum, die von zwei festen Punkten  $A, B$  gleichen Abstand haben, in der zur Strecke  $AB$  mittelsenkrechten Ebene, alle Punkte die von den Ecken des Dreiecks  $ABC$  gleichen Abstand haben, liegen in der zur Ebene  $ABC$  senkrechten Geraden durch den Umkreismittelpunkt des Dreiecks  $ABC$ . Diese Gerade schneidet die zur Strecke  $AS$  mittelsenkrechte Ebene in einem Punkt; er hat die gewünschte Eigenschaft.

Algebraisch sieht das folgendermaßen aus: Gesucht sind ein Punkt  $M$  und eine Zahl  $r > 0$ , derart daß für  $J \in \{A, B, C, S\}$  gilt

$$|J - M| = r.$$

Das sind vier Gleichungen mit vier Unbekannten.  $r$  läßt sich sofort eliminieren

$$|J - M| = |S - M| \quad \text{für } J \in \{A, B, C\}$$

Durch Quadrieren ergibt sich

$$J^2 - 2JM + M^2 = |J - M|^2 = |S - M|^2 = S^2 - 2SM + M^2$$

Glücklicherweise fällt  $M^2$  heraus und man kann umformen zu

$$(J - S)M = \frac{1}{2}(J^2 - S^2) \quad \text{für } J \in \{A, B, C\}$$

Das ist aber ein lineares Gleichungssystem mit 3 Unbekannten und den Zeilenvektoren  $A-S$ ,  $B-S$ ,  $C-S$ ; letztere sind nach Definition des Tetraeders linear unabhängig, also gibt es genau eine Lösung! Damit ist noch einmal die Existenz der Umkugel im Rahmen des Kalküls der linearen Algebra nachgewiesen, aber man weiß auch, wie man den Mittelpunkt explizit berechnen kann, woraus sich mit der Formel  $|S - M| = r$  auch der Radius ergibt. Man sollte aber nicht vergessen, die erhaltenen Gleichungen

$(J - S)M = \frac{1}{2}(J^2 - S^2)$  noch geometrisch zu deuten, es handelt sich

dabei um die Gleichungen der zu der Strecke JS mittelsenkrechten Ebene: Die Lösungen liegen in einer zum Vektor  $J - S$  senkrechten Ebene und der Mittelpunkt  $\frac{1}{2}(J+S)$  ist Lösung!

### 5. Inkugel

Da das mit der Umkugel so leicht ging, wird man es als nächstes mit der Inkugel versuchen. Elementargeometrisch ist die Existenz genau so einfach zu zeigen. Man braucht nur zu beachten, daß die winkelhalbierenden Ebenen der Kantenwinkel des Grunddreiecks mit dem Grunddreieck alle einen Kantenwinkel  $< 90^\circ$  bilden und sich deshalb in einem Punkt schneiden.

Um zur Berechnung zu kommen, muß man nun zunächst die Hessesche Normalform einer Ebenengleichung behandeln, aber das ist ja schon klassischer Schulstoff. Dann wählt man einen Punkt im Inneren des Tetraeders als Ursprung und bestimmt die Hesseschen Normalformen der Seitenebenen des Tetraeders in Bezug auf diesen Ursprung. Es sei

$$E_J X - e_J = 0 \quad J \in \{A, B, C, S\}$$

die Hessesche Normalform der der Ecke  $J$  gegenüberliegenden Seitenebene des Tetraeders. Dann erhält man für den Mittelpunkt

