UB

Didaktik der Mathematik

20. Jahrgang 1992

Wissenschaftlicher Beirat
Martin Barner
Friedrich Barth
Arthur Engel
Uwe Feiste
Jürgen Flachsmeyer
Friedrich Flohr
Rudolf Fritsch
Lisa Hefendehl-Hebeker
Robert Ineichen
Johannes Kratz
Günter Pickert
Hans-Christian Reichel
Karl Seebach
Hans-Georg Steiner
Horst Woschner
Herbert Zeitler

Redaktion
Franz Hager

Bayerischer Schulbuch-Verlag · München

Universitäts-
Bibliothek
München

P 1992

Anschriften der Beiratsmitglieder:
Prof. Dr. Martin Barner,
Math. Inst. d. Univ., Hebelstr. 29, 7800 Freiburg
StD Friedrich Barth, Abbachstr. 23, 8000 München 50
Prof. Dr. Arthur Engel, Inst. f. Didaktik d. Mathematik,
Senckenberganlage 9-11, 6000 Frankfurt 1
Dr. Uwe Feiste, Ernst-Moritz-Arndt-Univ.,
Friedrich-Ludwig-Jahn-Str. 15a, 0-2200 Greifswald
Prof. Dr. Jürgen Flachsmeyer, Ernst-Moritz-Arndt-Univ.,
Friedrich-Ludwig-Jahn-Str. 15a, 0-2200 Greifswald
Prof. Dr. Friedrich Flohr, Math. Inst. d. Univ.,
Hebelstr. 29, 7800 Freiburg
Prof. Dr. Rudolf Fritsch, Friedemann-Bach-Str. 61,
8032 Gräfelfing
Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker, Lehrst. f. Didaktik
d. Mathematik, Universitätsstr. 10, 8900 Augsburg
Prof. Dr. Robert Ineichen, Instit. d. Mathématiques
de l'Université, Pérolles, CH-1700 Fribourg
OStD Johannes Kratz, Ulmenstr. 16, 8035 Gauting
Prof. Dr. Günter Pickert, Math. Inst. d. Justus-Liebig-
Universität, Arndtstr. 2, 6300 Gießen
Prof. Mag. Dr. Hans-Christian Reichel, Inst. f. Mathematik,
Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien
Prof. Dr. Karl Seebach, Walhallastr. 5, 8000 München 19
Prof. Dr. Hans-Georg Steiner,
Marsstr. 16, 4800 Bielefeld 15
StD Horst Woschner, Theresienstr. 60, 8000 München 2
Prof. Dr. Herbert Zeitler, Lehrst. f. Didaktik d. Mathematik,
Universitätsstr. 30, 8580 Bayreuth

Anschrift der Redaktion:
StD Franz Hager, Blütenstr. 9, 8039 Puchheim,
Telefon (089) 803043

Bezugsbedingungen
Jahresabonnement 4 Hefte DM 58,-,
Einzelheft DM 16,- zuzüglich Versandkosten
Postscheckkonto München 93370-805
Bankkonto: Bayer. Vereinsbank München 81154
»Didaktik der Mathematik« erscheint einmal vierteljährlich. Für unverlangt eingesandte Manuskripte wird keine Gewähr übernommen. Nachdrucke innerhalb der gesetzlichen Frist nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Verlages.

Verlag und Anzeigenverwaltung
Bayerischer Schulbuch-Verlag, Postfach 190253
Hubertusstraße 4, 8000 München 19,
Telefon (089) 179120
Zur Zeit ist Anzeigenpreisliste Nr. 3 vom 1. 1. 1983 gültig.
Satz: Tutte Druckerei GmbH, Salzweg
Druck: E. Rieder, Schrobenhausen

Didaktik der Mathematik wird laufend im PÄDAGOGISCHEN JAHRESBERICHT (Verlag für pädagogische Dokumentation, Duisburg) bibliografisch nachgewiesen und regelmäßig für ZDM bzw. die Datenbank MATHDI ausgewertet.

Die in der Zeitschrift veröffentlichten Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form — durch Fotokopie, Mikrofilm oder andere Verfahren — reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere von Datenverarbeitungsanlagen, verwendbare Sprache übertragen werden.

Auch die Rechte der Wiedergabe durch Vortrag, Funk- und Fernsehsendung, im Magnettonverfahren oder ähnlichem Wege bleiben vorbehalten.

Fotokopien für den persönlichen und sonstigen eigenen Gebrauch dürfen nur von einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus als Einzelkopien hergestellt werden.

ISSN 0343-5334

Inhaltsverzeichnis

Rudolf Fritsch

Gudermann, Bodenmiller und der Satz von Bodenmiller-Steiner

Es handelt sich um eine elementargeometrische Miniatur. Wir stellen den Satz von Bodenmiller-Steiner vor, erzählen seine Geschichte und erörtern Möglichkeiten zur unterrichtlichen Behandlung in Ober- und Mittelstufe. Einem kurzen vektoralgebraischen Beweis stellen wir die synthetischen Methoden gegenüber, wie sie vor allem von Möbius entwickelt wurden; sie beruhen auf klassischen Sätzen von Apollonius, Menelaos und Pappos.

1. Persönliches

Karl Weierstrass (1815–1897) studierte in seiner Schulzeit das in der Bibliothek des katholischen Gymnasiums Paderborn vorhandene (!) *Crellesche Journal für die reine und angewandte Mathematik* [1]. Der Vater zwang ihn jedoch zu einem ungeliebten Studium der Kameralistik (heute Verwaltungs- und Finanzwissenschaft) an der Universität Bonn. Dort führte er zwar als Student eine berühmte Klinge, aber das Studium brach er erfolglos ab. Eine Vorlesungsmitschrift des Münsteraner Mathematikprofessors Christoph Gudermann (1798–1852) über die Theorie der elliptischen Funktionen wies ihm den Weg in seine Zukunft. Er begann in Münster ein sehr zügig durchgeführtes Mathematik-Studium und legte in kürzester Frist das Lehramtsexamen ab; in Mathematik hatte er dabei größten Erfolg, jedoch wäre er auf Grund seiner schwachen Leistungen in den Nebenfächern beinahe wieder gescheitert [22]. Er ist im wesentlichen als mathematischer Autodidakt anzusehen; nur Gudermann verdient es, als sein akademischer Lehrer bezeichnet zu werden [2; 31].

Gudermann, Sohn eines Lehrers, hatte im März 1822 in Berlin das Staatsexamen für das höhere Lehramt abgelegt. Auch damals schon gab es Lehrerarbeitslosigkeit, und so erhielt er erst im Oktober 1823 eine Anstellung als Gymnasiallehrer in der Lohengrin-Stadt Kleve. In der Zwischenzeit lebte er von Sonderzuwendungen des Ministeriums, die er in etwa halbjährigen Abständen in Höhe von 125, 60 und 50 Talern erhielt [17]. Als er seinen Dienst in Kleve antrat, gab es zu seinem Leidwesen in der Schulbibliothek kein einziges mathematisches Werk; die von ihm erbetene Erhöhung des Bibliotheksetats wurde zwar gewährt, jedoch mit der Maßgabe:

daß aber bei der Anschaffung von Büchern vorzüglich Philologie und Geschichte im Auge behalten werden müßten, indem es für den Unterricht der Mathematik auf Gymnasien nächst der Bekanntschaft mit dem Stoffe, der nicht über die Elemente hinausgehe, hauptsächlich nur einer guten Methode bedürfe, die aus Büchern nicht zu erlernen sei. [17, S. 755]

1 Heute würde man sich freuen, wenn wenigstens die *Didaktik der Mathematik* von jeder Schule bezogen würde.

Trotz dieser schlechten Rahmenbedingungen gelang es Gudermann, während seiner Tätigkeit in Kleve ein interessantes Lehrbuch zur analytischen Geometrie auf der Kugel zu verfassen, das 1830 unter dem *Grundriß der analytischen Sphärik* erschien [10]. Es brachte ihm 1831 den Titel „Oberlehrer" und ein Jahr später eine außerordentliche Professur an der Philosophisch-Theologischen Akademie (seit 1902 Universität) in Münster; 1839 wurde er dort zum ordentlichen Professor ernannt. Sein mathematisches Werk würdigte Moritz (Benedikt) Cantor (1863–1920) [5]:

Ein tiefer Denker bearbeitete er der Hauptsache nach zwei Gebiete der Mathematik: die Geometrie der Kugel und die Theorie der hyperbolischen und elliptischen Funktionen.

Letztere führten ihm Weierstrass zu. Wir beschäftigen uns hier mit einem Abfallprodukt aus der Kugelgeometrie: Auf Seite 138 des genannten Buches [10] findet man die folgende

Anmerkung: Der planimetrische Satz, daß sich die drei Kreise zweimal in Einem Punkte schneiden, welche über den drei Diagonalen eines ebenen Vierecks, als Durchmessern, beschrieben werden, ist schon sehr bemerkenswerth und mir von Herrn Bodenmiller hierselbst, der ihn gefunden hat, mündlich mitgetheilt worden. Es findet sich in den mir bekannten, vom Kreise handelnden, Werken nicht. (Fig. 1)

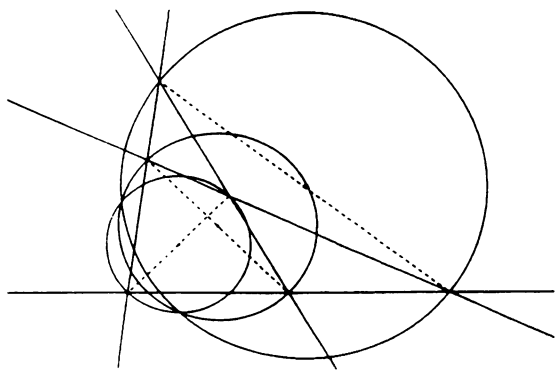

Fig. 1

Der hier beschriebene geometrische Sachverhalt wird seitdem als „Satz von Bodenmiller" bezeichnet. Unter Bezug auf diese Notiz von Gudermann stellten unter anderen August Ferdinand Möbius (1790–1868) [15] und neuerdings Gunter Weiss [29; 30] dazu Überlegungen an; dabei betrachtet Weiss die Situation unter Aspekten der darstellenden Geometrie und der Grundlagen der Geometrie. Auch sonst wird der mathematische Tatbestand in der Literatur erwähnt, so von Oskar Schlömilch (1823–1901) [21], Michel Chasles (1793–1880) [6, S. 234], Paul Serret (1827–1898) [23, S. 144ff.] und Eduard Study (1862–1930) [28]; auf Teile der Überlegungen von Schlömilch und Study wird später noch eingegangen. Gudermann selbst geht es natürlich an dieser Stelle seines Buches um den entsprechenden, wohl von ihm selbst gefundenen Satz der Geometrie auf der Kugel. In einem Zeitschriftenbeitrag stellt er außerdem fest, daß man statt Kreisen ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen nehmen kann [11]. Er gibt keinen weiteren

Hinweis zur Person Bodenmiller; ein solcher findet sich auch nicht in der späteren Literatur. Eine Durchsicht der nicht verbrannten Jahresberichte des Gymnasiums Kleve aus den Jahren 1830–1833, für die ich Herrn van Eimern in Kleve danke, ergab auch keine Spur von Bodenmiller. Da sein Name untypisch für die Gegend ist, ist anzunehmen, daß er aus beruflichen Gründen, vielleicht als Geistlicher oder Justizbeamter nach Kleve verschlagen wurde. Weitere Spekulationen darüber anzustellen ist allerdings müßig. Eine Anfrage an das Stadtarchiv in Kleve erbrachte bisher kein Ergebnis.

