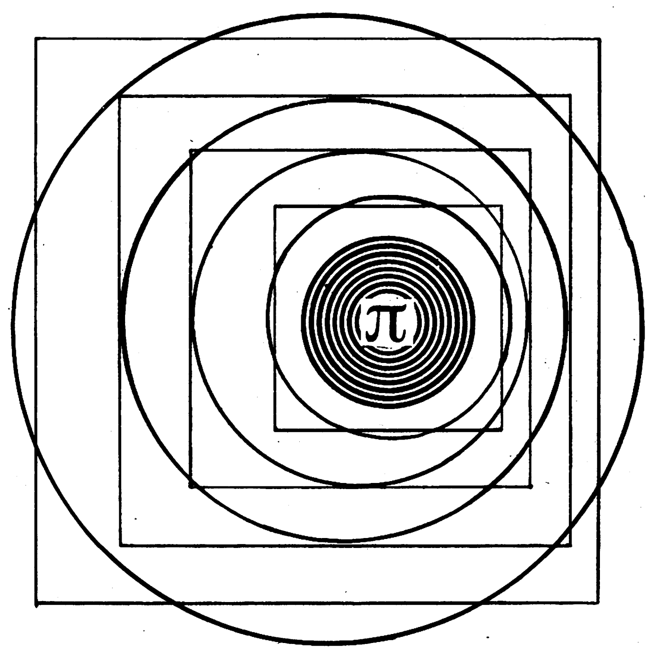
12. Jahrgang Nr. 7 Dezember 1982

umbits

Universität München

Daß die Quadratur des Kreises unmöglich ist, wissen nicht nur die Mathematiker seit hundert Jahren. Als geflügeltes Wort ist die Quadratur des Kreises auch bei Laien längst Ausdruck für das Unmögliche. Rudolf Fritsch, Professor für Didaktik der Mathematik an der Universität München, hat das Jubiläum zum Anlaß genommen, Lindemanns Beweis für Laien verständlich darzustellen. Mit der Biographie Lindemanns, der von 1893 bis 1923 an der Universität München gelehrt hat, Rektor und Direktor des Verwaltungsausschusses war, gibt Professor Fritsch außerdem einen Einblick in die Wissenschafts- und Universitätsgeschichte vom Ende des letzten Jahrhunderts bis in die Zwanziger Jahre unseres Jahrhunderts (Seite 4 – 7).



Vor 100 Jahren hat Ferdinand von Lindemann bewiesen, daß die Quadratur des Kreises unmöglich ist.

Rudolf Fritsch

Die Quadratur des Kreises – unmöglich!

Der Beweis wurde vor 100 Jahren von Lindemann gefunden

Carl Louis Ferdinand Lindemann ist in Hannover geboren und wächst in Pommern auf. Er beginnt das Studium der Mathematik in Göttingen, wo der leider früh verstorbene Alfred Clebsch (1833–1872) sein bestimmender Lehrer wird. Nach Clebschs Tod wendet er sich nach Erlangen, wo er am 2.8.1873 bei Felix Klein (1849–1925) promovierte mit der Dissertation „Über unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projektivischer Maßbestimmung".

Klein ist es auch, der seinen 2. Doktoranden (nach Diekmann) anregte, Clebschs Vorlesungen über die Geometrie herauszugeben. In der Ansprache, die sein Münchner Kollege Aurel Voß (1845–1931) bei einer Feier zum 70. Geburtstag Lindemanns hielt, heißt es dazu: „Mit jugendlichem Wagemut haben Sie, noch vor Vollendung ihres Universitätsstudiums, diese große und schwierige Aufgabe übernommen, und so ein Werk geschaffen, das zugleich auch durch und durch Ihr eigenes geworden ist. Ich staune, so oft ich in dasselbe hineinsehe, noch jedesmal über die Tiefe und Weite des Blikkes, mit dem Sie alles zu einem harmonischen Ganzen zu verschmelzen wußten, was Clebsch in den letzten Jahren seines Lebens in Vorlesungen zum Teil ausgeführt oder auch, wie z.B. die Invariantentheorie der Konnexe, unvollendet hinterlassen hatte. Seit fast 50 Jahren ist Ihr Werk noch von der gleichen Bedeutung für jeden Geometer geblieben, dem keine Nation eines von ähnlicher umfassender Bedeutung an die Seite stellen kann."

