PAREIGIS, B.
Math. Annalen 153, 1—13 (1964)

Einige Bemerkungen über Frobenius-Erweiterungen

Von

BODO PAREIGIS* in Ithaca, N.Y.

1. Der von F. KASCH eingeführte Begriff der Frobenius-Erweiterung [2] konnte von T. NAKAYAMA, T. TSUZUKU und F. KASCH ([5], [8], [9]) weitgehend verallgemeinert werden, und eine in [2] angegebene Charakterisierung einer Frobenius-Erweiterung durch ihren Endomorphismenring bleibt dabei im wesentlichen erhalten ([4], [5], [8], [9], [10]). Ferner gab F. KASCH [6] eine Definition des Nakayama-Automorphismus für eine beliebige Frobenius-Erweiterung R/S, der jetzt ein Automorphismus des Zentralisators von S in R ist.

Im ersten Teil dieser Note soll der Zusammenhang zwischen dem Nakayama-Automorphismus von R/S und dem des Endomorphismenrings von R/S untersucht werden. Es wird gezeigt, daß der Nakayama-Automorphismus beim Übergang zum Endomorphismenring im wesentlichen erhalten bleibt.

Im zweiten Teil untersuchen wir folgende Frage: Gegeben seien unitäre Ringerweiterungen $R \supseteq S \supseteq T$, und seien zwei der drei Erweiterungen R/S, R/T, S/T Frobenius-Erweiterungen. Ist dann auch die dritte eine Frobenius-Erweiterung? In diesem Teil lassen sich durch explizite Angabe der Nakayama-Automorphismen gewisse Aussagen über den Fall von symmetrischen Frobenius-Erweiterungen machen.

Durch die Verallgemeinerung des Begriffes einer Frobenius-Erweiterung erhebt sich unter anderem die Frage, ob die Maschke-Ikeda-Kasch-Charakterisierung für relativ projektive bzw. relativ injektive Moduln erhalten bleibt. In [9] wird diese Frage unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen positiv beantwortet. Wie im Zusatz von [6] bemerkt wurde, ist es nach einer Idee von K. GRUENBERG möglich, den Begriff der Spur auch für beliebige Frobenius-Erweiterungen zu bilden. Im dritten Teil dieser Note soll das ausgeführt werden. Damit kann dann gezeigt werden, daß die Maschke-Ikeda-Kasch-Charakterisierung von relativ projektiven bzw. relativ injektiven Moduln ohne weitere Voraussetzungen für beliebige Frobenius-Erweiterungen gültig bleibt.

2. Alle in dieser Arbeit verwendeten Ringerweiterungen seien unitäre Ringerweiterungen, und alle Moduln seien unitäre Moduln. Nach [9] wollen wir im folgenden unter einer α-Frobenius-Erweiterung bzw. unter einer Frobenius-Erweiterung zweiter Art R/S eine Ringerweiterung $R \supseteq S$ mit den

* Während eines Teils der Arbeit unterstützt durch Nato-Forschungs-Stipendium 4-s-nato 2/3 gf.

Eigenschaften

(r1) $\varphi : {}_SR_R \cong {}_S\mathrm{Hom}(R_S, S_{\alpha S})_R$

(r2) R_S ist endlich erzeugt und projektiv

bzw. den nach [9] dazu äquivalenten Eigenschaften

(l1) $\varphi' : {}_RR_S \cong {}_R\mathrm{Hom}({}_SR, {}_{\alpha' S}S)_S$

(l2) ${}_SR$ ist endlich erzeugt und projektiv

verstehen. Dabei sei $\mathrm{Hom}(R_S, S_{\alpha S})$ die Menge der Homomorphismen von R in S mit $f(rs) = f(r)\,\alpha(s)$ für $r \in R$, $s \in S$, wobei α ein Automorphismus von S sei. φ bzw. φ' werden Frobenius-Isomorphismen genannt. Ist α die identische Abbildung, so sagen wir, R/S ist eine 1-Frobenius-Erweiterung oder eine Frobenius-Erweiterung erster Art. Gelten an Stelle von (r2) bzw. (l2) die Eigenschaften

(r3) R_S ist endlich erzeugt und frei

bzw.

