

1. KOLLOQUIUM MATHEMATIK-DIDAKTIK

DER

UNIVERSITÄT BAYREUTH

12.2.1982

UB BAYREUTH UB BAYREUTH



017105229971

1982

## INHALTSVERZEICHNIS

RUDOLF FRITSCH:

"DIE WINKELVERTEILUNG AM TETRAEDER"

ERICH FREY:

"ZUR SITUATION DES MATHEMATIK-UNTERRICHTS AN DEN  
BAYERISCHEN GYMNASIEN"

Die Winkelverteilung am Tetraeder

R. Fritsch

Die Entwicklung und Pflege eines räumlichen Anschauungsvermögens ist heute unbestritten eines der wichtigsten Ziele des Mathematikunterrichts überhaupt und sollte nicht auf ein Kapitel Stereometrie am Ende der 10. Klasse beschränkt werden. Eine Möglichkeit dazu besteht darin, die wohlbekanntesten Verhältnisse der ebenen Elementargeometrie, insbesondere der Dreieckslehre, auf ihre Übertragbarkeit in den 3-dimensionalen Raum zu untersuchen; das kann immer im Anschluß an die Behandlung des ebenen Satzes geschehen. Vom Wissenschaftlichen her ist das bis auf wenige Ausnahmen zwar alles geklärt, aber es ist ein so weites Feld, daß nur wenige der hierher gehörigen Sätze allgemein bekannt und in heute gebräuchlichen Lehrbüchern zugänglich sind. Damit bleibt viel Spielraum für eigenen Aktivitäten von Lehrern und Schülern in allen Schulstufen und es ergibt sich ein Geometrieunterricht, der sich zwar durchaus im Rahmen der geltenden Lehrpläne bewegt, aber doch nicht einer ausgetretenen Spur folgt, sondern durch selbständiges Finden hübscher Sätze lebendiger und befriedigender wird. Die nachfolgenden Überlegungen zu den Kantenwinkeln am Tetraeder sollen ein Beispiel für ein solches Vorgehen liefern.

Dazu sind als erstes die benötigten Grundbegriffe zu wiederholen (Abschnitt I). Anschließend kommt etwas zum Winkelsummensatz für die Kantenwinkel eines Tetraeders. Diejenigen, die den Beitrag über die *Winkelverteilung am Tetraeder* in der DIDAKTIK DER MATHEMATIK [2] gelesen haben werden sich vielleicht erinnern, daß dort am Ende die Frage steht, ob dieser Satz für den Schulunterricht aufbereitet werden könnte. Hierfür werden zwei Möglichkeiten vorgestellt (Abschnitt II). Die Winkelverteilung selber, das heißt die Möglichkeiten für die Verteilung spitzer, rechter und stumpfer Winkel am Tetraeder wird dann nicht mehr in aller Ausführlichkeit behandelt. Als vor längerer Zeit die Verabredungen für diesen Vortrag getroffen wurden, war noch nicht klar, ob der Aufsatz [2] bis zur Durchführung erschienen sein würde. Um die bisherigen Leser nicht zu langweilen, sollen nur noch neue Leser auf den Geschmack gebracht werden (Abschnitt III).

## I. GRUNDBEGRIFFE.

Der systematische Geometrie-Unterricht in Klasse 7 beginnt üblicherweise mit der Behandlung von *Punkt*, *Gerade*, *Ebene*, sowie *Strecke* und *Dreieck*. Man sollte an dieser Stelle auch gleich das *Tetraeder*, die dreiseitige Pyramide mit nennen. Jeder Schüler hat ein solches, mit Milch oder Limonade gefüllt, schon in der Hand gehabt, und es ist die natürliche räumliche Verallgemeinerung von Strecke und Dreieck.

*Strecke:* Zwei Punkte, die nicht in einem Punkt liegen (das heißt, zwei verschiedene Punkte).

*Dreieck:* Drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen.

*Tetraeder:* Vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen.