2. Ein analytischer Beweis des Satzes von Bodenmiller

Der Satz von Bodenmiller ist mit den in der Kollegstufe zur Verfügung stehenden Mitteln der analytischen Geometrie schnell zu beweisen. An Vorkenntnissen werden eigentlich nur das Skalarprodukt und die mit seiner Hilfe in vektorieller Form geschriebene Kreisgleichung benötigt:

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})^2 = \mathrm{r}^2 . \tag{1}$$

Zur Vorbereitung kann man die Gleichung eines Kreises aufstellen, der eine gegebene Strecke als Durchmesser hat. Sind $\boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{e}$ die Ortsvektoren der Endpunkte dieser Strecke, so hat man in (1) $\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{d} + \boldsymbol{e})$ und $\mathrm{r} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{e} - \boldsymbol{d}|$ einzusetzen; dann ergibt eine einfache Rechnung

$$\boldsymbol{x}^2 - (\boldsymbol{d} + \boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{e} = 0 . \tag{2}$$

Eine elegantere Herleitung der Gleichung (2) hat Herr Pickert angegeben, dem ich für zahlreiche weitere Anmerkungen zu dieser Arbeit herzlich danke. Der Kreis mit einer gegebenen Strecke als Durchmesser ist ja nichts anderes als der *Thaleskreis* über dieser Strecke, das heißt, der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus die Strecke unter einem rechten Winkel erscheint; dies führt auf den Ansatz

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}) = 0 , \tag{3}$$

der durch Ausmultiplizieren unmittelbar (2) liefert. Bestechend an dieser Überlegung für die Behandlung im Unterricht ist vor allem, daß man die allgemeine Kreisgleichung (1) dazu gar nicht braucht.

Bevor man sich nun dem Satz von Bodenmiller zuwendet, muß man klarmachen, daß es sich im Sinne unseres heutigen, auf Jakob Steiner (1796–1863) zurückgehenden Sprachgebrauchs [27, Nr. 19] nicht um einen Viereckssatz, sondern um einen Satz über vollständige Vierseite handelt. Bei einem Viereck geht man von vier Punkten aus, von denen keine drei kollinear sind, und betrachtet im „vollständigen" Fall dazu die sechs auftretenden Verbindungsgeraden. Ein *Vierseit* ist dagegen eine Konfiguration aus vier Geraden, derart daß je drei nicht kopunktal sind; es ist *vollständig*, wenn man die sechs (eigentlichen oder uneigentlichen) Schnittpunkte, genannt *Ecken* des Vierseits, mit in die Überlegungen einbezieht. Wir müssen uns hier allerdings auf vollständige Vierseite mit sechs eigentlichen Ecken beschränken – das sind die Vierseite, bei denen also keine zwei Seiten parallel sind – denn nur für solche läßt sich der Satz von Bodenmiller formulieren.

Es sei nun ein vollständiges Vierseit mit sechs eigentlichen Ecken gegeben. Wir bezeichnen zunächst die vier Geraden mit g_1, g_2, g_3, g_4, sodann mit A_{ij} den Schnittpunkt der Geraden g_i und g_j, $1 \leqq i < j \leqq 4$ (siehe Fig. 2, links); die Strecken $[A_{12}A_{34}]$, $[A_{13}A_{24}]$, $[A_{14}A_{23}]$ sind die *Diagonalen* des Vierseits. Der Satz von Bodenmiller behauptet, daß es zwei Punkte gibt, in denen sich die drei Thaleskreise über den Diagonalen schneiden; diese drei Kreise wollen wir fortan Bodenmillersche Kreise nennen.

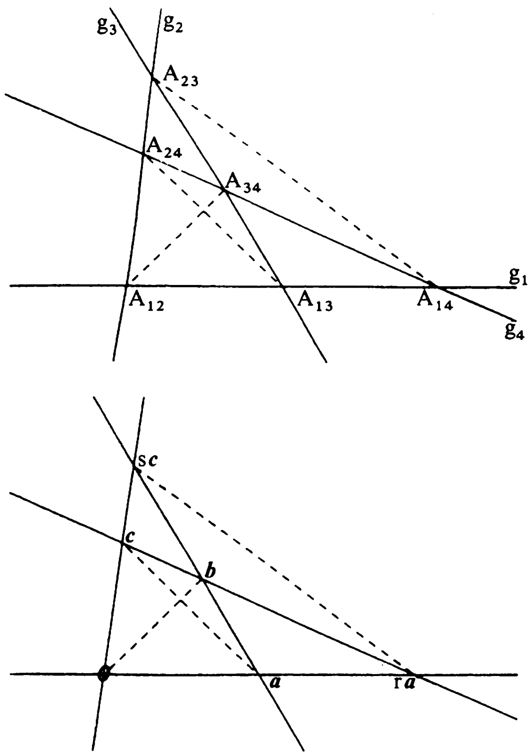

Fig. 2

Zum Beweis des Satzes von Bodenmiller wählen wir den Punkt A_{12} als Ursprung für die Ortsvektoren. Die Ortsvektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{c}$ der Punkte A_{13} und A_{24} bilden dann eine Basis des zugrundeliegenden Vektorraumes. Die Ortsvektoren von A_{14} und A_{23} sind Vielfache von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{c}$, also von der Form $r \cdot \boldsymbol{a}$ und $s \cdot \boldsymbol{c}$ mit eindeutig bestimmten reellen Zahlen r und s, die von 0 und 1 verschieden sind (siehe Fig. 2, rechts[1]). Der Ortsvektor $\boldsymbol{b}$ von A_{34} läßt sich dann berechnen. Er ergibt sich zu

$$\boldsymbol{b} = \frac{rs - r}{rs - 1} \cdot \boldsymbol{a} + \frac{rs - s}{rs - 1} \cdot \boldsymbol{c}\,. \tag{4}$$

1 Durch Umnumerierung könnte man immer $r, s > 1$ erreichen. Das ist in Figur 2 der Fall, aber allgemein von mehr theoretischem Interesse; der dafür notwendige Aufwand lohnt sich im Unterricht nicht.

Da die Geraden g_3, g_4 nicht parallel sind, sondern sich im Punkt A_{34} schneiden, ist $rs \neq 1$. Für die Bodenmillerschen Kreise erhalten wir durch Einsetzen in (2) die Gleichungen

$$\begin{aligned} P_1 &= \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} &&= 0\,, \\ P_2 &= \boldsymbol{x}^2 - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} &&= 0\,, \\ P_3 &= \boldsymbol{x}^2 - (\mathrm{r}\boldsymbol{a} + \mathrm{s}\boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{x} + \mathrm{rs}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} &&= 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Setzen wir in (5) den errechneten Wert für $\boldsymbol{b}$ ein, so erkennen wir

$$(\mathrm{rs} - 1) \cdot P_1 = \mathrm{rs} \cdot P_2 - P_3\,. \tag{6}$$

Algebraisch bedeutet das, daß das Verschwinden von zweien der Werte P_1, P_2, P_3 das Verschwinden des dritten nach sich zieht. In geometrischer Umsetzung erhalten wir, daß ein Schnittpunkt von zwei Bodenmillerschen Kreisen auch auf dem dritten liegt. Damit ist der

Satz von Bodenmiller in der schwachen Fassung bewiesen: *Wenn sich zwei der Bodenmillerschen Kreise eines Vierseits in zwei verschiedenen (reellen) Punkten schneiden, so geht auch der dritte Bodenmillersche Kreis dieses Vierseits durch diese zwei Punkte. Wenn sich zwei solche Kreise berühren, so hat der dritte mit ihnen den Berührpunkt, aber keinen anderen gemein. Meiden sich zwei dieser Kreise, so haben alle drei paarweise keinen Punkt gemeinsam.*

Bemerkung: Die Gudermannsche Verallgemeinerung von Kreisen auf ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen ist bei diesem Ansatz eine Trivialität. Jede derartige Ellipsenschar bestimmt ein inneres Produkt. Man hat nur die Multiplikation in den angegebenen Gleichungen bezüglich dieses inneren Produktes zu interpretieren. Das ist jedenfalls klar, wenn man den Ansatz über die Gleichung (1) wählt; andernfalls sind zusätzliche Überlegungen mit konjugierten Durchmessern notwendig. Dies ist der Grund dafür, daß wir eingangs nicht nur von der Gleichung (3) ausgegangen sind, sondern beide Methoden vorgestellt haben. Herr Pickert hat noch darauf hingewiesen, daß ein entsprechender Satz für Hyperbeln mit festen Asymptotenrichtungen gilt.

