Didaktik der Mathematik

11. Jahrgang 1983

Bayerischer Schulbuch-Verlag · München

Anschrift der Redaktion:
OStR Franz Hager, Blütenstr. 9, 8039 Puchheim,
Telefon (089) 80 30 43

Bezugsbedingungen: Jahresabonnement 4 Hefte DM 54,–
Einzelheft DM 14,80, zuzüglich Versandkosten.
In den Bezugspreisen sind 7 % MWSt. enthalten.
Postscheckkonto München 933 70–805
Bankkonto: Bayer. Vereinsbank München 81 154
»Didaktik der Mathematik« erscheint einmal vierteljährlich.
Für unverlangt eingesandte Manuskripte wird keine Gewähr übernommen. Nachdrucke innerhalb der gesetzl. Frist nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Verlages.

Verlag und Anzeigenverwaltung
Bayerischer Schulbuch-Verlag, Postfach 87,
Hubertusstraße 4, 8000 München 19, Tel. (089) 17 40 67–69
Zur Zeit ist Anzeigenpreisliste Nr. 2 vom 1. 8. 1978 gültig.
Satz: Fotosatz W. Tutte, Salzweg
Druck: E. Rieder, Schrobenhausen

Didaktik der Mathematik wird laufend im PÄDAGOGISCHEN JAHRESBERICHT (Verlag für pädagogische Dokumentation, Duisburg) bibliografisch nachgewiesen und regelmäßig für ZDM bzw. die Datenbank MATHDI ausgewertet.

Hinweise für Autoren siehe dritte Umschlagseite.

ISSN 0343-5334

Inhaltsverzeichnis

 DdM 4, 1983 (262–269)

Rudolf Fritsch

Merkwürdige Kugeln am Tetraeder, Teil 1

Dem Kreisgeometer Herbert Zeitler zum 60. Geburtstag gewidmet

Wir stellen hier Möglichkeiten dar, verschiedene Kugeln, die man im Zusammenhang mit einem Tetraeder betrachten kann, im Unterricht zu behandeln. Dabei soll es sich keineswegs um einen geschlossenen Lehrgang handeln, es liegt uns fern die Dreieckslehre durch eine systematische Tetraedrometrie ergänzen zu wollen. Nur meinen wir, daß man räumliche Analoga zu ebenen geometrischen Sachverhalten immer wieder einfließen lassen sollte und zwar in allen Klassenstufen nach dem 6. Schuljahr; Tetraeder und Kugel kann man ja unmittelbar in Anschluß an Dreieck und Kreis definieren.

Die räumlichen Betrachtungen führen unseres Erachtens auch zu einem besseren Verständnis der ebenen Geometrie. In diesem Sinn wollen wir uns jetzt mit

1. der Umkugel,
2. der Feuerbachkugel,
3. den In- und Ankugeln und
4. der Kantenkugel

eines Tetraeders beschäftigen.

Eigentlich reicht es! Propaganda für die Elementargeometrie des Tetraeders in der Schule zur Pflege des räumlichen Anschauungsvermögens ist schon genug gemacht (s. [2; 6; 7; 15; 16; 18; 19]). Wenn wir hier diesen Arbeiten noch eine hinzufügen, so nur wegen des Anlasses, den es zu feiern gilt. Wer sich mit Kreisen beschäftigt, interessiert sich auch für Kugeln und so ist dieser Beitrag ein hoffentlich trotzdem willkommenes Geburtstagspräsent.

Noch eine Vorbemerkung zu unseren Bezeichnungen. Da wir alle unsere Überlegungen von der Elementargeometrie her entwickeln, bezeichnen wir Punkte durchgängig mit großen lateinischen Buchstaben. Insbesondere heißen die Ecken eines Tetraeders im allgemeinen A, B, C, S; wir stellen uns ein Tetraeder als dreiseitige Pyramide vor: Eine Seite, das Dreieck ABC, ist als *Basis* ausgezeichnet, die vierte Ecke S ist die *Spitze*. „Par abus de langage“ verwenden wir trotz Einspruchs von seiten der Grundlagengeometrie für Punkte und die zugehörigen (Orts-)Vektoren bei vektoralgebraischen Berechnungen dieselben Symbole.

