Der Satz von Bodenmiller – Steiner

In der ebenen Geometrie betrachtet man häufig drei zu einem *Dreieck* gehörige merkwürdige *Geraden* und untersucht diese auf *Kopunktalität*, das heißt, auf Schneiden in einem Punkt. Beispiele dafür bilden die drei Mittelsenkrechten oder die drei Winkelhalbierenden. Daß zwei Geraden in der Ebene sich schneiden, ist nichts Besonderes; das Parallelsein bildet die Ausnahme. Daß drei Geraden durch einen Punkt gehen, ist im allgemeinen nicht zu erwarten, und deshalb erregt dieser Fall besondere Aufmerksamkeit.

Dreieck und Geraden sind sehr spezielle Figuren, und man kann nach sinnvollen Verallgemeinerungen fragen. Ein Beispiel dafür, das hier kurz vorgestellt werden soll, bildet der Satz von Bodenmiller – Steiner[1].

Dabei wird die übliche Situation in zwei Richtungen verändert. Zum einen erhöhen wir von „drei" auf „vier", das heißt statt eines Dreiecks betrachten wir ein Vier...? - das gibt gleich das erste Problem. Ein Dreieck ist bestimmt durch drei Punkte in allgemeiner Lage, das sind drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, oder durch drei Geraden in allgemeiner Lage, das sind drei Geraden, die nicht durch einen Punkt gehen, aber von denen auch keine zwei zueinander parallel sind. So haben wir zwei äquivalente Charakterisierungen des (geradlinigen) Dreiecks in der Ebene. Was passiert aber, wenn wir darin „drei" durch „vier" ersetzen?

- *Vier Punkte in allgemeiner Lage* sind vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Je zwei von vier solchen Punkten haben eine Verbindungsgerade; das ergibt insgesamt sechs Geraden. Die ganze Konfiguration aus vier Punkten und sechs Geraden wird als *(vollständiges) Viereck* bezeichnet. Die Punkte sind die *Ecken*, die Verbindungsgeraden von je zwei Ecken die *Seiten* des Vierecks.

- *Vier Geraden in allgemeiner Lage* sind vier Geraden, von denen keine drei durch einen Punkt gehen und keine zwei zueinander parallel sind. Je zwei von vier solchen Geraden haben einen Schnittpunkt; das ergibt insgesamt sechs Schnittpunkte. Die ganze Konfiguration wird als *(vollständiges) Vierseit* bezeichnet. Die Geraden sind die *Seiten*, die Schnittpunkte von je zwei Seiten die *Ecken* des Vierseits.

Der Satz von Bodenmiller – Steiner beschreibt eine Eigenschaft von Vierseiten. Deshalb müssen wir noch einige hierzu gehörige Begriffe erläutern. Eine Ecke A eines Vierseits ist Schnittpunkt von zwei Seiten des Vierseits; der Schnittpunkt C der beiden anderen Seiten ist die *Gegenecke* zu A. Die Ecken A und C zusammen bilden ein *Paar von Gegenecken*, ihre Verbindungs*strecke* (! nicht ...gerade) ist eine *Diagonale* des Vierseits. Ein Vierseit hat demnach drei Paare von Gegenecken und drei Diagonalen. Zwei Ecken bilden genau dann ein Paar von Gegenecken, wenn sie nicht auf einer Seite liegen.

Die zweite Veränderung betrifft die eingangs angesprochene Kopunktalität von drei Geraden. Auch hier erhöhen wir den Grad der Kompliziertheit um „eine Stufe"; wir gehen von Geraden zu Kreisen über. Aber dabei wird die Situation sehr viel komplexer, so daß wir sie nur stückweise entwickeln werden. Im ersten Ansatz bemerken wir, daß dem Sonderfall paralleler Geraden der

[1] Eine ausführliche, mit Hinweisen auf die historische Herkunft versehene Darstellung wird voraussichtlich in der Zeitschrift *Didaktik der Mathematik* unter dem Titel: „Gudermann, Bodenmiller und der Satz von Bodenmiller - Steiner" erscheinen.

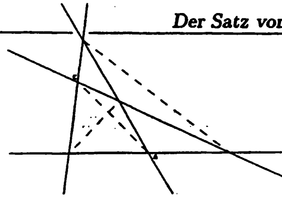

Abbildung 1: Vierseit mit Diagonalen

Sonderfall konzentrischer Kreise entspricht, und daß statt zwei sich schneidender Geraden bei zwei Kreisen mit verschiedenen Mittelpunkten die drei Möglichkeiten des Schneidens in zwei Punkten, des Berührens in einem Punkt und des Meidens in Betracht zu ziehen sind.