Wenn sich bei einem Vierseit die Bodenmillerschen Kreise wirklich in zwei verschiedenen Punkten der euklidischen Ebene schneiden, so nennt Paul Serret diese Punkte „les points cycliques du quadrilatère" (die Kreispunkte des Vierseits) [23, S. 114], während Weiss von „Bodenmillerpunkten" spricht. Die starke Fassung des Satzes von Bodenmiller würde komplexe Schnittpunkte der Bodenmillerschen Kreise mit einbeziehen; aber man kann diesen Sachverhalt doch noch ein ganzes Stück rein reell weiterbehandeln. Bekannt ist die algebraische Tatsache, daß eine quadratische Gleichung immer zwei Lösungen hat, wenn doppelte Zählung und – auch bei nur reellen Koeffizienten – echt komplexe Lösungen zugelassen werden. Darauf beruht der analytische Beweis der geometrischen Aussage, daß zwei Kreise der euklidischen Ebene sich in zwei Punkten schneiden, sich in einem Punkt berühren oder sich meiden. Wir untersuchen nun, ob für die Bodenmillerschen Kreise auch alle diese Fälle möglich sind und nicht immer die in Figur 1 gezeigten zwei Schnittpunkte vorhanden sind. Dabei ist jedoch eine Unterstützung durch einen graphik-fähigen Computer sinnvoll, mit dem wir die Wirkung von Änderungen der Parameter leicht sichtbar machen können. Zunächst fragen wir uns, ob wir die Konfiguration von Figur 1 so abändern können, daß sich die Thaleskreise über $[A_{13}A_{24}]$ und $[A_{14}A_{23}]$ meiden. Den Ausgangspunkt bildet die Bedingung für die Existenz reeller Schnittpunkte zweier Kreise: der Abstand der Mittelpunkte muß größer als die Differenz und kleiner als die Summe der Radien sein. Man müßte also etwa den Abstand der Mittelpunkte groß und die Radien klein machen. Ersteres erhält man bei der Wahl großer Werte für r und s, letzteres durch Verkleinern des Winkels zwischen den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{c}$. Ein mögliches Ergebnis zeigt Figur 3.

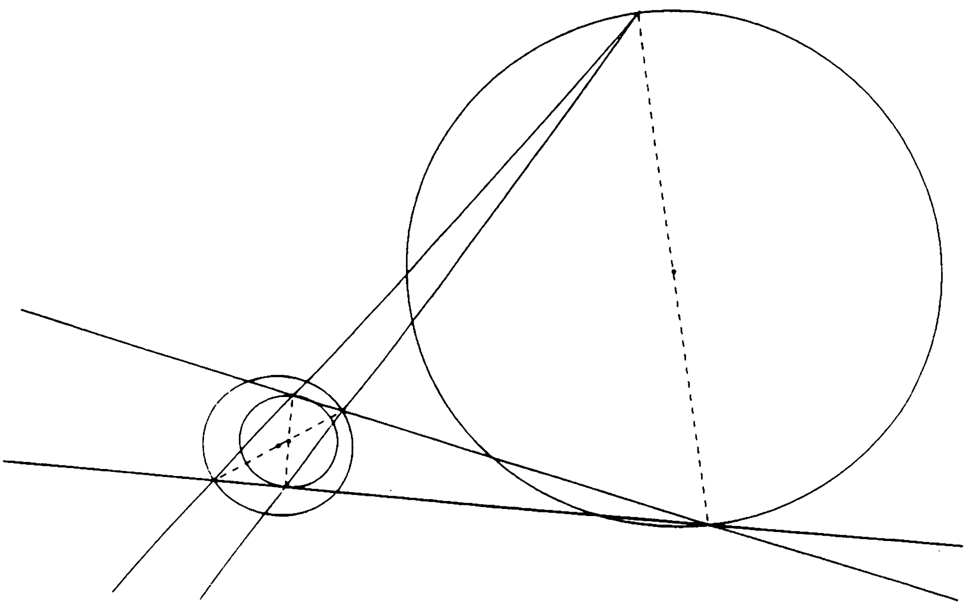

Fig. 3

Der Fall des Berührens erfordert eine genauere Rechnung. Dabei ist der Ansatz einfach; die Umformungen sind aber so lästig, daß man sie für den allgemeinen Fall nur mit Hilfe eines Formelmanipulationsprogrammes wie etwa Derive durchführen sollte. Man hat den Abstand der Mittelpunkte der Strecken $[A_{13}A_{24}]$ und $[A_{14}A_{23}]$ der halben Summe ihrer Längen, das ist die Summe der Radien der entsprechenden Bodenmillerschen Kreise, gleichzusetzen. Das Ergebnis einer solchen Rechnung ist in Figur 4 dargestellt.

Für Mathematiker liegt die Frage nahe, ob sich die gezeigten Fälle durch geometrische Bedingungen an Vierseite charakterisieren lassen. Dieses Problem wurde (unseres Wissens) in der mathematischen Literatur bisher nicht behandelt. Herr Pickert hat zum Berührfall einige Überlegungen angestellt, die wir zusammen mit einem eigenen Ansatz im Anhang wiedergeben werden.

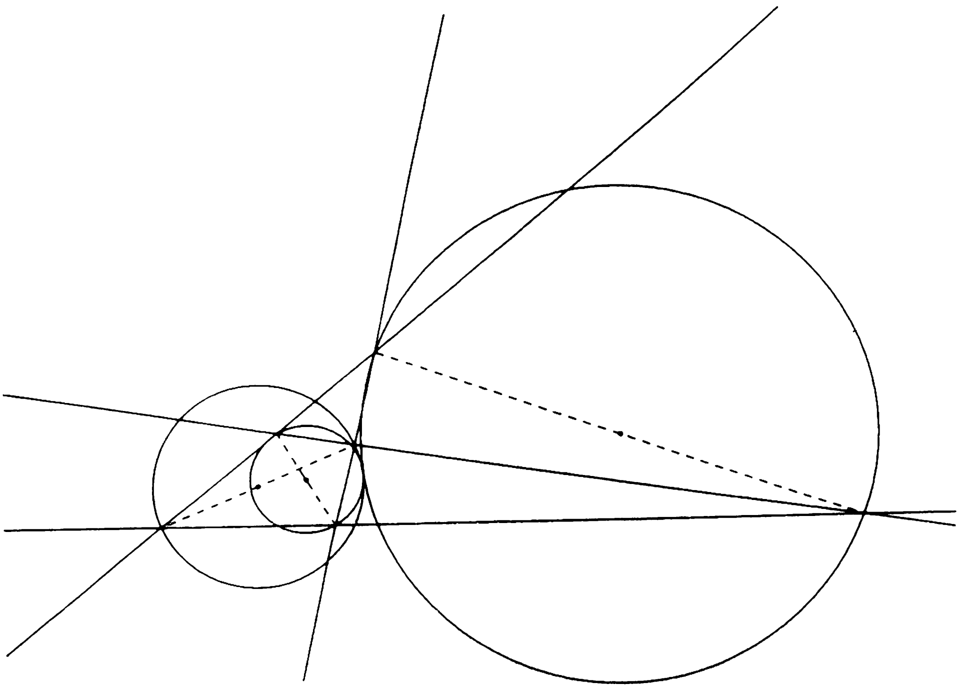

Fig. 4

Im Rahmen der leider aus dem Gymnasialunterricht verschwundenen Theorie der Kreisbüschel [4] gibt es eine griffige, die Frage der nicht existierenden oder zusammenfallenden Schnittpunkte vermeidende Formulierung des

Satzes von Bodenmiller: *Die Bodenmillerschen Kreise eines vollständigen Vierseits gehören zu einem Kreisbüschel; dieses kann elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sein.*

Aber auch ohne Einstieg in die Büscheltheorie kan man die dem Büschel angehörende Gerade betrachten. Im Fall der Existenz reeller Schnittpunkte handelt es sich um die Verbindungsgerade dieser Schnittpunkte, und es ist doch naheliegend, diese zu untersuchen (siehe Fig. 5, links). Sie genügt in Bezug auf die früher eingeführte Vektorraumstruktur der Gleichung

$$P_2 - P_3 = 0\,,$$

die äquivalent ist zu

$$((\mathrm{r}-1)\boldsymbol{a} + (\mathrm{s}-1)\boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{x} = (\mathrm{rs}-1)\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}\,. \tag{7}$$

Nun kann man die Geradengleichung (7) offensichtlich auch aufstellen, wenn ein vorgelegtes Vierseit nicht so gutartig ist, wie das eben angenommene (siehe Fig. 5, rechts). Die Frage ist, ob die Gerade auch in diesen Fällen interessante geometrische Eigenschaften besitzt. Wir skizzieren hier zwei Möglichkeiten, die kürzere nimmt Bezug auf einen Satz von Jakob Steiner, die zeitaufwendigere bringt den nahezu vergessenen Potenzbegriff ins Spiel.

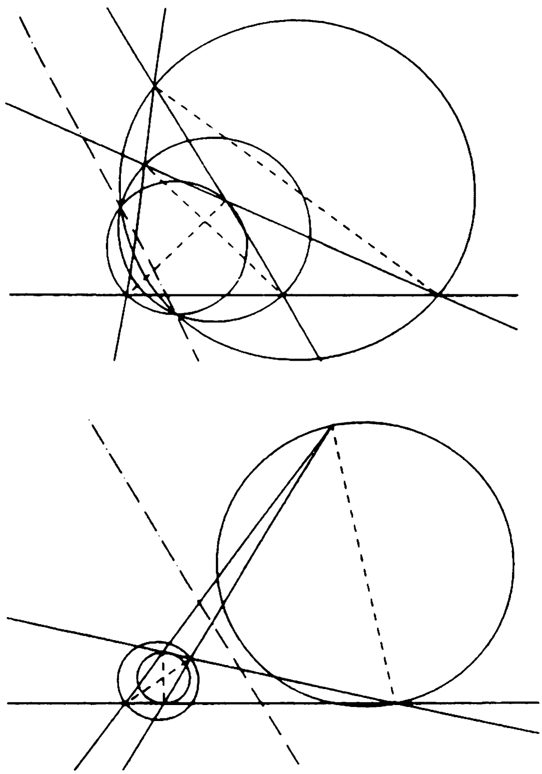

Fig. 5

3. Potenz und Potenzgerade

Von der mathematischen Systematik her ist das Thema der Potenz zuerst zu behandeln. Die notwendigen Grundlagen sollten aus der Elementargeometrie der Mittelstufe bekannt sein [1, S. 72–82]. Wir erinnern an die wesentlichen Tatsachen: Ist K ein Kreis mit Mittelpunkt $\boldsymbol{m}$ und Radius r und ist $\boldsymbol{x}$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Ebene, so ist $P = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})^2 - \mathrm{r}^2$ die *Potenz* des Punktes $\boldsymbol{x}$ bezüglich K. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras erkennt man sofort folgende geometrische Bedeutungen der Potenz:

a) Ist $P > 0$, so liegt $\boldsymbol{x}$ außerhalb von K und $\sqrt{P}$ ist die Länge der von $\boldsymbol{r}$ an K gezogenen Tangenten.
b) Ist $P = 0$, so liegt $\boldsymbol{x}$ auf K.
c) Ist $P < 0$, so liegt $\boldsymbol{x}$ innerhalb von K und $\sqrt{-P}$ ist die halbe Länge der zu $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}$ senkrechten Sehne durch $\boldsymbol{t}$.