(l3) ${}_SR$ ist endlich erzeugt und frei,

so heißt die Frobenius-Erweiterung frei.

Wir schreiben Homomorphismen von links und Multiplikatoren werden in den folgenden vier Möglichkeiten vorkommen:

a) $[r^l f](a) = f(ra)$

b) $[{}^l r f](a) = r f(a)$

c) $[r^r f](a) = f(ar)$

d) $[{}^r r f](a) = f(a) r$

wobei $r \in R$, $a \in {}_RA$ bzw. A_R, $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ und B ein R-Rechts- bzw. R-Links-Modul sind. In den Fällen b) und c) ist die Menge der so definierten Operatoren ring-isomorph zu R, in den Fällen a) und d) zu R^0, dem zu R invers-isomorphen Ring.

Nach [5] und [9] können (r1) bzw. (l1) ersetzt werden durch die dazu äquivalenten Eigenschaften

(r1′) Es gibt einen Homomorphismus $\psi \in \mathrm{Hom}({}_SR_S, {}_SS_{\alpha S})$ so, daß die Abbildung

$$R \ni r \to [r^l \psi] \in \mathrm{Hom}(R_S, S_{\alpha S})$$

ein S-R-Isomorphismus ist.

bzw.

(l1′) Es gibt einen Homomorphismus $\psi' \in \mathrm{Hom}({}_SR_S, {}_{\alpha' S}S_S)$ so, daß die Abbildung

$$R \ni r \to [r^r \psi'] \in \mathrm{Hom}({}_SR, {}_{\alpha' S}S)$$

ein R-S-Isomorphismus ist.

Dabei gilt $\psi = \varphi(1)$, $\psi' = \varphi'(1)$, $\psi' = \alpha^{-1}\psi$, $\alpha' = \alpha^{-1}$ für jeweils zusammengehörige Abbildungen. Die Homomorphismen ψ und ψ' heißen Frobenius-Homomorphismen.

Seien $\varrho, \varrho' \in Z_R(S) = P$, dem Zentralisator von S in R. Wegen (r1′) ist $[\varrho^l \psi] \in \mathrm{Hom}(R_S, S_{\alpha S})$ und, wovon man sich leicht überzeugt, sogar aus $\mathrm{Hom}({}_SR_S, {}_SS_{\alpha S})$. Dann ist $\alpha^{-1}[\varrho^l \psi] = [\varrho^l \alpha^{-1}\psi] = [\varrho^l \psi'] \in \mathrm{Hom}({}_SR_S, {}_{\alpha' S}S_S)$. Andererseits können alle Elemente aus $\mathrm{Hom}({}_SR_S, {}_{\alpha' S}S_S)$ in der Form $[\varrho'^r \psi']$ dargestellt werden. Die Zuordnung $\psi^* : \varrho \to \varrho'$ ist ein Ringautomorphismus von P, wie man leicht sieht. Dieser Automorphismus wird nach [6] Nakayama-Automorphismus genannt.

Wir wollen im folgenden die durch die oben vorgenommenen Konstruktionen zusammenhängenden Homomorphismen φ, ψ und ψ^* (eventuell auch φ' und ψ') als zusammengehörig bezeichnen. Es gilt nach Definition des Nakayama-Automorphismus immer

$$\begin{aligned} \psi(\varrho r) &= \psi(r\psi^*(\varrho)) \\ [\varrho^l\psi] &= [\psi^*(\varrho)^r\psi] \\ \varphi(\varrho r) &= [\psi^*(\varrho)^r\varphi(r)] \\ \varphi'(r\varrho) &= [\psi^{*-1}(\varrho)^l\varphi'(r)]\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Um die Menge aller Nakayama-Automorphismen zu untersuchen, beachten wir, daß wegen (r1′) ψ^* von α abhängt. Es liegt die Frage nahe, wie der Automorphismus α zu einem Automorphismus α' abgeändert werden kann, damit wieder ein (r1) genügender Isomorphismus existiert. T. Nakayama und T. Tsuzuku zeigen dazu [9]:

(2) Sei R/S eine α-Frobenius-Erweiterung, und sei α' ein weiterer Automorphismus von S. Dann und nur dann ist R/S eine α'-Frobenius-Erweiterung, wenn der Automorphismus $\alpha'\alpha^{-1}$ von S von einem inneren Automorphismus von R induziert wird.

