

Mathematische Semesterberichte

Zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität

Begründet 1932 von H. Behnke und O. Toeplitz

Herausgegeben von:

K. P. Grotemeyer in Bielefeld / D. Kahle in Göttingen / Th. Kaluza
in Hannover / A. Kirsch in Kassel / N. Knoche in Essen / D. Morgenstern
in Hannover / G. Pickert in Gießen / H.-G. Steiner in Bielefeld /
H. Tietz in Hannover

BAND XXXII

V&R

GÖTTINGEN · VANDENHOECK & RUPRECHT · 1985

Mathematisches Institut
der Universität München

ISSN 0720-728X

© Vandenhoeck und Ruprecht in Göttingen 1985. Printed in Germany. Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf foto- oder akustomechanischem Wege zu vervielfältigen.

Gesamtherstellung: Hubert & Co., Göttingen

INHALT

Mathematik in Forschung und Anwendung

Helmut Coers: Die Unabhängigkeit des archimedischen Axioms vom starken Intervallschachtelungsaxiom	50
Rudolf Fritsch: Kantenkugeln – geometrische Anwendungen der linearen Algebra	84
Karin Hausknecht und Rainer Löwen: Charakterisierung von orthogonalen Gruppen durch Beweglichkeitseigenschaften . .	1
Horst Herold: Sturm-Liouvillesche Randwertprobleme	176
Kurt Leichtweiß: Konvexgeometrie	155
Günter Pickert: Der Satz von Pascal, Ovale und Kubale	61
Herbert Zeitler und Hanfried Lenz: Hyperovale in Steiner-Tripel-Systemen	19

Mathematik in philosophischer und historischer Sicht

Werner Blum: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion	195
Hans-Georg Steiner: Philosophie und die Bedingtheit der Mathematik	110
Horst Struve: Zur Geschichte des Abbildungsbegriffs	181

Mathematik in Studium und Unterricht

Bettina Helfrich: Zur Struktur konvexer Mengen im \mathbb{R}^2 mit endlicher Extremalpunktmenge	261
---	-----

Dietmar Treiber: Symmetrieuntersuchungen für reelle rationale Funktionen im Mathematikunterricht	131
Friedrich Wille: Über den Einfluß von Geldentwertung auf Hypotheken	233
Herbert Zeitler: Zur Konstruktion von Steiner-Systemen	255
Probleme und Lösungen	142, 272
Buchbesprechungen	147, 281

Kantenkugeln – geometrische Anwendungen der linearen Algebra

Von RUDOLF FRITSCH in München *)

Hier habe ich ein kleines polnisches Schulbuch, dessen Titel auf deutsch lautet: "Von der Schönheit der linearen Abbildungen" [1]. Das Ziel des Verfassers ist es, neben dem formalen Kalkül die reiche und ästhetisch beeindruckende geometrische Anwendbarkeit der linearen Algebra aufzuzeigen. Die gleiche Absicht verfolge ich mit meinem heutigen Vortrag. Aus der Vielfalt der zur Verfügung stehenden Möglichkeiten habe ich mir dazu einen Themenkreis ausgewählt, der zum Genius loci paßt. Die hiesigen Geometer um Herrn Zeitler beschäftigen sich viel mit der Kreisgeometrie. Ich will aber nicht Eulen nach Athen tragen; deshalb werde ich mich mit Kugeln befassen. Dabei werde ich zunächst echte Kugeln als dreidimensionale Analoga der Kreise betrachten, dann werde ich aber auch zu allgemeinen n -dimensionalen Sphären übergehen, denn erst dadurch wird die zugrunde liegende Struktur geometrisch richtig klar. Als Hilfsmittel brauche ich dazu außer der von der Elementargeometrie bekannten Inversion nicht mehr als den üblichen Inhalt der Anfängervorlesungen zur linearen Algebra und

*) Erweitertes Manuskript des Vortrages vom 4. November 1983, gehalten beim Festkolloquium aus Anlaß des 60. Geburtstages von Professor Dr. Herbert Zeitler in Bayreuth. Ich danke dem Rechenzentrum des Max-Planck-Instituts für Biochemie in Planegg-Martinsried für die Möglichkeit zur Herstellung dieses Manuskriptes.

Bemerkung der Herausgeber: Im dritten Abschnitt dieser Arbeit beantwortet der Autor eine Frage, die in der Arbeit [24] - diese Semesterberichte 21 (1974) - gestellt, jedoch unzulänglich behandelt worden war, worauf Herr I. Paasche als erster hingewiesen hat.

die Grundtatsachen der Möbiusgeometrie (s. z. B. [3] für den ebenen Fall).

1. Definition und Existenz von Kantenkugeln

Aus der ebenen Geometrie sind Ihnen Umkreis und Inkreis eines Dreiecks wohl vertraut, auch die Tatsache, daß jedes (nicht entartete) Dreieck genau einen Inkreis und einen Umkreis hat. Ein *Dreieck* wird von drei Punkten gebildet, die nicht auf einer Geraden liegen. Das dreidimensionale Analogon zum Dreieck ist das *Tetraeder*, das von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten erzeugt wird. Den Strukturelementen *Ecke* und *Seite* beim Dreieck entsprechen *Ecken*, *Kanten* und *Seiten(dreiecke)* beim Tetraeder. Dem Kreis durch die Ecken eines Dreiecks, dem *Umkreis*, entspricht eine Kugel durch die Ecken eines Tetraeders, eine *Umkugel*. Dem Kreis, der die Seiten eines Dreiecks in inneren Punkten berührt, dem *Inkreis*, entspricht eine Kugel, die die Seitendreiecke eines Tetraeders in inneren Punkten berührt, eine *Inkugel*. Wie im ebenen Fall kann man zeigen, daß jedes Tetraeder genau eine Umkugel und genau eine Inkugel besitzt. Beim Tetraeder haben wir aber neben Ecken und Seiten auch noch die Kanten, und man kann fragen: Gibt es eine Kugel, die die sechs Kanten eines Tetraeders in inneren Punkten berührt, eine *Kantenkugel*? Ein Beispiel dafür kann ich Ihnen hier vorführen (Abb. 1).

Bei einem regulären Tetraeder, d. h. einem Tetraeder, dessen sechs Kanten alle die gleiche Länge haben, ist die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Kantenkugel klar. Man kann auch ihren Radius leicht berechnen. Wie der französische Mathematiker Dostor 1874 bemerkt hat [7], ist in diesem Fall der Radius ρ der Kantenkugel das geometrische Mittel zwischen dem Radius R der Umkugel und dem Radius r der Inkugel:

$$\rho = \sqrt{Rr} .$$

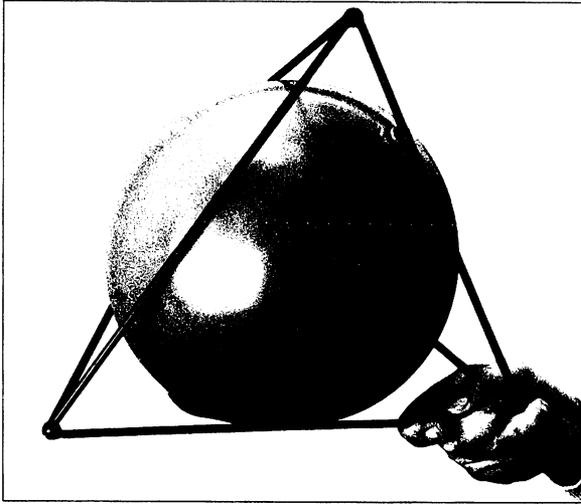


Abb. 1. (Unter den handelsüblichen Luftballonen findet man nur selten einen richtig runden, d. h. kugelförmigen; im normalen Unterricht ließe sich das Wesentliche auch an einem mehr birnenförmigen Ballon erklären. Für diesen feierlichen Anlaß habe ich jedoch nach einer idealeren Ausführung gesucht, und ich bin in der Bayerischen Akademie der Wissenschaften fündig geworden. In der Kommission für Glaziologie, der ich für die Überlassung dieses Luftballons zu danken habe, beobachtet man die Windströmungen an der Oberfläche eines Gletschers. Man verfolgt sie mit Hilfe von solchen Ballonen, die aber zur Vermeidung unerwünschter Effekte möglichst homogen und damit auch möglichst rund sein sollten.)