1. Die Umkugel

In der Dreieckslehre erfährt der Schüler, daß sich die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, daß dieser Punkt von den drei Ecken des Dreiecks gleichen Abstand hat und daß er deshalb Mittelpunkt eines Kreises durch die drei Ecken, des *Umkreises*, ist. Sobald Tetraeder und Kugel als 3-dimensionale Analoga von Dreieck und Kreis eingeführt sind, kann man diesen Sachverhalt in die räumliche Geometrie übertragen. Das geschieht am besten durch eine Umkehrung der ebenen Schlußweise. Als Einstieg bietet sich die Frage nach einer Kugel an, deren Oberfläche alle vier Ecken eines Tetraeders enthält:

Hat jedes Tetraeder eine Umkugel?

Um eine Kugel im Raum zu bestimmen, brauchen wir Mittelpunkt und Radius. Der Mittelpunkt einer Umkugel wäre ein Punkt, der von allen Ecken des Tetraeders gleichen Abstand hat und dieser Abstand wäre der Radius. Präziser lautet also unsere Frage: Gibt es einen solchen Punkt?

Nun, alle Punkte im Raum, die von zwei verschiedenen Punkten A, B gleichen Abstand haben, liegen auf der zur Verbindungsstrecke [AB] mittelsenkrechten Ebene E_{AB}. Betrachten wir drei Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen, so haben wir drei solche mittelsenkrechte Ebenen E_{AB}, E_{AC} und E_{BC}, die die entsprechenden Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC enthalten und deshalb mindestens den Umkreismittelpunkt dieses Dreiecks gemeinsam haben. Die drei Ebenen sind aber paarweise verschieden, also schneiden sich je zwei von ihnen in einer Geraden.

Den Axiomatiker mag es reizen, noch eine Begründung dafür anzugeben, daß die in Frage stehenden Ebenen verschieden sind: Würde etwa die Ebene E_{AB} mit der Ebene E_{AC} zusammenfallen, so würde sie, d. h. die Ebene E_{AB}, die Mittelsenkrechten zu AB und zu AC im Dreieck ABC enthalten. Da diese Geraden verschieden sind, gibt es nur eine Ebene, die beide enthält, das ist die von Dreieck ABC aufgespannte Ebene. Dann läge aber auch die Strecke [AB] ganz in der Ebene E_{AB} im Widerspruch zur Konstruktion im Rahmen einer Axiomatik der euklidischen Geometrie. Aber bitte nicht in der Schule!

Alle Punkte der Schnittgeraden von E_{AB} und E_{AC} haben nun die Eigenschaft, daß sie sowohl von A und B als auch von A und C gleichen Abstand haben. Damit sind auch ihre Abstände von B und C gleich, also liegt diese Gerade auch in der Ebene E_{BC}. Folglich schneiden sich die drei Ebenen in einer Geraden g durch den Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC; g ist der geometrische Ort aller Punkte, die von den drei Punkten A, B, C gleichen Abstand haben. Wir stellen noch fest, daß diese Gerade nach Konstruktion senkrecht zu den Strecken [AB] und [AC] und deshalb senkrecht zu der vom Dreieck ABC aufgespannten Ebene E ist.

Nehmen wir nun einen vierten, nicht in der Ebene E gelegenen Punkt S hinzu, so haben wir darüberhinaus die zu den Strecken [AS], [BS], [CS] mittelsenkrechten Ebenen E_{AS}, E_{BS}, E_{CS}. Die Ebene E_{AS} kann nicht parallel zur Geraden g sein, denn sonst wäre auch g senkrecht zur Strecke [AS], also wäre wegen $A \in E$ und $E \perp g$ auch S ein Punkt der Ebene E, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit schneidet g die Ebene E_{AS} in genau einem Punkt M, der von allen vier Punkten A, B, C, S gleichen Abstand hat (und auch in den Ebenen E_{BS} und E_{CS} liegt).