Jetzt ist der mathematische Hintergrund für die schwache Fassung des *Satzes von Bodenmiller* bereitgestellt. Um ihn bequem formulieren zu können, führen wir noch einen Begriff ein: Ein Kreis, der eine Diagonale eines Vierseits zum Durchmesser hat, heißt *Bodenmillerscher Kreis* des Vierseits. Ein Vierseit besitzt drei Bodenmillersche Kreise, vergleichbar den drei Mittelsenkrechten oder den drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks. Der Satz lautet nun:

> *Wenn sich zwei der Bodenmillerschen Kreise eines Vierseits in zwei verschiedenen Punkten schneiden, so geht auch der dritte Bodenmillersche Kreis dieses Vierseits durch diese zwei Punkte. Wenn sich zwei solche Kreise berühren, so hat dritte mit ihnen den Berührpunkt, aber keinen anderen gemein. Meiden sich zwei der Bodenmillerschen Kreise, so haben alle drei paarweise keinen Punkt gemeinsam.*

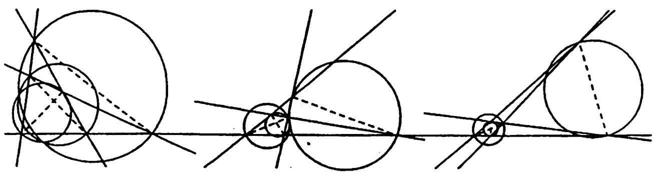

Abbildung 2: Satz von Bodenmiller

Dies läßt sich mit Mitteln der Vektoralgebra leicht beweisen. Es sei ein Vierseit gegeben. Um vektoriell rechnen zu können, brauchen wir einen Ursprung und eine Basis. Wir wählen eine Ecke des Vierseits als Ursprung. Die Ortsvektoren zweier benachbarter Ecken (auf den beiden Seiten, die durch den Ursprung gehen) bilden eine Basis; wir bezeichnen sie durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$. Die Ortsvektoren der beiden anderen Ecken auf den Seiten durch den Urprung sind Vielfache von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, also von der Form $r \cdot \mathfrak{a}$ und $s \cdot \mathfrak{c}$ mit eindeutig bestimmten reellen Zahlen r und s, die von 0 und 1 verschieden sind. Mit diesen Daten können wir nun den Ortsvektor $\mathfrak{b}$ der Gegenecke zum Urspung berechnen.

Sie ist der Schnittpunkt der Seiten, die die Ecken mit den Ortsvektoren $\mathfrak{a}$, $s \cdot \mathfrak{c}$ einerseits und die Ecken mit den Ortsvektoren $\mathfrak{c}$, $r \cdot \mathfrak{a}$ andererseits enthalten. Die Parameterdarstellungen dieser Geraden mit den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ als Aufpunkt zeigen nun, daß reelle Zahlen k, l zu bestimmen sind, für die gilt:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + k \cdot (s\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) = \mathfrak{c} + l \cdot (r\mathfrak{a} - \mathfrak{c}) . \qquad (1)$$

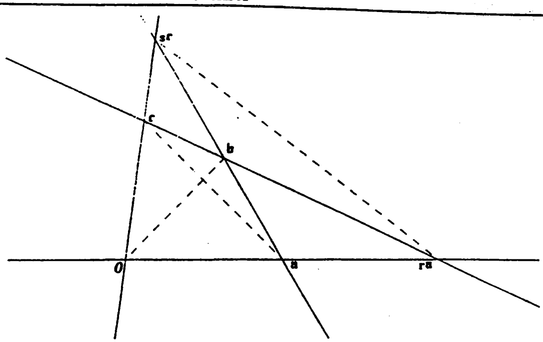

Abbildung 3: Vektorielle Darstellung

Durch Umsortieren erhält man daraus

$$(1-k-lr)\cdot\mathfrak{a}+(ks-1+l)\cdot\mathfrak{c}=0.$$

Da die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ linear unabhängig sind, ergeben sich k und l als Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcl} k & + & r\cdot l & = & 1, \\ s\cdot k & + & l & = & 1. \end{array}$$