(Bezeichnet a die Länge der Kanten eines regulären Tetraeders, so gilt bekanntlich $R = a/4 \cdot \sqrt{6}$ und $r = a/12 \cdot \sqrt{6}$; also ist dann $\rho = a/4 \cdot \sqrt{2}$.)

Ist ein nichtreguläres Tetraeder gegeben, so ist die Frage nach der Existenz einer Kantenkugel nicht so einfach zu beantworten. Man kann so vorgehen, daß man nach anderen besonderen Eigenschaften von Tetraedern mit Kantenkugeln sucht. An unserem Modell erkennen wir unmittelbar, daß eine Kantenkugel aus den Seiten des Tetraeders die Inkreise ausschneidet und deshalb gilt: Die Inkreise der Seitendreiecke des Tetraeders berühren sich paarweise.

Zieht man in einer Ebene von einem Punkt außerhalb eines Kreises die beiden Tangenten an den Kreis, so hat dieser

Punkt von den beiden Berührungspunkten gleiche Abstände. Für ein Tetraeder, in dem sich die Inkreise der Seitendreiecke paarweise berühren, folgt daraus, daß jede Ecke von den Berührungspunkten auf den von ihr ausgehenden Kanten gleiche Abstände hat. Um die Bedeutung dieser Überlegung klar machen zu können, ist es notwendig ein paar Bezeichnungen einzuführen. Die Ecken des Tetraeders mögen A_0, A_1, A_2, A_3 heißen; die Verbindungskante der i -ten und der j -ten Ecke und ihre Länge seien durch a_{ij} bezeichnet (für $i \neq j$). Dann gilt natürlich $a_{ij} = a_{ji}$ (für beide Bedeutungen des Symbols a_{ij}). Gibt nun im Fall der Existenz einer Kantenkugel das Symbol r_k den Abstand der Ecke A_k von den Berührungspunkten auf den von ihr ausgehenden Kanten an, so haben wir offensichtlich

$$r_i + r_j = a_{ij}$$

für $0 \leq i, j \leq 3, i \neq j$. Daraus folgt, daß sich die Kugel um A_i mit Radius r_i und die Kugel um A_j mit Radius r_j berühren. Wir erhalten so: Es gibt vier Kugeln mit den Ecken des Tetraeders als Mittelpunkten, die sich paarweise berühren.

Wenn es zu einem Tetraeder solche Kugeln gibt, dann besteht zwischen den Kanten und den Radien dieser Kugeln die angegebene Gleichung. Für die Summe aller vier Radien ergibt sich daraus:

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = a_{01} + a_{23}.$$

Durch Umordnen der linken Seite dieser Gleichung finden wir aber auch:

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = a_{02} + a_{13}$$

und

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = a_{03} + a_{12}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichungen stehen die Längensummen der Gegenkantenpaare des Tetraeders. Sie sind also alle gleich der Summe der vier Radien und damit untereinander gleich:

$$a_{01} + a_{23} = a_{02} + a_{13} = a_{03} + a_{12} .$$

Diese Tatsache zeigt nun, daß sicher nicht jedes Tetraeder eine Kantenkugel besitzt. Wenn wir nämlich - ausgehend von einem regulären Tetraeder - genau eine Kante etwas verlängern oder verkürzen, dann gelten diese Gleichungen ja nicht mehr. Die Existenz einer Kantenkugel ist also eine besondere Eigenschaft von Tetraedern. In einer 1863 erschienenen Arbeit [14] hat der wegen politischer Aufmüpfigkeit aus dem Schuldienst entfernte Gymnasialprofessor Junghann (1808-1881) für diese Tetraeder die Bezeichnung *Tangententetraeder* eingeführt. (Daß die Existenz einer Kantenkugel für ein Tetraeder eine Ausnahme ist, kann man allerdings auch ohne die hier angestellten Überlegungen einsehen: man braucht nur die Schar der Kugeln zu betrachten, welche die Kanten einer räumlichen Ecke des Tetraeders in inneren Punkten berühren; darunter gibt es zu jeder der drei übrigen Kanten genau eine, die sie in einem inneren Punkt berührt, aber diese drei Kugeln sind im allgemeinen verschieden.)

Das Interessante ist nun, daß die gefundenen Eigenschaften alle untereinander und zur Existenz einer Kantenkugel äquivalent sind. Wir können dieses Ergebnis in einem Satz zusammenfassen:

Satz 1. *Für ein Tetraeder Δ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

- (1) *Δ besitzt eine Kantenkugel;*
- (2) *die Inkreise der Seitendreiecke von Δ berühren sich paarweise;*
- (3) *es gibt vier Kugeln mit den Ecken von Δ als Mittelpunkten, die sich paarweise berühren;*
- (4) *die Längensummen der drei Gegenkantenpaare sind gleich.*

Die Implikationen (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) haben wir schon überlegt. Bevor wir zurückschließen, lassen Sie mich ein paar historische Bemerkungen

einfügen. Erstmals erwähnt werden diese Sachverhalte meines Wissens [20] von dem jung verstorbenen französischen Mathematiker Durrande (1798-1825) in einer im Jahre 1815 erschienenen Arbeit in den Gergonneschen *Annales de Mathématiques pures et appliquées* [8]. Er beweist elementargeometrisch $(3) \Rightarrow (4)$ und $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$. In Unkenntnis dieser Arbeit zeigt 1821 der Straßenbauer und Eisenbahner Crelle (1780-1855) die Implikationen $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4)$ [5], während $(4) \Rightarrow (2)$ wohl zuerst von dem italienischen Didaktiker Gaetano Riboni (1854-1932) explizit formuliert wurde [19]. Einen neuen elementargeometrischen Beweis für die Äquivalenzen $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (4)$ hat Herr Tietz in Hannover 1974 angegeben [24]. Der Vollständigkeit halber sei noch bemerkt, daß Durrande nicht, wie Zacharias (1873-1962) in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften ([25], S. 1064) behauptet, (4) aus (1) gefolgert hat.

