Jahrgang 39 · 1986 · Heft 1–8

MNU

Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht

FERD. DÜMMLERS VERLAG
5300 BONN 1 · POSTFACH 1480

DER MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE UNTERRICHT

Organ des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V.

Schriftleitung:

Hauptschriftleitung: OStD a. D. HERBERT NOACK
Feldstr. 108, 2300 Kiel, (04 31) 8 55 96

Mathematik: StD GERT STARKE
Wittenbrook 14a, 2300 Kiel 17, (04 31) 36 23 12

Physik: MinR HERWIG KRÜGER
Untereisselner Str. 33, 2305 Heikendorf, (04 31) 24 15 38

Chemie: StD OTTHEINRICH DÜLL
Breidenbornerstr. 8, 6750 Kaiserslautern, (06 31) 9 28 83

Biologie: Prof. Dr. KARL-HEINZ BERCK
Institut für Biologiedidaktik der Universität Gießen, Karl-Glöckner-Str. 21 C, 6300 Gießen, (06 41) 8 14 62

Verlag:

FERD. DÜMMLERS VERLAGSBUCHHANDLUNG, Postfach 14 80; Kaiserstraße 31–37 (Dümmlerhaus), 5300 Bonn 1, Telefon 02 28/22 30 31. Satz, Druck und buchbinderische Verarbeitung: Boss-Druck, Kleve. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung des Verlages.

Anzeigen- und Beilagenverwaltung:

FERD. DÜMMLER's VERLAG, Postfach 14 80; Kaiserstraße 31–37 (Dümmlerhaus), **5300 BONN 1**, Telefon 02 28/22 30 31. Anzeigen- und Beilagenpreise gemäß Tarif Nr. 20 vom 1. 1. 1981. Für Stellengesuche und Behördenanzeigen gilt ein vergünstigter Tarif. Anzeigenschluß jeweils 4 Wochen vor Erscheinen.

Erscheinungsweise:

8 mal jährlich mit je 64 Seiten Umfang: Zum 15. Jan./1. März/15. April/1. Juni/15. Juli/1. Sept./15. Okt./1. Dez.

Bezugsbedingungen:

Pro Jahrgang 8 Hefte = 512 Seiten plus 8 Seiten Jahresinhaltsverzeichnis: DM 72,–, Einzelheft DM 12,–, zuzüglich Versandspesen. Hefte früherer Jahrgänge zu gleichem Preis teilweise noch lieferbar.

Vorzugspreis für Studenten gegen Studienbescheinigung DM 57,60 (nur direkt vom Verlag).

Für Mitglieder des Fördervereins ist der Bezugspreis im Vereinsbeitrag enthalten (siehe unten).

Einbanddecken: auch früherer Jahrgänge jeweils DM 9,80.

Eine Kündigung des Jahresabonnements kann nur anerkannt werden, wenn die schriftliche Kündigung am 1. Oktober für das folgende Jahr beim Verlag vorliegt.

Anschriftenänderungen bitte rechtzeitig dem Dümmler Verlag (nicht dem Geschäftsführer des Fördervereins und nicht der Post) mitteilen. Bei Anschriftenänderungen, die nicht mindestens 4 Wochen vor Erscheinen des nächsten Heftes Dümmler gemeldet sind, kann bei Verlust Ersatz nur gegen Berechnung gestellt werden, da die Post Zeitschriften weder nachsendet noch an die Verlage zurückgibt.

Besprechungsstücke: nur an die zuständigen Fachschriftleiter. Für unverlangte Sendungen besteht keine Verpflichtung zur Rezension bzw. zur Erwähnung, noch wird eine Haftung oder Rücksendungsverpflichtung übernommen. **Namentlich** gekennzeichnete Beiträge geben nicht unbedingt in jedem Falle die Meinung der Schriftleitung und des Verlages wieder.

Geschäftsjahr ist das Kalenderjahr. Der Eintritt kann jederzeit erfolgen. Der Beginn der Mitgliedschaft rechnet je nach Wunsch des Eintretenden vom 1. Januar oder 1. Juli an. Der Austritt ist nur zum 31. Dezember möglich und muß bis zum 1. Oktober dem Geschäftsführer gemeldet werden. Schulen und Hochschulinstitute können nicht Mitglied werden.

Der Jahresbeitrag beträgt DM 52,– (für Pensionäre DM 42,–); in ihm ist die Belieferung mit der Zeitschrift »Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht« eingeschlossen. Studenten und Studienreferendare, Assessoren, Hochschulassistenten und Junglehrer, die noch nicht die volle tarifliche Besoldung erhalten, bezahlen nur DM 32,– Jahresbeitrag, wenn sie darüber eine mit dem Stempel der Schulleitung oder der Hochschule versehene Bescheinigung dem Geschäftsführer einreichen.

Der Jahresbeitrag ist bis zum 1. Juni im ganzen zu zahlen. Später noch ausstehende Beträge werden zuzüglich der Kosten der Einziehung durch Postnachnahme erhoben.

An- und Abmeldungen sind nur an den Geschäftsführer zu richten. Adressenänderungen müssen spätestens 4 Wochen vor Erscheinen beim Dümmler Verlag vorliegen (alte und neue Adresse). Da die Post Zeitschriften nicht nachsendet, sondern vernichtet, kann verlagsseits Ersatz nur gegen Berechnung geleistet werden.

INHALTSVERZEICHNIS

ABHANDLUNGEN - BEITRÄGE ZUR SCHULPRAXIS

Mathematik

Physik

Chemie

Biologie

Allgemeines

MITTEILUNGEN

Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts

Aus den Landesverbänden

Allgemeines

Tagungen, Veranstaltungen

Kurzberichte, Hinweise

BESPRECHUNGEN

Zeitschriften

Bücher

Mathematik

Physik

Chemie

Biologie

Allgemeines

MNU Jahrgang 39 (1986). Hefteinteilung

Heft	erschienen	Seiten	Heft	erschienen	Seiten
1	15.1.	1- 64	5	15. 7.	257-320
2	01.3.	65-128	6	01. 9.	321-384
3	15.4.	129-192	7	15.10.	385-448
4	01.6.	193-256	8	01.12.	449-512

Aus der Schulpraxis · Für die Schulpraxis

Vorschläge für Raumgeometrie in der Mittelstufe[1]

Von RUDOLF FRITSCH

Mit 14 Abbildungen

Der systematische Geometrieunterricht beginnt in Klasse 7 mit einfachen raumgeometrischen Überlegungen und endet in Klasse 10 gelegentlich mit etwas Stereometrie oder darstellender Geometrie. Dazwischen liegt eine lange Periode mit fast nur ebenen Betrachtungen. Mit den entwickelten Methoden der ebenen Geometrie lassen sich aber auch einfache raumgeometrische Beziehungen herleiten, die gelegentlich in den Unterricht einfließen sollten. Eine besondere Rolle spielt dabei das (allgemeine) Tetraeder: es ist das räumliche Analogon des ebenen Dreiecks. Überhaupt führt der Gesichtspunkt der Analogie-Übertragung von der Ebene in den Raum zu anschaulichen und interessanten Ergebnissen.

[1] Vortrag auf der 76. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Braunschweig 1985.

1 Einleitung

Unbestritten gehört die Vermittlung eines räumlichen Anschauungsvermögens zu den wesentlichen Zielen der allgemeinbildenden Schule. Im Prinzip handelt es sich dabei um eine fächerübergreifende Aufgabe:

- Gegenstandsbeschreibungen übt man im Sprachunterricht,
- um die Darstellung räumlicher Figuren geht es häufig in der Kunst,
- der Geograph erklärt den Raum um unsere Erde.

