ZDM

Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

International Reviews on Mathematical Education

Berichtsteil	Dokumentationsteil
S. 1– 40 Heft 85/1	Nr. 0001–0558 Heft 85/1
S. 41– 68 Heft 85/2	Nr. 0559–1152 Heft 85/2
S. 69– 98 Heft 85/3	Nr. 1153–1772 Heft 85/3
S. 99–134 Heft 85/4	Nr. 1773–2358 Heft 85/4
S. 135–174 Heft 85/5	Nr. 2359–2925 Heft 85/5
S. 175–200 Heft 85/6	Nr. 2926–3422 Heft 85/6

Jahrgang 17 1985

Herausgegeben von / Edited by

- Fachinformationszentrum Energie, Physik, Mathematik GmbH, Karlsruhe
- Zentrum für Didaktik der Mathematik an der Universität Karlsruhe

(Träger / supported by: Verein zur Förderung der Didaktik der Mathematik e. V., Karlsruhe)

Redaktionskomitee /Editorial board

M. Barner, Freiburg
H. Bauersfeld, Bielefeld
H. Freudenthal, Utrecht
H. Griesel, Kassel
K. P. Grotemeyer, Bielefeld
A. Kirsch, Kassel
H. Kunle, Karlsruhe
G. Pickert, Gießen
H.-G. Steiner, Bielefeld

Wissenschaftlicher Beirat / Advisory board

P. Abellanas, Madrid
W. Böddeker, Recklinghausen
B. Christiansen, Kopenhagen
H. Coers, Dortmund
A. Delessert, Lausanne
Z. P. Dienes, Sherbrooke
J. Dormolen, Utrecht
J. Dzewas, Hamburg
A. Engel, Frankfurt
W. L. Fischer, Erlangen
F. Flohr, Freiburg
J. Fortrin, Quebec
A. Fricke, Braunschweig
M. Glaymann, Lyon
H. B. Griffiths, Southampton
E. Hlawka, Wien
G. Holland, Gießen
M. Jeger, Zürich
W. Jung, Frankfurt
L. Kieffer, Luxembourg
J. Kilpatrick, Athens
D. Kurepa, Beograd
J. Laub, Wien
D. Laugwitz, Darmstadt
P. Lesky, Stuttgart
P. Lorenzen, Erlangen
H. Meschkowski, Berlin
B. H. Neumann, Canberra
H. Noack, Kiel
F. Ostermann, Köln
G. Papy, Brussel
A. Pescarini, Ravenna
L. Råde, Göteborg
F. Raith, Freiburg
A. Revuz, Paris
R. Schramm, Tel-Aviv
K. Seebach, München
H. Stever, Landau
J. Suranyi, Budapest
H. Tietz, Hannover
H.-J. Vollrath, Würzburg
I. Weidig, Landau

Schriftleiter / Managing editor

Gerhard König

Wissenschaftliche Bearbeitung / Scientific staff

Gerhard König
Marianne Marmé
Beate Ruffer-Beedgen
Rainer Wenz

Mitarbeiter des Dokumentationsteils / Contributors of documentation section

I. Arendt, Karlsruhe
C. F. Cotti, Parma
E. Derwort, Bremen
G. Ervynck, Gent
K. Haussmann, Karlsruhe
R. Herrmann, Paderborn
T. Heußer, Hemsbach
E. Höfer, Korb
R. Kapadia, London
S. L. Kemme, Groningen
C. Laborde, Grenoble
H. Maier, Regensburg
M. Mitchelmore, Stuttgart
F. Nestle, Ulm
H. Noack, Kiel
M. Ost, Karlsruhe
G. Scheu, Karlsruhe
F. Schweiger, Salzburg
R. Stürmer, Zweibrücken

Beiträge / Contributions

Beiträge, Zuschriften und Besprechungsstücke erbitten wir an die Redaktion des ZDM im Fachinformationszentrum Energie, Physik, Mathematik GmbH, 7514 Eggenstein-Leopoldshafen 2

Material for publication, general editorial correspondence and books for review should be addressed to the ZDM Fachinformationszentrum Energie, Physik, Mathematik GmbH, 7514 Eggenstein-Leopoldshafen 2.

Bezugsbedingungen / Subscription information

Jährlich erscheinen 6 Hefte (zweimonatlich).
Die Zeitschrift kann direkt vom Verlag oder durch eine Buchhandlung bezogen werden.
Einzelpreis DM 45,–/ÖS 391,–, Jahresbezugspreis DM 220,–/ÖS 1914,–; jeweils zuzüglich Zustellgebühr.
Die Bezugsgebühr verlängert sich jeweils um 1 Jahr, wenn bis zum 15. November keine Abbestellung vorliegt.

This journal appears bimonthly. One volume consists of 6 issues.
Orders can either be placed with your bookdealer or sent directly to Ernst Klett Verlag.
Subscriptionrate: DM 220,– per year (volume) plus postage and handling; price per issue DM 45,–

Anzeigen / Advertisements

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Jürgen Meissner, Ernst Klett Verlag
Zur Zeit ist Anzeigenpreisliste Nr. 9 vom 1. 1. 1983 gültig.

For advertisement rates please apply to the publisher.