Auf diese Weise ist die gestellte Frage elementargeometrisch beantwortet und die Existenz einer Umkugel für jedes Tetraeder nachgewiesen. Außerdem geben uns die durchgeführten Überlegungen eine Anregung, wie wir Mittelpunkt und Radius der Umkugel eines Tetraeders mit den Methoden der Darstellenden Geometrie konstruieren können. Wir wählen ein Zweitafelverfahren mit der von den Punkten A, B, C aufgespannten Ebene E als Grundrißebene und einer zum Grundriß AS' der Kante AS parallelen Aufrißebene (Figur 1); wir können dabei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $A \neq S'$ annehmen. Zunächst konstruieren wir den Umkreismittelpunkt M' des Dreiecks ABC.

Es handelt sich dabei sowohl um den Grundriß des gesuchten Punktes M, als auch um die Spur g' der Geraden g in der Grundrißebene; die zur Tafelkante senkrechte Gerade durch

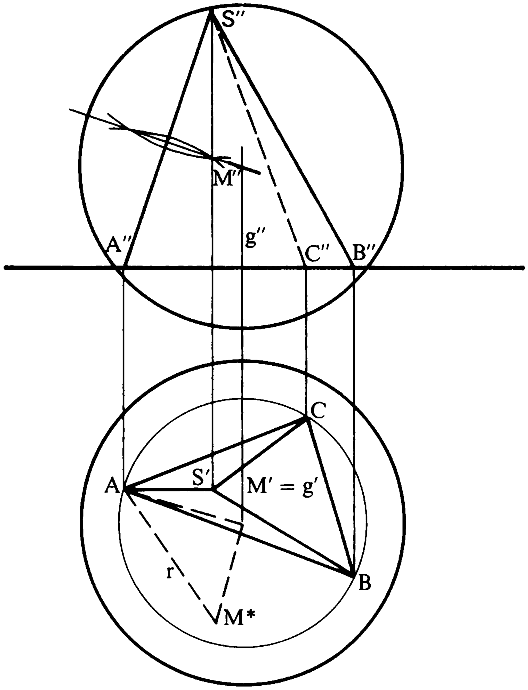

Fig. 1

M′ ist der Aufriß g″ von g. Die Mittelsenkrechte h″ zum Aufriß A″S″ der Kante AS in der Aufrißebene ist nun die orthogonale Projektion der Ebene E_{AS} in die Aufrißebene. Da A″S″ nicht parallel zur Tafelkante ist, ist h″ nicht parallel zu g″. Also haben die Geraden h″ und g″ genau einen Schnittpunkt; das ist der noch gesuchte Aufriß M″ des Umkugelmittelpunktes M. Durch Umklappen des Dreiecks AM′M″ in die Grundrißebene um die Seite AM′ erhält man schließlich einen Punkt M* als Bild von M″ (M* = M′ ist möglich!) und damit den Radius der Umkugel als Abstand von A und M*.

Wir wollen nun noch zeigen, wie man die Existenz der Umkugel auch sehr leicht mit der Oberstufe zur Verfügung stehenden Methoden erhalten kann. In der Sprache der linearen Algebra lautet unser

Problem: *In* $\mathbb{R}^3$ *seien vier Punkte* (= „Orts"-Vektoren) A, B, C, S *so gegeben, daß die drei Vektoren* A–S, B–S, C–S *linear unabhängig sind. Gibt es dann einen Punkt* $M \in \mathbb{R}^3$ *und eine positive reelle Zahl* $r \in \mathbb{R}^+$, *derart daß gilt*

$$d(J, M) = r \quad \textit{für} \quad J \in \{A, B, C, S\}?$$

Das ist ein Gleichungssystem aus 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten (3 Koordinaten von M und r). Das Überraschende an der Sache ist, daß dieser ganz naive Ansatz sehr leicht zum Ziel führt. Wir eliminieren zunächst r, indem wir zu dem Gleichungssystem

$$d(J, M) = d(S, M) \quad \text{für} \quad J \in \{A, B, C\}$$

übergehen; es handelt sich nun um drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Drücken wir nun den Abstand durch das Skalarprodukt aus, so erhalten wir Wurzelgleichungen, aber wir können uns durch Quadrieren sofort von den Wurzeln befreien