Der wichtigste Platz dafür ist aber der Geometrie-Unterricht, und da geschieht meines Erachtens zu wenig. Gerade in der Mittelstufe, d. h. genauer in den Klassen 7 bis 10, beschränkt man sich zu großen Teilen auf die Planimetrie. Für diesen Bereich möchte ich Ihnen nun einige Vorschläge zur Anreicherung mit räumlichen Betrachtungen vortragen. Mir geht es dabei nicht um eine Änderung der Lehrpläne. Ich meine, daß die vorhandenen Curricula dem Lehrer genügend Freiraum lassen, gelegentlich von der Ebene abzuheben. Zur Vermeidung von Mißverständnissen möchte ich aber von vornherein betonen, daß das folgende Material nicht als geschlossenes Paket für den Unterricht gedacht ist; das würde wirklich zuviel Zeit in Anspruch nehmen. Etwas davon habe ich gerade selbst in einer 8. Klasse unterrichtet, und so ist mir klar, wie schnell, d. h. wie langsam, man vorwärts kommt. Ich biete Ihnen Anregungen, von denen die eine oder andere an passender Stelle in die Klasse eingebracht werden könnte. Daß das im Moment so wenig geschieht, liegt aber wohl auch daran, daß bedauerlicherweise in der Lehre an den Hochschulen diese doch sehr anschaulichen Dinge stark vernachlässigt werden.

2 Wie findet man Sätze der räumlichen Geometrie?

Nun aber zur Sache: Nach einer propädeutischen Raumlehre bis einschließlich Klasse 6, in der einfache Flächen und Körper behandelt werden, beginnt üblicherweise in der 7. Jahrgangsstufe der systematische Geometrie-Unterricht. Der Einstieg erfolgt durchaus über räumliche Betrachtungen, danach kommt man aber relativ schnell zur Dreiecks- und Viereckslehre, zum Kreis und zur ebenen Trigonometrie. Die Jahre vergehen bis Klasse 10, wo je nach Lehrplan noch etwas Stereometrie oder darstellende Geometrie, vielleicht auch sphärische Trigonometrie, möglicherweise aber gar nichts Räumliches mehr behandelt wird.

Jedoch man beginnt mit den Inzidenzen von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum; man klärt die möglichen Lagen von zwei Geraden, von einer Geraden und einer Ebene zueinander. Begriffe wie Parallelität und Orthogonalität werden durchaus unter räumlichen Gesichtspunkten eingeführt. Hier will ich gleich eine simple, aber für meine Absichten sehr nützliche Ergänzung zum Üblichen erwähnen, die H. Tietz in Hannover einmal explizit formuliert hat [11]. Es handelt sich um den kleinen Satz:

Vier Geraden, die sich paarweise schneiden, liegen in einer Ebene oder gehen durch einen Punkt.

Diese Tatsache ist leicht einzusehen. Wir nehmen uns zwei dieser vier Geraden her; sie schneiden sich und bestimmen eine Ebene E (Abb. 1). Gehen die beiden anderen Geraden durch den Schnittpunkt, so sind wir fertig. Andernfalls haben wir eine dritte Gerade, die beide schneidet, aber nicht durch den Schnittpunkt geht: Sie hat demnach mit der Ebene E mindestens zwei verschiedene Punkte gemeinsam, liegt also ganz

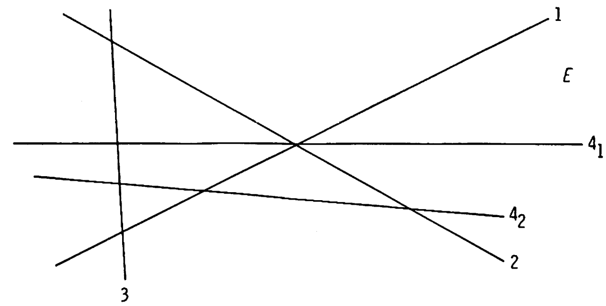

Abb. 1

in E. Die vierte Gerade, die die drei anderen schneidet, muß dieses in mindestens zwei verschiedenen Punkten der Ebene E tun – es können auch drei verschiedene Schnittpunkte auftreten – und gehört deshalb auch ganz zu E.

Bevor ich mit der Mathematik fortfahre, will ich Ihnen noch das Fabrikgeheimnis verraten, das zu den folgenden Einsichten führt. Ich bin nämlich überzeugt, daß diese eigentlich metamathematischen Überlegungen den Lehrer, aber auch die Schüler in die Lage versetzen, Sätze und Beweise der räumlichen Geometrie selbst zu finden, die zwar nicht absolut neu sind, aber nicht in den üblichen Lehrbüchern stehen und durch den Reiz der eigenen Entdeckung zu besonders positiven mathematischen Erfahrungen führen. Es handelt sich

1. um den Gedanken, ebene Erkenntnisse auf dem Wege der Analogiebildung in den Raum zu übertragen, und
2. um die Beachtung der Tatsache, daß – im Gegensatz zur Situation in der Ebene – räumliche Objekte der Dimension 1, das sind Geraden und Kurven und Stücke von solchen, grundsätzlich verschieden sind von Objekten der Kodimension 1, das sind Ebenen und krumme Flächen und Stücke von solchen.

Ein einfaches Beispiel dafür bildet der Begriff des Lotes (Abb. 2):

In einer Ebene gibt es zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt genau eine Lotgerade.

Im Raum gibt es zu einer gegebenen Ebene durch einen gegebenen Punkt genau eine Lotgerade,

zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt genau eine Lotebene.

Wenn wir diesen Gedanken weiterverfolgen, kommen wir fast unmittelbar zum Begriff der Mittelsenkrechten bzw. des Mittelpunktes (Abb. 3). In der Ebene haben wir die Mittelsenkrechte einer Strecke, eine Gerade, als den geometrischen Ort aller Punkte, die von den Endpunkten der Strecke, zwei voneinander verschiedenen Punkten, gleiche Abstände haben, und den