Es hat die Determinante $1-r\cdot s$; sie kann nicht verschwinden, denn sonst wären die sich nach Voraussetzung in einem Punkt schneidenden Geraden parallel. Aus der Cramerschen Regel erhalten wir

$$k=\frac{1-r}{1-rs},\quad l=\frac{1-s}{1-rs}$$

und damit

$$\mathfrak{b}=\mathfrak{a}+\frac{1-r}{1-rs}\cdot(s\mathfrak{c}-\mathfrak{a})=\frac{r-rs}{1-rs}\cdot\mathfrak{a}+\frac{s-rs}{1-rs}\cdot\mathfrak{c}. \tag{2}$$

Als nächstes müssen wir die Kreisgleichungen der Bodenmillerschen Kreise aufstellen. Dazu gehen wir von der vektoriellen Form der allgemeinen Kreisgleichung aus:

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{m})^2=\rho^2, \tag{3}$$

wobei $\mathfrak{m}$ den Ortsvektor des Mittelpunktes und ρ den Radius des betrachteten Kreises bezeichnet; das Quadrat auf der linken Seite dieser Gleichung bezieht sich auf das Skalarprodukt, das wir im allgemeinen durch „$\circ$“ bezeichnen werden. Die Gleichung ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Kreises als geometrischer Ort aller Punkte $\mathfrak{x}$, die von dem festen Punkt $\mathfrak{m}$ den Abstand ρ haben. Nun überlegen wir, wie die Gleichung eines Kreises lautet, der eine gegebene Strecke zum Durchmesser hat, wenn den Endpunkten der Strecke die Ortsvektoren $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{e}$ zugeordnet sind. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Mittelpunkt der Strecke, hat also den Ortsvektor $\frac{1}{2}(\mathfrak{d}+\mathfrak{e})$, und der Radius ist der halbe Abstand dieser Punkte, also $\frac{1}{2}\sqrt{(\mathfrak{d}-\mathfrak{e})^2}$. Damit ergibt sich für die Kreisgleichung

$$(\mathfrak{x}-\frac{1}{2}(\mathfrak{d}+\mathfrak{e}))^2=\frac{1}{4}(\mathfrak{d}-\mathfrak{e})^2. \tag{4}$$

Durch Ausquadrieren erhalten wir

$$\mathfrak{x}^2 - (\mathfrak{d}+\mathfrak{e})\circ\mathfrak{x} + \frac{1}{4}(\mathfrak{d}^2 + 2\cdot\mathfrak{d}\circ\mathfrak{e} + \mathfrak{e}^2) = \frac{1}{4}(\mathfrak{d}^2 - 2\cdot\mathfrak{d}\circ\mathfrak{e} + \mathfrak{e}^2),$$

woraus sich durch Zusammenfassung ergibt

$$\mathfrak{x}^2 - (\mathfrak{d}+\mathfrak{e})\circ\mathfrak{x} + \mathfrak{d}\circ\mathfrak{e} = 0.$$

Damit erhalten wir für die Bodenmillerschen Kreise die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}^2 - \mathfrak{b}\circ\mathfrak{x} &= 0, \\ \mathfrak{x}^2 - (\mathfrak{a}+\mathfrak{c})\circ\mathfrak{x} + \mathfrak{a}\circ\mathfrak{c} &= 0, \\ \mathfrak{x}^2 - (r\mathfrak{a}+s\mathfrak{c})\circ\mathfrak{x} + rs\mathfrak{a}\circ\mathfrak{c} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Kürzen wir die linken Seiten dieser Gleichungen durch P_1, P_2, P_3 ab und setzen wir in (5) den in (3) errechneten Wert für $\mathfrak{b}$ ein, so erhalten wir zunächst

$$P_1 = \frac{1}{1-rs}((1-rs)\mathfrak{x}^2 - ((r-rs)\mathfrak{a} + (s-rs)\mathfrak{c})\circ\mathfrak{x}),$$

also

$$(1-rs)P_1 = (1-rs)\mathfrak{x}^2 - (r\mathfrak{a} - rs\mathfrak{a} + s\mathfrak{c} - rs\mathfrak{c})\circ\mathfrak{x},$$

und erkennen damit

$$(1-rs)\cdot P_1 = P_3 - rs\cdot P_2. \tag{6}$$

Algebraisch bedeutet das, daß das Verschwinden von zweien der Werte P_1, P_2, P_3 das Verschwinden des dritten nach sich zieht. In geometrischer Umsetzung erhalten wir daraus die angegebene Behauptung des Satzes von Bodenmiller.