Ostern 1875 folgt Lindemann seinem Doktorvater Klein an die Technische Hochschule in München. Für Klein ist der Wechsel nicht nur aus finanziellen Gründen (wegen der höheren Studentenzahlen und der damit verbundenen höheren Kolleggelder) interessant, sondern auch wegen der sich schon damals bei ihm abzeichnenden didaktischen Interessen. Für Lindemann aber erweist sich dieser Weg als Sackgasse. Nicht nur, daß es damals an der Technischen Hochschule nur wenig Möglichkeiten zu aktiver Forschung gibt, es gibt auch kein Promotions- und erst recht kein Habiliations-recht. Den etablierten Klein braucht das nicht zu stören, auch nicht die abweisende Haltung der Mathematiker an der Universität, die von TH-Professoren nicht als Kollegen tituliert werden möchten, aber für den noch als Student immatrikulierten Lindemann gibt es so kein Weiterkommen.

Deshalb empfiehlt Klein der bayerischen Regierung, seinen hochbegabten Schüler durch ein Reisestipendium zu fördern. Der damals ziemlich allmächtige Kultusminister Lutz (1826–1890) ist dazu bereit, verbindet damit aber eine dringende Empfehlung: Lindemann solle seine Habilitation an der dem Minister als geborenem Unterfranken besonders am Herzen liegenden Universität Würzburg beantragen. Es komme nur darauf an, daß ihn der dortige Ordinarius für Mathematik, Friedrich Prym, (1841–1915) für qualifiziert genug halte. Er tut es, und damit ist die spätere Habilitation Lindemanns schon vor der Abreise gesichert. Der Stipendiat verbringt das Sommersemester 1876 in London, das Wintersemester 1876/77 in Paris.

An der Sorbonne kommt es zur entscheidenden Begegnung mit dem französischen Mathematiker Charles Hermite (1822–1901). Hermite war es 1873 gelungen, die Transzendenz der Eulerschen Zahl e (die im folgenden erklärt wird) zu beweisen. Er versuchte die gleiche Methode auch auf die Kreiszahl π anzuwenden und kam trotz großer Anstrengungen nicht zum Ziel. Hermite übergibt Lindemann seine Arbeit über die Eulersche Zahl mit der Bemerkung, das sei seine schönste Arbeit; aber er wagt kaum anzuregen, daß Lindemann sich an π versuchen sollte; es erscheint ihm als ein zu schweres Problem.

Nach der Rückkehr aus Paris habilitiert sich Lindemann am 2. Mai 1877 in Würzburg; seine Bearbeitung der Clebschen Vorlesungen, der „Clebsch-Lindemann", wird dabei als Habilitationsschrift angenommen. Zu einer Anstellung in Würzburg kommt es aber nicht, da es nach Meinung des Ministeriums dort schon genug Mathematiker gibt (mehr als an der Universität der Landeshauptstadt München!). So nimmt Lindemann im Oktober 1877 einen Ruf auf eine außerordentliche Professur an der Universität Freiburg i.Br. an. 1879 wird er dort zum ordentlichen Professor ernannt. Auf weiten Spaziergängen mit seinen Kollegen lernt der Geometer die Funktionentheorie, die er braucht, um der Frage nach der Transzenden von π nachzugehen. Nun geht die Saat auf, die Hermite gesät hat, und das Werk gelingt. Er schickt seine Abhandlung über den Beweis der Transzendenz von π an Felix Klein als Herausgeber der „Mathematischen Annalen".