$M_i$  und den Radius  $\rho$  der Inkugel die Gleichungen

$$E_J M_i - e_J = -\rho \quad J \in \{A, B, C, S\}$$

$\rho$  läßt sich wieder sofort eliminieren und wir finden das lineare Gleichungssystem

$$(E_J - E_S) M_i = e_J - e_S \quad J \in \{A, B, C\}$$

Leider ist hier die lineare Unabhängigkeit der Zeilenvektoren nicht so leicht einzusehen, sie folgt nicht aus der offensichtlichen linearen Unabhängigkeit von  $E_A, E_B, E_C$ . Jede der drei Gleichungen beschreibt aber eine der winkelhalbierenden Ebenen der Kantenwinkel an der Basis, und daß diese genau einen Punkt gemeinsam haben, wissen wir von unserer elementargeometrischen Vorüberlegung. (Die Eigenschaft winkelhalbierende Ebene im richtigen Sinn zu sein, ergibt sich sofort aus der Äquivalenzumformung.

$$(E_J - E_S) X = e_J - e_S \Leftrightarrow E_J X - e_J = E_S X - e_S).$$

Damit haben wir auch hier wieder ein Berechnungsverfahren für den Mittelpunkt der Inkugel und wir erhalten den Radius  $\rho$  durch



Einsetzen in eine der Ausgangsgleichungen. (Hierbei ist von der algebraischen Seite her nicht unmittelbar klar, daß sich für  $\rho$  ein positiver Wert ergibt; diese Tatsache müssen wir nun wieder unserer Vorüberlegung entnehmen.)

Ein paar Gedanken kann man sich hier noch über die Ankugeln machen, obwohl diese im Grundkurs sicher nicht erschöpfend zu behandeln sind; das ist auch kaum in Leistungskurs zu erreichen und schon eher ein hübsches Thema für eine Facharbeit. Dabei geht es um Folgendes: Soll eine Kugel mit dem Radius  $\rho$  die der Ecke J gegenüberliegende Seite des Tetraeders von außen berühren, so muß ihr Mittelpunkt M der Gleichung

$$E_J M_a - e_J = +\rho$$

genügen. Das bedeutet, daß man die Bestimmungsgleichungen für die Ankugeln aus denen des Ausgangssystems

$$E_J X - e_J = -\rho$$

erhält, in dem man in einer oder mehrerer dieser Gleichungen das Vorzeichen von  $\rho$  ändert. Tut man das nur bei einer Gleichung, so erhält man mit derselben elementargeometrischen Begründung wie bei der Inkugel eine eindeutige Lösung, eine Ankugel erster Art. Zieht man aber alle 16 möglichen Vorzeichenverteilungen in Betracht, so bemerkt man zunächst, daß je zwei dieser Vorzeichenverteilungen nach Elimination von  $\rho$  auf äquivalente Gleichungssysteme für den Mittelpunkt führen; im Falle der Lösbarkeit ergibt sich das zugehörige  $\rho$  einmal positiv und das andere Mal negativ. Da geometrisch nur positive Lösungen interessant sind, hat man also insgesamt nur 8 Gleichungssysteme zu betrachten. Eines davon liefert die Inkugel, vier weitere führen auf die Ankugeln erster Art; so bleiben drei Gleichungssysteme für mögliche Ankugeln zweiter Art. Sie sind geometrisch dadurch gekennzeichnet, daß sie genau zwei Seitenebenen des Tetraeders auf der dem Ursprung abgewandten Seite berühren. Die Schwierigkeit liegt nun darin, daß die zugehörigen Gleichungssysteme nicht lösbar zu sein brauchen. So gibt es zum Beispiel beim regulären Tetraeder keine Ankugeln zweiter Art. Die maximale mögliche Zahl von 3 solchen Ankugeln hat dagegen ein von einem orthonormierten Dreibein gebildetes Tetraeders. Bei Tetraeder mit den Ecken  $0$ ,  $(1|0|0)$ ,  $(0|1|0)$  und  $(0|1|1)$  existiert genau eine Ankugel zweiter Art; sie

hat den Mittelpunkt  $(-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) | \frac{1}{2} | -\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}))$  und den Radius  $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$ . Es ist für das räumliche Anschauungsvermögen sicher sehr förderlich, wenn man sich den geometrischen Grund für die Nichtexistenz von Ankugeln zweiter Art überlegt (Zwei Geraden, die als Schnittgeraden von je drei winkelhalbierenden Ebenen auftreten, sind dann parallel).