Um weitere Erkenntnisse zu gewinnen, lassen wir uns wieder von der Analogie Gerade – Kreis leiten. Dem Abstand eines Punktes von einer Geraden entspricht die *Potenz* eines Punktes in Bezug auf einen Kreis, die sich vektoriell durch

$$P = P(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}-\mathfrak{m})^2 - \rho^2 \tag{7}$$

definieren läßt, wenn wie in Gleichung (3) $\mathfrak{m}$ den Ortsvektor des Mittelpunktes und ρ den Radius des betrachteten Kreises bezeichnet. Die Potenz eines Punktes ist genau dann 0, wenn der Punkt auf dem Kreis liegt. Sie ist positiv, wenn der Abstand des Punktes vom Mittelpunkt größer als der Radius ist, also der Punkt außerhalb des Kreises liegt; in diesem Fall handelt es sich um die Konstante des Sekantensatzes (siehe [1, Seiten 72, 82]). Die Potenz eines Punktes im Kreisinnern ist negativ; ihr Absolutbetrag ist die Konstante des Sehnensatzes (siehe ebenfalls [1, Seiten 72, 82]). Aus dieser geometrischen Beschreibung der Potenz folgt die für die folgenden Überlegungen wichtige Tatsache, daß die Potenz unabhängig von der Wahl des Ursprungs und eventueller Basisvektoren allein durch die Lage des betrachteten Punktes zum Kreis festgelegt ist.

Bei zwei sich schneidenden Geraden ergibt sich das Paar der Winkelhalbierenden als geometrischer Ort aller Punkte, die gleichen Abstand von den beiden Geraden haben. Wir fragen nun nach dem geometrischen Ort aller Punkte, die gleiche Potenz in Bezug auf zwei Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten haben. Sind $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ die Ortsvektoren der Mittelpunkte und ρ_1, ρ_2 die Radien der zwei Kreise, so handelt es sich gemäß der vektoriellen Definition der Potenz (siehe Gleichung (7)) um die Punkte $\mathfrak{x}$, für die

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{m}_1)^2 - \rho_1^2 = (\mathfrak{x}-\mathfrak{m}_2)^2 - \rho_2^2 \tag{8}$$

gilt. Durch Ausmultiplizieren und Umsortieren erhalten wir die Gleichung

$$(\mathfrak{m}_2 - \mathfrak{m}_1) \circ \mathfrak{x} = \frac{1}{2}(\mathfrak{m}_2^2 - \rho_2^2 - \mathfrak{m}_1^2 + \rho_1^2)$$

– das ist die Gleichung einer Geraden. Damit ist der gesuchte geometrische Ort eine Gerade; sie wird als *Potenzlinie* der beiden Kreise bezeichnet. Ist $\mathfrak{x}$ ein gemeinsamer Punkt beider Kreise, so verschwinden beide Seiten der Gleichung (8), das heißt $\mathfrak{x}$ liegt auf der Potenzlinie. Daraus folgt, daß im Falle zweier Kreise, die sich in zwei Punkten schneiden, die Potenzlinie mit der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte zusammenfällt. Ebenso ergibt sich für zwei Kreise, die sich in einem Punkt berühren, die Potenzlinie als die gemeinsame Tangente. In beiden Fällen ist damit unmittelbar ersichtlich, daß die Potenzlinie rein geometrisch bestimmt ist und nicht vom gewählten Ursprung abhängt. Nach den vorigen Erläuterungen gilt dies aber auch für die Potenzlinie zweier Kreise, die sich meiden; das bringt für den Beweis des „Steiner"- Teils des Satzes von Bodenmiller – Steiner eine wesentliche Vereinfachung.

Zunächst kommen wir aber nun zur starken Fassung des Satzes von Bodenmiller. Wir betrachten wieder ein Vierseit und benutzen die schon eingeführten Ortsvektoren. Wir erkennen, daß die früher definierten Größen P_i, $i = 1, 2, 3$, gerade die Potenzen eines beliebigen Punktes in Bezug auf die Bodenmillerschen Kreise des Vierseits sind. Aus der Gleichung (6) folgt nun sofort: Hat ein Punkt gleiche Potenz in Bezug auf zwei der Bodenmillerschen Kreise, so hat seine Potenz in Bezug auf den dritten Bodenmillerschen Kreis den gleichen Wert. Das beweist die starke Fassung des Satzes von Bodenmiller:

> *Die drei zu je zwei Bodenmillerschen Kreisen eines vollständigen Vierseits gehörigen Potenzlinien fallen in einer Geraden zusammen.*

Wir nennen diese Gerade *Potenzlinie des Vierseits;* mit den eingeführten Bezeichnungen wird sie durch die Gleichung

$$((r-1)\mathfrak{a} + (s-1)\mathfrak{c}) \circ \mathfrak{x} = (rs-1)\mathfrak{a} \circ \mathfrak{c} \tag{9}$$

dargestellt. Die Potenzlinie des Vierseits ist also der geometrische Ort aller Punkte, die gleiche Potenz in Bezug auf die drei Bodenmillerschen Kreise des Vierseits haben.