Allgemeiner ist P für Punkte außerhalb von K die Konstante des Sekantensatzes und $-P$ für Punkte innerhalb von K die Konstante des Sehnensatzes [1, S. 72]. Damit ergibt sich die für unseren Zusammenhang wichtige Eigenschaft der Potenz: Sie ist natürlich abhängig von einer gewählten Maßeinheit, aber unabhängig vom Koordinatensystem, insbesondere von der Wahl des Ursprungs. Sind zwei Kreise gegeben, so ist der geometrische Ort der Punkte mit gleicher Potenz bezüglich dieser beiden Kreise auch unabhängig von der Maßeinheit und allein durch die Geometrie bestimmt. Bei Gleichsetzung der analytischen Ausdrücke fallen die quadratischen Terme weg, also ergibt sich eine Geradengleichung. Im Fall nicht konzentrischer Kreise erhalten wir so die *Potenzgerade* der beiden Kreise. Wenn sich diese Kreise in zwei Punkten schneiden, so handelt es sich um die Verbindungsgerade der Schnittpunkte; wenn sich die Kreise berühren, so haben wir die gemeinsame Tangente.

Betrachten wir nun die Bodenmillerschen Kreise, so sind die Werte P_i, $i = 1, 2, 3$, gerade die Potenzen eines beliebigen Punktes mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}$ in Bezug auf diese Kreise. Aus der Gleichung (6) folgt unmittelbar, daß für alle Punkte der durch die Gleichung (7) beschriebenen Geraden gilt:

$$P_1 = P_2 = P_3 , \tag{8}$$

das heißt, alle Punkte dieser Geraden haben gleiche Potenz in Bezug auf die drei Bodenmillerschen Kreise, und diese Feststellung ist unabhängig davon, ob sich die Bodenmillerschen Kreise schneiden, berühren oder meiden.

Diese Gerade ist also die Potenzgerade zu je zwei Bodenmillerschen Kreisen, das heißt:

Die zu je zwei Bodenmillerschen Kreisen eines vollständigen Vierseits gehörenden Potenzgeraden fallen zusammen.

Damit haben wir eine rein reelle Formulierung der starken Fassung des Satzes von Bodenmiller gewonnen. Die gemeinsame Potenzgerade der Bodenmillerschen Kreise eines Vierseits nennen wir im folgenden Potenzgerade des Vierseits.

An dieser Stelle sollte man sich vielleicht über die Berechtigung der Einstufung als „schwache“ und „starke“ Fassung des Satzes von Bodenmiller Gedanken machen. Wenn die Potenzgeraden der drei Paare von Bodenmillerschen Kreisen zusammenfallen, so bedeutet das, daß jeder Punkt mit gleicher Potenz in Bezug auf zwei Bodenmillersche Kreise sogar in Bezug auf alle drei Bodenmillerschen Kreise die gleiche Potenz besitzt. Damit ergibt sich, daß ein gemeinsamer Punkt von zwei Bodenmillerschen Kreisen in Bezug auf alle drei die Potenz 0 hat, also auch zu dem dritten Bodenmillerschen Kreis gehört. Dies zeigt, daß die starke Fassung des Satzes von Bodenmiller tatsächlich die schwache impliziert.

4. Der Satz von Steiner

Der schon angekündigte Satz von Jakob Steiner [27], macht die Potenzgerade eines vollständigen Vierseits noch interessanter.

Satz von Steiner: *Die Höhenschnittpunkte der vier durch ein vollständiges Vierseit bestimmten Dreiseite sind kollinear; sie liegen auf der Potenzgeraden des Vierseits.*

Hier kommt natürlich die Übereinstimmung von Drei*seiten* und Drei*ecken* zum Ausdruck. Mit den Bezeichnungen von Figur 2 ist das von den drei Geraden g_i, g_j, g_k mit $i < j < k$ gebildete Dreiseit zugleich das Dreieck mit den Ecken A_{ij}, A_{ik}, A_{jk}.

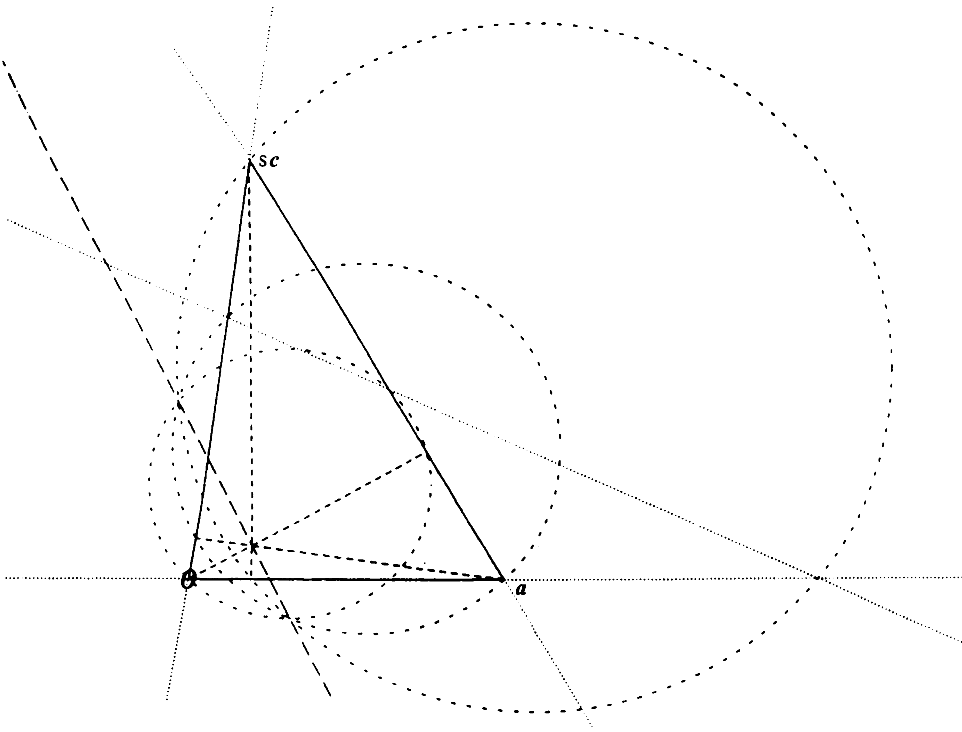

Fig. 6

Zum Beweis rechnen wir mit der schon früher beschriebenen Vektorraumstruktur. Weil die Potenzgerade eines Vierseits durch ihre geometrische Ortseigenschaft unabhängig von der Vektorraumstruktur ist, genügt es, den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks zu betrachten. Wir wählen dazu das Dreieck $A_{12}A_{13}A_{23}$. Die Höhe durch A_{13} ist beschrieben durch die Gleichung

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}, \tag{9}$$

die Höhe durch A_{23} durch die Gleichung

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = s\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}. \tag{10}$$

Man sieht sofort, daß ein Punkt, für den beide Gleichungen gelten, auch die Gleichung (7) der Potenzgeraden des Vierseits erfüllt.

Bemerkung: Der Satz von Steiner ging etwa gleichzeitig mit dem Satz von Bodenmiller in Druck. Steiner nimmt keinen Bezug auf den Satz von Bodenmiller, sondern stellt nur die Kollinearität der vier Höhenschnittpunkte fest und erkennt die entstehende Gerade als senkrecht zur Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der drei Diagonalen des vollständigen Vierseits; für die Kollinearität dieser drei Punkte beruft er sich auf Newton (man lese dazu den diese Arbeit abschließenden Abschnitt über den sogenannten Satz von Gauß). Die Verbindung dieser an sich unabhängigen Ergebnisse zum „Satz von Bodenmiller–Steiner“ beruht auf der Tatsache, daß die Gerade, die nach Steiner die Höhenschnittpunkte der einem vollständigen Vierseit zugeordneten Dreiecke enthält, mit der Potenzgeraden des Vierseits nach Bodenmiller zusammenfällt.

5. Unterrichtserfahrungen

Der bisher dargestellte Stoff wurde in einem Unterrichtsversuch am Pestalozzi-Gymnasium in München erprobt, für den eine Doppelstunde zur Verfügung stand. Den Einstieg bildete das Phänomen der Kopunktalität dreier mit einem Dreieck verbundenen Geraden in der Ebene, etwa der drei Mittelsenkrechten oder der drei Winkelhalbierenden. Der Satz von Bodenmiller wurde als eine analoge Situation vorgestellt, wobei das Dreieck zum vollständigen Vierseit und die drei Geraden zu den drei Bodenmillerschen Kreisen in Beziehung gesetzt wurden. Zur Vorbereitung wurden dazu erst zwei Gerade und zwei Kreise betrachtet. Dem Sonderfall paralleler Geraden wurde der Sonderfall konzentrischer Kreise zugeordnet. Dem Schnittpunkt zweier nicht paralleler Geraden entsprachen dann bei zwei Kreisen mit verschiedenen Mittelpunkten die drei Möglichkeiten des Schneidens in zwei Punkten, des Berührens in einem Punkt und des Meidens.

Für die Herleitung der schwachen Fassung des Satzes von Bodenmiller genügte eine Unterrichtsstunde. In der zweiten ging es dann zunächst um die Erklärung der notwendigen Fallunterscheidungen, wobei die Überlegungen zur dynamischen Veränderung der Konfiguration doch sehr viel Zeit in Anspruch nahmen, aber von den Schülerinnen (der einzige männliche Teilnehmer an diesem Leistungskurs fehlte) schließlich gut aufgenommen wurden. Dann wurde zunächst der Satz von Steiner behandelt.

Zur Aufstellung der Gleichungen der Höhen wurde ein schnelles Verfahren verwandt, das für die Gleichung (9) erläutert werden soll: Die betrachtete Höhe ist senkrecht zum Vektor $\boldsymbol{c}$, ihre Gleichung ist also von der Form $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} = \mathrm{d}$ mit einer zunächst unbekannten Konstanten d; da der Punkt mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{a}$ auf der Höhe liegt, ergibt sich aber sofort $\mathrm{d} = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}$. Die Unabhängigkeit der Geraden mit der Gleichung (7) vom Koordinatensystem stand nicht zur Verfügung; deshalb mußte der Inzidenznachweis für alle vier Höhenschnittpunkte getrennt geführt werden. Dadurch ergab sich eine geeignete Hausaufgabe, die allerdings nur von den beiden besten Schülerinnen ansatzweise gelöst wurde. Es blieb aber noch Zeit den Potenzbegriff zu diskutieren und die sich daraus ergebenden Folgerungen zu skizzieren.