Man überzeugt sich leicht, daß der neu entstehende Frobenius-Homomorphismus $[(t^{-1})^l\alpha'\alpha^{-1}\psi]$ beim Übergang von α zu α' ist, wobei $\alpha'\alpha^{-1}(s) = tst^{-1} = \beta(s)$. Der dazugehörige Nakayama-Automorphismus ist dann $\psi^*\beta^{-1}$, denn es ist für $\varrho \in P$ und $r \in R$

$$\begin{aligned} [(t^{-1})^l\alpha'\alpha^{-1}\psi](\varrho r) &= (\alpha'\alpha^{-1}\psi)(t^{-1}\varrho r) \\ &= (\alpha'\alpha^{-1}\psi)(\beta^{-1}(\varrho)t^{-1}r) \\ &= (\alpha'\alpha^{-1}\psi)(t^{-1}r(\psi^*\beta^{-1})(\varrho)) \\ &= [(t^{-1})^l\alpha'\alpha^{-1}\psi](r(\psi^*\beta^{-1})(\varrho))\,. \end{aligned}$$

Einen Überblick über die Gesamtheit der möglichen zusammengehörigen Abbildungen φ, ψ und ψ^* bei festem α gibt der

Satz 1. *Man erhält aus zusammengehörigen Abbildungen φ, ψ und ψ^* genau alle weiteren zusammengehörigen Abbildungen φ^+, ψ^+ und $(\psi^*)^+$ in der Form $[\varrho^l\varphi]$, $[\varrho^l\psi]$ und $[\varrho^l(\varrho^{-1})^r\psi^*]$, wobei $\varrho \in P^*$ ist, der multiplikativen Gruppe der regulären Elemente von P.*

Der Beweis für φ weicht von den bekannten Beweisen nicht ab, und der Beweis für ψ und ψ^* folgt aus den oben angegebenen Konstruktionen. Es sei darauf hingewiesen, daß $[\varrho^l(\varrho^{-1})^r\psi^*]$ bedeutet, daß sich ψ^* um einen inneren Automorphismus von P ändert.

Wir wollen eine Frobenius-Erweiterung zweiter Art symmetrisch nennen, wenn ein Nakayama-Automorphismus die identische Abbildung ist. Wegen Satz 1 und (2) sind dazu folgende Aussagen äquivalent:

1) Ein Nakayama-Automorphismus wird induziert von einem inneren Automorphismus β von R, für den gilt $\beta(S) = S$.

2) Jeder Nakayama-Automorphismus wird induziert von einem inneren Automorphismus β von R, für den gilt $\beta(S) = S$.

Weiter wollen wir eine α-Frobenius-Erweiterung α-symmetrisch nennen, wenn ein mit einem S-αS-Frobenius-Homomorphismus zusammenhängender Nakayama-Automorphismus die identische Abbildung ist. Wegen Satz 1 sind dazu folgende Aussagen äquivalent:

1) Ein mit einem S-αS-Frobenius-Homomorphismus zusammengehöriger Nakayama-Automorphismus ist ein innerer Automorphismus von P.

2) Jeder mit einem S-αS-Frobenius-Homomorphismus zusammengehörige Nakayama-Automorphismus ist ein innerer Automorphismus von P.