## 6. Kantenkugel

An dieser Stelle bietet sich nun ein elementargeometrischer Exkurs an, der nur wenig mit linearer Algebra zu tun hat. Die Umkugel eines Tetraeders berührt die Ecken des Tetraeders, die Inkugel die Seitenflächen. Aber zwischen Ecken und Seitenflächen gibt es noch ein drittes Strukturelement beim Tetraeder, die Kanten. Man kann nun die Frage stellen. Gibt es eine Kugel, die alle 6 Kanten eines Tetraeders berührt, eine sog. Kantenkugel? Gehen wir davon aus, daß wir eine Kantenkugel haben, so stellen wir zunächst fest, daß diese aus den Seitendreiecken die Inkreise ausschneidet und die Berührungspunkte dieser Inkreise gerade die Berührungspunkte der Kantenkugel sind, also

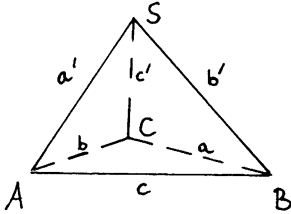
- (1) die Inkreise der Seitendreiecke berühren sich paarweise. Von einer Ecke aus sind deshalb die Strecken bis zu den Berührungspunkten auf den 3 anliegenden Kanten gleich lang, liegen also auf einer Kugel mit dieser Ecke als Mittelpunkt, also
- (2) es gibt vier Kugeln mit den Ecken als Mittelpunkt, die sich paarweise berühren.

Addiert man die vier Radien dieser Kugeln, so erhält man gerade die Summe von 2 Gegenkanten, also

- (3) die Summe zweier Gegenkanten ist für jedes der 3 Gegenkantenpaar dieselbe.

Es ist leicht zu sehen, daß diese 3 Bedingungen nicht für jedes Tetraeder gelten, man verkürze etwa von einem regulären Tetraeder ausgehend, eine der Kanten, dann ist (3) sicher verletzt. Umgekehrt läßt sich aber auch leicht zeigen, daß jede dieser Eigenschaften die beiden anderen und die Existenz einer Kantenkugel zur Folge hat. Einen einfachen Beweis dafür, allerdings ohne Berücksichtigung von (2), hat Herr Tietz in [6] gegeben. Um zu rechnen, fixieren wir zunächst Bezeichnungen für

die Kanten des Tetraeders gemäß nebenstehender Zeichnung.



Bedingung (3) lautet dann

$$(*) \quad a + a' = b + b' = c + c'$$

Für die Radien  $r_A, r_B, r_C, r_S$

der Kugeln in (2) haben wir das lineare Gleichungssystem

$$r_B + r_C = a, \quad r_A + r_S = a'$$

$$r_A + r_C = b, \quad r_B + r_S = b'$$

$$r_A + r_B = c, \quad r_C + r_S = c'$$

Man erkennt leicht, daß die Bedingung (\*) notwendig und hinreichend für die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems ist und findet gegebenenfalls

$$r_A = \frac{1}{2}(b + c - a) = \frac{1}{2}(a' + c - b') = \frac{1}{2}(c a' + b - c')$$

usw. Auch die Berührungspunkte der Kantenkugel kann man sofort angeben, z.B. auf der Kante  $a'$  ist es der Punkt

$$T_{a'} = \left(1 - \frac{r_S}{a'}\right) S + \frac{r_S}{a'} A.$$

Um den Mittelpunkt  $M_K$  zu berechnen, wählen wir den Punkt S als Ursprung.  $M_K$  liegt dann auf der zu dem Vektor A senkrechten Ebene durch  $T_{a'}$ , also genügt er der Gleichung

$$A \cdot M_K = A \cdot T_{a'}$$

Entsprechend findet man

$$B \cdot M_K = B \cdot T_{b'}$$

$$C \cdot M_K = C \cdot T_{c'}$$

und hat wieder ein lineares Gleichungssystem mit 3 Unbekannten und den 3 linear unabhängigen Zeilenvektoren A, B, C. Der Radius ergibt sich dann schließlich als Abstand von  $M_K$  und  $T_{a'}$ .