6. Ein Spezialfall des Satzes von Bodenmiller für die Mittelstufe

Sobald der Satz von Apollonios (262–190 v. Chr.) [1, S. 37], [12, S. 56] in der 9. Jahrgangsstufe zur Verfügung steht, kann man den Satz von Bodenmiller für den Fall einfach behandeln, in dem zwei Diagonalen des vollständigen Vierseits zueinander parallel sind. Wir beziehen uns dazu auf Figur 7, setzen also die Parallelität der Geraden $A_{13}A_{24}$ und $A_{14}A_{23}$ voraus.

Zunächst behaupten wir, daß die dritte Diagonale, also die Gerade $A_{12}A_{34}$ die Strecken $[A_{13}A_{24}]$ und $[A_{14}A_{23}]$ halbiert, woraus folgt, daß die Schnittpunkte $E = A_{12}A_{34} \cap A_{13}A_{24}$ und $F = A_{12}A_{34} \cap A_{14}A_{23}$ die Mittelpunkte der entsprechenden Bodenmillerschen Kreise sind. Um das einzusehen, betrachten wir die beiden zentrischen Streckungen, die die Strecke $[A_{13}A_{24}]$ in die Strecke $[A_{14}A_{23}]$ und damit den Punkt E in den Punkt F überführen. Die Streckungszentren sind A_{12} und A_{34}, die Streckungsverhältnisse sind gleich. Die Strecke $[A_{13}E]$ wird einerseits auf die Strecke $[A_{14}F]$ und

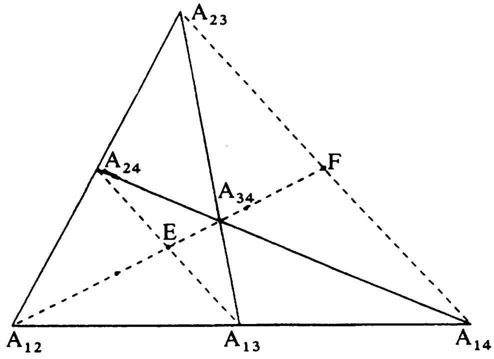

Fig. 7

andererseits auf die Strecke $[A_{23}F]$ abgebildet, also ist $\overline{A_{14}F} = \overline{A_{23}F}$ und damit auch $\overline{A_{13}E} = \overline{A_{24}E}$. Das beweist die Behauptung über die Mittelpunkte der Bodenmillerschen Kreise mit den Durchmessern $[A_{13}A_{24}]$, $[A_{14}A_{23}]$. Darüberhinaus ergibt sich, daß die beiden genannten zentrischen Streckungen den einen dieser Kreise auf den andern abbildet und damit das Streckungsverhältnis $\overline{A_{13}E} : \overline{A_{14}F}$ mit dem Verhältnis der Radien übereinstimmt.

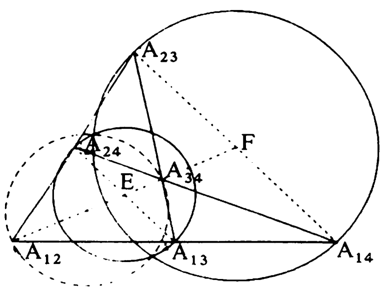

Fig. 8

Ein gemeinsamer Punkt der Bodenmillerschen Kreise hat also von den Punkten E und F das Abstandsverhältnis $\overline{A_{13}E} : \overline{A_{14}F} = \overline{A_{12}E} : \overline{A_{12}F} = \overline{A_{34}E} : \overline{A_{34}F}$, liegt also auf dem zu diesem Abstandsverhältnis bezüglich der Punkte E, F gehörigen Apollonioskreis (in Fig. 8 gestrichelt gezeichnet). Auf der Geraden EF erfüllen aber gerade die Zentren der Streckungen mit diesem Verhältnis die entsprechenden Abstandsbedingungen, also ist die Strecke $[A_{12}A_{34}]$ ein Durchmesser des betrachteten Apollonioskreises, das heißt der Apollonioskreis fällt mit dem dritten Bodenmillerschen Kreis zusammen. Damit ist die schwache Fassung des Satzes von Bodenmiller in diesem Spezialfall bewiesen.

Interessant ist, daß sich bei Vierseiten mit zwei zueinander parallelen Diagonalen die Fallunterscheidung des Schneidens, Berührens oder Meidens der Bodenmillerschen Kreise einfach und mit den auch schon in der 9. Jahrgangsstufe zur Verfügung stehenden

Mitteln klären läßt. Wir skizzieren hier nur den Fall des Berührens und zwar wieder unter der Annahme der Parallelität der Geraden $A_{13}A_{24}$ und $A_{14}A_{23}$. Dann liegen nämlich die Mittelpunkte der Bodenmillerschen Kreise auf der Trägergeraden der dritten Diagonalen, das heißt, der Geraden $A_{12}A_{34}$. Wenn sich nun die Bodenmillerschen Kreise in einem Punkt berühren, so muß auch der Berührpunkt auf dieser Geraden liegen. Damit muß der Berührpunkt aber entweder auf den Punkt A_{12} oder auf den Punkt A_{34} fallen. Ersteres ist genau dann der Fall, wenn g_1 senkrecht zu g_2 ist, letzteres ist äquivalent zur Orthogonalität von g_3 und g_4 (siehe Fig. 9).

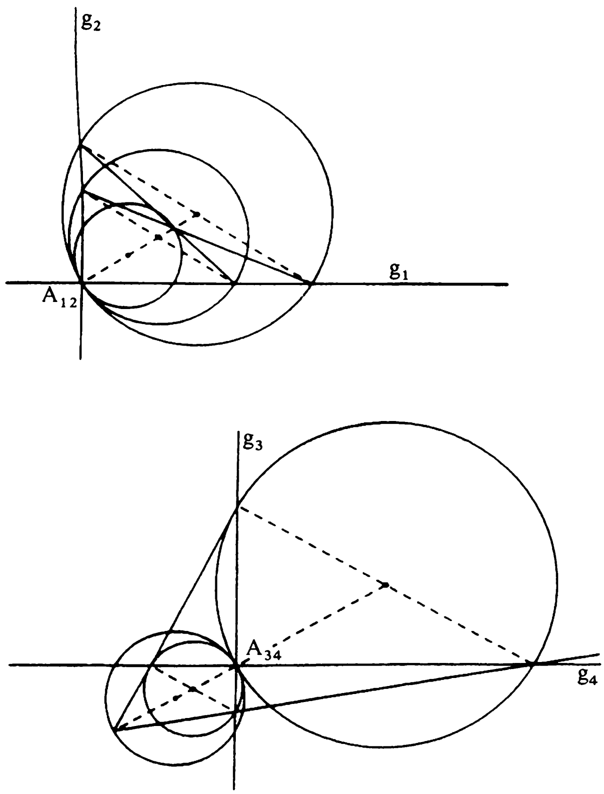

Fig. 9

Dieser Spezialfall des Satzes von Bodenmiller bietet offensichtlich auch Stoff für Konstruktionsaufgaben, was wohl nicht näher ausgeführt zu werden braucht.

7. Vom Satz von Monge zum Satz von Bodenmiller

Mit einem gewissen Aufwand kann auch der allgemeine Satz von Bodenmiller schon mit den elementargeometrischen Hilfsmitteln der Mittelstufe bewiesen werden. Einen Anknüpfungspunkt bietet der sog. Satz von Monge, benannt nach dem Erfinder der

Darstellenden Geometrie, Gaspard Monge (1746–1818). In seiner 1798 erstmalig erschienenen *Géométrie descriptive* beweist Monge [16, S. 54 f.] (siehe auch die modernen Darstellungen in [12, S. 43–44], [25, S. 38–40], [1, S. 56][1]) folgenden

Satz: *Sind drei Kreise mit nichtkollinearen Mittelpunkten und paarweise verschiedenen Radien gegeben, so sind kollinear*

- *die drei zu je zweien dieser Kreise gehörenden äußeren Streckungszentren und*
- *jedes der äußeren Streckungszentren mit zwei inneren Streckungszentren.*

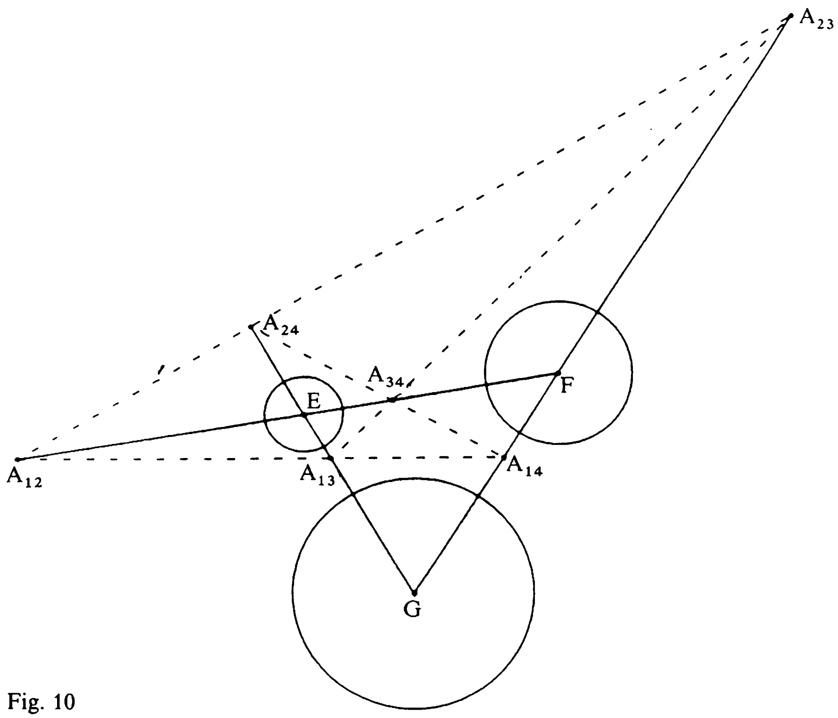

Fig. 10

Die Behauptung des Satzes von Monge liefert vier Geraden, die ein vollständiges Vierseit bilden, mit den sechs auftretenden Streckungszentren als Ecken. Jede Diagonale dieses Vierseits verbindet ein äußeres Streckungszentrum mit dem zum selben Kreispaar gehörenden inneren Streckungszentrum; die Schnittpunkte der Diagonalen

$$E = A_{12}A_{34} \cap A_{13}A_{24}\,,$$
$$F = A_{12}A_{34} \cap A_{14}A_{23}\,,$$
$$G = A_{13}A_{24} \cap A_{14}A_{23}\,.$$

sind die Mittelpunkte der gegebenen Kreise. Auf Seite 132 des 11. Bandes der Gergonneschen *Annales de Mathématiques* (erschienen 1820) wurde – natürlich mit anderen Worten