Wer wagt ein Urteil?

Klein, damals in Leipzig, weiß natürlich um die Schwierigkeit und die Bedeutung des Problems, fühlt sich aber nicht in der Lage, die Richtigkeit der Beweisführung Lindemanns zu überprüfen. Er fragt u.a. Georg Cantor (1845–1918) in Halle, den Schöpfer der Mengenlehre, aber auch dieser traut der Sache nicht so recht und schickt das Manuskript weiter an Karl Weierstraß (1815–1897) in Berlin, den Begründer der modernen Funktionentheorie. Der nun erkennt sofort, was er da in Händen hat und drängt auf eine rasche Publikation. Da es mit den „Mathematischen Annalen" noch einige Zeit dauern wird, bittet er (!) Lindemann um die Erlaubnis, eine Kurzfassung der Berliner Akademie der Wissenschaften vorlegen zu dürfen und sorgt durch persönlichen Gang zur Druckerei dafür, daß Lindemann bereits acht Tage nach dem Vortrag am 22. Juni 1882 die Sonderdrucke aus den Sitzungsberichten der Akademie zugesandt werden. Ähnlich begeistert ist auch Hermite, der für eine Veröffentlichung des Ergebnisses in den „Comptes Rendues des Séances de l'Académie des Sciences" der französischen Akademie sorgt. Die Originalarbeit „Über die Zahl π" erscheint im Band 20 (1882) S. 213–225 der *„Mathematischen Annalen"*.

Zur Bewertung dieser Leistung sei noch einmal aus dem Nachruf zitiert, den Lindemanns unmittelbarer Nachfolger auf dem hiesigen Lehrstuhl, Constantin Carathéodory (1873–1950) für die Bayerische Akademie der Wissenschaften verfaßt hat: „Man muß nicht nur die außerordentlich geistreiche Schlußweise bewundern, mit welcher Lindemann dem Jahrtausende alten Problem eine neue, der modernen Analysis zugängliche Wertung gegeben hat, sondern vor allem die Zähigkeit, mit welcher es ihm gelungen ist, die Hermite'sche Methode auf komplexe Integrationswege auszudehnen. Diese eine Leistung Lindemanns, die einen Glanzpunkt in den mathematischen Erfolgen der Neuzeit darstellt, überstrahlt alle früheren und späteren Werke unseres verblichenen Kollegen."

Dieser Erfolg ist natürlich auch ausschlaggebend für die spätere Karriere Lindemanns. 1883 folgt er einem Ruf an die Akademie in Königsberg, dem Geburtsort seines ersten Lehrers Clebsch. Zehn Jahre lehrt er dort, den Erfolg kann man an seinen Schülern messen. Einer seiner ersten Doktoranden dort ist David Hilbert (1862–1943), der „letzte Mathematiker, der in allen Gebieten seiner Wissenschaft zu Hause war." Einen bedeutenden Namen hat auch Hermann Minkowski (1864–1909), und in bezug auf München ist vor allem Arnold Sommerfeld (1868–1951) zu nennen, der 1906 hier den Lehrstuhl für Theoretische Physik erhielt, und bis zu seiner Emeritierung im Jahr 1938 innehatte.

Zu erwähnen ist auch, daß Lindemann in Königsberg eine außerordentliche Professur für Adolf Harwitz (1859–1919) durchsetzen kann, der – obgleich ausgezeichneter Mathematiker – wegen seiner jüdischen Abstammung Schwierigkeiten hat, eine Anstellung zu finden.

Die Zeit in München

1893 kommt nun Lindemann an unsere Universität, 1894 wird er zum außerordentlichen, 1895 zum ordentlichen Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften gewählt. Im Studienjahr 1904/05 ist er Rektor der Ludwig-Maximilians-Universität. Seine Antrittsrede über „Lehren und Lernen in der Mathematik" am 26.11.1904 ist heute noch so aktuell wie damals. Bedenkenswert ist seine Forderung nach einer Verbesserung des Mathematikunterrichts, nicht im Hinblick auf die zunehmenden technischen Berufe, sondern weil die Mathematik – wie schon Platon als selbstverständlich angenommen hatte – für ihn genauso zur Allgemeinbildung gehört wie die philologischen Fächer. Er verlangt nicht die Abschaffung der klassischen Sprachen, sondern die Lektüre von Euklid im griechischen Urtext.