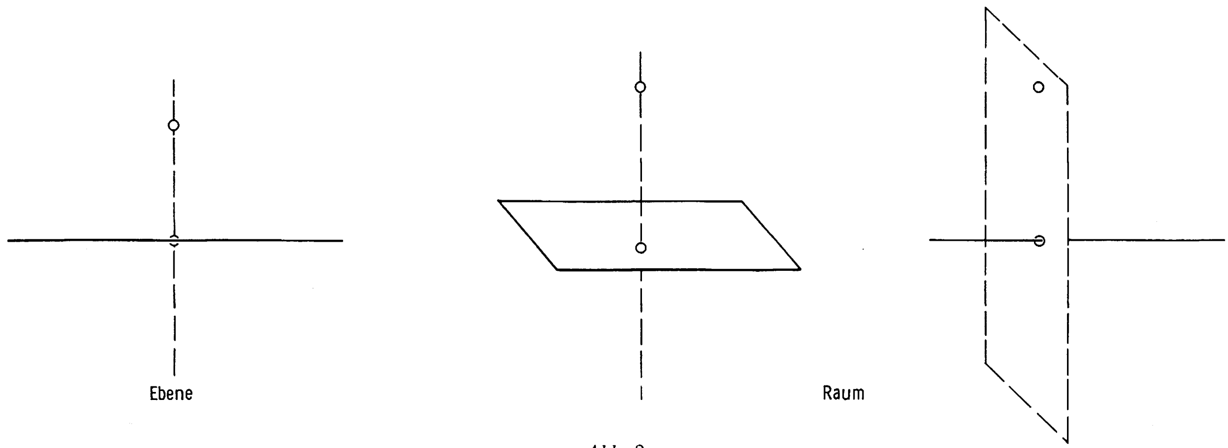

Abb. 2

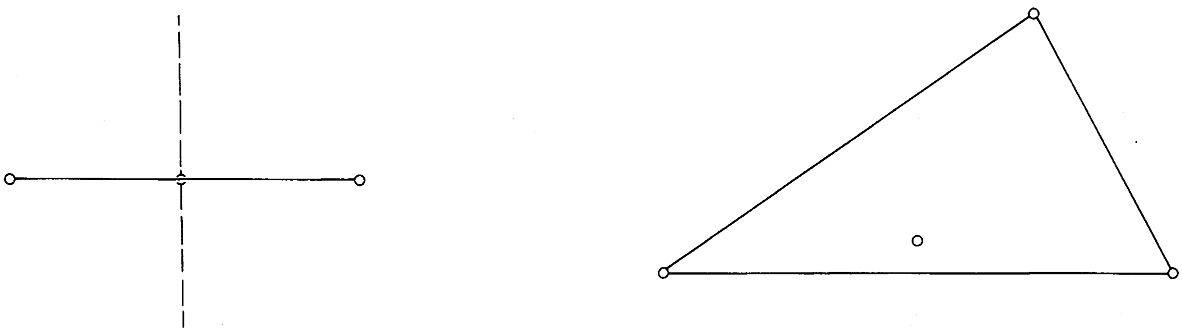

Abb. 3

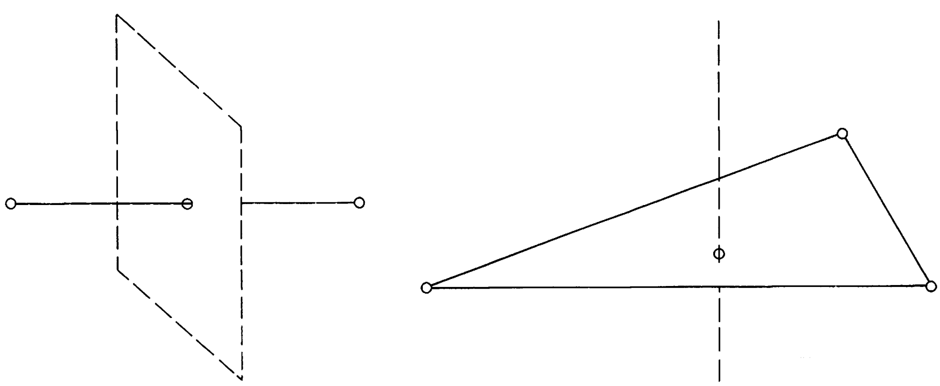

Abb. 4

Umkreis-Mittelpunkt eines Dreiecks, das ist der eindeutig bestimmte Punkt, der von den drei Ecken des Dreiecks, drei Punkten, die nicht in einer Geraden liegen, gleiche Abstände hat.

Im Raum finden wir zunächst die mittelsenkrechte Ebene zu einer durch zwei verschiedene Punkte bestimmten Strecke und das Mittellot zu einem durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte bestimmten Dreieck: Zu jeder der drei Seiten des Dreiecks haben wir eine mittelsenkrechte Ebene, und diese drei Ebenen schneiden sich in einer Geraden (Abb. 4). Aber jetzt liegt noch ein nächster Schritt auf der Hand. Im Raum läßt sich die Reihe »zwei verschiedene Punkte«, »drei Punkte nicht auf einer Geraden« noch um ein Glied verlängern, nämlich »vier Punkte nicht in einer Ebene«. Das von vier solchen Punkten bestimmte räumliche Gebilde ist ein neues interessantes geometrisches Objekt, das dreidimensionale Analogon des ebenen Dreiecks, das Tetraeder! Bis zur »Tetrapak-Affäre« war unseren Schülern dieser Körper als Milch-,

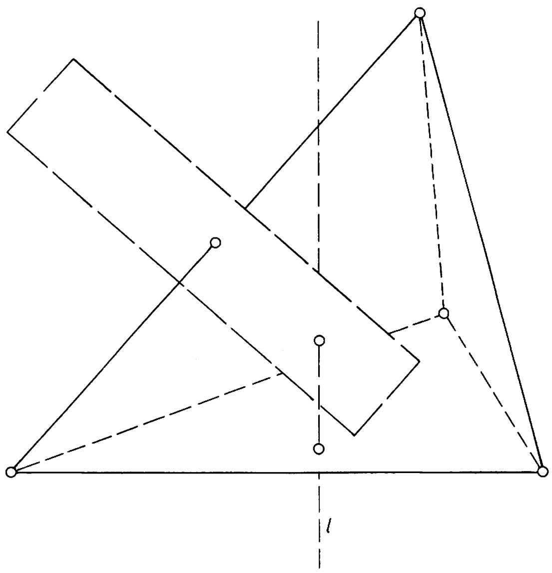

Abb. 5

Kakao- und Limonadenbehältnis wohlbekannt, aber auch jetzt gibt es mit einer anschaulichen Vorstellung keine Schwierigkeiten: allerdings dürfte die Bezeichnung als dreiseitige Pyramide geläufiger sein.

Bevor wir uns dem systematischen Studium des Tetraeders zuwenden, das auf wissenschaftlicher Ebene mit einer 1775 veröffentlichten Arbeit von Lagrange (1736–1813) begann [8], sollten wir erst die hinführende Idee abschließen. Sie fordert ja nun einen Punkt, der von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten gleiche Abstände hat. Dessen Existenz ergibt sich einfach: Wir nehmen drei der vier Punkte, sie können nicht auf einer Geraden liegen und bestimmen deshalb ein Dreieck; dessen Mittellot l ist der geometrische Ort aller Punkte, die von ihnen gleiche Abstände haben. Die mittelsenkrechte Ebene zu einem dieser drei und dem vierten Punkt kann nicht parallel zur Geraden l sein, wird also in genau einem Punkt von l geschnitten: das ist der gesuchte Punkt (Abb. 5). Etwas systemkonformer, aber vielleicht umständlicher ist die folgende Argumentation: Je drei der vier gegebenen Punkte bestimmen ein Mittellot. Es gibt vier solcher Mittellote, sie liegen sicher nicht in einer Ebene. Aber je zwei dieser Mittellote liegen in einer Ebene, der mittelsenkrechten Ebene zur gemeinsamen Kante der zugehörigen Dreiecke. Keine zwei der Mittellote können aber parallel sein, sonst lägen die vier gegebenen Punkte ja in einer Ebene. Also schneiden sich je zwei dieser Mittellote, und damit gehen alle vier nach dem eingangs genannten Sätzchen durch einen Punkt.

3 Die Eulersche Gerade im Tetraeder

Nun kann man ein Stück weit eine Tetraederlehre entwickeln, die sich an den vertrauten Stoffen der Dreieckslehre orientiert. Den drei Ecken eines Dreiecks entsprechen dabei die vier Ecken eines Tetraeders. Der Begriff der Dreiecksseite zerfällt aber wieder: den drei Seiten eines Dreiecks entsprechen einerseits sechs Kanten, die drei Paare von Gegenkanten bilden, und andererseits vier Seiten(dreiecke) eines Tetraeders.

