

Beiträge zum Mathematikunterricht 1985

Vorträge auf der 19. Bundestagung
für Didaktik der Mathematik
vom 5. 3. bis 8. 3. 1985 in Giessen

Verlag B. Franzbecker, Didaktischer Dienst,
Bad Salzdetfurth, 1985

I N H A L T

Hauptvorträge

PICKERT, G.	
Kegelschnitte und Ovale in der endlichen Geometrie	9
SPADA, H.	
Neue Theorien des Wissens und Denkens	15
VINNER, Sh.	
Mathematical Thinking - Expectations and Practice.....	17
WALTHER, G.	
Zur Rolle von Aufgaben im Mathematikunterricht	28

Sektionsvorträge

ANDELFINGER, B.	
Der heimliche Lehrplan von Mathematik-Fachleitern - eine Fallstudie, ihr Umfeld und einige Konsequenzen	43
HEINK, G./REITBERGER, W.	
Zum Bruchzahlverständnis von Schülern der Sekundarstufe I - eine empirische Untersuchung	47
BAPTIST, P.	
Klassische Elementargeometrie - Anregung für den Schulunterricht	55
BECKER, G.	
Ein Vorschlag zum Beginn des "systematischen Geometrikurses" in der Sekundarstufe I unter besonderer Berücksichtigung des Beweises	59
BENDER, P.	
Zur sachmathematischen Kompetenz der Viertkläbler	63
BENDER, P.	
Zur Überwindung der sog. Bildungskrise mit Samba-Schulen, Informationstechnik-Unterricht in der SI und Logo-Umgebungen	67
BIEHLER, R.	
Die Neyman-Pearson-Theorie statistischer Hypothesentests in historischer und didaktischer Perspektive	71
BONG, U.	
Informationsunterricht in Arbeitsgemeinschaften an Realschulen	75
BOROVCNIK, M.	
Wahrscheinlichkeitsrevision und Denken in Wahrscheinlichkeiten	79
BOYKIN, W.E.	
Problem Solving - Elusive, Yet Managable	83
DANCKWERTS, R.	
Wie packt man die Fachdidaktik-Ausbildung angehender S II - Lehrer an?	90

DÖRFLER, W.	
Handlungen und Mathematiklernen - Vergleich von Ansätzen	94
DROGE, R.	
Was trägt das Schulbuch zur Ausbildung der Sachrechnenkompetenz von Grundschulern bei?	98
EICHHOLZ, H.	
Indirektes Beweisen in der Geschichte der Mathematikdidaktik	103
FELLER, G.	
Lernzielerreichung in Abhängigkeit von Aufgabentypen?	107
FRAEDRICH, A.M.	
König Senkrecht IV. und sein Reich - Ein Unterrichtsbeispiel für Klasse 4/5 zum Thema "Rechteck und Quadrat"	111
FRITSCH, R.	
Ein geometrisches Beispiel für die Macht und Ohnmacht des Differentialkalküls	115
GRAUMANN, G.	
Computerunterstützter Geometrieunterricht (CUGU)	119
GRAUMANN, G./SIEGERT, H.	
Funktionsmodelle zum Zeichnen von Ellipsen	124
HAAPASALO, L.	
Über produktive und reproduktive Aktivität bei der Aneignung von mathematischen Begriffen	128
HAASE, P.	
Über die Bedeutung der Farbwahl in Medien für den Mathematik-Anfangsunterricht bei Farbenfehlsichtigen ...	133
HANISCH, G.	
Beweisen im Mathematikunterricht - Der Unterschied zwischen Logik und Psychologie	138
v. HARTEN, G.	
Formeln in der Berufsschule und in der Sekundarstufe I des allgemeinbildenden Schulwesens	142
HAUSSMANN, K.	
Iteratives und rekursives Denken beim Lösen mathematischer Probleme	146
HEFENDEHL-HEBEKER, L.	
Schülerinnen schreiben ein Bühnenstück über ein mathematisches Märchen	150
HERGET, W.	
Heuristik mit dem Computer	152
HOLLAND, G.	
Das Lösen geometrischer Berechnungs- und Beweisprobleme mit PROLOG	156
JAHNKE, Th.	
Offene Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I	160