Hier will ich nun die lineare Algebra für die Umkehrschlüsse einsetzen. Dabei wird sich die Eindeutigkeit der zu konstruierenden Kantenkugel automatisch mit ergeben, d. h. die Tatsache, daß ein Tetraeder *höchstens* eine Kantenkugel haben kann. Gehen wir von einem Tetraeder mit der Eigenschaft (4) aus. Seine Kantenlängen erfüllen die Gleichungen

$$a_{01} + a_{23} = a_{02} + a_{13} = a_{03} + a_{12} .$$

Nun können wir die sechs Gleichungen

$$r_i + r_j = a_{ij}$$

für $0 \leq i < j \leq 3$ als ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der vier unbekanntenen Radien r_0, \dots, r_3 ansehen. Im allgemeinen wird man sich in der Schule an ein Gleichungssystem dieser Größenordnung nicht herantrauen, aber dieses ist nun erstens gut motiviert und zweitens leicht lösbar. Die Voraussetzung an die Kantenlängen des Tetraeders sichert gerade die eindeutige Lösbarkeit des Systems durch

$$r_k = 1/2 \cdot (a_{ik} + a_{jk} - a_{ij})$$

für $k = 0, \dots, 3$, wobei die Indizes i, j den Einschränkungen $0 \leq i, j \leq 3$, $i \neq j \neq k \neq i$ unterliegen, aber sonst frei wählbar sind. Nun folgt unmittelbar, daß sich die vier Kugeln mit den Mittelpunkten A_k und den Radien r_k berühren,

d. h. die Eigenschaft (3). Aber auch (2) ist klar, denn aus der Elementargeometrie wissen wir, daß der Berührungspunkt des Inkreises des Dreiecks $A_i A_j A_k$ auf der Kante a_{ik} von der Ecke A_k gerade den Abstand r_k hat. Da der Wert r_k aber von der speziellen Wahl von j unabhängig ist und bei festen Indizes i, k genau zwei Möglichkeiten für die Wahl von j vorliegen, sagen wir j und j' , berühren sich die Inkreise der Dreiecke $A_i A_j A_k$ und $A_i A_{j'} A_k$.

Es bleibt die Kantenkugel zu bestimmen. Dazu wählen wir ein Koordinatensystem so, daß die Ecke A_0 des Tetraeders in den Ursprung fällt, und fassen die Ecken A_1, A_2, A_3 als Vektoren auf. Die Tatsache, daß wir ein Tetraeder gegeben haben, bedeutet dann gerade, daß diese Vektoren linear unabhängig sind und damit eine Basis des zugrundeliegenden Vektorraums bilden. Die gesuchte Kugel muß die Kante a_{0k} in dem Punkt berühren, der vom Ursprung den Abstand r_0 hat (für $k = 1, 2, 3$). Dieser Punkt wird durch den Vektor

$$B_{0k} = r_0 \cdot a_{0k}^{-1} \cdot A_k$$

beschrieben, und der Mittelpunkt der Kugel liegt in der zum Vektor A_k senkrechten Ebene durch B_{0k} , deren Gleichung wir sofort hinschreiben können:

$$A_k \cdot X = A_k \cdot B_{0k} = r_0 \cdot a_{0k} = r_0 \cdot (r_0 + r_k).$$

Durchläuft nun k die Werte $1, 2, 3$, so haben wir wieder ein lineares Gleichungssystem, diesmal aus drei Gleichungen und mit drei Unbekannten, den Koordinaten des gesuchten Mittelpunkts. Da die Zeilenvektoren des Gleichungssystems eine Basis bilden, hat es genau eine Lösung, die wir mit M bezeichnen wollen. Daraus folgt schon, daß es nur eine Kantenkugel geben kann. Wir müssen aber noch nachweisen, daß es tatsächlich eine Kugel mit Mittelpunkt M gibt, die die Kanten des Tetraeders berührt.

Wir setzen zur Abkürzung $m = |M|$, d. h. m bezeichnet den Abstand des Punktes M vom Ursprung. Da das Dreieck OMB_{0k} an der Ecke B_{0k} einen rechten Winkel hat, können wir nach Pythagoras den Abstand von M und B_{0k} berechnen; er ergibt sich zu

$$\rho = \sqrt{m^2 - r_0^2},$$

ist also unabhängig von k . Damit berührt die Kugel um M mit Radius ρ jedenfalls die Kanten a_{0k} , $k = 1, 2, 3$, in den richtigen Punkten. Daß das auch für die Kanten a_{ij} , $i \neq 0 \neq j$ gilt, weisen wir für $i = 1$, $j = 2$ nach; die anderen Fälle sind analog zu behandeln. Wir wissen, daß die Punkte B_{01} , B_{02} und B_{12} - das ist der Punkt auf der Kante a_{12} , der von der Ecke A_1 den Abstand r_1 und von der Ecke A_2 den Abstand r_3 hat - die Berührungspunkte des Inkreises des Dreiecks $A_0A_1A_2$ sind. Also schneiden sich die zu den entsprechenden Kanten senkrechten Ebenen durch diese Punkte in einer Geraden, der Lotgeraden zur Ebene $A_0A_1A_2$ durch den Inkreismittelpunkt dieses Dreiecks. Die Schnittgerade enthält nach Konstruktion den Punkt M , woraus folgt, daß die Gerade MB_{12} senkrecht zur Kante a_{12} ist. Nun sind die Dreiecke A_1MB_{01} und A_1MB_{12} kongruent, und damit hat der Punkt M auch von dem Punkt B_{12} den Abstand ρ . Also berührt die Kugel um M mit Radius ρ auch die Kante a_{12} , was zu beweisen war.

Wenden wir uns nun dem Fall beliebiger Dimension $n > 2$ zu. Das Objekt des Studiums ist dann das n -Simplex, das von $n+1$ affin unabhängigen Punkten gebildet wird. Seine Strukturelemente sind Ecken, Kanten und höherdimensionale Seiten; für die $(n-1)$ -dimensionalen Seiten hat der tschechische Mathematiker Fiedler die recht suggestive Bezeichnung *Wände* eingeführt [9]. Anstelle von Kreis und Kugel tritt die Hypersphäre, eine $(n-1)$ -Sphäre; jedes n -Simplex hat genau eine *Umsphäre*, die durch die Ecken geht, und genau eine *Insphäre*, die die Wände in inneren Punkten berührt.

Der Satz über die Existenz einer Kantenkugel kann in völlig analoger Weise allgemein formuliert und bewiesen werden. Er lautet dann:

Satz 1ⁿ. Für ein n -Simplex Δ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (1) Δ besitzt eine Kantensphäre;
- (2) wenn immer zwei Seitendreiecke von Δ eine gemeinsame Kante haben, so berühren sich ihre Inkreise;
- (3) es gibt $n+1$ Hypersphären mit den Ecken von Δ als Mittelpunkten, die sich paarweise berühren;
- (4) die Längensummen der drei Gegenkantenpaare jedes Seitentetraeders sind gleich, d. h.

$$a_{ij} + a_{kl} = a_{ik} + a_{jl}$$

für jede Wahl von paarweise verschiedenen Indizes i, j, k, l .

Man bemerkt, daß bei geeigneter Interpretation der Satz trivialerweise auch für $n=2$ gilt. Es lassen sich aber hier noch zwei weitere äquivalente Bedingungen anschließen, die das Zusammenspiel der verschiedenen Dimensionen erhellen:

- (5) Jedes Seitentetraeder von Δ besitzt eine Kantenkugel;

und

- (6) jede p -dimensionale Seite ($2 < p < n$) besitzt eine $(p-1)$ -dimensionale Kantensphäre.

2. Berechnung des Radius

Ein Problem, mit dem sich Durrande, Crelle, Junghann und Dostor sehr abgemüht haben, ist die Aufstellung einer allgemeinen Formel für den Radius einer Kantenkugel im Falle ihrer Existenz. Ihre Herleitung kann durch konsequente Anwendung des Kalküls der Linearen Algebra sehr vereinfacht werden. Den Schlüssel dazu liefert die folgende Aussage über lineare Gleichungssysteme.