Hierbei sollte man erklären, daß das Wort »Tetraeder« zu deutsch »Vierflächner« bedeutet, also die Terminologie auf die vier Seiten und nicht auf die vier Ecken des Tetraeders Bezug nimmt, was sich auch aus den Benennungen der platonischen Körper ergibt. Bei einem direkten Einstieg in die Geometrie des Tetraeders anhand von Modellen habe ich auch gute Erfahrungen damit gemacht, zunächst das Tetraeder seinem Namen gemäß als einen von vier ebenen Dreiecken begrenzten Körper zu definieren. Beim Abzählen von Kanten und Ecken kamen wir dann auf die Tatsache, daß vier nicht in einer Ebene liegende Punkte immer genau ein Tetraeder bestimmen. Erst von da aus haben wir die Analogie zum Dreieck hergestellt; aber nun gelang es sogar einer sehr schwachen Schülerin, auch die Strecke noch in das System miteinzubeziehen.

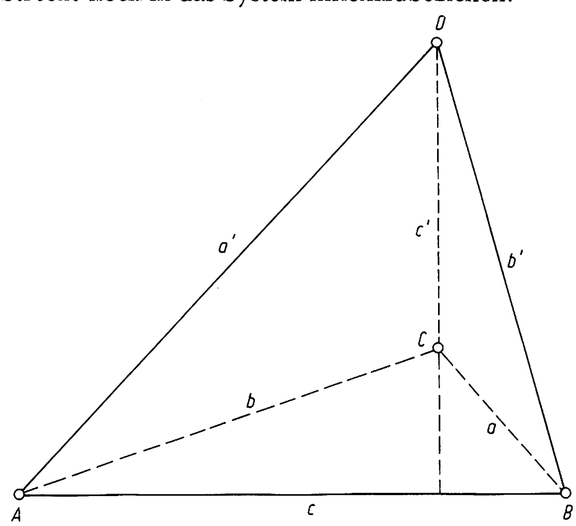

Abb. 6

Günstig ist es, die Ecken eines Tetraeders (Abb. 6) analog zum Dreieck A, B, C, D zu nennen; die Kanten, die Seiten des Dreiecks ABC sind in üblicher Weise a, b, c und die jeweiligen Gegenkanten a', b', c'. (Man muß natürlich darauf hinweisen, daß im allgemeinen keine der vier Seiten eines Tetraeders ausgezeichnet ist, daß es aber für konkrete Berechnungen oft bequem ist, eine Seite als Basis und die gegenüberliegende Ecke als Spitze anzusehen, was der Vorstellung von der dreiseitigen Pyramide entspricht.)

Analog zu Um-, In- und Ankreisen hat man Um-, In- und Ankugeln beim Tetraeder, aber darüber hinaus noch etwas Besonderes: die Kantenkugel. Sie existiert nicht immer, sondern dann und nur dann, wenn die Längensummen der drei Gegenkantenpaare einander gleich sind, d. h.

$$a + a' = b + b' = c + c'.$$

Einen für die Mittelstufe geeigneten Beweis für diese Aussage hat H. Tietz mit Hilfe seines Sätzchens angegeben [11]. Der Schlüssel dazu liegt in der simplen Beobachtung, daß eine Kantenkugel die Seiten des Tetraeders in den Inkreisen schneidet. Bemerkenswert fand ich im Unterricht, daß die Schüler, die gerade Kreise am Dreieck und am ebenen Viereck behandelt hatten, auf die direkte Frage »Was schneidet die Kantenkugel aus einer Seite des Tetraeders aus?« keine Antwort gegeben haben. Besser wären wohl zwei Fragen gewesen:

1. Wie sieht der Durchschnitt einer Kugel mit einer Ebene aus (deren Abstand vom Mittelpunkt der Kugel kleiner ist als der Radius)?
2. Welcher Kreis in bezug auf das Seitendreieck ergibt sich im speziellen Fall?

Weiter möchte ich darauf aber nicht eingehen; »Merkwürdige Kugeln am Tetraeder« habe ich ausführlich in [6] behandelt.

Schwerer zu finden ist die Verallgemeinerung der Eulerschen Geraden auf Tetraeder, die Monge (1746–1818) im Jahre 1811 angegeben hat [9]. Lassen Sie mich deshalb dies etwas genauer ausführen. Ich finde es allerdings erschreckend, wie viele Mathematikstudenten heute erklären, in der Schule nie etwas von der Eulerschen Geraden des Dreiecks gehört zu haben. Ich schlage vor, wenn schon nicht die Eulersche Gerade des Tetraeders, so doch wenigstens die des Dreiecks im Unterricht anzusprechen (Abb. 7). Sie ist ja der Ausdruck der merkwürdigen Tatsache, daß in einem Dreieck Umkreismittelpunkt, Schwerpunkt und Höhenschnittpunkt immer auf einer Geraden liegen, und zwar so, daß der Schwerpunkt die Verbindungsstrecke der beiden anderen Punkte im Verhältnis 1 : 2 teilt. (Dies folgt einfach daraus, daß die zentrische Streckung mit dem Schwerpunkt als Zentrum und dem Faktor -2 die Seitenmitten des Dreiecks in die Ecken und damit die Mittelsenkrechten in die Höhen abbildet.)

Zunächst kommt es darauf an, drei entsprechende Punkte in einem Tetraeder zu finden. Für den Umkreismittelpunkt ist das klar: Wir haben ja vorhin schon den Umkugelmittelpunkt M eines Tetraeders bestimmt. Der Schwerpunkt im Dreieck ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und teilt jede von ihnen im Verhältnis 1 : 2. Im Tetraeder finden wir einerseits die kantenhalbierenden Ebenen, die sechs Ebenen, die bestimmt sind durch eine Kante und den Mittelpunkt der Gegenkante, und andererseits die vier Schwerlinien, die die Ecken mit den Schwerpunkten der Ge-