KESSLER, R. Parkettierung mit Würfelnetzen - Optimierungsprozesse in der Grundschule	164
KESSLER, R./SCHÖNWALD, H.G. Vision "2000" - Handgetipptes statt handschriftliches Rechnen in der Primarstufe ?	168
KIESOW, N. Zur Rolle von Berechnungsvorschriften im Analysis- unterricht	172
KLIKA, M. Funktionen von mehreren Veränderlichen - kein Thema für den Analysisunterricht ?	176
KLEINERT, M./NILSON, W. Über die Zerfällung natürlicher Zahlen in paarweise ver- schiedene Summanden aus einer Teilmenge von \mathbb{N} - ein Pro- blemkreis für die Sekundarstufe II ?	181
KRUMMHEUER, G. Erfahrungsbericht über eine Lehrerfortbildungsveranstaltung zum Thema: "Kommunikationsanalysen zum Mathematikunter- richt"	185
LIND, D. Zur Rechtfertigung des binomialen Testmodells und seiner Verwendung zur Leistungsmessung	187
LÖRCHER, G.A. Einmaleinskenntnisse bei Schülern der Sekundarstufe	191
LÖTJE, H. Mathematik, Informatik, Computeranwendungen - Probleme und Chancen einer Integration	195
LÖTJE, H. Logo - eine Sprache zum Kommunizieren über Mathematik ..	199
VAN LÜCK, W. Anwendungsorientierter Mathematikunterricht und benutzer- orientierte informationstechnologische Grundbildung	203
MAASS, J. Mathematik als soziales System - ein soziologischer Beitrag zu den Grundlagen einer Hochschuldidaktik der Mathematik	206
MARPAUNG, Y. Eine interkulturelle Vergleichsstudie über unterschiedliche Interaktionstypen bei der Auseinandersetzung mit Algorithmen	210
MEISSNER, H. Vergleichen, Schätzen und Überschlagen	214
MENZEL, K. Lehreraus- und -fortbildung Informatik/Datenverarbeitung	218
MEYER, K. EDV am Gymnasium	222
MEYER-LERCH, J. Verkehrsfluß und Geschwindigkeit - ein Beitrag zur Verkehrs- erziehung im Rahmen des Analysis-Unterrichts der Sekundarstufe II	226

MULLER, K.P.	
Zentralriß, Normalriß oder Schrägriß als geometrische Simulation des Sehens ?	230
NEIDHARDT, W.	
Kreisspiegelung im Unterricht und Beispiele für ihre Anwendung	234
NEUBRAND, M.	
Der 4 - dimensionale Würfel: Beispiele für relationales Begriffsverständnis	238
PAUKOWITSCH, P.	
Darstellungsverfahren - Ein Beitrag zur Methodik des Geometrieunterrichts	242
PEHKONEN, E.	
Einige Begründungen zum Üben des Problemlösens in der Schule	246
PEHKONEN, L.	
Eine Methode, Schülerschwierigkeiten zu diagnostizieren ...	250
PETERS, W.S.	
Analyse einer Problemlösestrategie durch Visualisierung ...	254
RATH, I.	
Mathematik lehren und lernen aus der Sicht der Transaktions- analyse	258
RICHENHAGEN, G.	
Kinder, Computer und eine neue Epistemologie ? Bemerkungen zu Seymour Paperts "Mindstorms"	262
RÖTTEL, K.	
Computer in Schulen: Bildung fürs 21. Jahrhundert ?	266
SÄCKL, H.	
Puzzles im Mathematikunterricht	270
SCHAPER, R.	
Computergrafikfilm: Matrizen und lineare Abbildungen	272
SCHLÖGLMANN, W.	
Mathematische Weiterbildung - ein Forschungsgegenstand der Mathematikdidaktik ?	275
SCHÖNBECK, J.	
Hermann Wiener (1857-1939) und die Grundlagen der Geometrie	279
SCHÖNWALD, H.G.	
Zur tiefenpsychologischen Begründung der Mathematik	283
SCHULZ, Ch.	
Eine Verallgemeinerung der platonischen Körper	287
SCHUPPAR, B.	
Logo in der Lehrerbildung	291
SIETMANN, G.	
Problemsituationen als Mittel zur Erhöhung des Interesses der Schüler am Mathematikunterricht	295