$$(J - M)^2 = (S - M)^2 \quad \text{für} \quad J \in \{A, B, C\}.$$

Werten wir jetzt beide Seiten mit der binomischen Formel aus, so fällt der quadratische Term M^2 glücklicherweise weg und eine leichte Umformung ergibt

$$(J - S)M = \frac{1}{2}(J^2 - S^2) \quad \text{für} \quad J \in \{A, B, C\}.$$

Das ist aber ein inhomogenes lineares Gleichungssystem aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten. Die Zeilenvektoren sind nach Voraussetzung linear unabhängig, also hat die Koeffizientenmatrix den Rang 3 und damit besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung M; r ergibt sich dann durch Einsetzen

$$r = d(S, M).$$

Wieder ist die Aufgabe gelöst. Diese Methode liefert aber auch unmittelbar ein konkretes Berechnungsverfahren für Mittelpunkt und Radius der Umkugel; wir können also im Unterricht echte Aufgaben dazu stellen und wir haben nicht aus der Luft gegriffene Gleichungssysteme zu lösen, sondern solche, die durch ein (geometrisches) Anwendungsproblem gegeben sind.

Bei aller Begeisterung für den Kalkül sollten wir uns aber auch um die geometrische Interpretation des gefundenen linearen Gleichungssystems bemühen. Was können wir über die Lösungsmenge einer Gleichung

$$(J - S)X = \frac{1}{2}(J^2 - S^2), \qquad J \in \{A, B, C\}$$

aussagen. Zunächst liefert der Koeffizientenvektor, daß es sich um eine zum Vektor $J - S$, also zur Kante [JS] des Tetraeders senkrechte Ebene handelt. Der Mittelpunkt dieser Kante ist durch den Vektor $\frac{1}{2}(J + S)$ gegeben; wir berechnen

$$(J - S) \cdot \frac{1}{2}(J + S) = \frac{1}{2}(J^2 - S^2),$$

d.h. $\frac{1}{2}(J + S)$ ist Lösung der Gleichung. Damit ist die Lösungsmenge der Gleichung nichts anderes als die schon eingangs betrachtete zur Kante [JS] mittelsenkrechte Ebene E_{JS} ($J \in \{A, B, C\}$). Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist also der Schnitt der Ebenen E_{AS}, E_{BS} und E_{CS}, die Voraussetzung über die lineare Unabhängigkeit von $A - S$, $B - S$, $C - S$ besagt, daß dieser Schnitt aus genau einem Punkt, dem Mittelpunkt M der Umkugel besteht. Die eben angestellte Überlegung eröffnet noch einen schnelleren Zugang zu dem Gleichungssystem. Wir können elementargeometrisch die mittelsenkrechten Ebenen diskutieren und dann unmittelbar ihre Gleichungen aufstellen. Da die Ebene E_{JS} senkrecht zur Kante [JS] ist, können wir $J - S$ als Koeffizientenvektor für „ihre" Gleichung wählen; das konstante Glied ergibt sich dann daraus, daß der Mittelpunkt $\frac{1}{2}(J + S)$ der Kante [JS] in der Ebene liegt, also Lösung der Gleichung sein muß.

Wie auch immer wir den Unterricht aufbauen, jeder Schüler sollte „fürs Leben" begriffen haben:

Durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, gibt es genau einen Kreis; zu vier Punkten, die nicht in einer Ebene liegen, gibt es genau eine Kugel, deren Oberfläche sie enthält.

2. Die Feuerbachkugel

Wenn in einer Klasse die „Neunpunkte-Eigenschaft" des Feuerbachschen Kreises:

In jedem Dreieck liegen die Mittelpunkte der Seiten, die Höhenfußpunkte und die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken vom Höhenschnittpunkt zu den Ecken auf einem Kreis, dem Feuerbachschen Kreis des Dreiecks.

bekannt ist, können wir versuchen, auch diesen Sachverhalt in den Raum zu übertragen.