Satz 2. Sei \underline{A} eine reelle $(m \times n)$ -Matrix mit $\text{Rang } \underline{A} = m$ und sei $B \in \mathbb{R}^m$. Dann hat der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $\underline{A} \cdot X = B$ vom Ursprung das Abstandsquadrat

$$- \det \begin{pmatrix} 0 & B^t \\ B & \underline{A}\underline{A}^t \end{pmatrix} \cdot \det(\underline{A}\underline{A}^t)^{-1}$$

Im Fall $m = n$ ist dies gerade die Norm der eindeutigen Lösung des Gleichungssystems. Hierfür habe ich die Formel selbst überlegt, bin aber eigentlich sicher, daß die Sache schon irgendwo in der Literatur auftaucht, und wäre für entsprechende Hinweise sehr dankbar. Den allgemeinen Fall hat mir Herr Riedmüller in München mitgeteilt, auf einer Idee von ihm beruht der folgende kurze Beweis. Die Lösung minimaler Norm ist gegeben durch [26]:

$$X_{\min} = \underline{A}^t (\underline{A}\underline{A}^t)^{-1} B.$$

(Beweis. Ist X eine von X_{\min} verschiedene Lösung des Gleichungssystems, so hat das Dreieck $OX_{\min}X$ an der Ecke X_{\min} einen rechten Winkel, da gilt:

$$X_{\min} \cdot (X - X_{\min}) = 0.$$

Damit ist aber die Hypotenuse $|X|$ länger als die Kathete $|X_{\min}|$.) Wir setzen $Y = (\underline{A}\underline{A}^t)^{-1} B$ und berechnen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -Y^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & B^t \\ B & \underline{A}\underline{A}^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -Y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X_{\min}^2 & 0 \\ 0 & \underline{A}\underline{A}^t \end{pmatrix}$$

woraus sofort folgt:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & B^t \\ B & \underline{A}\underline{A}^t \end{pmatrix} = -X_{\min}^2 \cdot \det \underline{A}\underline{A}^t$$

und die Behauptung ist bewiesen. Vielleicht etwas länger, aber dafür durchsichtiger ist die Argumentation von Herrn Gaede in München: Y ist die eindeutige Lösung des linearen

Gleichungssystems $\underline{A}\underline{A}^t \cdot Y = B$ und seine Komponenten können mit der Cramerschen Regel berechnet werden; bezeichnen A_1, \dots, A_m die Spalten der Matrix $\underline{A}\underline{A}^t$, so liefert sie:

$$\begin{aligned} Y_j \cdot \det \underline{A}\underline{A}^t &= \det (A_1, \dots, B, \dots, A_m) = \\ &= (-1)^{j-1} \cdot \det (B, A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_m) = \\ &= - \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ B & A_1 & \dots & A_{j-1} & A_j & A_{j+1} & \dots & A_m \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

also gilt

$$B_j \cdot Y_j = - \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & B_j & 0 & \dots & 0 \\ B & A_1 & \dots & A_{j-1} & A_j & A_{j+1} & \dots & A_m \end{pmatrix}$$

und damit

$$X_{\min}^2 = B \cdot Y = \sum B_j \cdot Y_j = - \det \begin{pmatrix} 0 & B^t \\ B & \underline{A}\underline{A}^t \end{pmatrix} \cdot \det (\underline{A}\underline{A}^t)^{-1}.$$

Den Radius der Kantensphären erhalten wir nun als Spezialfall eines allgemeineren Satzes, zu dem die ursprünglich von dem siebzehnjährigen Durrande behandelte Fragestellung motiviert [18]:

Quatre sphères étant tellement situées que chacune d'elles touche à la fois les trois autres; démontrer que leurs points de contact deux à deux sont tous six sur une même sphère, et déterminer le rayon de cette sphère en fonction des rayons des sphères données?

Wir zeigen:

Satz 3. In R^n , $n \geq 2$, seien $n+1$ Hypersphären mit Mittelpunkten M_0, \dots, M_n und Radien r_0, \dots, r_n gegeben, die sich paarweise berühren. Dann gilt:

- (1) die Berührungspunkte liegen auf einer "Berührsphäre";
- (2) liegen die Hypersphären nicht im Büschel, so ist die Berührsphäre eindeutig bestimmt und hat die Krümmung (= reziproker Radius)

$$\varepsilon = \sqrt{(2(n-1))^{-1} \cdot ((\sum \varepsilon_i)^2 - (n-1)\sum \varepsilon_i^2)},$$

wobei ε_i die Krümmung der i -ten Hypersphäre bezeichnet, mit einem negativen Vorzeichen versehen, wenn die i -te Hypersphäre alle anderen einschließt;

(3) sind die Mittelpunkte M_0, \dots, M_n darüber hinaus affin unabhängig, so ist der Radius der Berührungssphäre gegeben durch

$$\rho = r_0 \cdot \dots \cdot r_n \cdot (n!V)^{-1} \sqrt{(n-1) \cdot 2^n},$$

wobei V das Volumen des von den Mittelpunkten gebildeten n -Simplexes bezeichnet.

Die Voraussetzung der affinen Unabhängigkeit in (3) ist notwendig, wurde aber von Durrande übersehen. Hat man drei sich paarweise berührende Kugeln im Raum gegeben, so kann man immer eine vierte Kugel finden, die genau in das von den drei Kugeln gebildete Loch paßt; ihr Mittelpunkt liegt dann im Inneren des von den drei gegebenen Mittelpunkten gebildeten Dreiecks, ist also von diesen affin abhängig. Damit ergibt sich auch, daß man, um den Satz in voller Allgemeinheit zu haben, sich auf den Standpunkt der Möbiusgeometrie stellen muß, indem man den R^n um einen unendlich fernen Punkt ∞ ergänzt und auch Hyperebenen als Sphären ansieht, mit Mittelpunkt ∞ und unendlichem Radius, d. h. verschwindender Krümmung; zwei in diesem Sinne als Sphären aufgefaßte Hyperebenen berühren sich genau dann, und zwar dann im Punkt ∞ , wenn sie parallel sind. Lassen Sie mich ein paar solche entartete Beispiele angeben, für die der Satz auch gilt:

In der Ebene gemäß den Figuren in Abb. 2. Im Raum drei sich von außen berührende Kugeln, die auf einer Ebene liegen, oder zwei sich von außen berührende Kugeln mit gleichem Radius zwischen zwei parallelen gemeinsamen Tangentialebenen.

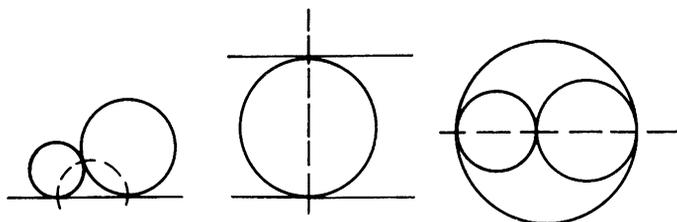


Abb. 2

Aus (3) ergibt sich im Fall $n=3$ die Formel, die Durrande 1815 [8] und Crelle unabhängig davon 1821 [5] für den Radius der Kantenkugel eines Tangententetraeders angegeben haben:

$$\rho = 2 \cdot r_0 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot (3V)^{-1}.$$

Wie Herr Barner in Freiburg bemerkt hat, ist die Existenz der Berührsphäre möbiusgeometrisch eine Trivialität: den gegebenen Hypersphären entsprechen $n+1$ Punkte im $(n+2)$ -dimensionalen reellen projektiven Raum, die in einer die fundamentale Quadrik schneidenden Hyperebene liegen. Der Pol dieser Hyperebene liefert dann die gesuchte Berührsphäre. Es sieht so aus, als ob zur Berechnung von Krümmung und Radius viele Fallunterscheidungen notwendig wären; das ist aber nicht so. Wir können nämlich annehmen, daß eine - sagen wir die 0-te - Hypersphäre unseres Systems alle anderen umschließt; den anderen Fall können wir durch Inversion an der Hypersphäre mit kleinstem Radius darauf zurückführen. Die Voraussetzungen in (2) und (3) sichern ja, daß unter den $n+1$ - mindestens drei - Hypersphären höchstens zwei Hyperebenen vorkommen, also mindestens eine Hypersphäre mit endlichem Radius vorhanden ist. Die Annahme vereinfacht die Situation auch insofern, als wir es nun mit echten Hypersphären zu tun haben, d. h. unter den gegebenen Hypersphären keine Hyperebene vorkommt: die Berührsphäre kann dann allerdings immer noch eine Hyperebene sein.