STEIN, M.	
Implizite Beweismodelle	298
STEINBRING, H.	
Zur Behandlung stochastischer Grundbegriffe im Unterricht	302
STEINER, H.-G.	
Philosophische Aspekte der Mathematik und ihre Wechselwirkungen mit Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts	305
STRASSER, R.	
Anwendungen der Mathematik - Ergebnisse von Lehrer-Interviews	309
STUBE, R.	
Farblich-unterstützte Darstellung abbildungsgeometrischer Beweisführungen auf den Graphik-Schirmen eines Mikrocomputers	313
THIES, C.	
Zur Behandlung von Ordnungsrelationen unter Berücksichtigung der Piagetschen Entwicklungspsychologie	318
TRANSIER, R.	
Mathematikunterricht im Berufskolleg zum Erwerb der Fachhochschulreife	322
TREIBER, D.	
Zum Verlauf von Funktionsgraphen in der Nähe von Extrempunkten, Wendepunkten und Punkten waagerechter Tangente	326
VOIGT, J.	
Schülerroutinen im alltäglichen fragend-entwickelnden Mathematikunterricht	330
VOLK, D.	
Die "Richtlinien" den Richtlinien gemäß machen!	334
VOLKERT, K.	
"Die Wurzel aus -1 gibt es nicht!" - einige von der Begriffsgeschichte angeregte Überlegungen zu einer problematischen Schüleraussage	338
WACHSMUTH, I.	
Computersimulationen zur Erklärung instabiler Verhaltens von Schulkindern in mathematischen Anwendungssituationen	342
WAGEMANN, E.	
Kritische Anmerkungen zur Übung im Mathematikunterricht	346
WASCHTO, K.-G.	
Mathematiklehrausbildung in der 2. Ausbildungsphase mit Lehramtsanwärtern ohne Mathematikstudium	350
WEIDIG, I.	
Geometrieunterricht und Karogitter - Möglichkeiten der Erfolgsverbesserung	354
WERNER, W.	
Schüler arbeiten mit dem Computer	358
WILLE, F.	
"Der Volkstanz des kleinen Fermat belastet die Staatskasse nur wenig." - Über mathematische Erzählungen	362

WYNANDS, A.	
Informatik oder Computer als Unterrichtsmedium in der Sekundarstufe I ?	366
ZIMMERMANN, B.	
Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülern. Bericht über ein Forschungsprojekt. Teil II: Evaluationsaspekte	370

Rudolf FRITSCH, München

Ein geometrisches Beispiel für die Macht und Ohnmacht des Differentialkalküls.

Zu den Aufgaben des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen gehört auch die Auslotung der Tragweite und Grenzen bestimmter mathematischer Methoden. Jedem Lehrer ist das bewußt, wenn er seine Schüler vor übertriebener Genauigkeit beim (Taschen-)Rechnen mit Dezimalbrüchen warnt. Hier möchte ich diese Zielsetzung einmal am Differentialkalkül demonstrieren. Von allem Beiwerk entkleidet handelt es sich dabei um die Diskussion einer Schar von Arcus-Funktionen wie sie etwa in den Aufgaben des bayerischen Zentralabiturs [3] verlangt wird. Das dürre Gerippe kann aber ganz attraktiv eingepackt werden und gibt für den Unterricht mehr her als nur eine Kurvendiskussion. Es ist - unter bewußt mißbräuchlicher Verwendung eines modischen didaktischen Terminus - ein interessantes Unterrichtsprojekt, bei dem verschiedene Gebiete der Mathematik zur Anwendung kommen, neben dem Titelhelden Differentialkalkül: Elementargeometrie, Trigonometrie, eventuell sogar sphärische Trigonometrie, Stereometrie und algebraische Gleichungen. Der reinen Lehre eines Projekts widerspricht nur, daß die Motivation nicht von irgendwelchen Anwendungen auf der grünen Wiese herrührt, sondern innermathematisch begründet ist. Sie besteht in einer simplen Beobachtung. Das Prinzip der Analogiebildung führt vom Winkelsummensatz für ebene Polygone zu der Suche nach einem entsprechenden Satz für 3-dimensionale Polyeder. In erster Linie wird man dabei die Kantenwinkel betrachten, d.h. die Winkel, unter denen zwei Seitenflächen eines Polyeders gegeneinander geneigt sind, und den ersten Gegenstand der Untersuchung bildet die dreidimensionale Verallgemeinerung des Dreiecks: das Tetraeder, d.h. die dreiseitige Pyramide. Auch hier wird man mit einem einfachen Fall anfangen, der regulären dreiseitigen Pyramide, deren Basis ein gleichseitiges Dreieck ist und deren Spitze auf dem Mittellot zur Basis liegt. Halten wir die Basis fest, so