Eine Möglichkeit dazu ist mit Hilfe des Bosschen Kalküls in [4] dargestellt. Wir fügen hier einige Gedanken darüber ein, weil ein gewisser innerer Zusammenhang mit dem Begriff der Umkugel besteht. (Ebenso besteht ein Zusammenhang zwischen den beiden anderen Abschnitten dieser Arbeit, zwischen In-/Ankugeln und Kantenkugeln).

Im Gegensatz zur Frage nach der Umkugel liegt es hierbei nicht auf der Hand, wie man ein räumliches Analogon zu dieser Aussage finden kann. Das erlaubt eine interessante Diskussion verschiedener Ansätze im Unterricht mit vielen geometrischen Einsichten, wobei schließlich nur einer wirklich zum Ziel führt. Ausgehen kann man von der Frage, können wir zu einem Tetraeder eine Kugel bestimmen, die ähnliche Eigenschaften hat wie der Feuerbachkreis eines Dreiecks? Wie wir von der Behandlung der Umkugel her wissen, ist eine Kugel durch vier in ihrer Oberfläche, aber nicht in einer Ebene liegende Punkte eindeutig bestimmt. Es geht also zunächst darum, vier geeignete „merkwürdige" Punkte eines Tetraeders herauszupicken. Diese Punkte sollten für jedes Tetraeder paarweise verschieden sein und darüberhinaus nicht in einer Ebene liegen.

Dabei orientieren wir uns zunächst an den merkwürdigen Punkten eines Dreiecks, die in der Neunpunkte-Eigenschaft vorkommen. Für Feuerbach selbst [3] bildeten die Höhenfußpunkte, die „Fußpunkte der Perpendikel" die Grundlage der Überlegungen. Aber dann gibt es schon im ebenen Fall gewisse Schwierigkeiten. Beim rechtwinkligen Dreieck fallen ja zwei Höhenschnittpunkte zusammen und damit gibt es viele Kreise, die die Höhenfußpunkte enthalten, der Feuerbachsche Kreis wird erst durch eine zusätzliche Eigenschaft festgelegt. Aber immerhin kann man leicht zeigen, daß es immer einen Kreis durch die Höhenfußpunkte eines Dreiecks gibt: Sind die drei Höhenfußpunkte verschieden, so liegen sie nie auf einer Geraden. Im Hinblick auf die räumliche Situation lohnt es sich dafür ein Argument anzugeben, es beruht auf den Anordnungseigenschaften der ebenen Geometrie: In jedem Dreieck ist immer mindestens ein Höhenfußpunkt innerer Punkt der zugehörigen Seite. Bei einem nicht-rechtwinkligen Dreieck sind dann die beiden anderen gleichzeitig entweder innere oder äußere Punkte der entsprechenden Seiten. Ihre Verbindungsgerade kann deshalb keinen inneren Punkt mit der dritten Seite gemeinsam haben (es wird hier das „Axiom von Pasch“ benutzt).

Wenn wir nun an das Tetraeder denken, so verstehen wir unter „Höhenfußpunkten“ die Fußpunkte der „Raumhöhen“, d.h. der Lote von einer Ecke auf die von den übrigen Ecken aufgespannte Ebene. Auch hier ist mit der Möglichkeit des Zusammenfallens von Fußpunkten verschiedener Höhen zu rechnen. Das allein wäre nicht so schlimm, zu weniger als vier Punkten können wir meistens Kugelflächen finden, die sie enthalten. Aber wenn tatsächlich vier verschiedene Höhenfußpunkte existieren, kann man nicht zeigen, daß sie nicht in einer Ebene liegen. Das für den ebenen Fall angegebene Argument hat kein räumliches Analogon!