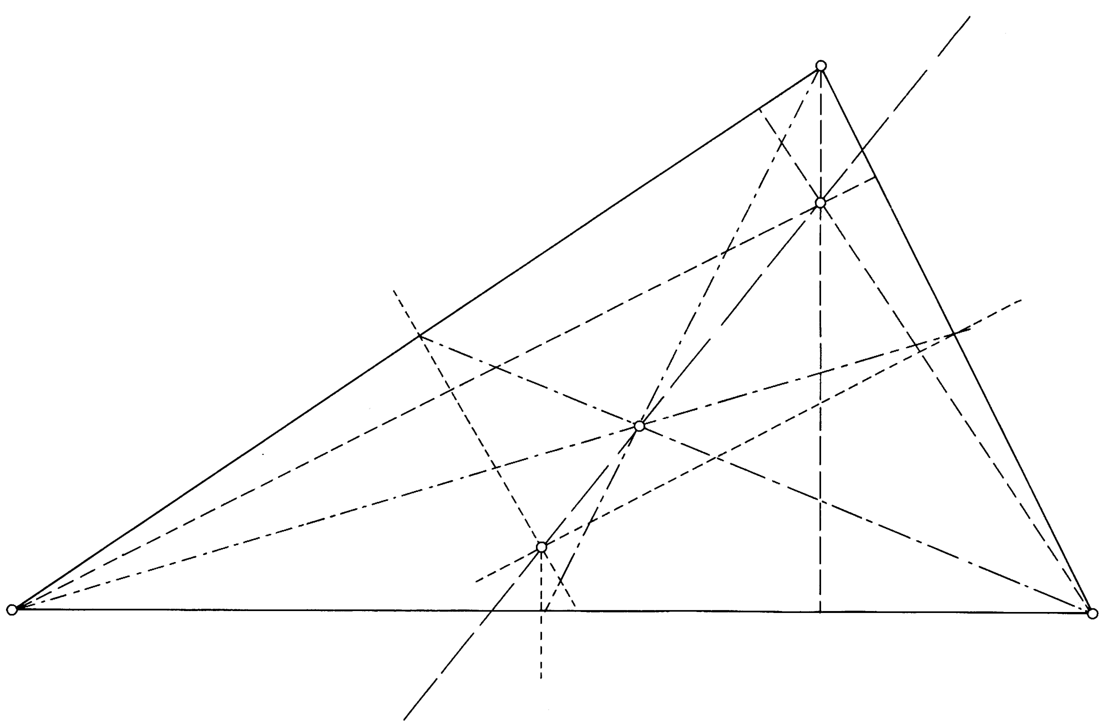

Abb. 7

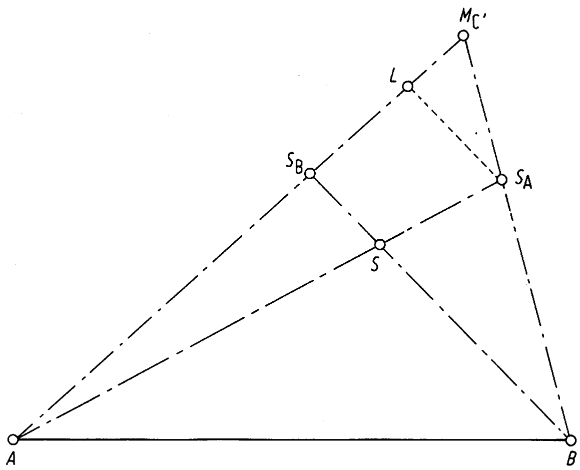

Abb. 8

genseiten verbinden. Jede kantenhalbierende Ebene schneidet aus dem Tetraeder ein Dreieck aus. Betrachten wir nun einmal ein spezielles dieser Dreiecke (Abb. 8), das Dreieck $ABM_{c'}$, wobei $M_{c'}$ natürlich den Mittelpunkt der Kante c' bezeichnet. Die Seite $AM_{c'}$ ist Seitenhalbierende des Dreiecks ACD und enthält den Schwerpunkt S_B dieses Dreiecks, der sie im Verhältnis 2 : 1 teilt. Also finden wir im Dreieck $ABM_{c'}$ die Schwerlinie BS_B des Tetraeders und ebenso die Schwerlinie AS_A: Wir sehen, daß diese beiden Schwerlinien sich in einem Punkt S schneiden. Eine Hilfslinie klärt den Sachverhalt vollständig: Wir zeichnen die Parallele zur Schwerlinie BS_B durch den Punkt S_A. Ihr Schnittpunkt L mit der Seite $AM_{c'}$ teilt die Strecke $S_BM_{c'}$ im Verhältnis 2:1, und damit teilt der Punkt S_B die Strecke AL im Verhältnis 6 : 2. Dieses Verhältnis überträgt sich auf die Schwerlinie AS_A, die also durch den Punkt S im Verhältnis 3 : 1 geteilt wird. Analog teilen auch die beiden übrigen Schwerlinien des Tetraeders die Schwerlinie AS_A im Verhältnis 3 : 1. Also gehen alle Schwerlinien durch den Punkt S, den Schwerpunkt des Tetraeders! Wir bemerken noch, daß der Schwerpunkt auch den Durchschnitt der sechs kantenhalbierenden Ebenen des Tetraeders bildet.

Aber wie weiter? Natürlich kann man von einer Ecke aus das Lot auf die Gegenseite fällen. So erhalten wir vier Raumhöhen. Aber einfache Modelle zeigen, daß diese Lote windschief aneinander vorbeilaufen können! Es ist leicht zu zeigen – ich verweise dazu auf die Bemerkung von H. Tietz [10] –, daß diese Raumhöhen sich genau dann in einem Punkt schneiden, wenn Gegenkanten zueinander orthogonal sind. Etwas Vektorrechnung unter Benutzung des inneren Produkts führt dann noch auf die äquivalente algebraische Bedingung:

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2.$$

Das geht also nicht, jedenfalls nicht im allgemeinen! Aber wir haben ja noch die zweite Möglichkeit: Höhenebenen. Das war die Idee von Monge. Wir betrachten die sechs Lotebenen zu den Kanten, die den Mittelpunkt der jeweiligen Gegenkante enthalten. Für jede Kante x bezeichne h_x die entsprechende Lotebene. Eine gute Vorstellung von dieser Situation liefert die orthogonale Projektion des Tetraeders in die Ebene des Dreiecks ABC (Abb. 9). Es sei D' der Bildpunkt von D, also der Fußpunkt der Raumhöhe durch D. Dann sind die Bildpunkte $M'_{a'}$, $M'_{b'}$, $M'_{c'}$ der Kantenmittelpunkte $M_{a'}$, $M_{b'}$, $M_{c'}$ die Mittelpunkte der Strecken AD', BD', CD'. Die Ebenen h_a, h_b, h_c werden in zu a bzw. b bzw. c senkrechte Geraden h'_a, h'_b, h'_c durch die Punkte $M'_{a'}$, $M'_{b'}$, $M'_{c'}$ projiziert. Der Kernpunkt liegt nun darin, daß sich ja das Dreieck $M'_{a'}M'_{b'}M'_{c'}$ aus dem Dreieck ABC