ergibt sich für die Kantenwinkelsumme Σ als Funktion der Höhe h : bei $h \rightarrow 0$ verschwinden auch die drei Winkel an den Kanten der Basis, während die drei Seitendreiecke gegeneinander um fast 180° geneigt sind, d.h. $\Sigma \rightarrow 540^\circ$; bei $h \rightarrow \infty$ wachsen die Winkel an der Basis gegen 90° während die Neigung der Seitendreiecke gegeneinander auf die entsprechenden Winkel des Grunddreiecks, d.h. 60° , fällt, also $\Sigma \rightarrow 3 \cdot 90^\circ + 3 \cdot 60^\circ = 450^\circ$. Bei stetiger Veränderung von h , von 0 bis ∞ , kommen wir auch zum regulären Tetraeder, zu dem Tetraeder, dessen Kanten alle gleichlang sind, und berechnen in diesem Fall elementar $\Sigma \approx 423^\circ 10'$. Dieser Wert liegt außerhalb des durch die angegebenen Grenzwerte bestimmten Intervalls! Das ermuntert dazu, die Kantenwinkelsumme Σ zumindest einiger leicht beschreibbarer Polyeder genauer zu untersuchen und um einerseits nicht ganz trivial, andererseits aber im Bereich des schulisch Möglichen zu bleiben, bietet sich die Kantenwinkelsumme regulärer Pyramiden an. Der mathematische Sachverhalt ist in [1] ausführlich dargelegt. Es geht um die Diskussion der Kurveschar.

$$\sigma = \sigma_n(h) = 180^\circ - \arcsin h \cdot \frac{s \cos \alpha + \cos \beta}{(s + \cos \beta) \sqrt{s^2 - \cos^2 \beta}},$$

wobei den Variablen folgende geometrische Bedeutung zukommt:

$\sigma = \varphi + \psi$, wobei φ den Winkel bezeichnet, den ein Seitendreieck der Pyramide mit der Basis einschließt, und ψ den Winkel, unter den zwei Seitendreiecke gegeneinander geneigt sind; die Regularität liefert dann $\Sigma = n(\varphi + \psi)$, wobei n die Anzahl der Seiten der Pyramide angibt;

h : die Höhe der Pyramide;

$s = \sqrt{h^2 + 1}$: die Länge der Seitenkanten der Pyramide (da Winkel unter Ähnlichkeitstransformationen invariant sind, kann angenommen werden, daß der Umkreis der Basis den Radius 1 hat);

$\alpha = 2\beta = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$: Winkel, den zwei aneinanderstoßende Seiten der Basis miteinander bilden.

Nun die Diskussion:

1) "Nullstellen". Sinnvoll ist die Frage: Wann ist $s \cos \alpha + \cos \beta = 0$? Das ist nur für $n = 5$, $h = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ der Fall. Man suche und finde die entsprechende Pyramide in einem regulären Ikosaeder!

2) Minima bei $s = 2\cos\beta$. Die Größe $b = 2\cos\beta$ beschreibt die Länge einer Seite der Basis. Die regulären Pyramiden mit minimaler Kantenwinkelsumme sind also genau die Pyramiden, bei denen alle Kanten gleich lang sind: das reguläre Tetraeder, das halbe Oktaeder und die Kappe des Ikosaeders. Für $n \geq 6$ sind σ und Σ monoton wachsende Funktion von h .