Im Anschluß an das Rektorat wird Lindemann Direktor des Verwaltungsausschusses der Universität und bleibt dies bis 1930, sieben Jahre über seine Emeritierung am 1.10.1923 hinaus. Auf diesem Sektor sind seine Verdienste auch einer von Mathematik unbeleckten Regierung verständlich: Zu Weihnachten 1917 spricht König Ludwig III. Lindemanns Erhebung in den Adelsstand aus, die im Januar 1918 vollzogen wird.

Eine wichtige Rolle spielt Lindemann noch einmal während der Räterepublik im April 1919. Der amtierende Rektor der Universität, Clemen, war gefangengesetzt und an der Ausübung seines Amtes gehindert. Den nach außen nicht in Erscheinung tretenden, aber in einem Hinterzimmer sitzenden, mit großer Entscheidungsbefugnis ausgestatteten Direktor des Verwaltungsausschusses übersehen die Revolutionäre. Er bleibt unbehelligt, und nach altem Universitätsgesetz, das zur Stellvertretung des Rektors den nächsten greifbaren Vorgänger heranzieht, kann er ganz legal die Universität in dieser schwierigen Zeit leiten.

Ein großes Fest

Anlaß für ein großes Fest bildet Lindemanns 70. Geburtstag, nachzulesen im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von 1923 (S. 24–30): „Bei Beginn der Vorlesungen im Sommersemester brachten ihm seine Hörer in dem festlich geschmückten Seminar eine herrliche Ovation dar. Am 24. Mai ernannte ihn die staatswirtschaftliche Fakultät der Universität München zum Ehrendoktor für seine Verdienste um die Verwaltung der Universität als ihr ‚Finanzminister'. Am 9. Juni überbrachten Schüler und Kollegen noch persönlich ihre Glückwünsche."

Im Auftrag von mehr als 60 Mitdoktoranden würdigt Oskar Perron (1880–1975), damals Professor in Heidelberg, und noch im selben Jahr als Nachfolger von Alfred Pringsheim (1850–1941) an die Universität München berufen, den gemeinsamen Lehrer. Die bei dieser Gelegenheit zusammengestellte Festschrift mit Arbeiten ehemaliger Schüler ist zur Zeit leider verschollen. Der damalige Assistent, Dr. Otto Volk, hatte unter den Mitdoktoranden gesammelt und die Büste bei Bernhard Bleeker in Auftrag gegeben, die im Juni 1922 bei den damaligen Räumen des Mathematischen Instituts in der Nordwestecke des Hauptgebäudes feierlich enthüllt wurde. „Ein Festabend im Museum, veranstaltet von den Studierenden, beschloß die Lindemannwoche, dabei hielten Prof. Hartogs (1874–1943) die Festrede und Geheimrat Pringsheim eine überaus witzige Tischrede." Auch im fernen Königs-

Fortsetzung nächste Seite

berg erinnerte man sich Lindemanns, der auch dort schon Rektor gewesen war. Im mathematisch-physikalischen Seminar der Albertina wurde am 29.8.1922 eine Kopie der Münchner Büste aufgestellt.

Bis zu seinem Tod blieb Lindemann aktiv in der Mathematik tätig. Die Bibliothek des Mathematischen Instituts verfügt über eine große Zahl von Sonderdrucken aus seinen letzten Lebensjahren. Ein so großer Wurf wie an seinem 30. Geburtstag konnte natürlich nicht mehr gelingen, eine solche Sternstunde hat man – wenn überhaupt – nur einmal im Leben.