Nun wollen wir zuerst die in (3) angegebene Formel herleiten und dazu $M_0 = 0$ voraussetzen. Der "Vektor" M_i hat dann die Länge $r_0 - r_i$ (s. Abb. 3). Die möbiusgeometrische

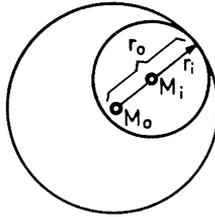


Abb. 3

Betrachtungsweise liefert noch, daß der Mittelpunkt der Berührsphäre im Schnitt der gemeinsamen Tangentialhyper-ebenen liegt, die auf den zugehörigen Zentralen, d. h. den Verbindungsgeraden entsprechender Mittelpunkte, senkrecht stehen. Damit erhalten wir wie im Fall der Kantenkugel ein lineares Gleichungssystem für den Mittelpunkt M der Berührsphäre:

$$M_i \cdot X = r_0 \cdot (r_0 - r_i)$$

für $1 \leq i \leq n$. Aus der affinen Unabhängigkeit der Punkte M_0, \dots, M_n folgt die lineare Unabhängigkeit der Vektoren M_1, \dots, M_n ; also hat dieses Gleichungssystem genau eine Lösung M . Aus Satz 2 ergibt sich nun für den gesuchten Radius

$$\begin{aligned} \rho^2 = M^2 - r_0^2 &= -[\det \begin{pmatrix} 0 & r_0(r_0 - r_i) \\ r_0(r_0 - r_i) & M_i \cdot M_j \end{pmatrix} + \\ &+ \det \begin{pmatrix} r_0^2 & 0 \\ r_0(r_0 - r_i) & M_i \cdot M_j \end{pmatrix}] \cdot \det(M_i \cdot M_j)^{-1} = \\ &= - \det \begin{pmatrix} r_0^2 & r_0(r_0 - r_j) \\ r_0(r_0 - r_i) & M_i \cdot M_j \end{pmatrix} \cdot (n!V)^{-2} = \\ &= - r_0^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & r_0 - r_j \\ r_0 - r_i & M_i \cdot M_j \end{pmatrix} \cdot (n!V)^{-2} . \end{aligned}$$

Um den Zähler auswerten zu können, müssen wir noch die inneren Produkte $M_i \cdot M_j$ berechnen; wir erhalten

$$M_i^2 = (r_0 - r_i)^2$$

für $1 \leq i \leq n$ und

$$\begin{aligned} M_i \cdot M_j &= \frac{1}{2} (M_i^2 + M_j^2 - (M_i - M_j)^2) = \\ &= r_0^2 - r_0 \cdot (r_i + r_j) - r_i \cdot r_j \end{aligned}$$

für $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, also allgemein

$$M_i \cdot M_j = r_0 \cdot (r_0 - r_i) - r_j \cdot (r_0 - \kappa_{ij} r_i)$$

mit $\kappa_{ii} = 1$ und $\kappa_{ij} = -1$ für $i \neq j$. Einsetzen führt zu

$$\det \begin{pmatrix} 1 & r_0 - r_j \\ r_0 - r_i & r_0 \cdot (r_0 - r_i) - r_j \cdot (r_0 - \kappa_{ij} r_i) \end{pmatrix}$$

Ziehen wir das r_0 -fache der ersten Spalte von allen folgenden Spalten ab, so können wir anschließend aus der j -ten Spalte (für $j = 2, \dots, n+1$) den Faktor r_{j-1} herausholen und kommen zu

$$r_1 \cdot \dots \cdot r_n \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ r_0 - r_i & \kappa_{ij} r_i - r_0 \end{pmatrix}.$$

Ziehen wir nun das r_0 -fache der ersten Zeile von allen folgenden Zeilen ab, so können wir anschließend aus der i -ten Zeile (für $i = 2, \dots, n+1$) den Faktor r_{i-1} herausholen und kommen zum Ziel:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot \dots \cdot r_n \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ r_0 - r_i & \kappa_{ij} r_i - r_0 \end{pmatrix} &= \\ = r_1^2 \cdot \dots \cdot r_n^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \kappa_{ij} \end{pmatrix} &. \end{aligned}$$

Setzen wir die gefundenen Werte für die Produkte $M_i \cdot M_j$ nun auch noch in die Determinante $\det(M_i \cdot M_j) = (n!V)^2$ ein, so erhalten wir das $n!$ -fache Volumen des von den Mittelpunkten aufgespannten n -Simplexes. Die Berechnung dieser Determinante ist etwas komplizierter, aber die klassische Methode des Ränderns hilft weiter. Wir deuten die einzelnen Schritte nur an, wobei wir $\varepsilon_0 = -1/r_0$ und $\varepsilon_j = 1/r_j$ (für $j = 1, \dots, n$) beachten:

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ r_0(r_0-r_i) & & r_0(r_0-r_i)-r_j(r_0-\kappa_{ij}r_i) \end{pmatrix} = \\ & = r_0 \cdot \dots \cdot r_n \cdot \det \begin{pmatrix} -\varepsilon_0 & & -\varepsilon_j \\ r_0-r_i & & \kappa_{ij}r_i-r_0 \end{pmatrix} = \\ & = r_0 \cdot \dots \cdot r_n \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -r_0 & r_0 \\ 0 & -\varepsilon_0 & -\varepsilon_j \\ 0 & r_0-r_i & \kappa_{ij}r_i-r_0 \end{pmatrix} = \\ & = r_0^2 \cdot \dots \cdot r_n^2 \cdot \det \begin{pmatrix} -\varepsilon_0 & -1 & 1 \\ 0 & -\varepsilon_0 & -\varepsilon_j \\ \varepsilon_i & -1 & \kappa_{ij} \end{pmatrix} = \\ & = -r_0^2 \cdot \dots \cdot r_n^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_0 & \varepsilon_j \\ \varepsilon_0 & 1 & -1 \\ \varepsilon_i & -1 & \kappa_{ij} \end{pmatrix} = \\ & = r_0^2 \cdot \dots \cdot r_n^2 \cdot 2^{n-1} \cdot [(\sum \varepsilon_k)^2 - (n-1)\sum \varepsilon_k^2] . \end{aligned}$$

(Zur Auswertung der letzterhaltenen Determinante gibt es einen auf Daniel Pedoe [17, S. 630] zurückgehenden Trick. Es handelt sich ja um eine symmetrische Funktion 2. Grades in $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$; sie muß sich also in der Form

$$a(\sum \varepsilon_k)^2 + b\sum \varepsilon_k^2$$

darstellen lassen, wobei man die Koeffizienten a und b durch Einsetzen spezieller Werte bestimmen kann. Setzen wir $\varepsilon_0 = 1$ und $\varepsilon_j = 0$ für $j > 0$, so ergibt sich

$$a+b = (n-2) \cdot 2^{n-1};$$

im Falle $\varepsilon_0 = -1$ und $\varepsilon_j = 1$ für $j > 0$ folgt

$$(n-1)^2 \cdot a + (n+1)b = (n-1) \cdot 2^n.$$

Aus diesen beiden Gleichungen sind a und b leicht zu ermitteln.)