Bei der Besprechung der Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen bieten sich erste Gelegenheiten, die Übertragung ebener Sätze in den Raum zu versuchen. Für unsere Zwecke wichtig sind die Lote:

*Durch einen gegebenen Punkt A gibt es zu einer gegebenen Geraden g genau eine zu g senkrechte Gerade h.*

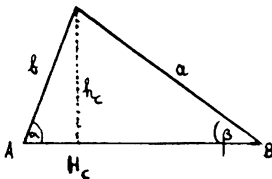
Dieser Satz gilt offensichtlich auch im Raum; dort gibt es aber noch zwei weitere Versionen, die man erhält, in dem man einmal an einer und einmal an der anderen Stelle den Begriff "Gerade" durch "Ebene" ersetzt:

*Durch einen gegebenen Punkt A gibt es zu einer gegebenen Ebene g genau eine zu g senkrechte Gerade h.*

*Durch einen gegebenen Punkt A gibt es zu einer gegebenen Geraden g genau eine zu g senkrechte Ebene h.*

Diese Sätze werden wir gleich für die Messung von Kantenwinkeln benötigen.

In der Dreieckslehre hat man



Ecken A, B, C

Seiten a, b, c

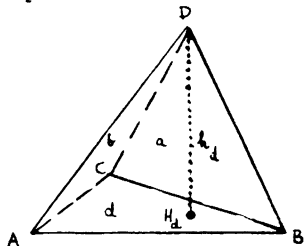
Höhen  $h_a, h_b, h_c$

Höhenfußpunkte  $H_a, H_b, H_c$

Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$

usw.

Entsprechend findet man beim Tetraeder



Ecken A, B, C, D  
 Kanten AB, AC, BC, AD, BD, CD  
 Seiten (flächen) a, b, c, d  
 (Raum-Höhen)  $h_a, h_b, h_c, h_d$   
 Höhenfußpunkte  $H_a, H_b, H_c, H_d$   
 Kantenwinkel  $\varphi_{AB}, \varphi_{AC}, \varphi_{BC}, \varphi_{AD}, \varphi_{BD}, \varphi_{CD}$   
 usw.

Die Frage, was den Winkeln eines ebenen Dreiecks im räumlichen Tetraeder entspricht, kann verschieden beantwortet werden. Man kann einerseits die an einer Ecke anliegenden Raumwinkel betrachten, die sich als Durchschnitt von 3 Halbräumen darstellen lassen, und andererseits hat man die Kantenwinkel, die von je zwei Seiten des Tetraeders mit der gemeinsamen Kante als "Scheitel" gebildet werden; letztere interessieren uns hier. Zur Messung eines Kantenwinkels  $\varphi$  gibt es zwei Methoden:

1. Man schneidet das Winkelfeld mit einer zur Scheiteltkante senkrechten Ebene und mißt den entstehenden ebenen Winkel (induktive Methode).
2. Man fällt von einem inneren Punkt des Winkelfeldes Lote auf die beiden Seitenebenen, mißt den von ihnen gebildeten Winkel  $\psi$  und berechnet  

$$\varphi = 180^\circ - \psi$$
 (polare Methode).

Es soll nun darum gehen, räumliche Analoga zu den beiden folgenden Sätzen zu finden:

1. Für jedes Dreieck gilt

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

(Winkelsummensatz)

2. In jedem Dreieck gibt es zwei spitze Winkel; der dritte kann spitz, recht oder stumpf sein (Satz von der Winkelverteilung)

## II. DER WINKELSUMMENSATZ

Wir setzen

$$\Sigma = \varphi_{AB} + \varphi_{CD} + \varphi_{AC} + \varphi_{BD} + \varphi_{AD} + \varphi_{BC}$$

und fragen ob  $\Sigma$  für alle Tetraeder den gleichen Wert hat.

Dazu ist es günstig, folgende Sprechweisen zu benutzen, die auf der Vorstellung eines Tetraeders als 3-seitiger Pyramide mit einer ausgezeichneten Seite beruhen:

Das Dreieck ABC ist das Grunddreieck, die Ecke D ist die Spitze, die

Kanten AB, BC, und AC sind die *Grundkanten* und die Kanten AD, BD, und CD sind die *Kanten zur Spitze*.