Nachrichten aus der Bibliothek

Jour Fiz

Das über die Informationsvermittlung der UB für Wissenschaftler längst mögliche Anzapfen verschiedenster Datenbanken ist jetzt in einem Modellversuch auch für Journalisten möglich. Zunächst soll für zwei Jahre erprobt werden, wie sich Redaktionen und freie Journalisten mithilfe von 200 Datenbanken schnell in den Besitz nötiger Informationen setzen können. Dem Modell, das von der Arbeitsgemeinschaft für Kommunikationsforschung in München entwickelt worden ist, sind zwei Funkanstalten und zwei Zeitungen angeschlossen, die sich verpflichtet haben, auch ein Jahr nach Auslaufen des Modells auf dieser Basis weiterzuarbeiten. Für eine Recherche am Computer werden 46 Mark berechnet, ein sehr viel günstigerer Preis als für vergleichbare Anfragen üblich. Das Modell wird vom Bundesministerium für Forschung und Technologie finanziert.

Umzug

Die Schellingstr. 5 ist renoviert und bezogen worden: Vom Erdgeschoß aufsteigend findet man dort jetzt

- das Institut für Philosophie (Prof. Beierwaltes)
- das Institut für Deutsche Philologie (Prof. Rein und Prof. Stocker),
- das Institut für Vor- und Frühgeschichte mit Fotolabor und Zeichenraum,
- das Geschwister-Scholl-Institut für Politische Wissenschaften (Prof. Grosser und Prof. Schneider).

Die Telefonnummern haben sich nicht verändert.

Lindemanns Beweis:

π ist transzendent

Worum geht es nun bei diesem jahrtausendealten Problem, das wohl erstmals von dem griechischen Philosophen Anaxagoras (500 ?–428 v. Chr.) formuliert wurde, während er wegen Gotteslästerung in den Jahren 432/431 in einem Athener Gefängnis saß. Es läßt sich in etwas vereinfachter Form folgendermaßen beschreiben:

Gegeben sei ein Kreis durch Mittelpunkt und Radius; kann man dann „mit Zirkel und Lineal" ein flächengleiches Quadrat konstruieren? Das ist die Frage nach der Quadratur des Kreises, wobei natürlich die Formulierung „konstruiere mit Zirkel und Lineal" einer Präzisierung bedarf. Die Mathematiker meinen das in einem ganz eng begrenzten Sinn, so etwa wie man in der Schule geometrische Konstruktionen ausführt. Und daran entzünden sich beim nicht-mathematisch gebildeten Publikum immer wieder Mißverständnisse. Jedes mathematische Institut weiß ein Lied zu singen von den „Kreisquadrierern", die immer wieder „Lösungen" dieser Konstruktionsaufgabe anbieten, die aber im Sinne der exakten Aufgabenstellung nicht zulässige Konstruktionen enthalten oder ein nur näherungsweise flächengleiches Quadrat liefern. Das Ergebnis von Lindemann besagt gerade, daß eine solche Konstruktion nicht möglich ist, und jeder weitere Versuch vergeblich sein muß. (Trotzdem hören die diesbezüglichen Einsendungen nicht auf!)

Um das genauer zu erläutern, muß man sich zunächst mit den verschiedenen Typen von Zahlen vertraut machen, die die Mathematiker unterscheiden. Wir können uns dabei auf die „nichtnegativen reellen" Zahlen beschränken, das sind diejenigen Zahlen, die sich durch endliche oder unendliche (periodische oder nichtperiodische) Dezimalbrüche ausdrücken lassen; geometrisch gesprochen, sind es außer der 0 diejenigen Zahlen, die als Längenmaße von Strecken in Bezug auf eine gegebene Einheitsstrecke („Maßeinheit") auftreten.