Demnach ist das Volumen des von den Mittelpunkten gebildeten n -Simplexes

$$V = n!^{-1} \cdot r_0 \cdot \dots \cdot r_n \cdot \sqrt{2^{n-1} \cdot [(\sum \varepsilon_k)^2 - (n-1) \sum \varepsilon_k^2]}$$

mit $\varepsilon_0 < 0$ und $\varepsilon_i > 0$ für $1 \leq i \leq n$ (diese Formel gilt auch, wenn sich alle $n+1$ Kugeln von außen berühren, d. h. wenn alle Krümmungen ε_i positiv sind; sie wurde für $n=3$ schon von Durrande entwickelt). Daraus ergibt sich nun unmittelbar die Krümmung $\varepsilon = 1/\rho$ in (2) von Satz 3 im Fall affiner Unabhängigkeit der Mittelpunkte M_0, \dots, M_n .

Nehmen wir nun an, daß diese Mittelpunkte affin abhängig sind. Dann liegen sie in einer Hyperebene. Da jeder Berührungspunkt auf einer Verbindungsstrecke zweier Mittelpunkte liegt, gehören auch alle Berührungspunkte zu dieser Hyperebene. Also ist die Hyperebene die Berührsphäre und damit verschwindet die Krümmung der Berührsphäre. Andererseits bedeutet die affine Abhängigkeit der Mittelpunkte algebraisch gerade das Verschwinden der Determinante $\det (M_i \cdot M_j)$, d. h. $V = 0$ oder

$$(\sum \varepsilon_k)^2 = (n-1) \sum \varepsilon_k^2,$$

womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Diese Gleichung, auf deren weiterreichende Bedeutung mich Herr Kratz in Gauting aufmerksam gemacht hat, hat selbst auch eine lange Geschichte [4]. Das beruht darauf, daß bei affiner Abhängigkeit der Mittelpunkte der Schnitt der Hyperebene durch die Mittelpunkte mit den gegebenen Hypersphären $n+1$ sich paarweise berührende $(n-2)$ -Sphären liefert, also bei $n=3$ vier sich paarweise berührende Kreise in einer Ebene. Daß

zwischen den Krümmungen von vier solchen Kreisen diese Beziehung besteht, schrieb bereits Descartes (1596-1650) seiner Lieblingsschülerin, der Wittelsbacher Prinzessin Elisabeth (1618-1680 [2], in einem Brief mehr didaktischen Inhalts vom November 1643 [6]. Wie Jacob Steiner (1796-1863) bei einer Herleitung der Formel im Jahr 1826 feststellt, hätte sie sogar schon Pappos um das Jahr 300 beweisen können, da er einen Schlüsselsatz zur Verfügung hatte [23]. Neugefunden hat sie 1936 der Chemiker Soddy (1877-1956), der im Jahr 1921 für seine Entdeckung der Isotope den Nobelpreis erhielt und sein Entzücken über die Schönheit der Gleichung in folgende Verse faßte [21]. Sein Gedicht inspirierte den Engländer Gosset, den allgemeinen n -dimensionalen Fall zu betrachten und in einem Ergänzungsvers auszudrücken [13]; deshalb spricht Herr Coxeter in diesem Zusammenhang vom "Satz von Gosset":

1. For pairs of lips to kiss may be
 Involves no trigonometry.
 It's not so when four circles kiss
 Each one the other three.
 To bring this off the four must be
 As three in one or one in three.
 If one in three, beyond a doubt
 Each gets three kisses from without.
 If three in one, then is that one
 Thrice kissed internally.

2. Four circles to the kissing come
 The smaller are the benter.
 The bend is just the inverse of
 The distance from the centre.
 Though their intrigue left Euclid dumb
 There's now no need for rule of thumb.
 Since zero bends a dead straight line
 And concave bends have minus sign,
*The sum of the squares of all four bends
 Is half the square of their sum.*

3. To spy out spherical affairs
 An oscular surveyor
 Might find the task laborious
 The sphere is much the gayer.
 And now besides the pair of pairs
 A fifth sphere in the kissing shares.
 Yet, signs and zero as before,
 For each to kiss the other four
*The square of the sum of all five bends
 Is thrice the sum of their squares.*

4. And let us not confine our cares
 To simple circles, planes and spheres,
 But rise to hyper flats and bends
 Where kissing multiple appears.
 In n -ic space the kissing pairs

Are hyperspheres, and Truth declares
 As $n+2$ such osculate
 Each with an $n+1$ fold mate
The square of the sum of all the bends
Is n times the sum of their squares.

Verse 1-3: *F. Soddy*; Vers 4: *T. Gosset*.

3. Konstruktion von Tangententetraedern

Es ist nun höchste Zeit, einmal darüber nachzudenken, ob wir nicht viel über eine fast leere Menge reden, d. h. ob es außer den trivialen Tangententetraedern, wie sie etwa in der Fortsetzung meines Beitrages zum Festheft dargestellt sind [11]: dreiseitige Pyramiden mit gleichseitiger Grundfläche und gleichlangen Kanten zur Spitze, noch weitere gibt. Entsprechend einem Vorschlag von Herrn Tietz sollte man, ausgehend von einem beliebig vorgegebenen Grunddreieck $A_1A_2A_3$ mit den Kanten a_{12}, a_{13}, a_{23} , eine vierte Ecke A_0 durch Angabe von drei Kantenlängen a_{01}, a_{02}, a_{03} so bestimmen, daß ein Tangententetraeder entsteht. Dazu könnte man zunächst versucht sein, folgendermaßen vorzugehen: Man wählt eine Kantenlänge a_{01} so, daß $d = a_{01} + a_{23} \geq a_{12}, a_{13}$ ist, und setzt $a_{02} = d - a_{13}$, $a_{03} = d - a_{12}$. Aber das führt im allgemeinen nicht zum Ziel. Die Relationen aus (4) in Satz 1 sind zwar erfüllt, aber diese Kantenlängen brauchen nicht die "Dreiecksungleichung für Tetraeder" [10] zu erfüllen, d. h. sie brauchen sich nicht zu einem Tetraeder zusammenzuschließen, wie man an Abb. 4 unmittelbar erkennt.