Da der mit vorgegebenen φ, φ' bzw. ψ zusammengehörige Nakayama-Automorphismus durch jede der vier Gleichungen (1) eindeutig bestimmt ist, haben wir damit eine Vielzahl untereinander äquivalenter Kennzeichnungen für symmetrische bzw. α-symmetrische α-Frobenius-Erweiterungen.

3. Wir wollen in diesem Teil den Zusammenhang zwischen dem Nakayama-Automorphismus der α-Frobenius-Erweiterung R/S und dem des Endomorphismenringes von R/S untersuchen. Dazu geben wir die Sätze über den Endomorphismenring aus [5] für α-Frobenius-Erweiterungen an.

Satz 2. *Sei R/S eine β-Frobenius-Erweiterung und lasse sich β fortsetzen zu einem Automorphismus α von R. Dann ist* $\operatorname{Hom}(R_S, R_S)/[{}^lR \operatorname{id}]$ *eine α^{-1}-Frobenius-Erweiterung.*

Eine Verallgemeinerung des Beweises aus [5] ist ohne weiteres möglich, wenn man beachtet, daß man als zweiseitigen R-Homomorphismus in [5]

$$\Psi_1 : {}_R\operatorname{Hom}(R_S, R_{\beta S})_R \to {}_RR_R$$

erhält, für den gilt, daß

$$\operatorname{Hom}(R_S, R_{\beta S}) \ni f \to [f^r \Psi_1] \in \operatorname{Hom}({}_R\operatorname{Hom}(R_S, R_{\beta S}), {}_RR)$$

ein Isomorphismus ist.

Ψ_1 ist in diesem Fall noch nicht der gesuchte Frobenius-Homomorphismus des Endomorphismenrings. Diesen erhalten wir, wenn wir bilden

$$\Psi_2 = [\alpha^l \Psi_1] . \tag{3}$$

Dann ist

$$\Psi_2 : {}_R\operatorname{Hom}(R_S, R_S)_R \to {}_{\alpha R}R_R$$

ein (11') genügender Homomorphismus, was zu zeigen war. Es sei weiter bemerkt, daß bei dem Beweis in [5] folgender Zusammenhang zwischen Ψ_1 und dem Frobenius-Isomorphismus φ von R/S besteht. Sei $f \in \operatorname{Hom}(R_S, S_{\beta S})$, so ist

$$\Psi_1(f) = \varphi^{-1}(f) . \tag{4}$$

Die Umkehrung des Satzes wird von F. Kasch [5] unter der Voraussetzung bewiesen, daß $R_S = xS_S \oplus A_S$ und $xS_S \cong S_S$ für 1-Frobenius-Erweiterungen.

T. Nakayama und T. Tsuzuku zeigten in [10], daß ohne diese Voraussetzung der Satz nicht gilt. Auch dieser Satz läßt sich ohne weiteres für α-Frobenius-Erweiterungen beweisen.

Satz 3. *Sei R/S eine Ringerweiterung, genüge* $\mathrm{Hom}(R_S, R_S)/[{}^lR\ \mathrm{id}]$ *der Bedingung* (11′) *und sei* $\alpha(S) = S$. *Dann gibt es einen S-R-Monomorphismus von* $\mathrm{Hom}(R_S, S_{\alpha S})$ *in* R. *Ist außerdem* $R_S = xS_S \oplus A_S$ *und* $xS_S \cong S_S$, *so existiert ein S-R-Isomorphismus zwischen* $\mathrm{Hom}(R_S, S_{\alpha S})$ *und* R, *d. h. dann ist* (r1) *für* R/S *erfüllt.*

Zum Beweis verweisen wir auf [5].