## 7. Höhenschnittpunkte

Die Raumböhen eines Tetraeders lassen sich leicht behandeln, da der Koeffizientenvektor der Gleichung einer Seite ja bereits die Richtung der zugehörigen Höhe hat. Damit kann man dann die Höhenfußpunkte ohne weiteres berechnen. (Nur nebenbei sei be-

merkt, daß diese nicht auf einer Kugel zu liegen brauchen; während die Höhenfußpunkte eines Dreiecks immer auf dem Feuerbachschen Kreis liegen). Im Gegensatz zum Dreieck brauchen die Höhen sich aber auch nicht in einem Punkt zu schneiden; das tritt zum Beispiel bei dem schon in 5. genannten von den Punkten  $0, (1|0|0), (0|1|0), (0|1|1)$  gebildeten Tetraeder auf. Es ist nun elementargeometrisch einzusehen (dazu sei auf eine andere Note von Herrn Tietz verwiesen [5]), daß genau dann ein Höhenschnittpunkt existiert, wenn alle Paare von Gegenkanten orthogonal sind, d.h.

$$(1) \quad (S-A) \cdot (B-C) = (S-B) \cdot (C-A) = (S-C) \cdot (A-B) = 0.$$

Interessant ist eine dazu äquivalente Bedingung, die sich nun leicht algebraisch herleiten läßt. Wir verwenden die Bezeichnungen für die Kanten aus dem vorigen Abschnitt

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 &= (B-C)^2 + (S-A)^2 = (B-C)^2 - 2(B-C)(S-A) + (S-A)^2 = \\ &= (B-C+S-A)^2 - ((S-C)-(A-B))^2 = \\ &= (S-C)^2 - 2(S-C)(A-B) + (A-B)^2 = (S-C)^2 + (A-B)^2 = c^2 + c'^2 \end{aligned}$$

$$\text{analog} \quad = b^2 + b'^2$$

Also

$$(2) \quad a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2.$$

Umgekehrt schließt man aus

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2$$

der Reihe nach auf

$$(B-C)^2 + (A-S)^2 = (A-C)^2 + (B-S)^2$$

$$BC + AS = AC + BS$$

$$(B-A)C + (A-B)S = 0.$$

Die Formel (2) legt einen Vergleich mit der dritten aus der Existenz einer Kantenkugel gefolgerten Eigenschaft nahe, die ja besagt

$$(3) \quad a+a' = b+b' = c+c'$$

Man kann nun fragen, wie sehen die Tetraeder aus, die sowohl einen Höhenschnittpunkt als auch eine Kantenkugel besitzen.

Mit ganz elementarer Algebra kann man ausrechnen, daß es sich um die dreiseitigen Pyramiden handelt, deren Basis ein gleichseitiges Dreieck ist und bei denen auch die Kanten zur Spitze untereinander gleich sind:

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} a+a' &= b+b' = c+c' \\ a^2+a'^2 &= b^2+b'^2 = c^2+c'^2 \end{aligned}$$

folgt zunächst auch

$$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c',$$

Eliminiert man  $a'$ , so ergibt sich

$$a(b + b' - a) = bb'$$

bzw.

$$a(c + c' - a) = cc'$$

woraus man durch elementare Umformung erhält

$$(b - a)(b' - a) = 0$$

$$(c - a)(c' - a) = 0$$

Man hat nun 4 Fälle

1)  $b - a = c - a = 0$ , also  $a = b = c$  und damit  $a' = b' = c'$ , d.h. das Dreieck ABC ist gleichseitig, die Kanten zur Spitze S sind gleich lang

2)  $b - a = c' - a = 0 = a = b = c'$ ,  $a' = b' = c$ ;

in diesem Fall ist das Dreieck ABS gleichseitig

3)  $b' - a = c - a = 0 = a = b' = c$ ,  $a' = b = c'$

4)  $b' - a = c' - a = 0 = a = b' = c'$ ,  $a' = b = c$ .