Die einfachsten unter diesen Zahlen sind die sog. *natürlichen* Zahlen, die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 ... Etwas komplizierter sind die (positiven) *rationalen* Zahlen oder *Bruchzahlen,* es sind die Zahlen, die sich in der Form $\frac{z}{n}$ darstellen lassen, wobei z und n natürliche Zahlen mit $n \neq 0$ sind; sie entsprechen den endlichen und periodisch unendlichen Dezimalbrüchen. Zahlen, die nicht rational sind, heißen *irrational.* Die in gewissem Sinne einfachste irrationale Zahl ist $\sqrt{2}$, geometrisch darstellbar durch die Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 (nach dem Satz des Pythagoras).

Die nächstgrößere Klasse von Zahlen bilden die *algebraischen* Zahlen. Es sind diejenigen Zahlen, die einer Gleichung der Form

$$a_k x^k \pm a_{k-1} x^{k-1} \pm \ldots \pm a_1 x \pm a_0 = 0$$

genügen, wobei k, $a_0, a_1, \ldots a_k$ irgendwelche natürlichen Zahlen sein dürfen: So z.B. genügt die rationale Zahl $x = \frac{z}{n}$ (z, n natürliche Zahlen, $n \neq O$) der Gleichung

$$nx - z = O,$$

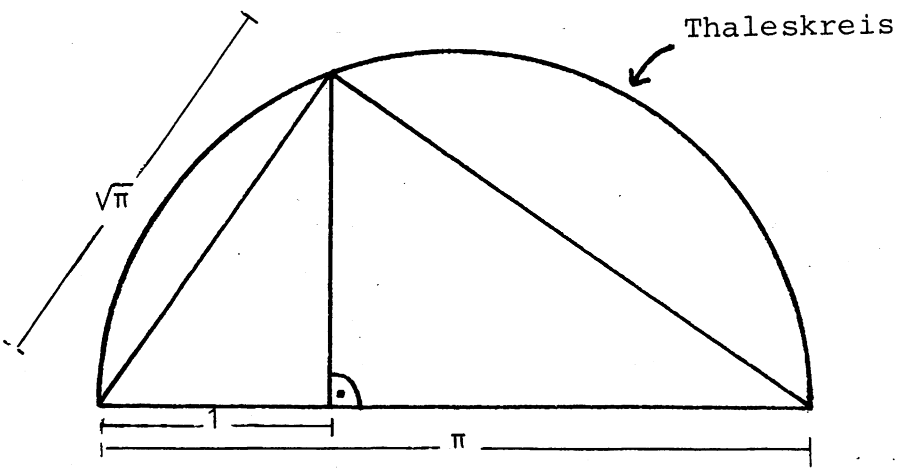
d.h. einer Gleichung der obigen Form mit $k = 1$, $a_1 = n$ und $a_0 = z$; die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ genügt der Gleichung

$$x^2 - 2 = O,$$

d.h. einer Gleichung der obigen Form mit $k = 2$, $a_2 = 1$, $a_1 = O$ und $a_0 = 2$. Zahlen, die nicht algebraisch sind, heißen „transzendent". Die Existenz von transzendenten Zahlen wurde erstmals 1851 von Joseph Lionville (1809–1882) aufgezeigt.

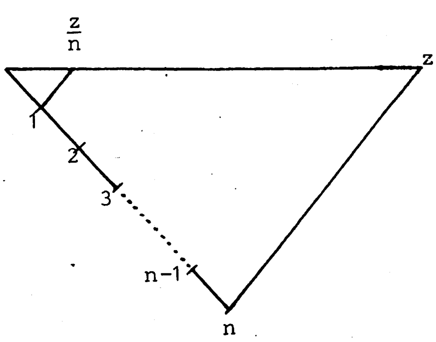
Nun können wir zu unserem Ausgangsproblem zurückkehren. Man kann ein Quadrat der gesuchten Art konstruieren, wenn man eine Seite konstruieren kann. Nimmt man den Radius des gegebenen Kreises als Maßeinheit, so nennt man „π" die Zahl, die das Maß der Kreisfläche in bezug auf diese Maßeinheit angibt; ihre Dezimalbruchdarstellung beginnt mit 3,14159 ... (π wurde früher häufig als Ludolphsche Zahl bezeichnet; man erinnere sich an die allgemeine Formel für die Kreisfläche: $F = r^2\pi$ und setze $r = 1$). Das gesuchte Quadrat hat also die Fläche π und seine Seiten haben die Länge $\sqrt{\pi}$. Nun lehrt der sog. Kathetensatz des Euklid, wie man eine Strecke der Länge $\sqrt{\pi}$ konstruieren kann, wenn eine Strecke der Länge π konstruiert ist. Für kundige Leser die explizite Konstruktion:

Fortsetzung nächste Seite



Es geht also darum, ob man eine Strecke der Länge π aus einer gegebenen Einheitsstrecke mit Zirkel und Lineal konstruieren kann. Allgemeiner führt das auf die Frage, welche Streckenlängen man durch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal erreichen kann.

Zunächst ist klar, daß man die Einheitsstrekke beliebig oft hintereinander abtragen kann. Damit ist jede natürliche Zahl Länge einer konstruierbaren Strecke. In der Schule hat man aber gelernt, eine Strecke der Länge z in n gleiche Teile zu teilen und damit



wird jede rationale Zahl Länge einer konstruierbaren Strecke. Wie bei der vorhin angegebenen Konstruktion kann man mit Hilfe des Kathetensatzes aus jeder Strecke der Länge $\frac{z}{n}$ eine Strecke der Länge $\sqrt{\frac{z}{n}}$ konstruieren, $x = \sqrt{\frac{z}{n}}$ ist eine algebraische Zahl, sie genügt der Gleichung

$$n^2x^2 - z^2 = 0$$

Eine genaue Weiterführung solcher Überlegungen zeigt nun, daß jede konstruierbare Strecke eine algebraische Zahl als Längenmaß hat. Dabei ist nicht jede algebraische Zahl erreichbar; eine Charakterisierung der „konstruierbaren" algebraischen Zahlen liefert die Theorie von Evariste Galois (1811–1832). Für eine durch irgendwelche mathematischen Sachverhalte konkret gegebene Zahl ist es nun aber häufig sehr schwierig, zu entscheiden, ob sie algebraisch ist, und wenn ja, ob sie zu den konstruierbaren algebraischen Zahlen gehört. Die Babylonier rechneten mit π als natürlicher Zahl 3, sie waren sich aber dessen bewußt, daß es sich hierbei nur um einen Näherungswert handele. Ein archäologischer Fund bezeugt schon für diese Zeit den genaueren Wert 3,125. (Man findet das in den Arbeiten unseres Kollegen Kurt Vogel, des Nestors unter den hiesigen Mathematikern.) Bei den Ägyptern findet man $\pi \approx 4.(\frac{8}{9})^2$, Archimedes (280 ?–212) beweist

$$3{,}141 \approx \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \approx 3{,}143$$

Ludolph van Ceulen (1540–1610) berechnet π auf 35 Stellen genau. Mit den heutigen Großrechnern erhält man natürlich leicht noch vielmehr Stellen; bisher hat man über 100 000 ausgerechnet; die letzte Seite des Lehrbuchs „Lineare Algebra" von Gerd Fischer, Hamburg, 1975 enthält eine Liste der ersten 2 000 Dezimalen.

Erst Johann Heinrich Lambert gelingt der Nachweis, daß π nicht rational sei. Aber mit diesem Ergebnis könnte π immer noch algebraisch, und sogar noch konstruierbar sein. Der Nachweis von Lindemann, daß π aber transzendent sei, schließt dieses nun wirklich aus.

Eine ausführliche Beschreibung des mathematischen Sachverhalts für Nichtmathematiker findet man bei Heinrich Tietze (1880–1964, ab 1925 Professor an unserer Universität): „Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit", 4. Auflage München 1965 (bei Beck).