Die Qualifizierung als „schwache" und „starke" Fassung des Satzes von Bodenmiller rechtfertigt sich daraus, daß erstere leicht aus der zweiten folgt, die zweite aber eine stärkere Aussage im Falle sich meidender Bodenmillerscher Kreise eines Vierseits macht. Zur Herleitung der schwachen aus der starken Fassung braucht man nur zu überlegen, daß ein gemeinsamer Punkt von zwei Bodenmillerschen Kreisen auf der Potenzlinie des Vierseits liegen und damit in Bezug auf alle drei Bodenmillerschen Kreise die Potenz 0 haben muß.

Lassen wir eine der Seiten eines Vierseits weg, so erhalten wir ein Dreieck. Jedes Vierseit bestimmt auf diese Weise vier Dreiecke; für diese gilt der *Satz von Steiner:*

> *Die Höhenschnittpunkte der vier durch ein vollständiges Vierseit bestimmten Dreiecke sind kollinear, sie liegen auf der Potenzlinie des Vierseits.*

Zum Beweis verwenden wir wieder die eingeführten Bezeichnungen. Da die Potenzlinie des Vierseits geometrisch, unabhängig von den gewählten Ortsvektoren, bestimmt ist, genügt es, für eines der durch das Vierseit bestimmten Dreiecke nachzuweisen, daß sein Höhenschnittpunkt auf der Potenzlinie des Vierseits liegt. Wir nehmen dafür das Dreieck, dessen Ecken durch die Ortsvektoren O, $\mathfrak{a}$, $s\mathfrak{c}$ beschrieben sind.

Die Höhe dieses Dreiecks durch $\mathfrak{a}$ hat die Gleichung

$$\mathfrak{c} \circ \mathfrak{x} = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{c},$$

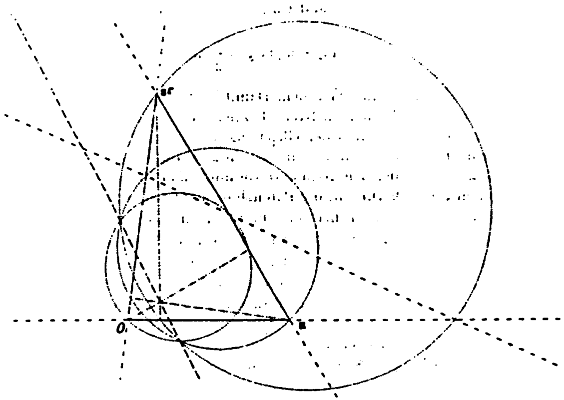

Abbildung 4: Satz von Steiner

die Höhe durch sc die Gleichung

$$\mathfrak{a} \circ \mathfrak{x} = {}_s\mathfrak{a} \circ \mathfrak{c}.$$

Man sieht nun sofort, daß ein Punkt, für den beide Gleichungen gelten, auch die Gleichung (9) der Potenzgeraden des Vierseits erfüllt, und alles ist bewiesen.
Damit können wir den ganzen *Satz von Bodenmiller – Steiner* formulieren:

> *Die drei zu je zwei Bodenmillerschen Kreisen eines vollständigen Vierseits gehörigen Potenzlinien fallen in einer Geraden zusammen, die die Höhenschnittpunkte der vier durch das Vierseit bestimmten Dreiecke enthält.*

Zum Abschluß sei bemerkt, daß die Einschränkung der Behauptung des Satzes von Bodenmiller auf Vierseite mit zwei zueinander parallelen Diagonalen auch ohne den Vektorkalkül mit Methoden der Ähnlichkeitsgeometrie bewiesen werden kann, als Anwendung des klassischen Satzes von Apollonios [1, Seite 37].

Literatur

[1] Barth, F., Krumbacher, G., Matschiner, E. und Ossiander, K.: *Anschauliche Geometrie* 3. Neues mathematisches Unterrichtswerk des Ehrenwirth Verlags. München: Ehrenwirth 1988

Rudolf Fritsch, München