Weiter kann man wohl diese Diskussion in der Schule nicht treiben. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Höhenfußpunkte eines Tetraeders in einer Ebene liegen, hat L. Gerber in New York angegeben. Sie lautet

$$\det\begin{pmatrix} 0 & \cos\varphi_{AB} & \cos\varphi_{AC} & \cos\varphi_{AS} \\ \cos\varphi_{AB} & 0 & \cos\varphi_{BC} & \cos\varphi_{BS} \\ \cos\varphi_{AC} & \cos\varphi_{BC} & 0 & \cos\varphi_{CS} \\ \cos\varphi_{AS} & \cos\varphi_{BS} & \cos\varphi_{CS} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

G. Aurnhammer in Konstanz hat mit Hilfe eines „Holzhammers“ (Computers) nachgewiesen, daß solche Tetraeder mit der zusätzlichen Eigenschaft existieren, daß die vier Höhenfußpunkte nicht auf einem Kreis liegen; da sie aber in einer Ebene liegen, hat man keine Chance sie auf einer Kugeloberfläche unterzubringen. Ein konkretes Beispiel bildet das Tetraeder mit den Ecken:

$$A = (65|0|0), \quad B = (0|65|0), \quad C = (18|48|12), \quad S = 0 = (0|0|0).$$

Jedenfalls zeigen diese Überlegungen, daß die Festlegung einer Kugel mit Hilfe der Höhenfußpunkte eines Tetraeders auf Schwierigkeiten stößt. Da sich i.a. die Raumhöhen nicht in einem Punkt schneiden, haben wir auch keine Chance auf Verbindungsstrecken zwischen Höhenschnittpunkt und Ecken günstige Punkte auszuwählen. Also scheiden von den neun Punkten des Feuerbachkreises für einen Versuch zur räumlichen Verallgemeinerung zunächst sechs aus.

Es bleiben die Seitenmitten, die beim Dreieck nie auf einer Geraden liegen und deshalb immer eindeutig einen Kreis definieren.

Nun stellt sich die Frage, was entspricht dem Mittelpunkt einer (eindimensionalen) Strekke beim (zweidimensionalem) Dreieck. Zunächst bieten sich dafür die vier klassischen merkwürdigen Punkte des Dreiecks an: Höhenschnittpunkt, Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt und Schwerpunkt. Um die Existenz einer Kugel zu sichern, sollten wir von 4 Punkten ausgehen, die sicher nicht in einer Ebene liegen. Dieses Kriterium scheidet die Höhenschnittpunkte und die Umkreismittelpunkte sofort aus: Bei dem von einem orthonormierten Dreibein gebildeten („gleichschenklig-rechtwinkligen“) Tetraeder fallen drei Höhenschnittpunkte der vier Seiten zusammen (in den „Ursprung“); die vier Umkreismittelpunkte sind zwar paarweise verschieden, liegen aber in einer Ebene (der „Hypotenuse“). Also bleiben die vier Inkreismittelpunkte und die vier Schwerpunkte der Seiten eines Tetraeders. In beiden Fällen handelt es sich um vier innere Punkte der Seiten, und sie liegen auch nie in einer Ebene. Der Nachweis dieser Eigenschaft ist aber, zumindest für die Inkreismittelpunkte, nicht ganz einfach und braucht an dieser Stelle noch nicht geführt zu werden.

Es gibt noch eine weitere Entscheidungshilfe. Für den Nachweis der Neunpunkte-Eigenschaft und die Berechnung des Radius des Feuerbachkreises ist es sehr nützlich festzustellen, daß wir die Seitenmitten des Dreiecks aus den Ecken und damit den Feuerbachkreis aus dem Umkreis durch zentrische Stauchung am Schwerpunkt mit dem Faktor $-\frac{1}{2}$ erhalten können. Entsprechend ergeben sich die *Schwerpunkte* der Seiten(dreiecke) eines Tetraeders durch zentrische Stauchung am Raumschwerpunkt mit dem Faktor $-\frac{1}{3}$!

Das zeigt, daß die vier Schwerpunkte nicht in einer Ebene liegen und motiviert die

Definition: Die Feuerbach*kugel* eines Tetraeders ist die Umkugel des von den Schwerpunkten der Seiten gebildeten Tetraeders.