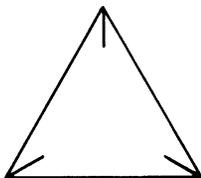


Abb. 4

Man überblickt die Situation besser, wenn man statt der Kantenlängen die Radien r_i der sich berührenden Kugeln um die Ecken zu bestimmen sucht. Ist ein Dreieck $A_1A_2A_3$ vorgegeben, so sind sein Inkreis, also dessen Berührungspunkte und damit die Radien r_1, r_2, r_3 , sowie die entsprechenden Kugeln um die Ecken bereits festgelegt. Wenn man nun noch einen Radius r_0 geeignet bestimmt, dann erhält man die gesuchten Kanten aus der Beziehung $a_{0i} = r_0 + r_i$, $i = 1, 2, 3$. Nun sieht man aber, was los ist: der Radius r_0 muß mindestens so groß gewählt werden, daß eine Kugel mit diesem Radius nicht durch das von den drei bereits bekannten Kugeln gebildete Loch fallen kann; eine zu kleine Kugel könnte ja niemals mit allen drei Kugeln gleichzeitig zur Berührung gebracht werden. Damit haben wir eine scharfe untere Schranke für die möglichen Radien r_0 gefunden. Im Falle eines sehr stumpfwinkligen Grunddreiecks kann es aber auch noch eine obere Schranke geben, nämlich in der in Abb. 5 dargestellten Situation:

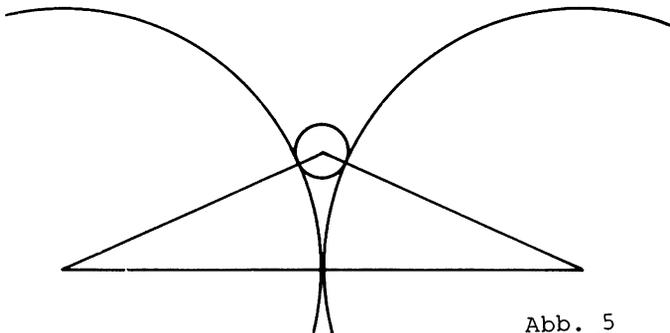


Abb. 5

Man sieht, daß eine zu große Kugel mit der kleinsten Kugel nicht mehr zur Berührung gebracht werden kann; sie wird durch die beiden anderen Kugeln davon abgehalten. Algebraisch kann man diesen Sachverhalt gleich n -dimensional durch den Satz von Gosset beschreiben. Man kennt die Krümmungen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ und hat so eine quadratische Gleichung für die Schranken der zulässigen Krümmungen ε_0 . Die

Gleichung hat immer zwei reelle Lösungen. Ist nur eine davon positiv, so gibt es nur eine obere Schranke für ϵ_0 , d. h. nur eine untere Schranke für r_0 . Anderenfalls hat die Gleichung zwei positive Lösungen und dann gibt es sowohl eine untere als auch eine obere Schranke. Für $n = 3$ hat diese Überlegung auch schon Soddy angestellt [22].

Wie man das Netz eines nichttrivialen Tangententetraeders mit Zirkel und Lineal konstruieren kann, hat Herr Kratz in [16] angegeben.

4. Ein Beispiel aus der Physik

Als ich diesen Stoff kürzlich in einem Leistungskurs eines Münchner Gymnasiums unterrichtete, wurde ich von einem Schüler gefragt, ob es sich dabei nicht um eine reine mathematische Spielerei handle. Ich hätte ihm dazu natürlich etwas von der Pflege des räumlichen Anschauungsvermögens erzählen und auch darauf hinweisen können, daß der Chemiker Soddy und der Techniker Crelle von ihren Arbeitsgebieten her auf diese Probleme gestoßen seien, aber ich hatte glücklicherweise etwas Aktuelleres.

Bei der Untersuchung von (nicht-relativistischen) Prozessen in der Kernphysik benutzt der Experimentalphysiker Detlef Kamke in Bochum (ein Sohn des vor allem wegen seiner Sammlung von Differentialgleichungen berühmten Mathematikers Erich Kamke 1890-1961) sogenannte "Energietetraeder" [15]. Er betrachtet vier Teilchen fester Masse m_k (Massensumme $m = \sum m_k$) und sucht ein Tangententetraeder mit den Höhen $m/(m-m_k)$. Die Bewegung der Teilchen soll zwei Bedingungen unterliegen: Einmal soll der Gesamtimpuls $\sum p_k$ verschwinden, zum anderen soll die Gesamtenergie $E = \sum E_k$ konstant sein. Die relativen Energien E_k/E summieren sich dann zu 1 und können als baryzentrische Koordinaten eines Punktes des Tetraeders aufgefaßt werden. Herr Kamke geht der Frage nach, welche Punkte des Tetraeders solche Energieverteilungen beschreiben können. Für drei Teilchen wurde diese Konstruktion schon früher durchgeführt und lieferte als Ergebnis, daß diese Energieverteilungen genau

die Fläche des Inkreises des entsprechenden Dreiecks ausfüllen, was die Konstruktion eines Tetraeders mit einander berührenden Inkreisen der Seitendreiecke motiviert. (Es ist leicht zu sehen, daß auf jeder Kante nur ein Zustand in Frage kommt! Genaueres dazu ist in [12] ausgeführt.)

5. Noch eine Verallgemeinerung

Wenn man sich Satz 1ⁿ genau ansieht, stellt man sich unwillkürlich die Frage, wie es mit Hypersphären steht, die die p-dimensionalen Seiten eines n-Simplexes in inneren Punkten berühren, für beliebiges $p < n$. Nun, für $p = 0$ hat man die Umsphäre, für $p = 1$ gegebenenfalls die Kantensphäre und für $p = n-1$ die Inosphäre. Ganz analog zu Satz 1ⁿ gilt allgemein:

Satz 1^{n,p}. Seien $n, p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p < n$. Dann sind für ein n-Simplex Δ die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (1) Δ besitzt eine Sphäre, die die p-dimensionalen Seiten in inneren Punkten berührt;
- (2) wenn immer zwei (p+1)-dimensionale Seiten von Δ eine p-dimensionale Seite gemeinsam haben, so berühren sich ihre Inkreise;
- (3) es gibt n+1 Hypersphären mit den Ecken von Δ als Mittelpunkten, von denen je p+1 genau einen Punkt gemeinsam haben (das besagt im Fall $p=0$: jede dieser Hypersphären besteht nur aus einem Punkt, hat also den Radius 0);
- (4) jede q-dimensionale Seite ($p+1 < q < n$) besitzt eine (q-1)-Sphäre, die ihre p-dimensionalen Seiten berührt.

Im Fall $p=1$ ist das im wesentlichen der Satz 1ⁿ; es fehlt vor allem die dort unter (4) genannte algebraische Bedingung. Eine solche gibt es auch für beliebiges p, ist aber doch wesentlich schwieriger zu formulieren. Wir betrachten dazu eine (p+1)-dimensionale Seite Δ_α von Δ mit den Ecken

$A_{\alpha(0)}, \dots, A_{\alpha(p+1)}$. Die Ecke $A_{\alpha(0)}$ hat von den Berührungspunkten der Inosphäre von Δ_{α} auf den Wänden, die die Ecke $A_{\alpha(0)}$ enthalten, den Abstand

$$r_{\alpha(0)} = 0^{-1} \sqrt{V_0 \cdot \sum V_k \cdot a_{\alpha(0)\alpha(k)}^2 - \frac{1}{2} \sum V_i V_j \cdot a_{\alpha(i)\alpha(j)}^2 - (p+1)^2 V_{\alpha}^2},$$

wobei die Summationen über $i, j, k = 0, \dots, p+1$ laufen (mit der Konvention $a_{kk} = 0$ für alle $k = 0, \dots, n$) und

V_{α} den Inhalt (= das Volumen) von Δ_{α} ,

V_k den Inhalt der der Ecke $A_{\alpha(k)}$ gegenüberliegenden Wand von Δ_{α} und

$0 = \sum V_k$ die "Oberfläche" von Δ_{α}

bezeichnet; alle diese Größen $V, V_k, 0$ sind offensichtlich durch die Kantenlängen a_{ij} ausdrückbar. Im Falle $p < n-1$ gehört jede Ecke von Δ zu mehreren $(p+1)$ -dimensionalen Seiten $\Delta_{\alpha}, \Delta_{\beta}, \dots$ von Δ und die angekündigte algebraische Bedingung läßt sich beschreiben durch

$$r_{\alpha(0)} = r_{\beta(0)},$$

immer wenn $A_{\alpha(0)} = A_{\beta(0)}$.