Verlag / Published by

Ernst Klett Verlag
Postfach 809
7000 Stuttgart 1

© Ernst Klett Verlage GmbH u. Co. KG, Stuttgart 1985
Alle Rechte vorbehalten / All rights reserved

Druck / Printed by:
Röck, Weinsberg
Printed in Germany

ISSN 0044-4103

BERICHTSTEIL / ARTICLES SECTION

INHALTSVERZEICHNIS / CONTENTS

Analysen/Analyses

Geschichte des Mathematikunterrichts/History of mathematics education

Mathematik in der Realschule/Mathematics at German Realschulen (secondary schools generally for pupils aged 11–16 after completion of primary schools, involving altogether ten years attendance at school)

Hans Freudenthals 80. Geburtstag. Vorträge des HF-80 Symposiums, Utrecht, 21. 9. 85/Hans Freudenthal's 80th birthday. Papers presented at the HF-80 symposium, Utrecht, September 21, 1985

Rezensionen/Book reviews

Informationen/Information

Tagungsberichte/Conference reports

AUTORENREGISTER/AUTHOR INDEX

Eine *kursiv* gesetzte Seitenangabe weist auf einen Beitrag des Autors im ZDM hin; andernfalls wird auf die Besprechung eines Werkes bzw. Vortrags des angeführten Autors verwiesen.

BIGALKE, Hans-Günther:

Kugelgeometrie

Frankfurt am Main: Salle, 1984. – 400 S.
ISBN 3-7935-5530-5
Aarau: Sauerländer, 1984
ISBN 3-7941-2478-2

Rudolf FRITSCH, München

Die Strukturmathematik der vergangenen Jahrzehnte, Bourbaki und die Kategorientheorie, haben große Verdienste um die Aufklärung der inneren Zusammenhänge der verschiedenen Zweige der Mathematik und ihrer Anwendungen. Versucht man, sich die Mathematik als einen lebenden Organismus zu veranschaulichen, so könnte man sagen, daß die Strukturen das Skelett dieses Organismus bilden. Die damit verbundene hohe Abstraktion bei zugleich einfachen Grundelementen hat auf viele Mathematiker des 20. Jahrhunderts einen enormen Reiz ausgeübt, der in einem übertriebenen Eindringen der sogenannten „Mengenlehre" in den Schulunterricht, sogar in der Grundschule, gipfelte. Aber der Rausch ist nun verflogen. Was wir gegenwärtig erleben, könnte man beinahe unter das Motto stellen „zurück zur Natur". Um das Bild vom Organismus noch einmal aufzugreifen, das Fleisch um das Skelett wird wieder entdeckt. Selbstverständlich sollte dabei das Kind nicht mit dem Bade ausgeschüttet werden, was in manchen neuen Lehrplänen passiert. Die Strukturen bilden weiterhin einen wichtigen Zweig reiner und angewandter Forschung – man denke nur an die enge Verbindung zwischen formaler Logik und Informatik! Kein praktizierender Mathematiker kommt heute ohne Strukturtheorie aus. Aber das Knochengerüst alleine ist nicht lebensfähig. Diese Erkenntnis beginnt sich auch langsam in den Hochschulen durchzusetzen, indem man immer mehr auch klassische Stoffe der Mathematik behandelt. Eine Vorlesung unter dem Thema „Anwendungsorientierte Kugelgeometrie", wie sie Bigalke vor kurzem in Hannover gehalten hat, wäre vor 15 Jahren wohl kaum in irgendeinem Vorlesungsverzeichnis zu finden gewesen. Aber sie füllt sicher eine Lücke im Lehrangebot, das sich sonst im wesentlichen an Forschungsinteressen orientiert. Glücklicherweise wird auch den Mathematikern mehr und mehr klar, daß sie aus ihrem Elfenbeinturm herausgehen und der breiteren Öffentlichkeit zeigen müssen, wie sehr auch die abstrakten Begriffsbildungen für Anwendungen von Bedeutung sind.

Entstanden ist aus dieser Vorlesung das vorliegende inhaltsreiche Buch „Kugelgeometrie". In seiner Einleitung weist der Verfasser auf das breite Spektrum der Anwender dieses mathematischen Gebietes hin: Kartographen, Geodäten, Astronomen, Navigatoren und Kristallographen. Die Konzeption des Verfassers lautet: „Kugelgeometrie wird als ‚Geometrie auf der Kugel' verstanden. Auf alle anderen möglichen Interpretationen wird hier verzichtet. Das Buch ist von Anwendungen her aufgebaut, jedoch nicht primär für Anwender geschrieben. Anwender werden auf die Spezialliteratur verwiesen, finden in diesem Buch aber die mathematischen Grundlagen bezüglich der von ihnen benötigten sphärischen Trigonometrie. Alle benötigten Kenntnisse aus der ebenen Trigonometrie werden vorausgesetzt. Die Anwendungsorientierung schlägt sich darin nieder, daß die mathematischen Inhalte sich in den meisten Fällen aus dem Bestreben ergeben, praxisorientierte Fragestellungen zu beantworten. Dabei wird auf die Herleitung vieler in der sphärischen Trigonometrie bisher üblicher Formelsysteme verzichtet. Es zeigt sich nämlich, daß man praktisch im wesentlichen mit drei Sätzen auskommt: mit dem Sinussatz, dem Seiten-Kosinussatz und dem Kotangenssatz. Die besondere Betonung der kugelgeometrischen Aspekte kommt darin zum Ausdruck, daß geometrische Konstruktionen und die Diskussion geometrischer Zusammenhänge besonders gepflegt werden. Die geometrischen Darstellungen in den Figuren sind in der Regel so angelegt, daß an ihnen auch gemessen werden kann. Bei allen Darstellungen wird auf Schulung der Anschauung und des räumlichen Vorstellungsvermögens großer Wert gelegt. Dabei wird aber absichtlich keine ‚Darstellende Geometrie' betrieben."

Das vorgelegte Material ist in 10 Kapitel gegliedert:

1. Einführung einiger Grundbegriffe und Grundkonstruktionen
2. Dreiecke auf der Kugel
3. Aus der Navigation
4. Metrik und Krümmung der Kugel
5. Abbildungen der Kugel in die Ebene bzw. eines Rotationsellipsoids auf die Kugel
6. Sphärische Astronomie
7. Astronomische Zeit- und Ortsbestimmungen
8. Die Isometrien der Kugel
9. Kristallgeometrie
10. Kugelteilungen.