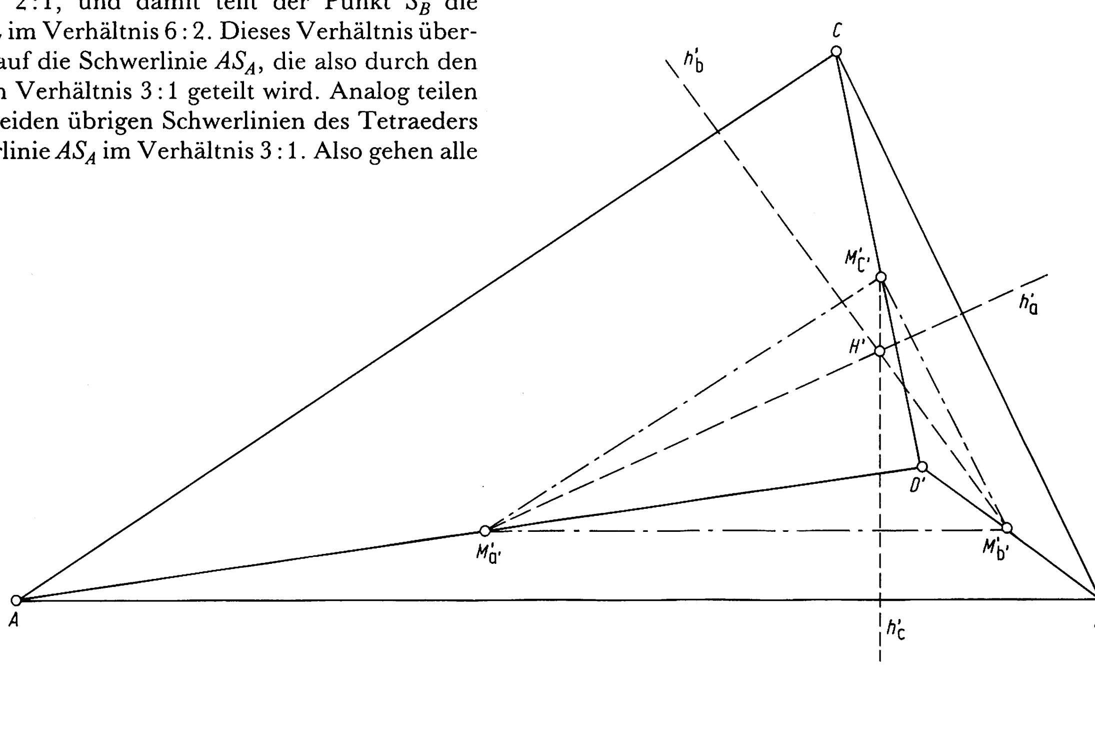

Abb. 9

durch zentrische Streckung mit Zentrum D' und Faktor $\frac{1}{2}$ ergibt, daß also seine Seiten parallel zu den Seiten des Dreiecks ABC sind. Damit sind aber die Geraden h'_a, h'_b, h'_c die Höhen des Dreiecks $M'_aM'_bM'_c$ und schneiden sich in einem Punkt H', dem Höhenschnittpunkt! Nun folgt aber, daß die Ebenen h_a, h_b, h_c selbst eine Gerade gemeinsam haben, die Lotgerade l_D zur Projektionsebene durch den Punkt H'. Analog finden wir ausgezeichnete Lotgeraden l_A, l_B, l_C zu den Trägerebenen der anderen Seiten des Tetraeders. Die vier so erhaltenen Geraden sollte man als Höhen zweiter Art bezeichnen. Sie liegen offensichtlich nicht in einer Ebene, und keine zwei von ihnen sind parallel. Je zwei liegen aber in einer der Ebenen h_x, z. B. liegen l_D und l_C in der Ebene h_c. Also schneiden sich je zwei dieser Höhen zweiter Art, und nach dem Satz von Tietz gehen alle vier durch einen Punkt H. Dieser Punkt wird in der Literatur als »Punkt von Monge« bezeichnet, verdient aber in unserem Zusammenhang durchaus den Namen Höhenschnittpunkt des Tetraeders. Es ist auch leicht zu sehen, daß Höhen erster und zweiter Art zusammenfallen, wenn sich die Raumhöhen (Höhen erster Art) in einem Punkt schneiden.

Nun wird behauptet, daß die so definierten merkwürdigen Punkte M, S und H des Tetraeders auf einer Geraden liegen. Um das einzusehen, hat mein Student B. Bannes in seiner Zulassungsarbeit für das Lehramt an Realschulen eine einfache Methode angegeben. Es genügt ja offensichtlich nachzuweisen, daß die orthogonalen Projektionen der drei Punkte in die Trägerebenen der Seiten des Tetraeders jeweils auf einer Geraden liegen. Dazu betrachten wir wieder die Projektion in die Ebene des Dreiecks ABC (Abb. 10). Zunächst bemerken wir, daß H' einerseits durch die vorhin beschriebene zentrische Streckung aus dem Höhenschnittpunkt H_D des Dreiecks ABC erhalten werden kann und damit die Strecke $D'H_D$ im Verhältnis 1:1 teilt, andererseits aber bereits das Bild von H unter der orthogonalen Projektion darstellt. Da diese Projektion Teilverhältnisse erhält, folgt außerdem, daß das Bild S' des Schwerpunkts S die Strecke $D'S_D$ im Verhältnis 3:1 teilt. Nun gibt es wieder eine geeignete Hilfslinie: Wir ziehen die Parallele zur Geraden $S'H'$ durch den Punkt S_D; sie schneide die Gerade $D'H_D$ in dem Punkt K. Der Punkt H' teilt dann die Strecke $D'K$ auch im Verhältnis 3:1. Aber daraus folgt, daß der Punkt K die Strecke $H'H_D$ im Verhältnis 1:2 teilt. Dieses Verhältnis übertragen wir wieder auf die Gerade S_DH_D. Es folgt, daß der Punkt S_D die Verbindungsstrecke des Schnittpunkts der Geraden $S'H'$ und S_DH_D mit dem Punkt H_D ebenfalls im Verhältnis 1:2 teilt. Nach dem Satz über die Eulersche Gerade eines Dreiecks ist dann aber dieser Schnittpunkt gerade der Umkreismittelpunkt M_D des Dreiecks ABC, und dieser wiederum ist offensichtlich identisch mit der orthogonalen Projektion M' des Umkugelmittelpunktes M. Also liegen die Projektionen M', S', H' auf einer Geraden, was zu beweisen war. Aus der Figur lesen wir schließlich noch die folgenden Streckenverhältnisse ab:

$$S'H' : S_DK = 3:4, \quad M'H' : S_DK = 3:2.$$

Hieraus folgt, daß S' der Mittelpunkt der Strecke $M'H'$ ist. Also liegen die merkwürdigen Punkte M, S und H nicht nur auf einer Geraden, der Eulerschen Geraden des Tetraeders, sondern der Punkt S teilt auch die Strecke MH im festen Verhältnis 1:1! (Der Übergang vom Verhältnis 1:2 in der Ebene zum Verhältnis 1:1 wird nur verständlich, wenn man die ganzen Überlegungen n-dimensional durchführt, was mit Hilfe der linearen Algebra aus der Anfängervorlesung leicht möglich ist, aber natürlich über den hier gegebenen Rahmen weit hinausgeht. Das Teilverhältnis dieser drei Punkte in einem n-Simplex beträgt $(n-1):2$, vgl. [3].)

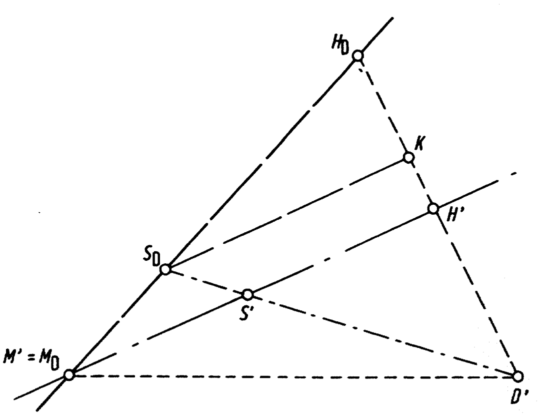

Abb. 10

Es gibt noch einen anderen Weg zur Eulerschen Geraden des Tetraeders, der analog zur Konstruktion im Dreieck verläuft. Er braucht jedoch eine kleine, aber auch für sich interessante Vorbereitung.

In einem Tetraeder halbiert der Schwerpunkt die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte eines jeden Gegenkantenpaares.

Um das einzusehen, betrachtet man wieder das Dreieck $ABM_{c'}$ und die darin liegenden Schwerlinien AS_A, BS_B mit ihrem Schnittpunkt S (Abb. 11). Als Hilfslinien benötigt man die Gerade $M_{c'}S$ und ihre Parallele dazu durch S_A. Erstere schneide die Kante AB in U, letztere in V. Aus der Figur liest man ab:

$$AU : UV = 3:1, \quad BU : UV = 3:1,$$

also $U = M_{c'}$, und

$$US : VS_A = 3:4, \quad UM_{c'} : VS_A = 3:2.$$

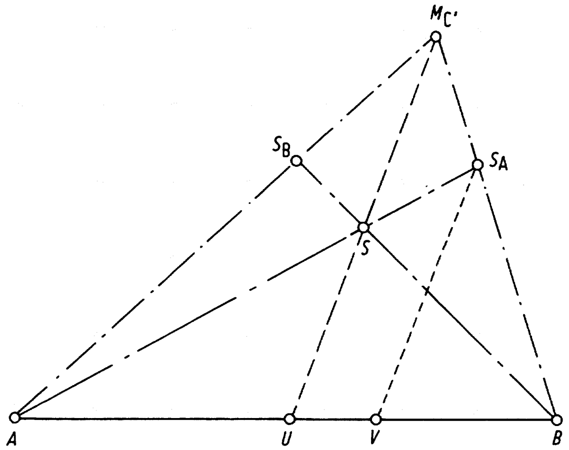

Abb. 11

Hieraus folgt, daß der Schwerpunkt S die Strecke $UM_{c'} = M_cM_{c'}$ halbiert.