Soweit reicht die Macht des Differentialkalküls.

3) Wendepunkte? Formal verschwinden die Ableitungen bei

$$s^3 - 3s^2 \cos\beta + \cos^3\beta = 0$$

Das ergibt für den Unterricht die Möglichkeit, die Lösung von Polynomgleichungen 3. Grades in trigonometrischen Funktionen zu diskutieren. Man erhält

$$s = \cos\beta (1 + 2\sin\gamma), \quad \gamma \in \{70^\circ, 190^\circ, 310^\circ\}.$$

Die Bedingung $s > 1$ impliziert $\gamma = 70^\circ$, $3 \leq n \leq 8$.

Damit kommt man zu folgender Liste.

n	h_n	$\sigma_n(h_n)$
3	2,284	132°5'45,1"
4	1,774	166°8'46,7"
5	1,365	178°35'57,6"
6	1,036	184°59'17,4"
7	0,749	187°31'46"
8	0,463	186°52'10,1"

$(\sigma_n(h_n))$ hat als Funktion von $n \in \mathbb{R}$ ein Maximum an der Stelle $n = 180^\circ : (90 - \arccos \sqrt{\sin 70^\circ + \cos 140^\circ}) \approx 7,3$ mit einem Wert von rund $187^\circ 40' 37''$.

Eine merkwürdige Liste! Hat sie eine geometrische Bedeutung? Nein! Die Lage der Wendepunkte ist nämlich parameterabhängig. In den vorangehenden Berechnungen wurden die zu untersuchenden Winkel willkürlich auf den Parameter h bezogen. Wählt man s als unabhängigen Parameter, so erhält man für die Wendestellen die polynomiale Gleichung 4. Grades:

$$8s^4 - 12bs^3 - 4s^2 + b(b^2 + 8)s - b^2 = 0$$

die andere Nullstellen hat als die vorherige Gleichung 3. Grades! Das Phänomen läßt sich leicht erklären: Führt man irgendeine Parametertransformation durch, d.h. betrachtet man h als differenzierbare Funktion einer in einem geeigneten Bereich definierten Variablen t mit $h'(t) > 0$ für alle t ,

so gilt einerseits $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{dh} \cdot h'$, was zeigt, daß $\frac{d\sigma}{dt}$ und $\frac{d\sigma}{dh}$ als Funktionen von h die gleichen Nullstellen haben. Das ist geometrisch klar: Die Ähnlichkeitsklassen regulärer Pyramiden mit minimaler Kantenwinkelsumme sind wohldefiniert! Andererseits berechnet man

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{d^2\sigma}{dh^2} \cdot (h')^2 + \frac{d\sigma}{dh} \cdot h'' ,$$

woraus folgt, daß $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$ und $\frac{d^2\sigma}{dh^2}$ als Funktionen von t im allgemeinen verschiedene Nullstellen haben.

Die Untersuchung der 2.Ableitung bringt also nichts, der Kalkül hat keine Macht.

Zur Abrundung des Themas im Unterricht sollte man auf die in der Motivation gestellte Frage nach einem Winkelsummensatz für konvexe Polyeder zurückkommen und die Formel [2]

$$2\Sigma - \Omega = 2(f-2)\pi$$

herleiten, in der Ω die Summe der an den Ecken des Polyeders gebildeten Raumwinkel und f die Anzahl der Seitenflächen des Polyeders bezeichnet. Die Formel stammt für Tetraeder vom Abbé de Gua (1783) und allgemein von Brianchon (1837).

Literatur

- [1] R.Fritsch, *Zur Kantenwinkelsumme der regulären Pyramiden*, Elemente der Mathematik 40, Heft 3(1985)
- [2] H.Hopf, *Über die Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik im Rahmen der elementaren Geometrie*, Mathematisch - Physikalische Semesterberichte 3, 16-29(1953)
- [3] A.Walther, *Arcusfunktionen (ein Trainingskurs für das Mathematik-Abitur)*, Bayerischer Schulbuch-Verlag München 1979