Jedes Kapitel wird – wie angekündigt – eingeleitet durch einige Fragen aus der Praxis, zu deren Beantwortung dann die mathematischen Grundlagen entwickelt werden. Das ist ein guter didaktischer Trick, der den Leser in Spannung hält. Hier seien als Beispiele wiedergegeben:

1b) Wie findet man zeichnerisch die Entfernung zwischen Hannover und Tokio und die Richtung, in der Tokio von Hannover aus gesehen liegt?

3b) An einem Ort werden die Funksignale von zwei Sendern, die mit derselben Frequenz phasengleich senden, empfangen. Wie kann aus der Phasendifferenz der Ort des Empfängers bestimmt werden?

6b) Wo war der Sirius am 1. 5. 81 in Hannover zu beobachten?

7f) Wie kann man die Ortsveränderung bei einem fahrenden Schiff für die Ortsbestimmung ausnutzen?
9c) Können die Kristalle aufgrund der ihnen zugrundeliegenden geometrischen Symmetrien klassifiziert werden?

Es ist klar, daß die angesprochenen Themenkreise in einem Lehrbuch vernünftigen Umfangs nicht erschöpfend behandelt werden können. Wenn man sich trotzdem an ein solches Unternehmen wagt, besteht die Gefahr, daß unter knapper und kurzer Ausdrucksweise die Verständlichkeit leidet. Der Verfasser hat aber aus der Not eine Tugend gemacht und sich der Mühe unterzogen, die Grundlagen, insbesondere die geometrischen Konstruktionen, in aller Ausführlichkeit zu erklären; für die offenbleibenden Probleme gibt er dann weiterführende Literatur an, die in einem ausführlichen und nach Kapiteln gegliederten Literaturverzeichnis zusammengefaßt ist. (Im Zeichen der gegenwärtigen Nostalgiewelle wünschte man sich vielleicht noch etwas mehr historische Hinweise, aber auch das würde den Umfang des Buches sprengen.)

Nun zum Inhalt im einzelnen. Das erste Kapitel und einige Teile des zweiten decken zusammen etwa den Stoff ab, der in den früheren Schulbüchern zur sphärischen Trigonometrie behandelt wurde. Jedoch wird der Grundkonzeption entsprechend mehr Wert auf die geometrischen Konstruktionen, die in aller Ausführlichkeit beschrieben und durchgeführt werden, gelegt als auf trigonometrische Formeln. Einen zentralen Punkt am Beginn des zweiten Kapitels bildet das Pentagramma mirificum, jenes merkwürdige Kugelfünfeck, das von einem rechtwinkligen (aber nicht gleichseitigen) Kugeldreieck erzeugt wird. Es dient vor allem zur Herleitung der *Neperschen* Regel auf dem Wege, auf dem sie wohl auch von John Napier (= Neper, 1550–1617) gefunden wurde. Ein weiterer hier behandelter Begriff, der im vorigen Jahrhundert eine große Rolle spielte und heute – zu Unrecht – fast vergessen ist, ist der von v. Staudt 1842 eingeführte *Eckensinus*. Es handelt sich um eine Funktion, die jeder räumlichen dreiseitigen Ecke eine Zahl im Intervall (0,1] zuordnet und die für die Volumenberechnung von Tetraedern die gleiche Rolle spielt, wie der Sinus eines Dreieckswinkels für die Fläche des Dreiecks, d.h. für ein Tetraeder mit an einer Ecke zusammenstoßenden Kanten a, b, c und zugehörigem Eckensinus p gilt: $V = \frac{1}{6}abcp$. Einen weiteren Edelstein in diesem Kapitel bildet die Diskussion *kleiner* Dreiecke auf der Erdoberfläche, das sind Dreiecke, deren Seitenlängen nicht wesentlich größer als 60 km sind. Es wird dargestellt, wie man in der Geodäsie vorgeht und wie man *Erdellipsoid* oder *Ersatzkugeln*, insbesondere die *Gaußsche Schmiegungskugel* zur Grundlage von Vermessungen und Rechnungen macht. Im Anschluß daran wird das Kapitel in kanonischer Weise durch Überlegungen beendet, wie sich die Theorie der kleinen Dreiecke verwenden läßt, um die Formeln der ebenen Trigonometrie aus denen der sphärischen Trigonometrie zurückzugewinnen.

Im dritten Kapitel wird Seemansgarn gesponnen. Einen roten Faden darin liefert die Frage nach der terrestrischen Ortsbestimmung auf hoher See oder in der Luft, d.h. Fremd- und Eigenpeilung, mit rechnerischer und zeichnerischer Auswertung der Meßergebnisse; hinzu kommt das Problem der Kursfestlegung. All das führt zu interessanten Kurven auf der Kugel: *Orthodrome, Loxodrome* und *Azimutgleiche*. Die Orthodrome beschreibt den kürzesten Weg zwischen Start und Ziel, also einen Großkreisbogen. Die Loxodromen sind Kurven konstanten Kurses (gegen Nord gemessen); sie erlauben die leichteste Navigation unter Inkaufnahme eines Umweges. Kalkülmäßig werden die Loxodromen durch die *Besteckrechnung* erfaßt, konstruktiv mit Hilfe von speziellen Karten: *Großkreiskarten (gnomonische Projektion)* und Mercatorkarten. Dem Zaren aller Reußen, der die Eisenbahn von Moskau nach Petersburg bauen wollte, unterlief – da er Bigalkes Buch verständlicherweise nicht kannte – ein folgenschwerer Fehler. Wütend über die unzähligen Bürgerinitiativen zur Trassenführung entschied er sich für den kürzesten Weg und zeichnete ihn mit einem Lineal eigenhändig auf einer Karte ein. Nur, es war eine Mercatorkarte, dort erscheinen die Loxodromen als Geraden, nicht die Orthodromen wie in Großkreiskarten. So fährt bis heute die Eisenbahn in einem großen Bogen von Moskau nach Petersburg. In der Praxis wählte man früher für eine Reiseroute Stützpunkte auf der Orthodrome und verband diese durch Loxodromenbögen; da verkaufen uns die angewandten Mathematiker die Spline-Interpolation als neuesten Hit und bezeichnen die Geometrie als mathematische Mottenkiste, aber das „Mischsegeln" ist eine uralte Geschichte! Der Verfasser vergißt leider darauf hinzuweisen, daß heute diese Art der Navigation überholt ist. Die bei einem Orthodromenkurs notwendige ständige Kurskorrektur wird heutzutage von Bordcomputer und Satelliten einfach erledigt; unter dem Gesichtspunkt der Energieersparnis wird dann längs der Orthodrome gefahren bzw. geflogen! Schließlich ist noch die Azimutgleiche zu beschreiben: Sie ist der geometrische Ort aller Punkte, in denen sich der Meridian und die Orthodrome zu einem festen Punkt unter einem festen Winkel schneiden.