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Für eine weitere Diskussion des Höhenschnittpunkts sei auf die Arbeit [2] verwiesen.

## 8. Dreiecksungleichungen

In einem Beitrag in der Zeitschrift MNU [3] habe ich Analoga zur Dreiecksungleichung für Tetraeder dargelegt. Es handelt sich einmal um eine Bedingung an die Kantenlängen und zum anderen eine Bedingung an die Flächen der Seitendreiecke.

Die Bedingung an die Kantenlängen eignet sich nicht für den Grundkurs, man könnte allenfalls an Hand einer einfachen Figur darauf hinweisen, daß es nicht genügt, daß für je drei Kanten, die ein Dreieck bilden sollen, die Dreiecksungleichungen erfüllt sind. Für die Seitenflächen ist es notwendig und hinreichend, daß die größte unter ihnen kleiner ist als die Summe der drei anderen, also etwa

$$f_A \leq f_B \leq f_C \leq f_S < f_A + f_B + f_C.$$

Die Notwendigkeit ist leicht einzusehen. Man nehme die größte Seitenfläche als Basis und projiziere die Pyramide orthogonal auf die Grundebene. Bei dieser Projektion verkleinern sich die

drei Wände der Pyramide, aber zusammen überdecken sie doch immer noch die ganze Grundfläche. Für die Umkehrung ist eine kleine Rechnung erforderlich, die in der MNU nachgelesen werden kann.

### 9. Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren wurde am Anfang zwar gleich eingeführt, aber bis jetzt haben wir nur benutzt, daß " $AB = 0$ " äquivalent zu "A senkrecht B" ist. Man sollte aber auch im Grundkurs seine volle geometrische Bedeutung herausstellen. Dazu seien A und B zunächst linear unabhängige Vektoren und C bezeichne die Projektion von B auf die Gerade  $\{rA \mid r \in \mathbb{R}\}$ , d.h. es gelte  $C = rA$  mit

$$(B-C)A = 0$$

Dann ist aber  $AB = AC = rA^2$ , also  $r = \frac{AB}{|A|^2}$

und für den Kosinus des von A und B gebildeten Winkels gilt:

$$|\cos \varphi| = \frac{|C|}{|B|} = \frac{\frac{|AB|}{|A|^2} \cdot |A|}{|B|} = \frac{|AB|}{|A| \cdot |B|}$$

Eine einfache Vorzeichenbetrachtung liefert darüber hinaus sogar

$$AB = |A| \cdot |B| \cdot \cos \varphi$$

(Daß das Skalarprodukt erst jetzt genannt wird, hat keine tieferen Gründe. In Zusammenhang mit den bis jetzt genannten geometrischen Phänomenen war eine Betrachtung beliebiger Winkel noch nicht nötig. Natürlich könnte man das Skalarprodukt in seiner allgemeinen Form schon bei der Behandlung einer linearen Gleichung gemäß Abschnitt 2 diskutieren, wenn es nicht überhaupt aus der Mittelstufe vorausgesetzt werden kann).

### 11. Kantenwinkel

Mit dem Skalarprodukt kann man nun noch Berechnungen durchführen, die die Kantenwinkel eines Tetraeders enthalten. Dazu stellt man etwa fest: Der an der Kante AB anliegende Winkel

$\varphi_{AB}$  ist komplementär zu dem von den Vektoren  $E_C$ ,  $E_S$  gebildeten Winkel, die bei der Berechnung des Inkugelmittelpunktes auftraten, also hat man

$$\cos \varphi_{AB} = -E_C \cdot E_S.$$

Wie die Kantenwinkel sich in spitze, rechte und stumpfe Winkel verhalten können, ist in meinem Beitrag über die Winkelverteilung am Tetraeder nachzulesen [4]; die Vorgehensweise ist dort elementargeometrisch und hat zunächst keine Beziehung zur linearen Algebra.