Wir wollen im folgenden, da $[{}^lR\mathrm{id}]$ und R als Ringe isomorph sind, $[{}^lR\mathrm{id}]$ durch R ersetzen. Ehe wir den Nakayama-Automorphismus angeben, der zu der Frobenius-Erweiterung $\mathrm{Hom}(R_S, R_S)/R$ gehört, muß der Zentralisator von R in $\mathrm{Hom}(R_S, R_S)$ untersucht werden. Es ist

$$Z_{\mathrm{Hom}(R_S, R_S)}(R) = \mathrm{Hom}({}_RR_S, {}_RR_S)\,.$$

Weiter ist mit $f \in \mathrm{Hom}({}_RR_S, {}_RR_S)$ $f(a) = [{}^rf(1)\ \mathrm{id}]\,(a)$ und wegen $sf(1) = f(1)s$ für $s \in S$ ist $f(1) \in P = Z_R(S)$. Weiter ist für jedes $\varrho \in P$ $[{}^r\varrho\mathrm{id}] \in \mathrm{Hom}({}_RR_S, {}_RR_S)$. Also ist

$$Z_{\mathrm{Hom}(R_S, R_S)}(R) = [{}^rP\mathrm{id}]\,. \tag{5}$$

Satz 4. *Sei R/S eine β-Frobenius-Erweiterung und lasse sich β fortsetzen zu einem Automorphismus α von R. Dann existiert eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Frobenius-Homomorphismen* $\Psi \in \mathrm{Hom}({}_R\mathrm{Hom}(R_S, R_S)_R, {}_{\alpha R}R_R)$ *und den Frobenius-Isomorphismen* $\varphi \in \mathrm{Hom}({}_S\mathrm{Hom}(R_S, S_{\beta S})_R, {}_SR_R)$. *Weiter ist* $\Psi^*([{}^r\varrho\mathrm{id}]) = [{}^r(\psi^*\alpha^{-1}(\varrho))\mathrm{id}]$ *für* $\varrho \in P$, *und eine Änderung von* ψ^* *um einen von* $\varrho \in P^*$ *erzeugten inneren Automorphismus von* P *entspricht einer Änderung von* Ψ^* *um einen von* $[{}^r(\alpha(\varrho^{-1}))\mathrm{id}]$ *erzeugten inneren Automorphismus von* $[{}^rP\mathrm{id}]$.

Beweis: Wegen (4) und da sich nach Satz 1 φ und Ψ genau um Elemente aus P^* bzw. $[{}^rP\mathrm{id}]^* = [{}^rP^*\ \mathrm{id}]$ ändern können, ist die erste Behauptung klar. Falls $\Psi^*([{}^r\varrho\mathrm{id}]) = [{}^r(\psi^*\alpha^{-1}(\varrho))\mathrm{id}]$ ist, ist die dritte Behauptung klar, da $[{}^rP\mathrm{id}]$ invers-isomorph zu P ist. Wegen $\varphi(\varrho r) = [\psi^*(\varrho)^r\varphi(r)]$ ist $\varphi^{-1}([\psi^*(\varrho)^rf]) = \varrho\varphi^{-1}(f)$. Sei $g \in \mathrm{Hom}(R_S, R_{\beta S})$, so kann man schreiben $g = \sum [{}^lr_if_i]$ mit $f_i \in \mathrm{Hom}(R_S, S_{\beta S})$. Dann ist $\Psi_1(g) = \sum r_i\varphi^{-1}(f_i)$ (siehe dazu [5]). Damit ist

$$\begin{aligned}
\Psi_1([{}^r\varrho\mathrm{id}]g) &= \Psi_1([{}^r\varrho(\textstyle\sum {}^lr_if_i)]) \\
&= \Psi_1([\textstyle\sum {}^lr_i{}^r\varrho f_i]) \\
&= \Psi_1([\textstyle\sum {}^lr_i{}^l\varrho f_i]) \\
&= \textstyle\sum r_i\varrho\varphi^{-1}(f_i) \\
&= \textstyle\sum r_i\varphi^{-1}([\psi^*(\varrho)^rf_i]) \\
&= \Psi_1([\textstyle\sum {}^lr_i\psi^*(\varrho)^rf_i]) \\
&= \Psi_1([\psi^*(\varrho)^r\textstyle\sum {}^lr_if_i]) \\
&= \Psi_1([\psi^*(\varrho)^rg]) \\
&= \Psi_1\big(g[{}^r(\psi^*(\varrho))\mathrm{id}]\big)\,.
\end{aligned}$$