Nun gehen wir von einem regulären Tetraeder aus und verschieben die Spitze D längs der zugehörigen Raumhöhe. Dann sehen wir

1. Für  $h_d \rightarrow 0$  werden die an den Grundkanten anliegenden *Kantenwinkel* auch sehr klein, während sich die anderen *Kantenwinkel* gestreckten Winkeln nähern, also

$$\Sigma \rightarrow 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

(Für diese Überlegung ist wichtig, daß der Höhenfußpunkt  $H_d$  im Innern des Dreiecks ABC liegt, was beim regulären Tetraeder natürlich der Fall ist).

2. Für  $h_d \rightarrow \infty$  werden die an den Grundkanten anliegenden Winkel nahezu recht, während sich die andern *Kantenwinkel* den entsprechenden Winkeln des Grunddreiecks nähern, also

$$\Sigma \rightarrow 3 \cdot 90^\circ + 180^\circ = 450^\circ$$

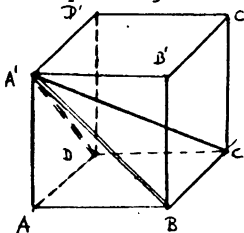
Daraus ergibt sich, daß  $\Sigma$  sicher nicht für alle Tetraeder den gleichen Wert hat.

Soweit könnte man in der Unterstufe kommen. Eventuell sollte man noch deutlich machen, daß  $450^\circ$  keine untere Schranke für  $\Sigma$  ist.

3. Ist der Abstand der Mittelpunkte zweier Gegenkanten, also etwa AB und CD sehr klein, so sind auch die *Kantenwinkel*  $\varphi_{AC'}$ ,  $\varphi_{AD'}$ ,  $\varphi_{BC}$  und  $\varphi_{BD}$  sehr klein, während es sich bei  $\varphi_{AB}$  und  $\varphi_{CD}$  fast um gestreckte Winkel handelt, also

$$\Sigma \rightarrow 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$$

In der Mittelstufe wird man dann zunächst einige Winkelberechnungen konkret durchführen. Es ist eine reizvolle Aufgabe zu überlegen, bei welchen Tetraedern das ohne Trigonometrie machbar ist. Für unsere Beispiele gehen wir von einem Würfel aus (Bezeichnungen entsprechend



nebenstehender Figur): Wir betrachten zunächst die vierseitige Pyramide ABCDA'. Von dieser interessieren uns die *Kantenwinkel*

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AD} = 90^\circ$$

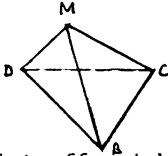
$$\varphi_{BC} = \varphi_{CD} = 45^\circ$$

und der an der Raumdiagonale anliegende Winkel. Um diesen Winkel  $\varphi_{CA'}$

zu berechnen, bemerken wir (in Erinnerung an das Verfahren zur Volumenberechnung von Pyramiden), daß der Würfel in die drei kongruenten Pyramiden ABCDA', BCC'B'A' und CDD'C'A' zerfällt, die die Kante CA' gemeinsam haben. Die zugehörigen Kantenwinkel sind gleich und ergeben zusammen 360°; also haben wir

$$\varphi_{CA'} = 120^\circ$$

Um nun zu einem Tetraeder zu kommen, zerschneiden wir die Pyramide ABCDA' durch die von den Ecken B, C und dem Würfelmittelpunkt M aufgespannte Ebene und erhalten so ein Tetraeder BCDM. Für die auftretenden Kantenwinkel hat man zunächst wie bei der Pyramide ABCDA'



$$\varphi_{BC} = \varphi_{CD} = 45^\circ$$

$$\varphi_{CM} = 120^\circ$$

Ferner ist offensichtlich

$$\varphi_{BD} = 90^\circ$$

Zur Berechnung von  $\varphi_{BM}$  und  $\varphi_{DM}$  beachten wir, daß die Ebene BDM die vierseitige Pyramide ABCDM in zwei kongruente Teile zerlegt und damit den in ABCDM an der Kante BM anliegenden Winkel halbiert. Da es sich bei BM aber auch um einen Teil einer Raumdiagonale handelt, ist dieser Winkel 120° und somit in BCDM