1 In [1] ist allerdings nicht der volle Satz bewiesen.

– die Aufgabe gestellt, die Behauptung des Satzes von Bodenmiller für vollständige Vierseite zu beweisen, die auf diese Weise entstehen. Eine Lösung haben der Mathematikprofessor am *Collège Royal* in Cahors (Midi-Pyrénnées), Jean-Baptiste Durrande (1798–1825), der sich – obwohl so jung verstorben – um die Elementarmathematik sehr verdient gemacht hat, und der Professor der „Mathématiques spéciales" am Lyzeum in Nîmes (Languedoc-Roussillion), Vecten angegeben [8]. Bezeichnen wir mit r_1, r_2, r_3 die Radien der gegebenen Kreise um E, F, G, so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\overline{EA_{12}}}{\overline{FA_{12}}} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\overline{EA_{34}}}{\overline{FA_{34}}} \tag{11}$$

$$\frac{\overline{EA_{13}}}{\overline{GA_{13}}} = \frac{r_1}{r_3} = \frac{\overline{EA_{24}}}{\overline{GA_{24}}} \tag{12}$$

$$\frac{\overline{FA_{14}}}{\overline{GA_{14}}} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{\overline{FA_{23}}}{\overline{GA_{23}}}. \tag{13}$$

Diese Gleichungen kann man nun aber geschickt interpretieren: Die Bodenmillerschen Kreise sind Apollonioskreise zu den Abstandsverhältnissen $\frac{r_i}{r_j}$ bezüglich je zweier der drei Punkte E, F, G. Für die Schnittpunkte P der Bodenmillerschen Kreise mit den Durchmessern $[A_{12}A_{34}]$ und $[A_{23}A_{14}]$ gilt deshalb

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{FP}} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{\overline{FP}}{\overline{GP}} = \frac{r_2}{r_3}. \tag{14}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{GP}} = \frac{r_1}{r_3}, \tag{15}$$

das heißt, ein solcher Punkt P liegt auch auf dem Kreis mit dem Durchmesser $[A_{13}A_{24}]$.

Damit ist wieder die schwache Fassung des Satzes von Bodenmiller für diese speziellen Vierseite bewiesen. Im Jahr 1881 bemerkte aber der damals 19-jährige Straßburger Student Eduard Study, später Professor in Marburg, Greifswald und Bonn, daß *sich zu jedem vollständigen Vierseit auf unendlich viele Arten Gruppen von drei Kreisen construieren lassen, in Bezug auf welche seine Ecken die Ähnlichkeitspunkte sind.* Dazu braucht man allerdings den schon Pappos (um 300) bekannten

Satz vom vollständigen Vierseit[1]: *Auf jeder Diagonale eines vollständigen Vierseits trennen sich die beiden darauf liegenden Ecken und die Schnittpunkte mit den anderen beiden Diagonalen harmonisch.*

1 Ein in der 9. Jahrgangsstufe möglicher Beweis findet sich in [13].

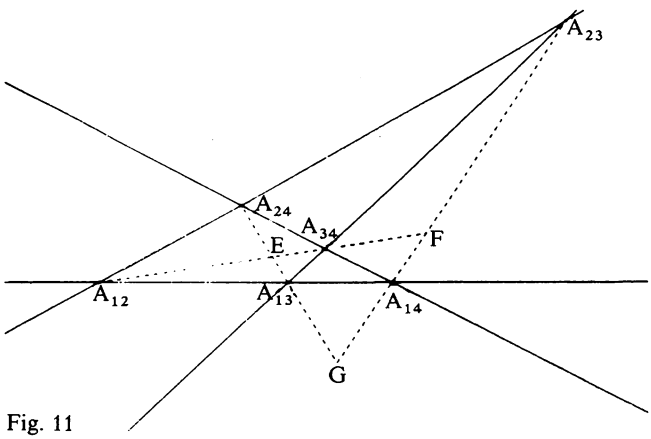

Fig. 11

Hierbei sind allerdings die Diagonalen als Geraden und nicht – wie bisher – als Strecken aufzufassen. Im Rahmen der affinen Geometrie ist außerdem zu beachten, daß zwei der Diagonalen eines vollständigen Vierseits parallel sein können; diesen Fall haben wir aber schon im vorigen Abschnitt behandelt und schließen ihn deshalb von den folgenden Betrachtungen aus. Es sei also angenommen, daß die Diagonalenschnittpunkte E, F, G eines gegebenen Vierseits existieren. Wir wählen einen beliebigen Kreis K_1 um E und konstruieren dazu zunächst den Kreis K_2 um F, der sich aus K_1 durch zentrische Streckung von A_{12} ergibt. Dann ist A_{12} äußeres und wegen der Eindeutigkeit des vierten harmonischen Punktes A_{34} inneres Ähnlichkeitszentrum der beiden Kreise. Als nächstes strecken wir K_2 zu einem Kreis um G vom Zentrum A_{23} aus; nun bilden A_{23} und A_{14} die Ähnlichkeitszentren der Kreise K_2 und K_3. Aus dem Satz von Monge folgt dann aber auch, daß die Punkte A_{13} und A_{24} die Ähnlichkeitszentren der Kreise K_1 und K_2 sind, und damit ist alles getan.

8. Vom Satz von Menelaos zum Satz von Bodenmiller

Angeregt durch einen Vortrag des damals am Polytechnikum in Dresden tätigen Oskar Schlömilch im Rahmen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig [21] hat August Ferdinand Möbius zwei Beweise des Satzes von Bodenmiller gegeben [15]. Wie die Argumentation im vorigen Abschnitt beruht der erste Beweis von Möbius auf der wegen des Satzes vom vollständigen Vierseit möglichen Interpretation der Bodenmillerschen Kreise als Apollonioskreise, vermeidet aber den Bezug auf den Satz von Monge und verwendet stattdessen den auch in der 9. Jahrgangsstufe zu behandelnden

Satz von Menelaos (um 100 v. Chr.) [1, S. 33], [12, S. 42]: *Schneidet eine Gerade die drei Seiten eines Dreiecks in drei paarweise verschiedenen Punkten, so ist das Produkt der (absoluten) Teilverhältnisse in zyklischer Reihenfolge gleich 1.*

Versieht man die Teilverhältnisse mit einem Vorzeichen, um innere und äußere Teilung zu unterscheiden, so hat das im Satz von Menelaos auftretende Produkt auf Grund des sogenannten „Axioms von Pasch“ den Wert -1, wenn die äußere Teilung negativ genommen wird; so wird der Satz von Menelaos heute in den Lehrbüchern im allgemeinen formuliert. Aber wir benötigen hier den Satz von Menelaos im Zusammenhang mit dem Apollonioskreis und da kommt es auf die Absolutbeträge der Teilverhältnisse an.

Nun bezeichnen wir die Schnittpunkte der Diagonalen wieder mit E, F, G und schreiben die zugehörigen Verhältnisgleichungen auf. Der Bodenmillersche Kreis mit dem Durchmesser $[A_{12}A_{34}]$ ist der geometrische Ort aller Punkte X mit

$$\frac{\overline{FX}}{\overline{EX}} = \frac{\overline{FA_{12}}}{\overline{EA_{12}}}. \tag{16}$$

Analog ist der Bodenmillersche Kreis mit dem Durchmesser $[A_{13}A_{24}]$ der geometrische Ort aller Punkte X mit

$$\frac{\overline{EX}}{\overline{GX}} = \frac{\overline{EA_{13}}}{\overline{GA_{13}}} \tag{17}$$

und der Bodenmillersche Kres mit dem Durchmesser $[A_{14}A_{23}]$ ist der geometrische Ort aller Punkte X mit

$$\frac{\overline{FX}}{\overline{GX}} = \frac{\overline{FA_{14}}}{\overline{GA_{14}}}. \tag{18}$$

Wir betrachten nun die Gerade g_1 als Transversale des Dreiecks EFG. Dann liefert der Satz von Menelaos:

$$\frac{\overline{FA_{12}}}{\overline{EA_{12}}} \cdot \frac{\overline{GA_{14}}}{\overline{FA_{14}}} \cdot \frac{\overline{EA_{13}}}{\overline{GA_{13}}} = 1\,. \tag{19}$$

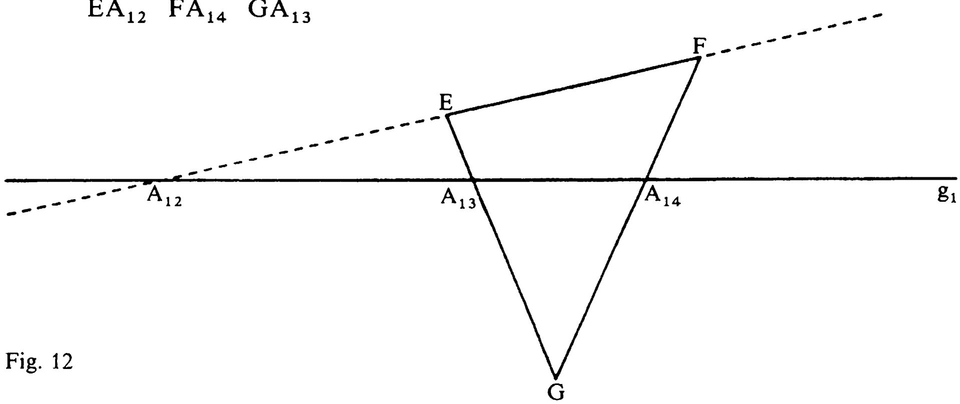

Fig. 12

Damit ist die Gleichung (18) äquivalent zu

$$\frac{\overline{FX}}{\overline{GX}} = \frac{\overline{FA_{12}}}{\overline{EA_{12}}} \cdot \frac{\overline{EA_{13}}}{\overline{GA_{13}}}. \tag{20}$$

Nun sehen wir sofort, daß ein Punkt X, für den zwei der Gleichungen (16), (17), (20) gelten, auch der dritten genügt, was wiederum die schwache Fassung des Satzes von Bodenmiller ergibt.