Wegen (3) ist dann

$$\Psi_2([^r(\alpha(\varrho))\mathrm{id}]\,(\alpha g)) = \Psi_2((\alpha g)\,[^r(\psi^*\,(\varrho))\mathrm{id}])$$

oder für $f \in \mathrm{Hom}(R_S, R_S)$

$$\Psi_2([^r\varrho\,\mathrm{id}]f) = \Psi_2(f\,[^r(\psi^*\,\alpha^{-1}(\varrho))\mathrm{id}])\,,$$

womit $\Psi^*\,([^r\varrho\,\mathrm{id}]) = [^r(\psi^*\,\alpha^{-1}(\varrho))\mathrm{id}]$ bewiesen ist.

Durch die Definition der α-symmetrischen α-Frobenius-Erweiterungen folgt aus Satz 4 sofort

Satz 5: *Sei R/S eine 1-Frobenius-Erweiterung. R/S ist genau dann 1-symmetrisch, wenn* $\mathrm{Hom}(R_S, R_S)/R$ *1-symmetrisch ist.*

4. Wir untersuchen jetzt den Fall dreier Ringe $R \supsetneqq S \supsetneqq T$. Sind R/S, R/T bzw. S/T Frobenius-Erweiterungen zweiter Art, so kennzeichnen wir die Abbildungen φ, ψ und ψ^* mit den Indices 1, 2 bzw. 3, und die Automorphismen aus (r1) sollen mit α, β bzw. γ bezeichnet werden.

Satz 6: *Seien $R \supsetneqq S \supsetneqq T$ Ringerweiterungen. Sei S/T eine γ-Frobenius-Erweiterung. Sei R/S eine α-Frobenius-Erweiterung, und sei $\alpha(T) = T$. Dann ist R/T eine β-Frobenius-Erweiterung.*

Beweis: Da R_S und S_T endlich erzeugt und projektiv sind, ist (r2) für R_T erfüllt. Beachten wir, daß nach [1] II 6.4 gilt

$${}_T\mathrm{Hom}(R_S, \mathrm{Hom}(S_T, T_T)_S)_R \cong {}_T\mathrm{Hom}(R_T, T_T)_R$$

und für jeden Automorphismus α von S durch die Abbildung $\delta\colon \mathrm{Hom}(R_S, S_S) \ni$ $\ni f \to \alpha f \in \mathrm{Hom}(R_S, S_{\alpha S})$ ein Isomorphismus

$$(6) \qquad {}_S\mathrm{Hom}(R_S, S_S)_R \cong {}_{\alpha S}\mathrm{Hom}(R_S, S_{\alpha S})_R$$

erzeugt wird, wobei $\delta([^l r f]) = [^l(\alpha(r))\,\delta(f)]$ ist, so ist wegen $\alpha(T) = T$

$$\begin{aligned}
{}_T R_R &\cong {}_T\mathrm{Hom}(R_S, S_{\alpha S})_R \\
&\cong {}_{\alpha^{-1}T}\mathrm{Hom}(R_S, S_S)_R \\
&\cong {}_{\alpha^{-1}T}\mathrm{Hom}(R_S, \mathrm{Hom}(S_T, T_{\gamma T})_S)_R \\
&\cong {}_{\gamma^{-1}\alpha^{-1}T}\mathrm{Hom}(R_S, \mathrm{Hom}(S_T, T_T)_S)_R \\
&\cong {}_{\gamma^{-1}\alpha^{-1}T}\mathrm{Hom}(R_T, T_T)_R \\
&\cong {}_{\beta\gamma^{-1}\alpha^{-1}T}\mathrm{Hom}(R_T, T_{\beta T})_R\,.
\end{aligned}$$

Wählen wir $\beta = \alpha\gamma$, so ist damit auch (r1) nachgewiesen.