Kapitel 4 enthält die elementare Differentialgeometrie der Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum bis hin zum Theorema egregium auf knapp 20 Seiten. Hier sind gewisse Zweifel angebracht, ob ein mit Differentialgeometrie nicht vertrauter Leser genügend versteht. Auch wirkt die auf Gauß zurückgehende Notation der Fundamentalgrößen mit E, F, G usw. heute etwas überholt. (Der Verfasser meint dazu: Ich hatte auch zuerst die moderne „Einsteinsche Summationskonvention" benutzt. Das erforderte jedoch einige mühselige Erläuterungen. Als ich dann feststellte, daß die Anwender noch weitgehend die alten Bezeichnungen benutzen und auch Mathematiker in Veranstaltungen, z.B. für Ingenieure, diese noch verwenden, habe ich mich auch dazu entschlossen. Vielleicht war das falsch. In ein paar Jahren könnte sich die neue Bezeichnung vielleicht auch bei den Anwendern durchgesetzt haben.) Wichtig und nützlich ist jedoch am Ende dieses Kapitels die Nennung (ohne Beweis) der differentialgeometrischen und topologischen Eigenschaften der Kugel, die sie unter allen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten auszeichnen.

Das vierte Kapitel dient vor allem der Vorbereitung des fünften. Dieses beginnt mit einem elementaren Beweis dafür, daß die Kugel nicht in die Ebene abwickelbar ist. Darauf beruhen ja die ganzen Probleme der Kartographie, die im folgenden abgehandelt werden. Die Beschreibung der systemimmanenten Verzerrungen erfolgt mit Hilfe der *Verzerrungsellipse* (= Tissotsche Indikatrix 1881). Zunächst werden Beispiele für *echte Kartennetzentwürfe* angegeben. Das sind solche, bei denen

- Meridiane auf Geraden und
- Breitenkreise auf Geraden oder Kreise abgebildet werden, sowie
- die Netzlinien senkrecht aufeinander stehen.

Diese Bedingungen werden vor allem von den *Kegelentwürfen* erfüllt. Die Abbildung eines Stückes der Erdkugeloberfläche in die Ebene erfolgt dabei in einem zweistufigen

Prozeß. Zunächst wird auf einen Kegel abgebildet, dessen Spitze auf der Erdachse, genauer auf ihrer Verlängerung liegt, und der die Kugeloberfläche in einem Breitenkreis berührt. Dabei kommen zwei Extremfälle vor:

1. Die Spitze fällt mit einem der Pole zusammen; dabei degeneriert der Kegel zur Tangentialebene in dem betreffenden Pol. Dann spricht man von einem *azimutalen* Entwurf (hierunter fällt auch die stereographische Projektion).
2. Die Spitze des Kegels liegt im Unendlichen, dann hat man einen *Zylinderentwurf*.

In allen anderen Flächen spricht man von einem *eigentlichen* Kegelentwurf. In der Wahl der Abbildung von der Kugel auf den Kegel bestehen dabei noch gewisse Freiheiten, so daß man nach Wunsch *Mittabstandstreue, Winkeltreue* oder *Flächentreue* erreichen kann. Im zweiten Schritt wird dann der Kegel auf übliche Weise in die Ebene abgewickelt, und man erhält eine Karte von der Form eines Kreissektors. Wenn eine der drei genannten Bedingungen nicht erfüllt ist, so haben wir einen *unechten* Kartenentwurf, wie z.B. bei der Erdkarte, die gelegentlich im Fernsehen als Hintergrund zu sehen ist. Bei den *vermittelnden* Karten hat man global weder Winkel- noch Flächentreue, aber beide Eigenschaften werden approximiert.

Genaue Karten müssen berücksichtigen, daß die Erdoberfläche ja keine exakte Kugel ist und besser durch ein an den Polen abgeplattetes Rotationsellipsoid approximiert wird. Das geschieht in der Weise, daß man zunächst Abbildungen eines Rotationsellipsoides auf eine Kugel betrachtet und ihre Verzerrungen untersucht. Diese beruhen natürlich auf dem verschiedenen Krümmungsverhalten von Ellipsoid und Kugel, lassen sich aber durch geschickte Wahl weitgehend vermeiden, wie am Schluß dieses Kapitels gezeigt wird. Eine wichtige Rolle spielt dabei wieder die Gaußsche Schmiegungskugel.