$$\varphi_{BM} = 60^\circ$$

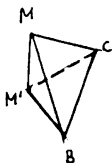
sowie analog

$$\varphi_{DM} = 60^\circ.$$

Damit haben wir

$$\Sigma = 420^\circ$$

Sei nun M' der Mittelpunkt der Kante BD. Die von CM und M' aufgespannte Ebene zerlegt das Tetraeder BCDM in die beiden kongruenten Tetraeder BCMM' und CDMM'. Für BCMM'



haben wir

$$\varphi_{BC} = 45^\circ$$

$$\varphi_{BM'} = \varphi_{CM'} = \varphi_{MM'} = 90^\circ$$

$$\varphi_{BM} = \varphi_{CM} = 60^\circ$$

also

$$\Sigma = 435^\circ$$

Für einige bekannte Tetraeder ist die Berechnung von  $\Sigma$  nur mit Hilfe der Trigonometrie möglich. Damit erhält man zum Beispiel für das reguläre Tetraeder

$$\Sigma \approx 423^\circ$$

und für das von einem orthonormalen Dreibein gebildete Tetraeder

$$\Sigma \approx 434^\circ$$

Eine untere Abschätzung für  $\Sigma$  enthält man durch folgende Überlegungen.

1. Die Summe der Winkel an der Ecke A der an A anliegenden Dreiecke ist kleiner als  $360^\circ$ .
2. Durch Polarisierung ergibt sich daraus, daß die Summe der an der Ecke A anliegenden Kantenwinkel größer ist

$$3 \cdot 180^\circ - 360^\circ = 180^\circ$$

3. Summation über alle 4 Ecken ergibt

$$2 \Sigma > 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$$

d.h.

$$\Sigma > 360^\circ.$$

Daß diese Abschätzung scharf ist, haben wir vorher bereits gezeigt. Eine scharfe obere Schranke kennen wir nicht. Aus dem später zu beweisenden Satz, daß mindestens 3 Kantenwinkel eines Tetraeders spitz sein müssen, ergibt sich

$$\Sigma < 810^\circ,$$

wir kennen aber kein Tetraeder mit

$$\Sigma > 540^\circ,$$

so daß wir vermuten

$$\Sigma < 540^\circ.$$

Aus den vorigen Überlegungen ergibt sich, daß diese Schranke scharf wäre.\*

Trotz dieser negativen Ergebnisse läßt sich eine Teilaussage des Winkelsummensatzes auf Tetraeder übertragen. Wir skizzieren zwei Beweise für den folgenden

**SATZ.** *Durch 5 Kantenwinkel eines Tetraeders ist der sechste Kantenwinkel eindeutig bestimmt.*

(Sind in einem ebenen Dreieck  $\alpha$  und  $\beta$  gegeben, so ist

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta)$$

1. Polare Methode (von Herrn Thomas Egger, Appenzell): Man wähle einen inneren Punkt H des Tetraeders und falle von H aus die Lote  $l_a, l_b, l_c$  und  $l_d$  auf die Seiten a, b, c, d. Es seien  $\psi_{AB}, \psi_{AC}, \dots$  die von den Loten  $l_c$  und  $l_d$ , bzw.  $l_b$  und  $l_d$ , bzw... gebildeten

\* Inzwischen konnte Herr Seebach unter Benutzung der Raumwinkel zeigen, daß diese Vermutung richtig ist.



Winkel wie im I. Abschnitt bemerkt, gilt dann

$$\varphi_{XY} = 180^\circ - \psi_{XY} \quad \text{für alle } X, Y \text{ mit } X \neq Y.$$

Es genügt also zu zeigen, daß durch fünf der Winkel  $\psi$  der sechste, sagen wir  $\psi_{CD}$  eindeutig bestimmt ist. Dazu betrachten wir zunächst  $l_c$ ,  $l_d$  und die von diesen Loten aufgespannte Ebene E. Durch  $\psi_{BD}$  und  $\psi_{BC}$  ist die Lage von  $l_a$  bis auf Spiegelung an der Ebene E festgelegt; das gleiche gilt für  $l_b$ . Da H ein innerer Punkt des Tetraeders ist, müssen  $l_a$  und  $l_b$  auf verschiedenen Seiten von E liegen, also ist auch ihre gegenseitige Lage bis auf Spiegelung an E bestimmt. Das liefert aber Eindeutigkeit für den von  $l_a$  und  $l_b$  gebildeten Winkel  $\psi_{CD}$ .