Aus diesem Hilfssatz folgt nun aber sofort, daß die Spiegelung am Schwerpunkt S (zentrische Streckung mit Zentrum S und Faktor -1) die mittelsenkrechten Ebenen zu den Kanten in die Höhenebenen, die Mittellote zu den Seiten in die Höhen zweiter Art und den Umkugelmittelpunkt in den Punkt von Monge überführt, womit alles bewiesen ist.

4 Der dreidimensionale Satz des Pythagoras

Nach diesem größeren Block nun ein kleines Thema: der dreidimensionale Satz des Pythagoras.

Für die Seitenflächen F_A, F_B, F_C, F_D eines Tetraeders, bei dem die an der Spitze D zusammenstoßenden Seiten dort alle einen rechten Winkel aufweisen, gilt

$$F_A^2 + F_B^2 + F_C^2 = F_D^2.$$

Die Voraussetzung besagt

$$F_A = \frac{b'c'}{2},\quad F_B = \frac{c'a'}{2},\quad F_C = \frac{a'b'}{2}$$

und

$$a^2 = b'^2 + c'^2,\quad b^2 = c'^2 + a'^2,\quad c^2 = a'^2 + b'^2.$$

Daraus könnte man F_D^2 mit Hilfe der Heronischen Formel berechnen und auf die gewünschte Form bringen. Aber auch die Heronische Formel ist heutzutage fast aus dem Schulunterricht verschwunden, und das Einsetzen ist zugegebenermaßen nicht leicht. Der Satz läßt sich – mit einem Trick – auch einfacher begründen. Dazu stellen wir zur Abwechslung das Tetraeder einmal als Pyramide mit dem Dreieck ABD als Basis vor (Abb. 12). Wir bezeichnen mit h die zur Ecke C gehörige Höhe des nunmehr schrägliegenden Dreiecks ABC und mit h' ihre Projektion in die Basis: das ist die zur Ecke D gehörige Höhe der Basis. Damit berechnen wir

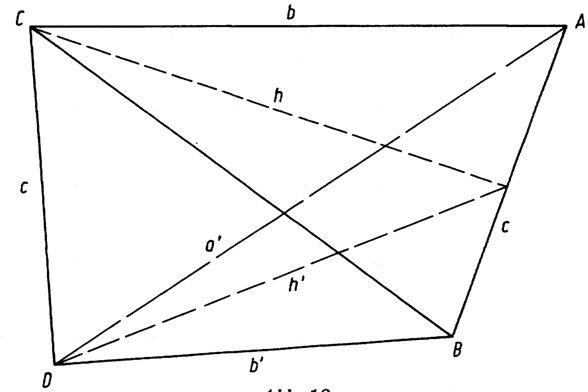

Abb. 12

$$F_C = \frac{h'c}{2} = \frac{a'b'}{2},$$

also $h' = \dfrac{a'b'}{c}$, und damit

$$h^2 = c'^2 + h'^2 = c'^2 + \frac{a'^2b'^2}{c^2},$$

woraus sich schließlich ergibt

$$F_D^2 = \frac{c^2h^2}{4} = \frac{c^2c'^2 + a'^2b'^2}{4} = \frac{b'^2c'^2}{4} + \frac{c'^2a'^2}{4} + \frac{a'^2b'^2}{4}.$$

Dieser Satz hat eine interessante Geschichte. Er wurde von zwei Franzosen am Ende des 18. Jahrhunderts als ihr geistiges Eigentum in Anspruch genommen, in [12] von dem Baron Tinseau d'Amondans (1748–1822), einem Schüler von Monge, der aber die Mathematik bald aufgab und sich ganz dem Kampf gegen die Revolution verschrieb, und in [7] von dem Abbé Gua de Malves (1712–1786), dem ideellen Begründer der Enzyclopédie française. Wie Buzengeiger (1771–1835) aber in einem Brief an seinen Schüler Karl Feuerbach (1800–1834) bemerkt, stammt der Satz in Wirklichkeit von dem Ulmer Rechenmeister Faulhaber (1580–1635), der ihn 1622 veröffentlichte [2] und dem auch Descartes' (1596–1650) Anteil an der Eulerschen Polyederformel zugeschrieben wird. Allerdings muß man zugeben, daß Tinseau eine etwas stärkere Aussage formuliert: *Das Quadrat eines ebenen Flächenstückes im Raum ist gleich der der Summe der Quadrate seiner Projektionen auf die Koordinatenebenen.*

5 Kantenwinkel und Dreiecks-Ungleichung im Tetraeder

Einen anderen Gegenstand, der umfangmäßig klein gehalten, aber auch beliebig ausgeweitet werden kann, bildet die Betrachtung der Kantenwinkel eines Tetraeders. Auch dazu gibt es Veröffentlichungen in den Jahren 1981 [5] und 1983 [1], so daß ich mich hier wieder kurz fassen darf. Man kann zwei Problemkreise angehen. Den einen bilden die möglichen Verteilungen spitzer, rechter und stumpfer Winkel, den anderen die Summe der Kantenwinkel. Ich sollte hier berichten, daß bei meinem Unterricht nach der Erläuterung der Analogie zwischen Tetraeder und Dreieck auf meine Frage, welche Dreieckssätze wohl auf ihre Übertragbarkeit geprüft werden könnten, spontan der Winkelsummensatz genannt wurde. Ich habe dann einige Grenzfälle besprochen und als Hausaufgabe unter anderem gestellt, die Tetraeder zu basteln, die man in zwei bestimmten Weisen aus einem Würfel mit der Kantenlänge 10 cm herausschneiden kann: Im ersten Fall sollten der Würfelmittelpunkt und drei in einer Seitenfläche liegende Ecken des Würfels die Ecken des Tetraeders bilden, im zweiten Fall der Würfelmittelpunkt, der Mittelpunkt einer Seitenfläche des Würfels und zwei nebeneinander liegende Ecken in dieser Seitenfläche. Ein Schüler hatte schon beim Herstellen bemerkt, daß der ganze Würfel aus 12 Tetraedern des ersten Typs zusammengesetzt werden kann, womit man die schwierigeren Kantenwinkel findet: Drei dieser Modelle, richtig zusammengefügt, ergeben einen Vollwinkel; also hat jeder der einzelnen Winkel das Maß 120°. So kamen wir in einem Fall auf eine Winkelsumme von 420° und im anderen auf 435°. Großes Erstaunen löste dann aber die einfach zu begründende Tatsache aus, daß trotzdem beim Tetraeder durch fünf Kantenwinkel der sechste bestimmt ist.

Zum Schluß möchte ich noch kurz das Thema »Dreiecksungleichungen« ansprechen. Was ich dazu in unserer Zeitschrift geschrieben habe [4], eignet sich fast nur für den Leistungskurs. Aber etwas läßt sich darüber auch in der Mittelstufe sagen. Sicher kann man die notwendige Bedingung an die Seitenflächen klarmachen: Die größte Seite, als Basis betrachtet, wird von den Projektionen der anderen Seiten überdeckt. Da sich aber solche Flächen bei orthogonalen Projektionen höchstens verkleinern, muß also die größte Seitenfläche kleiner sein als die Summe der drei anderen. Das entspricht der üblichen Dreiecksungleichung: die größte Dreiecksseite muß kleiner sein als die Summe der beiden anderen. (Natürlich kann es bei einem Tetraeder mehrere »größte« Seiten geben.) Aus vier Flächenmaßzahlen, die diese Bedingung erfüllen, ein Tetraeder mit entsprechenden Seitenflächen zu konstruieren, ist jedoch eine Aufgabe, für die ich keine Lösung ohne Benutzung der linearen Algebra höherer Klassen anbieten kann.