Nun weiten wir unseren Blick von der Erdoberfläche weg hinaus ins Weltall und wenden uns im sechsten Kapitel der Astronomie zu, dem Fixsternhimmel und der astronomischen Zeitbestimmung. Zunächst gilt es eine Reihe von Begriffen zu lernen, die man zwar irgendwie kennt – vor allem, weil sie in den üblichen Schulatlanten vorkommen – die aber selten richtig im Zusammenhang erklärt werden, es sei denn bei einer speziellen Einführung in die Astronomie: *Perihel, Aphel, Ekliptik, Äquinoktien, Frühlingspunkt*, ...
Für die Ortsbestimmung im All werden verschiedene Kugel-Koordinationssysteme verwendet, vor allem

- das vom *Himmelsäquator* (konzentrisch zum Erdäquator), den *Himmelspolen* (Polarstern) und dem Standpunkt bestimmte Äquatorsystem
- das vom Horizont und dessen Polen (*Zenit, Nadir*) bestimmte Horizontsystem.

Der Übergang zwischen diesen beiden Systemen wird durch das *nautische Dreieck* vermittelt, das aus dem Polarstern, dem Zenit und dem betrachteten Gestirn besteht. Beide Systeme sind abhängig vom Beobachtungsort, was zu interessanten Bewegungsgleichungen für die Fixsterne führt. Sowohl die Astronomie als auch die Nautik haben Verfahren entwickelt, zumindest das Äquatorsystem von der Ortsabhängigkeit zu lösen. In der Astronomie sind noch zwei weitere ortsunabhängige Koordinationssysteme gebräuchlich, die kurz beschrieben werden: das Ekliptik-System und das galaktische System.

Für die Zeitmessung hat man Sonnenzeit und Sternzeit zu unterscheiden. Unsere mitteleuropäische Zeit basiert auf der Sonnenzeit, in der Astronomie rechnet man mit der Sternzeit. Beide sind nicht von Natur aus konstant, sondern unterliegen periodischen Schwankungen (Periodenlänge: 1 Jahr). Der Graph der *Zeitgleichung* (wahre Ortszeit – mittlere Ortszeit in bezug auf die Sonne) weist in einer Periode vier Extremstellen aus, zwei Maxima und zwei Minima. Deswegen rechnet man eben in der Praxis mit mittleren Ortszeiten und mittleren Sternzeiten. Aber auch der Jahresbegriff ist nicht eindeutig. Man unterscheidet

1 tropisches Jahr = 365,2422 mittlere Sonnentage =
= 366,2422 mittlere Sterntage

und

1 siderisches Jahr = 365,2564 mittlere Sonnentage.

Leider erwähnt der Verfasser nicht, daß die internationale Generalkonferenz für Maße und Gewichte aus diesen astronomischen Schwankungen die Konsequenz gezogen hat, die Zeiteinheit nicht mehr astronomisch, sondern atomphysikalisch zu definieren. In der Bundesrepublik gilt seit dem 2. Juli 1970 gesetzlich:

1 Sekunde = 9162631770 × Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturen des Grundzustandes von Atomen des Nuklids 133 Cs entsprechenden Strahlung.

Ursprünglich galt

1 Sekunde = 1/86400 mittlerer Sonnentag

(Eine entsprechende Ergänzung wäre auch im ersten Kapitel anzubringen: Dort wird der Erdumfang mit 40.030,322 km angegeben; es fehlt der Hinweis auf die derzeit gültige atomphysikalische Festlegung:

1 km = 1000 m

1 km = 1650763,73 × Wellenlänge der von Atomen des Nuklids 86 Kr beim Übergang vom Zustand $5d_5$ zum Zustand $2p_{10}$ ausgesandten sich im Vakuum ausbreitenden Strahlung.

Das Gesetz soll aber noch dieses Jahr im Hinblick auf eine neue EG-Vereinbarung novelliert werden; diese besagt:

1 m = 1/2999792458 der Entfernung, die das Licht im Vakuum während 1 Sekunde zurücklegt.

Der Unterschied zwischen den verschiedenen Definitionen ist durchaus feststellbar: Aus den Angaben im dtv-Lexikon Band 5, 1970 errechnet man für den Erdumfang 40.031,564 Urmeter.)

Weithin unbekannt dürfte sein, daß der scheinbar umgangssprachliche Begriff der *Dämmerung* mathematisch präzise gefaßt werden kann und dies auch in verschiedenen Weisen geschieht. Man unterscheidet nach Licht- und Beobachtungsbedürfnissen

- bürgerliche Dämmerung (Abenddämmerung: Sonnenmittelpunkt unter dem Horizont, aber um weniger als 6°)
- nautische Dämmerung (bis 12°) und
- astronomische Dämmerung (bis 18°).

Man kann berechnen, an welchen Tagen an vorgegebenen Orten die Dämmerung am kürzesten ist und kommt dabei auch zu einer mathematischen Begründung der Erfahrungstatsache, daß der Übergang zwischen Tag und Nacht am Äquator praktisch ohne Dämmerung erfolgt.

Die großen Entdecker, von Odysseus über Erich den Roten und Leif Eriksson bis ins 19. Jahrhundert hatten natürlich noch keine Funkpeilmethoden zur Verfügung. Sie benutzten zur Zeit- und Ortsbestimmung auf hoher See oder auch im afrikanischen Urwald nicht die im dritten Kapitel angesprochenen terrestrischen, sondern astronomische Methoden (z.B. Odyssee V, 271–273), denen Bigalke sein 7. Kapitel widmet. Daß mindestens schon die Wikinger sich in dieser Weise gut orientieren konnten, ergibt sich daraus, daß sie nicht nur Grönland und Amerika entdeckten – das hätte auch Zufall gewesen sein können –, sondern daß sie auch den Weg zurück fanden und von ihrer Entdeckung berichten konnten. Die grundlegenden Techniken hierbei sind die *Zenitdistanzmessung* und die *Azimutmessung*. Beide gestatten es, bei bekanntem Ort eines Gestirns aus der Beobachtung des Gestirns von der geographischen Breite auf die Ortszeit, also die geographische Länge, oder umgekehrt zu schließen. Das *Zweihöhenproblem* ist die Aufgabe, beide Koordinaten gleichzeitig zu ermitteln, und benötigt solche Messungen an zwei bekannten Gestirnen. Die Auswertung führt im Fall der Zenitdistanzmessung auf ein System von zwei linearen und einer quadratischen Gleichung, das sich standardmäßig lösen läßt.