2. Induktive Methode (Lazarus Carnot 1806): Man stellt zunächst fest:

(A) *Bei festen Winkeln  $\varphi_{AC}$  und  $\varphi_{BC}$  bestimmen sich die Winkel  $\gamma$  und  $\varphi_{CD}$  gegenseitig eindeutig*

Damit schließt man:

$\varphi_{AB}$ ,  $\varphi_{AC}$  und  $\varphi_{AD}$  bestimmen  $\alpha$ ,

$\varphi_{AB}$ ,  $\varphi_{BC}$  und  $\varphi_{BD}$  bestimmen  $\beta$ ,

$\alpha$  und  $\beta$  bestimmen  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ ,

$\varphi_{AC}$ ,  $\varphi_{BC}$  und  $\gamma$  bestimmen  $\varphi_{CD}$ ,

also insgesamt

$\varphi_{AB}$ ,  $\varphi_{AC}$ ,  $\varphi_{AD}$ ,  $\varphi_{BC}$  und  $\varphi_{BD}$  bestimmen  $\varphi_{CD}$ !

In der Unterstufe kann man die Aussage (A) rein anschaulich begründen. Man betrachtet zwei Ebenen, die die Grundebene unter festen Winkeln  $\varphi_{AC}$  und  $\varphi_{BC}$  schneiden. Ihre gegenseitige Lage ist durch die Lage der Schnittkanten in der Grundebene, d.h. durch deren Schnittwinkel  $\gamma$ , eindeutig bestimmt. Damit ist aber auch der Kantenwinkel  $\varphi_{CD}$  festgelegt. Wächst  $\gamma$  von 0 zu  $180^\circ$ , so wächst auch der Kantenwinkel, genauer: die Abbildung  $\gamma \mapsto \varphi_{CD}$  ist streng monoton wachsend und damit ist  $\gamma$  auch durch  $\varphi_{CD}$  eindeutig bestimmt. Im Rahmen der Stereometrie oder der Darstellenden Geometrie der Mittelstufe sind es hübsche Aufgaben

$\varphi_{CD}$  aus  $\varphi_{AC}$ ,  $\varphi_{BC}$  und  $\gamma$ , bzw.

$\gamma$  aus  $\varphi_{AC}$ ,  $\varphi_{BC}$  und  $\varphi_{CD}$

zeichnerisch zu bestimmen. Mit den Mitteln der Vektoralgebra

der Kollegstufe läßt sich die Funktion  $\gamma \mapsto \varphi_{CD}$  leicht explizit beschreiben; man findet

$$\cos \varphi_{CD} = \sin \varphi_{AC} \cdot \sin \varphi_{BC} \cdot \cos \gamma - \cos \varphi_{AC} \cdot \cos \varphi_{BC}$$

Das ist aber ein lieber alter Bekannter, der WINKELCOSINUSSATZ der sphärischen Trigonometrie, der nach den neuesten Lehrplanentwürfen in Klasse 11 zur Verfügung stehen könnte.

### III. VERTEILUNG SPITZER, RECHTER UND STUMPFER WINKEL AM TETRAEDER

Wir beobachten zunächst (Bezeichnungen wie auf Seite 3):

HILFSSATZ 1. a)  $H_d$  im Innern von  $d \Leftrightarrow \varphi_{AB}, \varphi_{BC}, \varphi_{AC}$  spitz;