Bemerkung: Wegen Satz 2 und Satz 6 ist also $\mathrm{Hom}(R_S, R_S)/S$ eine 1-Frobenius-Erweiterung, wenn nur die Bedingungen von Satz 2 erfüllt sind.

Sei nun R/S eine γ-Frobenius-Erweiterung und sei $S \subsetneqq Z_R(R)$. Dann ist $\psi(\gamma(s)\,r) = \gamma(s)\,\psi(r) = \psi(r)\,\gamma(s) = \psi(rs) = \psi(sr)$, also ist $\gamma = \mathrm{id}$ und R/S eine 1-Frobenius-Erweiterung.

Satz 7: *Seien $R \supsetneqq S \supsetneqq T$ Ringerweiterungen, und sei S/T eine 1-Frobenius-Erweiterung mit $T \subsetneqq Z_S(S)$. Sei R/T eine β-Frobenius- Erweiterung, und existiere ein Nakayama-Automorphismus ψ_2^* so, daß $\psi_2^*(S) = S$. Sei R_S projektiv. Dann ist R/S eine α-Frobenius-Erweiterung.*

Beweis: Da R_T endlich erzeugt ist, ist auch R_S endlich erzeugt, und damit ist (r 2) für R_S erfüllt. Da S/T und R/T Frobenius-Erweiterungen sind und wegen [1] II 6.4 und wegen (6), ist

$$\begin{aligned} R_R &\cong \operatorname{Hom}(R_T, T_{\beta T})_R \\ &\cong \operatorname{Hom}(R_T, T_T)_R \\ &\cong \operatorname{Hom}(R_S, \operatorname{Hom}(S_T, T_T)_S)_R \\ &\cong \operatorname{Hom}(R_S, S_S)_R \\ &\cong \operatorname{Hom}(R_S, S_{\alpha S})_R \,. \end{aligned}$$

Setzen wir $\alpha = \psi_2^{*-1}\psi_3^*$, was wegen $\psi_2^*(S) = S$ möglich ist, so ist mit $r \in R$

$$\varphi_1(r) = [r^l \, \alpha \varphi_3^{-1} \, \tilde{\beta}^{-1} \, \varphi_2'] \,.$$

Dabei sei $\tilde{\beta}$ der von β induzierte Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}(1, \beta) : \operatorname{Hom}(R_T, T_T) \to \operatorname{Hom}(R_T, T_{\beta T})$$

und $\varphi_2'(r)$ die Einschränkung von $\varphi_2(r)$ auf S.

Bevor wir beweisen, daß φ_1 ein S-R-Isomorphismus ist, müssen wir einige Vorbemerkungen machen. Wegen $\psi_2^*(S) = S$ ist auch $\psi_2^*(Z_R(S)) = Z_R(S)$. Wir betrachten $\varrho \in Z_R(T)$, $r \in R$ und $s \in S$. Wegen (1) ist

$$[\varrho^l \varphi_2'] \,(r) = [\psi_2^*(\varrho)^r \, \varphi_2(r)] \,. \tag{7}$$

Damit (7) auch für Elemente $s \in S$ anstelle von $\varrho \in Z_R(T)$ gilt, muß $S \subseteq Z_R(T)$ sein. Hier geht also $T \subseteq Z_S(S)$ ein.

Seien $r \in R$, $s, s' \in S$, $f \in \operatorname{Hom}(S_T, T_T)$, dann ist wegen

$$\varphi_3(s s') = [\psi_2^*(s)^r \, \varphi_3(s')] \,,$$

d. h. wegen

$$[{}^l s \, \varphi_3^{-1}(f)] = \varphi_3^{-1}([\psi_3^*(s)^r f])$$

auch

$$[{}^l s \, \varphi_3^{-1} \, \tilde{\beta}^{-1} \varphi_2'] \,(r) = \varphi_3^{-1}([\psi_3^*(s)^r \, \tilde{\beta}^{-1} \varphi_2'(r)]) \,. \tag{8}$$