Da die Zenitdistanzmessung einen gewissen Aufwand erfordert, hat man einen Weg gefunden, sie zu umgehen; dazu müssen aber drei bekannte Gestirne beobachtet werden (*Dreihöhenproblem*). Für kleinere Segelschiffe war bis vor kurzem die *Ortsbestimmung mit Versegelung* ein beliebtes Verfahren, die auf zwei Höhenmessungen der Sonne beruht, die in Praxis mit genügender Genauigkeit zeichnerisch, z.B. mit der *Standlinienmethode* ausgewertet werden. Heutzutage werden aber auch schon die kleinsten hochseetüchtigen Boote mit Satelliten-Navigatoren ausgerüstet und wieder verschwindet ein Stück Seemannsromantik.

Das Kapitel schließt mit einem Thema, das mathematisch in den Zusammenhang gehört, aber eigentlich nichts mit der Seefahrt zu tun hat. Es handelt sich um eine Aufgabe, die in fast jeder Übung zur Darstellenden Geometrie gestellt wird, die Konstruktion einer *Sonnenuhr*. Auch hier gibt es mehrere Typen: *Äquatorial-Sonnenuhren, Horizontal-Sonnenuhren, vertikale Ost-West-Uhren* und *Vertikal-Sonnenuhren*. In speziellen Situationen sind aber auch noch Sonderkonstruktionen nötig.

Die Kapitel 8 und 9 sind einer weiteren Anwendung der Kugelgeometrie gewidmet, der Kristallographie. Sie wurde ursprünglich fast nur von Mathematikern betrieben, ist heute aber eine Teildisziplin der Geowissenschaften. Kapitel 8 enthält die mathematische Vorbereitung, die Untersuchung der Isometrien der Kugel. Dabei setzt der Verfasser die Kenntnis der Isometrien des dreidimensionalen euklidischen Raumes nicht voraus, sondern entwickelt die Theorie unabhängig über die Diskussion der möglichen Systeme von Fixelementen. Unter diesem Gesichtspunkt werden sechs Typen von Isometrien unterschieden:

1. Drehungen mit einem Drehwinkel, der kein ganzzahliges Vielfaches von π ist,
2. Halbdrehungen,
3. Spiegelungen,
4. die Identität,
5. Drehspiegelungen,
6. die antipodische Abbildung, die der Verfasser im Gegensatz zum üblichen mathematischen Sprachgebrauch, aber in Anlehnung an die Terminologie der Kristallgeometer, *Inversion* nennt.

Auch für die Isometrien der Kugel gilt der Dreispiegelungssatz: Jede Isometrie kann durch Verkettung von höchstens drei Spiegelungen dargestellt werden.

Wesentlich für die Kristallographie, aber auch für Symmetrieuntersuchungen an Atomen und Molekülen in der Festkörperphysik bzw. der Chemie sind die *Punktgruppen*, die endlichen Untergruppen der Gruppe aller Isometrien der Kugel. Von besonderer Bedeutung sind die *endlichen Drehgruppen,* das sind diejenigen Punktgruppen, die nur *gleichsinnige* Isometrien enthalten. Enthält eine Punktgruppe auch *gegensinnige* Isometrien, so besitzt sie eine endliche Drehgruppe als Normalteiler vom Index 2 und es sind nun die folgenden beiden Fälle möglich:

1. die gesamte Punktgruppe ist die von dem Normalteiler und der Inversion erzeugte Untergruppe der Gruppe aller Isometrien, oder
2. es gibt eine endliche Drehgruppe mit demselben Normalteiler vom Index 2, derart daß die nichttrivialen Nebenklassen der gegebenen Punktgruppe und dieser Drehgruppe durch die Inversion bijektiv aufeinander abgebildet werden.

Damit kann man die Klassifikation der Punktgruppen im einzelnen durchführen. Zur Veranschaulichung wird jeder solchen Gruppe eine *Fixfigur* zugeordnet, das ist ein konvexes Polyeder in der Vollkugel mit möglichst wenig Ecken, die alle zur Oberfläche der Kugel gehören, und mit der Eigenschaft, daß es bei allen Abbildungen der Gruppe und nur bei diesen Abbildungen auf sich abgebildet wird. Diese Klassifikation hat der Verfasser mit besonderer Liebe und Sorgfalt durchgeführt und durch 44 sehr saubere und klare Zeichnungen von Fixfiguren deutlich gemacht. Dabei gibt es unerwartete Schwierigkeiten: wenn man etwa die Drehgruppe betrachtet, die ein einer Kugel einbeschriebenes reguläres Tetraeder in sich überführt, so kann man nicht das Tetraeder selbst als Fixfigur nehmen, da es auch noch durch die Spiegelungen an den durch eine Kante und den Mittelpunkt der Gegenkante bestimmten Ebenen in sich übergeführt wird. So erfordert es einen geschickten Kunstgriff, eine Fixfigur für die Drehgruppe des Tetraeders, die die Ordnung 12 hat, anzugeben; auf dieselbe Weise lassen sich dann aber auch Fixfiguren zu den Drehgruppen des Oktaeders (Ordnung 24) und des Ikosaeders (Ordnung 60) finden.