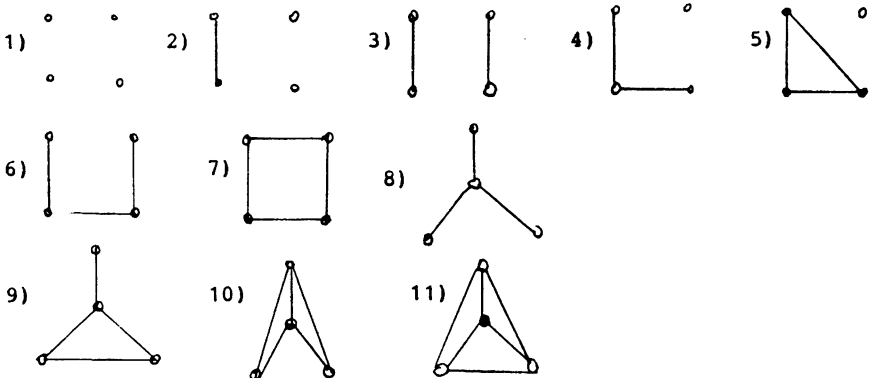
b) liegt  $H_d$  im Innern von  $d$ , so gilt ferner

$$h_d \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi_{AD}, \varphi_{BD}, \varphi_{CD} \rightarrow 180^\circ$$

c) allgemein gilt

$$h_d \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi_{AD} \rightarrow \alpha, \varphi_{BD} \rightarrow \beta, \varphi_{CD} \rightarrow \gamma$$

Zur übersichtlichen Darstellung der möglichen Winkelverteilungen verwenden wir entsprechend dem Vorgehen von M. Fiedler in [1] Graphen, also eindimensionale Gebilde, die aus Ecken und Kanten zwischen solchen Ecken bestehen. Wir betrachten Graphen mit vier Ecken, jede entspreche einer Tetraederseite. Es gibt 11 derartige Graphen mit höchstens einer Kante zwischen je 2 Ecken; sie heißen *einfache* Graphen:



Einem gegebenen Tetraeder ordnen wir nun den Graphen mit den Ecken  $a, b, c, d$ , bei dem die Ecken  $x, y$  genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn die Seiten  $x, y$  des Tetraeders einen spitzen Winkel miteinander bilden, er heiße der *Winkelgraph* des

Tetraeders. Aus Hilfssatz 1 ergibt sich nun aus der Betrachtung von Tetraedern mit  $H_d$  im Innern des Dreiecks ABC : die Graphen 8, 10 (bei  $\Delta$  ABC stumpfwinklig) und 11 (bei  $\Delta$  ABC spitzwinklig) sind Winkelgraphen.

Als nächstes notieren wir die für die am Grunddreieck anliegenden Winkel auftretenden Fälle:

HILFSSATZ 2. Der Winkel  $\varphi_{AB}$  ist

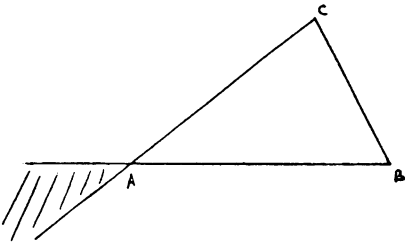
spitz  $\leftrightarrow H_d$  und C werden durch die Gerade AB nicht getrennt

recht  $\leftrightarrow H_d$  liegt auf der Geraden AB

stumpf  $\leftrightarrow H_d$  und C liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden AB

Das führt unmittelbar zu

SATZ 1. Jede Seite bildet mit mindestens einer anderen Seite einen spitzen Winkel.



Zur Begründung genügt es die nebenstehende Figur zu betrachten. Sind etwa die Winkel  $\varphi_{AB}$  und  $\varphi_{BC}$  nicht spitz, so liegt  $h_d$  in dem schraffierten Gebiet, also auf der gleichen Seite der Geraden BC wie A.

Aus diesem Satz folgt noch, daß die Graphen 1), 2), 4) und 5) keine Winkelgraphen sind. Genaues Hinsehen liefert für die in der eben angegebenen Begründung geschilderte Situation

HILFSSATZ 3. a)  $\varphi_{AB}, \varphi_{AC}$  stumpf  $\Rightarrow 0 < \varphi_{BD} < \beta, 0 < \varphi_{CD} < \gamma$

b)  $\varphi_{AB}$  stumpf,  $\varphi_{AC}$  recht  $\Rightarrow 0 < \varphi_{BD} < \beta, \varphi_{CD}$  zwischen  $90^\circ$  und  $\gamma$

c)  $\varphi_{AB}$  recht,  $\varphi_{AC}$  stumpf  $\Rightarrow \varphi_{BD}$  zwischen  $90^\circ$  und  $\beta, 0 < \varphi_{CD} < \gamma$

d)  $\varphi_{AB}$  recht,  $\varphi_{AC}$  recht  $\Rightarrow \varphi_{BD}$  zwischen  $90^\circ$  und  $\beta, \varphi_{CD}$  zwischen  $90^\circ$  und  $\gamma$

(es gilt jedesmal "echt zwischen", falls  $\beta \neq 90^\circ$ , bzw.  $\gamma \neq 90^\circ$ ).