Was man aber hier einbauen könnte, ist der Winkelsummensatz der besagt, daß durch 5 Kantenwinkel der 6. bestimmt ist, obwohl die Kantenwinkelsumme nicht konstant ist. Das wird unter verschiedenen Aspekten in einem Beitrag [1] stehen, der demnächst in der Didaktik der Mathematik erscheint. Eine Möglichkeit, diese Tatsache zu beweisen, beruht auf dem folgenden Hilfsatz: Bei festen Winkeln  $\varphi_{AC}$  und  $\varphi_{BC}$  bestimmen sich der Winkel  $\gamma$  des Grunddreiecks und der Kantenwinkel  $\varphi_{CS}$  gegenseitig eindeutig. Ist dieser Hilfsatz bewiesen, so kann man folgendermaßen schließen.

Sind  $\varphi_{AB}$ ,  $\varphi_{AC}$ ,  $\varphi_{BC}$ ,  $\varphi_{AX}$  und  $\varphi_{BS}$  gegeben, so bestimmen  
 $\varphi_{AB}$ ,  $\varphi_{AC}$  und  $\varphi_{AS}$  den Winkel  $\alpha$   
 $\varphi_{AB}$ ,  $\varphi_{BC}$  und  $\varphi_{BS}$  den Winkel  $\beta$   
 $\alpha$  und  $\beta$  den Winkel  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$   
 $\varphi_{AC}$ ,  $\varphi_{BC}$  und  $\gamma$  den Winkel  $\varphi_{CS}$

Zum Beweis des Hilfsatzes kann man wieder die Hessesche Normalform einsetzen und erhält mit leichter Rechnung eine Beziehung der Form

$$\cos \varphi_{CS} = m \cdot \cos \gamma - t$$

mit  $m = \sin \varphi_{AC} \cdot \sin \varphi_{BC}$ ,  $t = \cos \varphi_{AC} \cdot \cos \varphi_{BC}$ ,

das ist den Winkelcosinussatz der sphärischen Trigonometrie!

Damit möchte ich schließen, natürlich ist das, was ich Ihnen vorgetragen habe, kein Lehrplan. Es sollte sich vor allem um Beispiele zu der in der Einladung gestellten Frage handeln: "Wie kann der Mathematikunterricht in Grundkursen (und in der Sekundarstufe I) so elementarisiert werden, daß die Schüler

auch bei vermindertem Interesse noch Zugang zu den wichtigsten mathematischen Inhalten und Methoden finden, ohne daß dabei die Mathematik verraten wird".

Meine Absicht ist vor allem, Ihnen Geschmack an der Elementargeometrie des Tetraeders zu machen. Diese ist so reichhaltig, daß Lehrer und vor allem auch Schüler durch Betrachtungen in Analogie zu Dreieckslehre hübsche Sätze selbst finden können und damit ein besonders mathematisches Erfolgserlebnis erreichen. Bei einer Weiterführung wäre natürlich noch zu überlegen, ob man in gleicher Weise auch noch einiges aus der Kegelschnittslehre ein Grundkurs unterbringen kann, aber das würde jetzt zu weit führen.

#### Literatur

- [1] T. Egger, R. Fritsch, K. Seebach: Zum Winkelsummensatz für Tetraeder, erscheint in: Didaktik der Mathematik
- [2] R. Fritsch "Höhenschnittpunkte" für n-Simplizis Elemente der Mathematik 31 (1976), 1-8
- [3] R. Fritsch "Dreiecks" - Ungleichungen für Tetraeder Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 34 (1981), 274-278
- [4] R. Fritsch, Winkelverteilung am Tetraeder Didaktik der Mathematik 9 (1981), 276-290
- [5] H. Tietz, Die Raumhöhen des Tetraeders Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 25(1972), 19-20
- [6] H. Tietz, Tetraeder mit berührenden Inkreisen, Mathematisch - Physikalische Semesterberichte 21(1974), 143-144