Gewisse dieser Punktgruppen treten als Symmetrien eines Kristalls auf; sie werden *kristallographische Punktgruppen* genannt. Daß nicht alle Punktgruppen vorkommen, liegt an dem „Rationalitätsgesetz" der Kristallographie (1816 von Chr. S. Weiß empirisch gefunden): Bei einem gegebenen Kristall ist es immer möglich, ein seiner Bauart angemessenes dreidimensionales Koordinationssystem so anzugeben, daß die Achsenabschnitte der verschiedenen Ebenen, in denen die Flächen des Kristalls liegen, auf jeder Achse sich zueinander wie kleine ganze Zahlen (in der Regel < 10) verhalten. Diese Überlegung hat uns schon mitten in das neunte Kapitel geführt, in dem zunächst gezeigt wird, wie man die Symmetrien eines Kristalls noch mit Hilfe von Polbild und stereographischer Projektion deutlich machen kann. Dies beruht auf dem „1. Grundgesetz der Kristallographie": Bei verschiedenen Kristallen derselben Kristallart schneiden sich entsprechende Flächen unter denselben Winkelgrößen (Nicolaus Steno 1669). Zur Herstellung des Polbildes wählt man eine Kugel, die den Kristall enthält und ihren Mittelpunkt im Inneren des Kristalls hat. Vom Mittelpunkt aus zieht man die Normalen zu den Begrenzungsflächen und bestimmt ihre Durchstoßpunkte mit der Kugeloberfläche. Die Gesamtheit der so erhaltenen *Flächenpole* bildet die *Polfigur* eines Kristalls. Sie wird dann mit Hilfe der stereographischen Projektion in die Ebene abgebildet. Das prinzipielle Verfahren wird an einem Aragonitkristall in allen Einzelheiten vorgeführt. In der Praxis verwendet man jedoch häufig eine Zeichenhilfe, das *Wulffsche Netz,* Bild eines Koordinatennetzes der Polkugel unter einer stereographischen Projektion.

Das Hauptergebnis ist Satz 9.3: Nur die Punktgruppen sind kristallographische Punktgruppen, die entweder gar keine Drehungen oder aber Drehungen oder Drehspiegelungen mit höchstens 2-, 3-, 4- oder 6zähligen Drehachsen enthalten. Es gibt insgesamt 32 kristallographische Punktgruppen. (Dabei heißt eine Drehachse n-zählig, wenn die betreffende Gruppe eine Drehung um den Winkel $2\pi/n$ enthält.) Auf diese Weise entstehen 32 *Kristallklassen,* für die Repräsentanten in Schrägbild und Stereogramm angegeben werden. (Ein *Stereogramm* ist eine Skizze der stereographischen Projektion eines Flächenpoles samt seinen Bildern, unter den Isometrien der jeweiligen Punktgruppe.)

Zur theoretischen Beschreibung eines Kristalls dient die *Kristallindizierung.* Das dem Kristall zu Grunde liegende Raumgitter bestimmt ein im Sinne des Rationalitätsgesetzes ausgezeichnetes Koordinatensystem. Dessen Einheitsvektoren bilden aber im allgemeinen kein Orthonormalsystem; ihre euklidischen Längen und die Winkel zwischen ihnen werden als die *Metrik* des Kristalls bezeichnet. Durch die Betrachtung der Achsenabschnitte der Drehebene einer Seitenfläche des Kristalls kommt man zu drei rationalen Zahlen, die als *Millersche Indizes* zur Kennzeichnung der Fläche benutzt werden.

Bei der Zeichnung eines Kristalls sollen Symmetrien und Parallelitäten möglichst deutlich zum Ausdruck kommen. Dafür bietet sich vor allem die senkrechte Parallelprojektion an, wobei es nur noch darauf ankommt, den Kristall geschickt auf die Zeichenebene zu stellen. Für die Ausführung einer solchen Zeichnung gibt es wieder verschiedene Methoden, wobei man das Polbild auch wieder günstig verwenden kann.