Sind $A_0 = 0, A_1, \dots, A_n$ die Ecken eines solchen n -Simplexes im Vektorraum R^n , so ergibt sich der Mittelpunkt der in (1) genannten Hypersphäre als die wohlbestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A_i \cdot X = (r_0^2 + a_{0i}^2 - r_i^2)$$

für $i = 1, \dots, n$; ihr Radius ist darum gegeben durch

$$\begin{aligned} \rho^2 &= M^2 - r_0^2 = \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & r_j^2 & 1 \\ r_i^2 & a_{ij}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (n!V)^{-2}, \end{aligned}$$

eine Formel, die die Radien der Hypersphären aus (3) und die Kantenlängen des gegebenen Simplexes enthält. Man kann nun zwar die Radien r_i für $i = 0, \dots, n$ noch durch die Kantenlängen ausdrücken - das wird dann sehr unübersichtlich -, aber für $p \neq 1$ nicht umgekehrt.

Damit wird die Sonderrolle der Kantensphären in diesem Zusammenhang deutlich. Sie beruht darauf, daß ein *Tangentensimplex* durch die Radien der sich paarweise berührenden Sphären um die Ecken eindeutig bestimmt ist, eine analoge Aussage im Fall $p \neq 1$ aber nicht gilt. Für $p = 0$ ist das unmittelbar klar, da gilt ja $r_i = 0$ für alle i , aber man konstruiert auch leicht verschiedene Tetraeder mit der Eigenschaft, daß entsprechende Ecken von den Berührungspunkten der Inkugel gleiche Abstände haben.

Zwei nun vielleicht auf der Hand liegende Problemkreise bleiben offen: die Konstruktion nichttrivialer n -Simplexe mit den in Satz 1^{n,p} genannten Eigenschaften und die Frage nach der Abhängigkeit dieser Bedingungen für verschiedene p voneinander, d. h. beispielshalber, ob die Existenz einer Kantensphäre die Existenz einer die p -dimensionalen Seiten des n -Simplexes berührenden Sphäre (mit $p > 1$) impliziert oder nur unter sehr einschränkenden Bedingungen zuläßt. (Man denke etwa daran, daß die gleichzeitige Existenz von Kantenkugel und Raumbhöhen Schnittpunkt bei einem Tetraeder zur Folge hat, daß mindestens ein Seitendreieck gleichseitig ist und auch die übrigen Kanten die gleiche Länge haben [11].)

Zum Abschluß sei noch erwähnt, daß Junghann [14] in Analogie zu den Ankreisen eines ebenen Dreiecks auch Kugeln untersucht hat, die einige Kanten eines Tetraeders in inneren Punkten, die übrigen aber in Punkten ihrer Verlängerungen berühren. Er spricht in diesem Fall von *anschließenden* Tangententetraedern, im Gegensatz zu den *umschließenden*. Welch weites Feld für Verallgemeinerungen sich hieraus

ergibt, kann man vielleicht daran ermessen, daß schon die Diskussion der Ankugeln am Tetraeder einigen Aufwand erfordert [11].

Literatur

- [1] BEDNARCZUK, J.: Urok przekształceń afinicznych. Warschau 1978.
- [2] BELL, E.T.: Die großen Mathematiker. Düsseldorf-Wien 1967. (Amerikanisches Original: Men of Mathematics, New York 1937).
- [3] BOS, W.: Vektorielle Behandlung von Kreisbüscheln und Kreisbündeln. Didaktik der Mathematik 2: 63-80, 1974.
- [4] COXETER, H.S.M.: Loxodromic sequences of tangent spheres. Aequationes mathematicae 1: 104-121, 1968.
- [5] CRELLE, A.L.: Kugel, welche die Seiten der Pyramide berührt. In: Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen, Band 1. Berlin 1821, 118-128.
- [6] DESCARTES, R.: A M. la Princesse Elisabeth..., Brief, geschrieben im November oder Dezember 1643, abgedruckt in: Oeuvres, publiées par C. Adam et P. Tannery, Vol. 4. Paris 1901, 45-50.
- [7] DOSTOR, G.: Tétraèdre dont les six arrêtes sont tangentes à une même sphère. Nouvelles Annales de Mathématiques, II. Série 13: 563-568, 1874.
- [8] DURRANDE, J.B.: Solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 32 de ce volume. Annales de Mathématiques pures et appliquées 5: 301-309, 1814/15.
- [9] FIEDLER, M.: Geometrie Simplexu v E_n (první část), Časopis pro pěstování matematiky 79: 297-320, 1954.
- [10] FRITSCH, R.: "Dreiecks"-Ungleichungen für Tetraeder. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 34: 274-278, 1981.
- [11] FRITSCH, R.: Merkwürdige Kugeln am Tetraeder. Teil 2. Didaktik der Mathematik 12: 18-35, 1984.
- [12] FRITSCH, R.: Energietetraeder? (Energie-Impuls-Räume und -Flächen). Mitteilungen aus dem Mathematischen Seminar Giessen 164: 151-177, 1984 (Coxeter-Festschrift, Teil II).
- [13] GOSSET, T.: 4. Vers zu SODDYS The Kiss Precise. Nature 139: 62, 1937.
- [14] JUNGHANN, G.: Ueber einige Eigenschaften solcher Tetraeder, deren sechs Kanten eine Kugel berühren (Tangententetraeder). Archiv der Mathematik und Physik 40: 447-459, 1863.

- [15] KAMKE, D.: Evaluation of Dalitz plots. In: Clustering Phenomena in Nuclei (International Conference, held in Bochum, 21-24 July 1969. Proceedings, published by the International Atomic Agency). Wien 1969, 87-107.
- [16] KRATZ, J.: Das Netz eines Tangententetraeders. Didaktik der Mathematik 13: Heft 2, 1985.
- [17] PEDOE, D.: On a Theorem in Geometry. American Mathematical Monthly 74: 627-640, 1967.
- [18] Questions proposées. Problèmes de Géométrie, II. Annales de Mathématiques pures et appliquées 5: 32, 1814/15.
- [19] RIBONI, G.: Contributo allo Studio del Tetraedro. Periodico di scienze matematiche e naturali per l'insegnamento secondario, Ser. I, 5: 1-9, 1890.
- [20] SIMON, M.: Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Leipzig 1906.
- [21] SODDY, F.: The Kiss Precise. Nature 137: 1021, 1936.
- [22] SODDY, F.: The Bowl of Integers and the Hexlet. Nature 139: 77-79, 1937.
- [23] STEINER, J.: Fortsetzung der geometrischen Betrachtungen. Journal für die reine und angewandte Mathematik 1: 252-288, 1826.
- [24] TIETZ, H.: Tetraeder mit berührenden Inkreisen. Mathematisch-physikalische Semesterberichte 21: 143-144, 1974.
- [25] ZACHARIAS, M.: Elementargeometrie und die elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung. In: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band III AB9. Leipzig 1914/31, 859-1172.
- [26] ZIELKE, G.: Verallgemeinerte inverse Matrizen. In: Jahrbuch Überblicke Mathematik 1983. Mannheim-Wien-Zürich 1983, 95-116.

Eingegangen: 06.01.1984