Damit führt die zentrische Stauchung am Schwerpunkt mit dem Faktor $-\frac{1}{3}$ auch die Umkugel in die Feuerbachkugel über und wir erhalten für den Radius r_F der Feuerbachkugel sofort

$$r_F = \frac{1}{3} r,$$

wenn r den Radius der Umkugel bezeichnet.

Wenn man nur wenig Zeit für die Behandlung der Feuerbachkugel verwenden will, kann man sich natürlich die bisherige Diskussion weitgehend sparen und ausgehend vom Zusammenhang zwischen Umkreis und Feuerbachkreis die Feuerbachkugel direkt als das Bild der Umkugel unter der genannten Stauchung definieren.

Der Aufwand für die Festlegung einer Feuerbachkugel ist natürlich nur dann gerechtfertigt, wenn wir weitere besondere Eigenschaften dieser Kugel feststellen können. Was da mit einfachen Mitteln zu leisten ist, ist in [5] ausführlich dargestellt. Wir geben hier zur Appetitanregung die Ergebnisse an. Motiviert wird ihre Herleitung durch folgende etwas verfremdete Formulierung der Neunpunkte-Eigenschaft des Feuerbachkreises:

Auf dem durch Seitenmitten eines Dreiecks gehenden Kreis liegen die Höhenfußpunkte des Dreiecks; dieser Kreis geht durch zentrische Streckung am Höhenschnittpunkt mit dem Faktor 2 in den Umkreis über.

Für die Feuerbachkugel eines Tetraeders gilt entsprechend:

1. *Der Mittelpunkt* M_F *der* Feuerbach*kugel, der (Raum-)Schwerpunkt* P *und der Mittelpunkt* M *der Umkugel liegen auf einer Geraden;* P *teilt die Strecke* $[M_F M]$ *(falls* $P \neq M$*) im Verhältnis* 1 : 3 (Für $P \neq M$ ist die Gerade PM die „Eulersche Gerade“ des Tetraeders).

2. *Der Durchschnitt mit einer Seite(nebene) hängt nur von dieser Seite (Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt) und dem zugehörigen Höhenfußpunkt ab;* er ändert sich also nicht, wenn wir die vierte Ecke längs der zugehörigen Raumhöhe verschieben.

Besitzt das Tetraeder einen Höhenschnittpunkt, so gilt darüberhinaus

3. *Die Höhenfußpunkte liegen auf der Oberfläche der Feuerbachkugel.* Genauer könnten wir formulieren: Die Verbindungsstrecke eines Höhenfußpunktes mit dem Schwerpunkt der zugehörigen Seite bildet einen Durchmesser des Schnittkreises der Feuerbachkugel und dieser Seite(nebene).

4. *Die zentrische Streckung am Höhenschnittpunkt mit dem Faktor* 3 führt die Feuerbachkugel in die Umkugel des Tetraeders über.

Natürlich gibt es auch beim Fehlen eines Höhenschnittpunktes eine zentrische Streckung mit dem Faktor 3, die die Feuerbachkugel in die Umkugel überführt. Das Zentrum dieser Streckung wird als „Punkt von Monge“ [13, S. 266] bezeichnet und liegt natürlich (falls $P \neq M$) auf der „Eulerschen Geraden“ des Tetraeders. Eine noch weitergehende Verallgemeinerung der Neunpunkteeigenschaft hat J.C.H. Gerretsen [10] angegeben.

Noch eine andere Kugel, die aber nicht immer existiert, wird gelegentlich als Feuerbachkugel angesprochen. Dazu gelangt man durch folgende Überlegung: Die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte je zweier Gegenkanten eines Tetraeders halbieren sich gegenseitig. Falls ein Höhenschnittpunkt existiert, sind diese Verbindungsstrecken sogar gleich lang; also liegen ihre Endpunkte auf einer Kugel. Diese schneidet aus den Seitenebenen gerade die Feuerbachkreise der Seitendreiecke aus!

Hinweis der Redaktion: Die Fortsetzung dieses Beitrages mit Literaturangaben erscheint in DdM 12 (1984), Heft 1.

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. Rudolf Fritsch, Friedemann-Bach-Str. 61, 8032 Gräfelfing

Eingangsdatum: 19. 1. 1983