Im abschließenden zehnten Kapitel geht es schließlich um Kugelnetze und Kugelteilungen. Ein *Kugelnetz* ist ein endlicher, planarer, zusammenhängender Graph, dessen Ecken mindestens vom Grad 2 und dessen Kanten Großkreisbögen der Kugeloberfläche sind. Ein Kugelnetz zerlegt die Kugeloberfläche in endlich viele einfach zusammenhängende Gebiete, die *Flächen* des Netzes. Ihre Gesamtheit wird als *Kugelteilung* bezeichnet. Über eine Beziehung zwischen der Anzahl e der Ecken, k der Kanten und f der Flächen einer Kugelteilung gibt der Eulersche Polyedersatz Auskunft: $e-k+f=2$. Einfach auflisten lassen sich die *regulären* Kugelteilungen. *Topologische* Regularität liegt vor, wenn alle Flächen von sphärischen n-Ecken mit derselben Kantenzahl n behandelt werden und alle Ecken denselben Grad haben; für *metrische* Regularität verlangt man zusätzlich, daß alle Kanten gleich lang und der Winkel zwischen je zwei benachbarten Kanten immer derselbe ist. Offensichtlich induzieren die platonischen Körper metrisch reguläre Kugelteilungen. Daneben sind nur noch die *Zweiecksnetze,* die genau zwei Ecken aufweisen, und die *Kreisteilungsnetze,* bei denen alle Ecken auf einem Großkreis liegen und die Kanten diesen Großkreis ausfüllen, topologisch oder auch metrisch regulär. Das ist schon die vollständige Liste! Eine größere Klasse bildet die Klasse der *halbregulären* Kugelteilungen. Davon gibt es zwei Sorten, die *flächenäquivalenten* und die *eckenäquivalenten* Kugelteilungen. Eine Kugelteilung ist *topologisch (metrisch) flächen-(ecken) äquivalent,* wenn jede Fläche von der gleichen Zahl von Kanten berandet wird (jede Ecke den gleichen Grad hat) und zu jedem Paar von Flächen (Ecken) eine topologische Selbstabbildung der Kugel (Isometrie) existiert, die die erste Fläche (Ecke) in die zweite und das ganze Kugelnetz in sich überführt. Jedes Kreisteilungsnetz gibt Anlaß zu einer nichtregulären äquivalenten Kugelteilung: man wählt in jeder Fläche eine weitere Ecke und verbindet die neuen Ecken mit allen alten Ecken durch eine Kante. Hat man ein Kreisteilungsnetz mit gerader Eckenzahl, so kann man die Konstruktion in der Weise abändern, daß man die eine der neuen Ecken nur mit jeder zweiten alten Ecke verbindet und die zweite neue Ecke mit den vorher ausgelassenen alten Ecken. Außer diesen trivialen nichtregulären flächenäquivalenten Kugelteilungen gibt es noch dreizehn weitere, sieben von Dreiecken begrenzte, vier von Vierecken begrenzte und zwei von Fünfecken begrenzte. Die eckenäquivalenten Kugelteilungen ergeben sich aus den flächenäquivalenten durch Dualisierung: ist eine flächenäquivalente Kugelteilung gegeben, so wähle man in jeder Fläche einen Punkt als Ecke und verbindet zwei Ecken genau dann durch eine Kante, wenn die betreffenden Flächen eine Kante gemeinsam haben. Das Ergebnis ist offensichtlich eine eckenäquivalente Kugelteilung. Eine solche heißt archimedisch, wenn zusätzlich gilt, daß alle Kanten des Netzes zueinander kongruent sind, was auf die archimedischen Körper Bezug nimmt.

Die Isometrien, die eine halbreguläre Kugelteilung in sich überführen, bilden natürlich eine Punktgruppe. Das Besondere in den flächenäquivalenten Kugelteilungen ist nun – bis auf wenige Ausnahmen –, daß die zugehörigen Punktgruppen von ebenen Spiegelungen erzeugt werden können. Damit kommen wir zu einer bisher noch nicht genannten Anwendergruppe der Kugelgeometrie, zu den Spielzeugfabrikanten, oder genauer zu den Kaleidoskopherstellern. Die entsprechenden Kugelnetze können nämlich durch Winkelspiegel hergestellt werden und man nennt sie deshalb auch *Kaleidoskope.* Die Theorie dazu steht nun bereit und ist jedem verständlich, der einmal ein Kaleidoskop in die Hand genommen hat. Die vom Verfasser angefertigten Fotografien sind auch sehr überzeugend. Wer sich selber einmal mit solchen technischen Aufnahmen befaßt hat, der kann den Verfasser nur bewundern, daß es ihm gelungen ist, diese Aufnahmen herzustellen. Sie bilden einen besonderen Leckerbissen in dem schmackhaften und umfangreichen Menü, das hier geboten wird.

Anwendungen anderer Art haben die *isogonalen Kugelteilungen,* die dadurch gekennzeichnet sind, daß jede Ecke denselben Grad hat und zwei benachbarte Kanten an einer Ecke immer unter dem gleichen Winkel zusammenstoßen. Solche Kugeln gibt es mit Kreisteilungsnetzen, Zweiecksnetzen, von platonischen Körpern induzierten Netzen und fünf weiteren Netzen, bei denen der fragliche Winkel jeweils 120° mißt. 120°-Kugelnetze ganz allgemein spielen in der Theorie der Minimalflächen eine wichtige Rolle und sind für das berühmte *Plateausche* Problem von Bedeutung. Es geht dabei um *Minimalflächen,* das sind die Flächen kleinsten Inhalts, die von gegebenen geschlossenen Kurven berandet werden. Hier gibt der Verfasser noch einmal eine Probe seiner Fotografierkunst und zeigt im Bild sowohl die Minimalfläche eines Tetraedernetzes als auch die eines Würfelnetzes.

Zum Schluß führt der Weg von den Kugelteilungen in die Biologie. Es beginnt mit der Frage, wie kann eine gewisse Anzahl Ecken möglichst gleichmäßig auf der Kugelfläche verteilt werden. Praktische Bedeutung haben diese Probleme z.B. in der Pollenforschung. Die Natur scheint bemüht zu sein, möglichst viele Öffnungen gleich verteilt auf dem Pollenkorn so unterzubringen, daß ein genetisch bestimmter Mindestabstand nicht unterschritten wird. Diese Extremalprobleme finden aber auch Anwendung in der Komplexchemie.

Zusammenfassend muß man erst noch einmal feststellen, daß es sich wirklich um ein inhaltsreiches Buch handelt, das in die Hand eines jeden Mathematiklehrers gehört und jedem Anwender der Kugelgeometrie wärmstens empfohlen werden kann. Die zahlreichen Übungsaufgaben erleichtern das Selbststudium und sorgfältig angelegte Namen- und Sachverzeichnisse ermöglichen die Benützung als Nachschlagewerk. Auch die äußere Aufmachung ist sehr ansprechend, klarer Druck und deutliche Wiedergabe der Zeichnungen erleichtern Lesbarkeit und Verständnis. Ein Wermutstropfen ist nur der relativ hohe Preis von DM 120,–, der vielleicht manchen Interessenten vom Kauf abhalten wird. Natürlich sind Satz und Druck eines mathematischen Werkes viel aufwendiger als bei „schöner" Literatur. Aber der Rezensent ist überzeugt, daß bei einem wesentlich niedrigeren Verkaufspreis sich so viel mehr Käufer für das Werk finden würden, daß der Gewinn für die Verlage der gleiche bliebe.