Damit kann man zeigen:

SATZ 2. Mindestens drei der sechs Kantenwinkel eines Tetraeders sind spitz

Beweis. Wir nehmen an, von den sechs Kantenwinkeln

$$\varphi_{AB}, \varphi_{CD}, \varphi_{AC}, \varphi_{BD}, \varphi_{AD}, \varphi_{BC}$$

sind  $\delta$  nicht spitz. Dann besteht wenigstens ein Gegenwinkelpaar aus nicht spitzen Winkeln, sagen wir  $(\varphi_{AB}, \varphi_{CD})$ . Von den übrigen Winkeln sei etwa  $\varphi_{AC}$  auch nicht spitz. Nach Satz 1 sind dann auf jeden Fall die Winkel  $\varphi_{BC}$  und  $\varphi_{AD}$  spitz.

Wir zeigen nun, daß dann aber im Widerspruch zur Annahme auch der Winkel  $\varphi_{BD}$  spitz sein muß. Da die Winkel  $\varphi_{AB}$ ,  $\varphi_{AC}$  und  $\varphi_{CD}$  nicht spitz sind, folgt aus Hilfssatz 3, daß auch  $\gamma$  nicht spitz sein kann. Dann ist aber  $\beta$  notwendigerweise spitz und Hilfssatz 3, noch einmal angewandt, liefert das Gewünschte.

Damit scheidet auch der Graph 3) als Winkelgraph aus. Wie steht es mit den übrigen? Wir haben noch nichts über die Graphen 6), 7) und 9) gesagt. Das sind alles Winkelgraphen, wie die folgenden Tetraeder zeigen:

- a) das im Würfel auf S.4 von Ecken  $ABDD'$  gebildete Tetraeder (Graph 6)
- b) das auf S.4 unter 3. angegebene Tetraeder mit  $\Sigma \approx 360^\circ$  (Graph 7)
- c) ein Tetraeder mit den in der Begründung zu Satz 1 angegebenen Eigenschaften unter der Voraussetzung, daß das Dreieck  $ABC$  spitzwinklig ist (Graph 9).

Sehen wir uns nun noch einmal alle gezeichneten Graphen an, so können wir feststellen

**SATZ 3.** Ein einfacher Graph mit vier Ecken ist genau dann Winkelgraph eines Tetraeders, wenn er zusammenhängend ist.

Damit ist die Verteilung spitzer Winkel an einem Tetraeder vollständig geklärt. Man kann nun an Modellen feststellen, daß im übrigen alle möglichen Verteilungen von rechten und stumpfen Winkeln vorkommen. In [2] finden sich Anregungen, wie man das konkret durchführen kann. Diese Sätze 1 und 2 charakterisieren also die Winkelverteilungen:

**SATZ 4.** Eine vorgegebene Verteilung spitzer, rechter und stumpfer Winkel für ein Tetraeder läßt sich genau dann durch ein konkretes Tetraeder realisieren, wenn

- (1) an jeder Seite wenigstens ein spitzer Winkel anliegen soll und
- (2) mindestens drei Winkel als spitz vorgesehen sind.

Mit Hilfe der Winkelgraphen können wir das schließlich noch folgendermaßen ausdrücken

**SATZ 4'.** Eine Winkelverteilung läßt sich genau dann realisieren, wenn der zugehörige Graph zusammenhängend ist.

#### Literatur

- [1] M. Fiedler: Geometrie simplexu v  $E_n$  (první část). In: Casopis Pěst. Mat. 79 (1954), S.297 - 320.
- [2] R. Fritsch: Winkelverteilung am Tetraeder. In: Didaktik der Mathematik 9/4 (1981), S. 276 - 290.