Wiederum kann man aber auch die Frage noch in einer anderen Weise stellen: Welche Bedingung müssen sechs Längenmaßzahlen erfüllen, damit sie als Kantenlängen eines Tetraeders auftreten können? Dies ist im allgemeinen noch schwieriger zu beantworten [4]. Es genügt jedenfalls nicht, daß je drei von ihnen, die sich zu einem Dreieck zusammenschließen

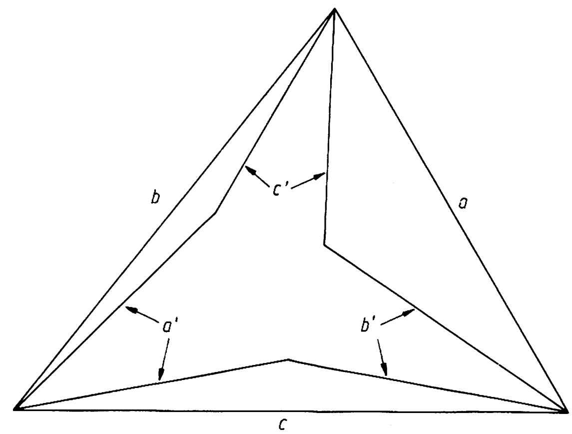

Abb. 13

sollen, die Dreiecksungleichung erfüllen. Das kann man leicht an einem Bild (Abb. 13) erläutern: Es kann ja vorkommen, daß das größte der entstehenden Dreiecke größer ist als die Summe der drei anderen! Auf Grund der vorhin diskutierten notwendigen Bedingung ist aber ein Tetraeder mit solchen Seiten nicht möglich. Auch eine weitere Überlegung läßt sich schon in der 8. Klasse anstellen. Seien a, b, c, a', b' so gegeben, daß sowohl das Tripel (a, b, c) als auch das Tripel (a', b', c) die Dreiecksungleichung erfüllt. Ein Tetraeder wäre dann durch Angabe des an der Kante c anliegenden Kantenwinkels φ_c eindeutig festgelegt (bis auf Ebenenspiegelung), und dieser Winkel kann beliebige Werte zwischen 0° und 180° annehmen (Abb. 14). Für die Kantenlänge c' ergibt sich daraus eine untere Grenze für $\varphi_c \to 0°$ und eine obere Grenze für $\varphi_c \to 180°$. Daß wirklich eine untere Grenze vorliegt, ist anschaulich unmittelbar klar, an der oberen Grenze könnte man zweifeln. Ganz elementare trigonometrische Betrachtungen liefern jedoch die Darstellung

$$c' = k - l \cdot \cos\varphi_c$$

mit $k, l \in \mathbb{R}^+$, woran das Monotonieverhalten von c' in Abhängigkeit von φ_c deutlich wird. Die Verwendung eines Modells von zwei an einer Achse c drehbar angebrachten Dreiecken macht diese Überlegung wohl für jeden interessierten Schüler anschaulich und verständlich.

Damit möchte ich schließen in der Hoffnung, daß Ihnen diese Dinge auch unabhängig von ihrer unterrichtlichen Verwendbarkeit Freude gemacht haben und vielleicht doch die eine oder andere brauchbare Idee dabei war[2].

[2] Ich danke Herrn Studiendirektor M. Hoffmann für die Gelegenheit, in seiner Klasse 8b am Pestalozzi-Gymnasium in München zu unterrichten, und dem Max-Planck-Institut für Biochemie in Planegg-Martinsried für die Möglichkeit zur Herstellung dieses Manuskripts.

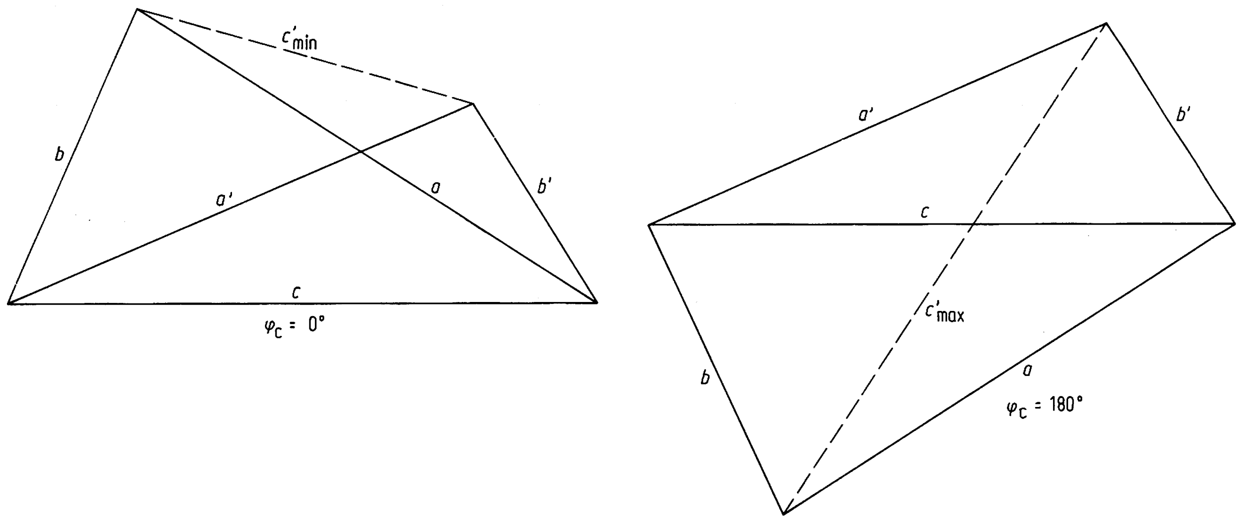

Abb. 14

Literatur

[1] T. Egger - R. Fritsch - K. Seebach: Zum Winkelsummensatz für Tetraeder. - DdM **11** (1983) 14-35.

[2] J. Faulhaber: Miracula Arithmetica. - Augsburg 1622.

[3] R. Fritsch: Höhenschnittpunkte für *n*-Simplizes. - Elemente der Mathematik **31** (1976) 1-8, 128.

[4] R. Fritsch: »Dreiecks«-Ungleichungen für Tetraeder. - MNU **34** (1981) 274-278.

[5] R. Fritsch: Winkelverteilung am Tetraeder. - DdM **9** (1981) 276-290.

[6] R. Fritsch: Merkwürdige Kugeln am Tetraeder. - DdM **11** (1983) 262-269; **12** (1984) 18-35.

[7] J. P. de Gua de Malves: Propositions neuves et non moins utiles que curieuses, sur le tétraèdre: ou essai de tétraèdrométrie. - Mémoires de l'académie royale des sciences (Paris) 1783, S. 363-402. Pl IV-VI (1786).

[8] J. L. de Lagrange: Solutions analytiques de quelques problèmes sur le pyramides triangulaires. - Nouveaux Mémoires de l'académie royale des sciences et belles-lettres, S. 149-176. - Berlin 1773.

[9] G. Monge: Sur la pyramide triangulaire. - Correspondance sur l'école impériale polytechnique 2/3 (1811) 263-266.

[10] H. Tietz: Die Raumhöhen des Tetraeders. - MNU **25** (1972) 19-20.

[11] H. Tietz: Tetraeder mit berührenden Inkreisen. - Math.-Phys. Semesterberichte **21** (1974) 143-144.

[12] C. de Tinseau d'Amondans: Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes et des lignes à double courbure. - Mémoires de mathématique et de physique présentés . . . scavans **9** (1780) 593-624.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. R. Fritsch, Math. Institut der Ludwig-Maximilians-Universität, Theresienstraße 39, 8000 München 2