9. Der Satz von Gauß

Die Vorgeschichte des Satzes von Bodenmiller reicht bis zu Isaac Newton (1643–1727) zurück [32, S. 1003]. Newton bewies, daß der Mittelpunkt eines Mittelpunktskegelschnitts, der die Seiten eines Vierecks (innen oder außen) berührt, auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der Diagonalen des Vierecks liegt [14, 1. Buch, Korollar 3 zu Lemma 25]. Ohne Bezug auf Newton hat Carl Friedrich Gauß (1777–1855) im Jahr 1810 bei der Bestimmung der größten Ellipse, die einem Viereck einbeschrieben werden kann, etwas Ähnliches bewiesen: *Die Mittelpunkte aller Ellipsen, die einem vollständigen Vierseit mit sechs eigentlichen Ecken einbeschrieben werden können, liegen auf einer Geraden* [9]. Interessant ist, daß Gauß dabei für die Darstellung der Seiten des betrachteten Vierecks im Prinzip die Hessesche Normalform verwendet, obwohl Ludwig Otto Hesse (1811–1875) noch nicht geboren war. Wichtig in unseren Zusammenhang ist eine Folgerung, die Gauss aus seinem Ergebnis zieht. Er bemerkt, daß man die Diagonalen eines vollständigen Vierseits mit sechs eigentlichen Ecken als Ellipsen der Dicke 0 auffassen kann, die alle vier Seiten berühren, also

Die Mittelpunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen auf einer Geraden.

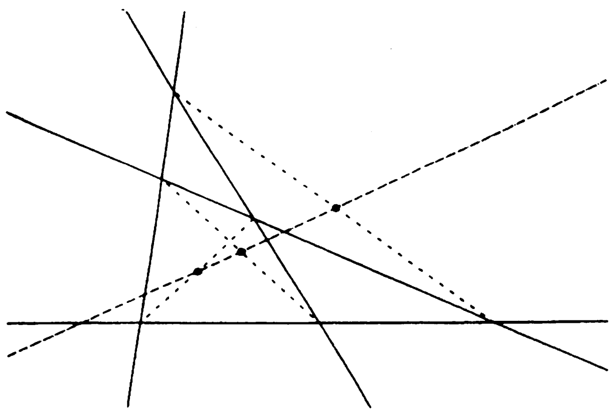

Fig. 13

Diese Aussage wird gelegentlich auch als Gaußscher Satz bezeichnet und kann als Teil des Satzes von Bodenmiller angesehen werden: Wenn die drei Bodenmillerschen Kreise eine Sehne gemeinsam haben, müssen ihre Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten zu dieser Sehne, also auf einer Geraden, liegen. Unser vektoralgebraischer Ansatz im zweiten Abschnitt zeigt unmittelbar, daß dies bei jeder Lage der Bodenmillerschen Kreise der Fall ist und daß die durch die Gleichung (7) beschriebene Gerade immer senkrecht auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte steht. Die genauere Geschichte des Gaußschen Satzes bis zum Ende des 19. Jahrhunderts ist in [24, S. 157] dargestellt. Einen neuen, projektiven Beweis hat Ludwig Bieberbach (1886–1982) angegeben [3]; auch Günter Pickert hat zwei Beweise geliefert, einen vermittels verallgemeinerter komplexer Zahlen [18], den anderen inzidenzgeometrisch, unter Herausstellung der Rollen des Fa-no-Axioms und des Schließungssatzes von Pappos [19]. Gauß selbst fand den Satz so bemerkenswert, daß er in seiner Arbeit [9] noch „einen einfachen directen Beweis" angab, der auf der Charakterisierung der Kollinearität von Punkten (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) der Ebene durch die Gleichung

$$x_1(y_2 - z_2) + y_1(z_2 - x_2) + z_1(x_2 - y_2) = 0$$

– das ist die nennerlose Form der bekannten Bedingung an die Steigungen

$$\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1} = \frac{z_2 - y_2}{z_1 - y_1}$$

– beruht und zeigt, daß dieser Satz sogar schon in der 8. Jahrgangsstufe verständlich gemacht werden könnte. Im Jahr 1854 äußert sich Schlömilch zur Bedeutung des Gaußschen Satzes [21]:

Unter den verschiedenen merkwürdigen Eigenschaften des vollständigen Vierecks zeichnet sich der Gauss'sche Satz, dass die Mittelpunkte der drei Diagonalen in gerader Linie liegen, durch eine fast gänzlich isolierte Stellung aus, und es ist bis jetzt noch nicht bemerkt worden, zu welchem grösseren Abschnitte der neueren Geometrie er eigentlich gehört.

Unter den Folgerungen, die Schlömilch aus diesem Satz zieht, befindet sich auch der Satz von Bodenmiller, allerdings ohne Nennung des Namens. Darauf wollen wir hier nicht weiter eingehen, sondern stattdessen den zweiten Beweis von Möbius darstellen, der ebenfalls den Gaußschen Satz verwendet.

10. Vom Gaußschen Satz zur starken Fassung des Satzes von Bodenmiller

Das Thema *Potenz und Potenzgerade* wird für die 9. Jahrgangsstufe vorgeschlagen; ist es behandelt, so kann die früher angegebene starke Fassung des Satzes von Bodenmiller formuliert werden:

Satz von Bodenmiller: *Die zu je zwei Bodenmillerschen Kreisen eines vollständigen Vierseits gebildeten Potenzgeraden fallen zusammen.*

Die Potenzgerade zweier nicht konzentrischer Kreise ist senkrecht zur Zentrale. Aus dem Gaußschen Satz folgt damit, daß die drei Potenzgeraden zu je zwei Bodenmillerschen Kreisen parallel sind. Es genügt also zum Beweis des Satzes von Bodenmiller nachzuweisen, daß diese Geraden einen Punkt gemeinsam haben. Dies zeigt Möbius in seinem zweiten Beweis [15], wiederum bis auf den Sonderfall, in dem zwei Diagonalen des betrachteten Vierseits parallel zueinander sind. Wird dies ausgeschlossen, so bilden die Schnittpunkte E, F, G der Diagonalen ein Dreieck und Möbius rechnet aus, daß der Umkreismittelpunkt M dieses Dreiecks auf jeder der drei Potenzgeraden liegt. Wir wollen das für die Potenzgerade der Bodenmillerschen Kreise mit den Strecken $[A_{12}A_{34}]$ und $[A_{13}A_{24}]$ als Durchmesser nachvollziehen.

Dazu bezeichne M' den Mittelpunkt der Strecke $[A_{12}A_{34}]$ und M'' den Mittelpunkt der Strecke $[A_{13}A_{24}]$; r' sei der Radius des Bodenmillerschen Kreises mit dem Mittelpunkt M' und r'' der Radius des Bodenmillerschen Kreises mit dem Mittelpunkt M''. Ferner

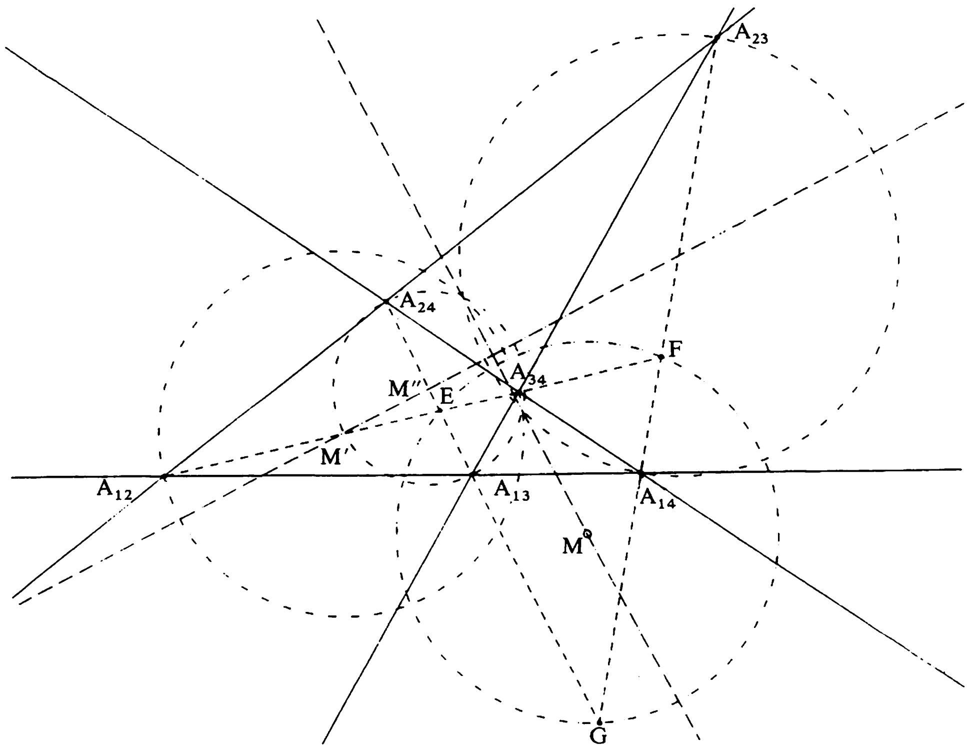

Fig. 14

bezeichne r den Radius des Umkreises K des Dreiecks EFG. Die einzige Schwierigkeit an diesem Beweis ist, daß der Satz vom vollständigen Vierseit wieder eingeht. Er liefert zunächst die harmonische Teilung der Strecke $[A_{12}A_{34}]$ durch die Punkte E und F, also

$$r'^2 = \overline{M'E} \cdot \overline{M'F} \tag{21}$$

(siehe [12, S. 59, Aufgabe 3c]). Da M' nicht zwischen E und F, also außerhalb von K liegt, stellt die rechte Seite dieser Gleichung die Konstante des Sekantensatzes, das heißt, die Potenz von M' (siehe Seite 9) bezüglich K dar; also gilt

$$\overline{M'E} \cdot \overline{M'F} = \overline{MM'^2} - r^2 . \tag{22}$$

Diese beiden Gleichungen zusammen ergeben:

$$r'^2 = \overline{MM'^2} - r^2 . \tag{23}$$

Analog erhalten wir:

$$r''^2 = \overline{MM''^2} - r^2 . \tag{24}$$

Lösen wir nun die Gleichungen (23) und (24) nach r^2 auf und setzen die erhaltenen Werte gleich, so ergibt sich

$$\overline{MM'^2} - r'^2 = \overline{MM''^2} - r''^2 . \tag{25}$$

Diese Gleichung besagt aber gerade, daß der Punkt M bezüglich der Bodenmillerschen Kreise mit den Mittelpunkten M' und M'' die gleiche Potenz hat, also auf der Potenzgeraden dieser beiden Kreise liegt. Damit ist auch dieser Beweis abgeschlossen.

