Didaktik der Mathematik

21. Jahrgang 1993

Bayerischer Schulbuch-Verlag · München

Anschrift der Redaktion:
StD Franz Hager, Blütenstr. 9, 82178 Puchheim,
Telefon (089) 803043

Bezugsbedingungen
Jahresabonnement 4 Hefte DM 58,-,
Einzelheft DM 16,- zuzüglich Versandkosten
Postscheckkonto München 93370-805
Bankkonto: Bayer. Vereinsbank München 81154
»Didaktik der Mathematik« erscheint einmal vierteljährlich. Für unverlangt eingesandte Manuskripte wird keine Gewähr übernommen. Nachdrucke innerhalb der gesetzlichen Frist nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Verlages.

Verlag und Anzeigenverwaltung
Bayerischer Schulbuch-Verlag,
Postfach 190253, 80602 München,
Hubertusstraße 4, 80639 München,
Telefon (089) 179120
Zur Zeit ist Anzeigenpreisliste Nr. 3 vom 1. 1. 1983 gültig.
Satz: Tutte Druckerei GmbH, Salzweg
Druck: E. Rieder Nachf., Schrobenhausen

Didaktik der Mathematik wird laufend im PÄDAGOGISCHEN JAHRESBERICHT (Verlag für pädagogische Dokumentation, Duisburg) bibliografisch nachgewiesen und regelmäßig für ZDM bzw. die Datenbank MATHDI ausgewertet.

ISSN 0343-5334

Inhaltsverzeichnis

PRESSEMITTEILUNG - SUCHMELDUNG

Wer hat's gemerkt?
Geometrische Beweislücke über 400 Jahre unentdeckt?

Schon Euklid [Die Elemente, deutsch von Clemens Thaer, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1969, Drittes Buch, § 21] beweist den

Umfangswinkelsatz (Randwinkelsatz, Peripheriewinkelsatz): *Im Kreis sind die Umfangswinkel auf derselben Seite einer Sehne einander gleich* (Fig. 1).

Unter der Umkehrung dieses Satzes versteht man die

Aussage: *Sind zwei Winkel auf derselben Seite einer Strecke gleich groß, so liegen ihre Scheitel auf einem Kreisbogen, der auch die Endpunkte der Strecke enthält.*

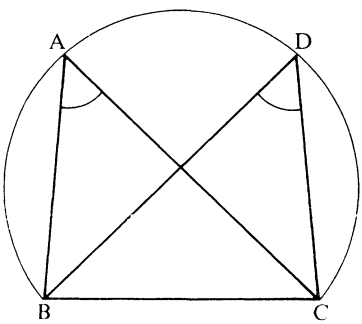

Fig. 1 $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$

Johannes Tropfke [Geschichte der Elementar-Mathematik, Vierter Band, Berlin: Walter de Gruyter & Co. ^{3}1940, Seite 147] und andere weisen daraufhin, daß diese Umkehrung zwar sicher im Altertum bekannt war, aber nicht vor 1574 explizit belegt ist.

Der aus Bamberg stammende, in Rom lehrende Jesuit Christoph Clavius (1538–1612) formuliert und beweist die Umkehrung in einer Anmerkung seiner damaligen Euklid-Bearbeitung; es heißt in der hier vorliegenden, 1603 bei Aloys Zanettus in Rom erschienenen Auflage (Seiten 411–412):

SCHOLIUM

FACILE quoque theorema istud conuertemus hoc modo.

SI à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ quæ ad easdem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum descriptus, per alterum quoque angulum transibit.

EX duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ BA, CA, BD, CD, binæ ex singulis, constituentes ad easdem partes duos æquales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, et angulum D, descriptum, transire quoque per angulum A. Si enim non transit, transibit vel ultra A, vel citra secans rectam AB, in E. Ducta ergo recta CE, a erunt anguli E, D æquales. Cum ergo et angulus A, angulo D, ponatur æqualis; erunt anguli CAB, CEB, æquales, externus, et internus, quod est absurdum, [b]Externus enim interno major est. Transit ergo circulus per A quod est propositum.

Interessant dabei ist, daß sich Clavius unter [b] auf einen Satz beruft, den Euklid ohne Benutzung des Parallelenaxioms beweisen kann, den „schwachen Außenwinkelsatz“ [l.c., Erstes Buch, § 16]: *In einem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel größer als jeder der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.* Insofern ist die Umkehrung des Umfangswinkelsatzes in gewisser Weise vom Parallelenaxiom unabhängig, während der Satz selber dieses Axiom benötigt. (Der von Euklid unter Benutzung des Parallelenaxioms hergeleitete „starke Außenwinkelsatz“ besagt [l.c., Erstes Buch, § 32]: *In einem Dreieck ist jeder Außenwinkel gleich der Summe der nichtanliegenden Innenwinkel.*)

Die Argumentation von Clavius enthält jedoch eine Lücke. Er benutzt, daß der betrachtete Kreis den von B ausgehenden Strahl durch A in einem von B verschiedenen Punkt E schneidet (Fig. 2, links), woraus er mit dem schwachen Außenwinkelsatz auf den gewünschten Widerspruch

$$\sphericalangle BAC \neq \sphericalangle BEC = \sphericalangle BDC$$

schließt. Das braucht aber nicht der Fall zu sein (Fig. 2, rechts). Man könnte dann zwar

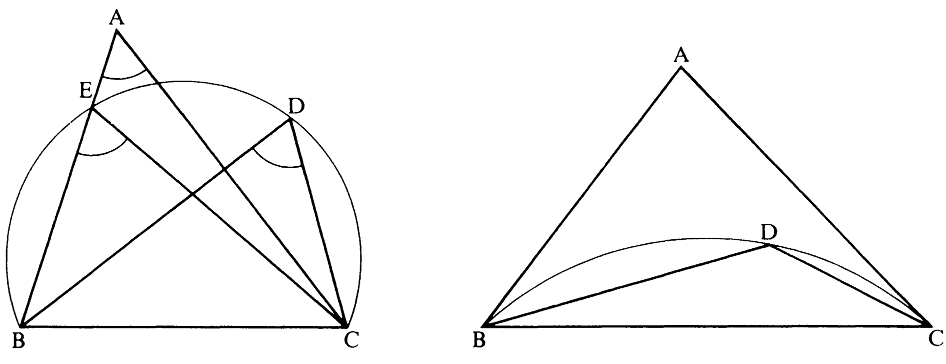

Fig. 2

nach einem von C verschiedenen Schnittpunkt des Kreises mit dem von C ausgehenden Strahl durch A suchen, aber dieser braucht – wie die Abbildung zeigt – auch nicht zu existieren.

Dieselbe lückenhafte Argumentation findet sich in vielen Euklid-Ausgaben nach Clavius und in andern Büchern, vor allem auch in allen am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Universität München untersuchten älteren und neueren Schulbüchern. Dabei geht es im Kern immer um den Nachweis folgender

Behauptung: *Gegeben sei ein Kreissegment (Kreisabschnitt) mit den Ecken B und C. Der Punkt A liege auf derselben Seite der Geraden BC wie der das Segment berandende Kreisbogen. Liegt A innerhalb des Segments, so ist $\sphericalangle BAC$ größer als der zugehörige Umfangswinkel, liegt A außerhalb, so ist $\sphericalangle BAC$ kleiner als der Umfangswinkel.*

In den Schulbüchern werden meistens $\sphericalangle$ BAC und $\sphericalangle$ BEC mit Hilfe des starken Außenwinkelsatzes verglichen, wobei E den Schnittpunkt des von B ausgehenden Strahles durch A bezeichnet. Wenn A innerhalb des Segmentes liegt, ist die Existenz des Schnittpunktes auch gesichert, da der ins Unendliche laufende Strahl irgendwann das beschränkte Segment verlassen muß. Aber für einen außerhalb des Segmentes liegenden Punkt A braucht dieser Schnittpunkt nicht zu existieren.

Es wird nicht behauptet, daß dieser Sachverhalt ein großes mathematisches Problem darstellt. Die Beweislücke in der eben angegebenen Fassung kann leicht geschlossen werden (Fig. 3). Man verbinde den außerhalb des Segmentes gelegenen Punkt A mit irgendeinem Punkt F im Innern der Strecke [BC]; eine kanonische Wahl für F wäre der Mittelpunkt von [BC]. Die Strecke [AF] schneidet dann sicher den das Segment berandenden Kreisbogen in einem von B und C verschiedenen Punkt E. Dann ist $\sphericalangle BAC < \sphericalangle BEC$ zu zeigen. Das kann man in zwei Weisen begründen:

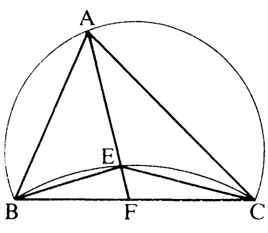

Fig. 3

1. Man wechselt den Standpunkt. Man betrachtet statt des ursprünglich gegebenen Segmentes das von der Strecke [BC] aus dem Umkreis des Dreiecks [ABC] ausgeschnittene Segment, das den Punkt A enthält. Dann ist E ein innerer Punkt dieses Segments und aus dem unstrittigen Teil des eben skizzierten Beweises folgt die Behauptung $\sphericalangle BAC < \sphericalangle BEC$.

2. Man beachtet

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAF + \sphericalangle FAC\,, \quad \sphericalangle BEC = \sphericalangle BEF + \sphericalangle FEC$$

und schließt mit dem schwachen Außenwinkelsatz auf $\sphericalangle BAF < \sphericalangle BEF$ und $\sphericalangle FAC < \sphericalangle FEC$, woraus sich wieder die Behauptung ergibt. (Im Schulunterricht wird meistens nur der starke Außenwinkelsatz behandelt, der das Ergebnis natürlich auch liefert.)

Sicher haben unzählige Lehrer und auch andere geometrisch Interessierte in den über 400 Jahren, die seit 1574 vergangen sind, die Lücke in der Argumentation von Clavius entdeckt. Gesucht sind gedruckte Belege, die einen vollständigen Beweis der Umkehrung des Umfangswinkelsatzes enthalten.

Sachdienliche Hinweise bitte an die Redaktion.