11. Schlußwort

Aus den vorgestellten Beweisen ergibt sich, daß der Satz von Bodenmiller – Steiner sicherlich ein Thema für die analytische Geometrie der Kollegstufe ist, wo er ohne großen Aufwand behandelt werden kann. Auch für eine Besprechung in der Mittelstufengeometrie hätten die Schüler das nötige Rüstzeug, allerdings ist dafür doch ein erheblicher Zeitaufwand anzusetzen. Allenfalls der Spezialfall für Vierseite mit parallelen Diagonalen hat im Normalunterricht Platz. Deshalb überlassen wir auch dem Leser die Überlegung, ob und mit welchem Aufwand der Steinersche Anteil an dem Gesamtthema in der Mittelstufe zu behandeln wäre.

12. Anhang

Hier werden Teilergebnisse zu der mehr mathematischen als didaktischen Frage dargestellt, wann sich die Bodenmillerschen Kreise eines Vierseits paarweise berühren. Die Berechnungen benutzen die in Figur 2 eingeführten Vektoren. Die durch die Gleichungen (5) beschriebenen Bodenmillerschen Kreise werden dabei in der dort gegebenen Reihenfolge als *erster*, *zweiter* und *dritter* Bodenmillerscher Kreis bezeichnet.

Zunächst geben wir die Überlegungen von Herrn Pickert wieder. Die Berührsituation liegt genau dann vor, wenn der erste Bodenmillersche Kreis (Mittelpunkt $\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$, Radius $\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|$) die Potenzlinie des ersten und zweiten Bodenmillerschen Kreises berührt. Letztere hat aufgrund der Gleichungen (5) die Darstellung

$$P_1 - P_2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 0 .$$

Es sei nun $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ gesetzt, und $\boldsymbol{n}$ bezeichne den zugehörigen Einheitsvektor: $\boldsymbol{n} = |\boldsymbol{d}|^{-1}\boldsymbol{d}$. Die angegebene Berührbedingung besagt also, daß einer der beiden Punkte mit den Ortsvektoren $\frac{1}{2}\boldsymbol{b} \pm \frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{n}$ auf der Potenzlnie liegt, also eine der Gleichungen

$$\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{b} \pm |\boldsymbol{d}| \cdot |\boldsymbol{b}| = 2 \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} \tag{26}$$

erfüllt sein muß. Um diese Gleichung weiter zu diskutieren, nehmen wir ohne wesentliche Einschränkung $\boldsymbol{b}$ als Einheitsvektor an, das heißt $|\boldsymbol{b}| = 1$, und wählen einen dazu orthogonalen Einheitsvektor $\boldsymbol{e}$. Damit setzen wir an:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} &= \mathrm{u}\boldsymbol{b} + \mathrm{v}\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{a} &= \mathrm{x}\boldsymbol{b} + \mathrm{y}\boldsymbol{e} \end{aligned}$$

und erhalten für (26) die Koordinatengleichung

$$\left(x-\frac{u}{2}\right)^2+\left(y-\frac{v}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{(u-1)^2+v^2})^2.$$

Bei festgehaltenen Punkten A_{12}, A_{34} und festgehaltenem Vektor $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ ist also der geometrische Ort für diejenigen Punkte A_{13} mit Berührung (der Bodenmillerschen Kreise) entweder

a) ein Kreis oder
b) ein Paar von konzentrischen Kreisen,

wobei der Mittelpunkt dieser Kreise auf den Mittelpunkt des zweiten Bodenmillerschen Kreises fällt.

Im Fall $v=0$ sind zwei Diagonalen des zugrundeliegenden Vierseits parallel; man hat dabei $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}=u-1$, also $|\boldsymbol{d}|=|u-1|$, so daß das eine Vorzeichen in (26) gerade $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$ und das andere $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, das heißt, $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$, ergibt, das sind die in Figur 9 gezeigten Fälle.

Soweit der Gedankengang von Herrn Pickert. Alternativ kann man sich bemühen, unter Festhalten der Punkte A_{12}, A_{13}, A_{23}, A_{24} den Punkt A_{14} konstruktiv so zu ermitteln, daß der Berührfall auftritt. Dazu genügt es natürlich, den Mittelpunkt M''' des dritten Bodenmillerschen Kreises zu bestimmen. Er ergibt sich als Schnittpunkt zweier Ortslinien:

1. der Mittelparalleln des Dreiecks $A_{12}A_{13}A_{23}$ als dem geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Strecken, die den Punkt A_{23} mit einem Punkt der Geraden g_1 verbinden, und

2. der Hyperbel mit den Brennpunkten A_{24} und M'' (Mittelpunkt des zweiten Bodenmillerschen Kreises), deren Punkte von den Brennpunkten die Abstandsdifferenz r'' (Radius des zweiten Bodenmillerschen Kreises) aufweisen, als dem geometrischen Ort aller Mittelpunkte von Kreisen, die den zweiten Bodenmillerschen Kreis berühren und den Punkt A_{23} enthalten.

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. Rudolf Fritsch, Mathematisches Institut, Universität München, Theresienstraße 39, 8000 München 2

Eingangsdatum: 11.10.1991

Literatur

[1] Barth, F., Krumbacher, G., Matschiner, E. und Ossiander, K.: Anschauliche Geometrie 3. München: Ehrenwirth 1988
[2] Bell, E.T.: Die großen Mathematiker. Düsseldorf – Wien: Econ-Verlag 1967
[3] Bieberbach, L.: Gaußgerade, Hoenigpunkt, Steinergerade, Kegelschnitte. In: Praxis der Mathematik 17 (1975), S. 201–205
[4] Bos, W.: Vektorielle Behandlung von Kreisbüscheln und Kreisbündeln. In: Didaktik der Mathematik 2 (1974), S. 63–80
[5] Cantor, M.B.: Gudermann. In: Allgemeine Deutsche Biographie S. 87–88
[6] Chasles, M.: Traité de Géométrie supérieure. Paris: Gauthier-Villars 1880, S. 234
[7] Dingeldey, F.: Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme. IIIC 1 in: Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Dritter Band *Geometrie*, Zweiter Teil, Erste Hälfte. Leipzig: B.G. Teubner 1903, S. 1–160
[8] Durrande, J.B. und Vecten: Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 132 de ce volume. In: Gergonne, Annales de Mathématiques 11 (1820/21), S. 364–367
[9] Gauß, C.F.: Bestimmung der größten Ellipse, welche die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berührt. In: Zach's Monatliche Correspondenz für Erd- und Himmelskunde 22 (1810), S. 112–121;
auch abgedruckt in: Werke, Band 4. Göttingen 1880, S. 385–392
[10] Gudermann, C.: Grundriß der analytischen Sphärik. Köln: M. DüMont-Schauberg 1830

[11] Gudermann, C.: 10. Lehrsatz. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik 6 (1830), S. 213
[12] Kratz, J.: Geometrie, 9. Schuljahr. München: Bayerischer Schulbuch-Verlag 1987
[13] –: Zentrale Themen des Geometrieunterrichts aus didaktischer Sicht. Erscheint im Bayerischen Schulbuch-Verlag. München
[14] Newton, I.: Philosophiae naturalis principia mathematica. London: 1687
[15] Möbius, A. F.: Zwei rein geometrische Beweise des Bodenmillerschen Satzes. In: Berichte über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Classe 6 (1854), S. 87–91;
auch abgedruckt in: Gesammelte Werke, Band 2, Seite 237–242
[16] Monge, G.: Géométrie descriptive, leçons données aux Écoles normales l'an 3 de la République. Paris: impr. de Baudouin [1]VII (22.9.1798–21.9.1799)
[17] NN: Christoph Gudermann. In: Neuer Nekrolog der Deutschen 29 (1851), 751–758
[18] Pickert, G.: Eine affingeometrische Anwendung der komplexen Zahlen. In: Mathematische Semesterberichte 37 (1990), S. 240–250
[19] Pickert, G.: Ein synthetischer Beweis des Satzes von der Gauß-Geraden eines Vierseits. In: Praxis der Mathematik 33 (1991), S. 164–165
[20] Reye, Th.: Geometrie der Lage, I. Abteilung. Hannover: Carl Rümpler [2]1877
[21] Schlömilch, O.: Über das vollständige Viereck. In: Berichte über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Classe 6 (1854), S. 4–13
[22] Schubring, G.: Warum Karl Weierstrass beinahe in der Lehrerprüfung gescheitert wäre. In: Der Mathematikunterricht 35/1 (1989), S. 13–29
[23] Serret, P.: Géométrie de direction. Paris: Gauthier-Villars 1869
[24] Simon, M.: Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert. Leipzig: B.G. Teubner 1906
[25] Steinberg, G.: Entdecken – Erkennen – Verstehen, Unterrichtsbeispiele für einen gebietsübergreifenden Mathematikunterricht in verschiedenen Klassenstufen. In: Der Mathematikunterricht 32/5 (1986), S. 28–58
[26] Steiner, J.: Théorème sur le quadrilatère complet. In: Gergonne, Annales de Mathématiques 18 (1827/28), S. 302–303;
auch abgedruckt in: Gesammelte Werke, I. Band, S. 223, Berlin: Reimer 1881
[27] Steiner, J.: Systematische Entwicklung. 1832;
auch abgedruckt in: Gesammelte Werke, I. Band, S. 287, Berlin: Reimer 1881
[28] Study, E.: Elementare Beweise einiger geometrischer Sätze. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik 94 (1883), S. 233–236
[29] Weiß, G.: Die Vierseiteigenschaften von Bodenmiller und Steiner. In: First Geometry Colloquium (Graz 1980), Bericht No. 167, Forschungszentrum Graz. Graz: 1981, S. 163–167
[30] Weiß, G.: Eine räumliche Deutung der Vierseiteigenschaft von Bodenmiller. In: Elemente der Mathematik 37 (1982), S. 21–23
[31] Wußing, H. und Arnold, W.: Biographien bedeutender Mathematiker. Berlin: Volk und Wissen 1975
[32] Zacharias, M.: Elementargeometrie. IIIAB9 in: Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Dritter Band *Geometrie*, Erster Teil, Zweite Hälfte. Leipzig: B.G. Teubner 1914, S. 859–1172

Bei einem Vortrag über den Inhalt dieser Arbeit machte Herr Professor E. Schröder (Hamburg) darauf aufmerksam, daß auf der Potenzgeraden eines vollständigen Vierseits noch vier weitere merkwürdige Punkte liegen, die sogenannten *Orthopole* der Seiten des Vierseits bezüglich des durch die jeweils drei anderen Seiten gebildeten Dreiseits (R. Goormaghtigh, Question 2388, in: *Novelles Annales de Mathématiques*, Série 4, 19 (1919), S. 39). Man spricht seitdem auch von der *Acht-Punkte-Geraden* des Vierseits.