Mit diesen Hilfsmitteln können wir für $r \in R$, $s \in S$ zeigen

$$\begin{aligned} \varphi_1(s r) &= [r^l s^l \alpha \varphi_3^{-1} \, \tilde{\beta}^{-1} \varphi_2'] \\ &= [r^l \alpha (\varphi_3^{-1} \, \tilde{\beta}^{-1} [s^l \varphi_2'])] \\ &= [r^l \alpha [{}^l(\psi_3^{*-1} \, \psi_2^*(s)) \, \varphi_3^{-1} \, \tilde{\beta}^{-1} \varphi_2']] \quad \text{wegen (7) und (8)} \\ &= [{}^l s \; \varphi_1(r)] \,, \end{aligned}$$

also ist φ_1 ein S-Links-Isomorphismus.

Sei jetzt $\varrho \in Z_R(S)$, so ist wegen

$$\begin{aligned} [\varrho^l \varphi_2'] \,(r) \,(s) &= \psi_2(\varrho \, r s) \\ &= \psi_2(r s \, \psi_2^*(\varrho)) \\ &= \psi_2(r \, \psi_2^*(\varrho) \, s) \\ &= [\psi_2^*(\varrho)^r \, \varphi_2'] \,(r) \,(s) \end{aligned}$$

also

$$[\varrho^l \psi_2'] = [\psi_2^*(\varrho)^r \varphi_2'] . \tag{9}$$

Wir wollen den Zusammenhang zwischen den Nakayama-Automorphismen ψ_1^* und ψ_2^* untersuchen. Da ψ_1^* auf $Z_R(S)$ und ψ_2^* auf $Z_R(T)$ operieren, ist ψ_1^* Einschränkung von ψ_2^* auf $Z_R(S)$. Es ist nämlich mit $\varrho \in Z_R(S)$ und $r \in R$

$$\begin{aligned}\varphi_1(\varrho r) &= [r^l \varrho^l \alpha\, \varphi_3^{-1}\, \tilde{\beta}^{-1} \varphi_2'] \\ &= [r^l \alpha \varphi_3^{-1}\, \tilde{\beta}^{-1} [\varrho^l \varphi_2']] \\ &= [r^l \alpha \varphi_3^{-1}\, \tilde{\beta}^{-1} [\psi_2^*(\varrho)^r \varphi_2']] \quad \text{wegen (9)} \\ &= [\psi_2^*(\varrho)^r \varphi_1(r)] .\end{aligned}$$

Durch Spezialisierung auf symmetrische Frobenius-Erweiterungen erhalten wir den

Satz 8: *Seien $R \supseteq S \supseteq T$ Ringerweiterungen. Sei S/T eine 1-Frobenius-Erweiterung, und sei $T \subseteq Z_S(S)$. Sei R_S projektiv. Ist R/T eine symmetrische β-Frobenius-Erweiterung, so ist R/S eine symmetrische α-Frobenius-Erweiterung*

Zusatz: *Sind S/T und R/T 1-symmetrische 1-Frobenius-Erweiterungen und gelten die Voraussetzungen von Satz 8, so ist R/S eine 1-symmetrische 1-Frobenius-Erweiterung.*

Mit diesem Zusatz können wir ein Beispiel für eine 1-symmetrische 1-Frobenius-Erweiterung R/S angeben, bei der S nicht kommutativ ist. Seien nämlich R und S halbeinfache Algebren über einem Körper T. Dann ist R/S eine 1-symmetrische 1-Frobenius-Erweiterung, denn jede halbeinfache Algebra über einem Körper ist eine 1-symmetrische 1-Frobenius-Erweiterung. Weiter ist R_S projektiv, da S halbeinfach ist. Damit sind die Voraussetzungen des Zusatzes erfüllt.

Ein weiteres Beispiel für eine 1-symmetrische 1-Frobenius-Erweiterung ist folgendes: Sei R ein kommutativer Ring, G eine Gruppe endlicher Ordnung und H eine Untergruppe von G. Dann ist für die Gruppenringe $R[G]/R[H]$ eine 1-symmetrische 1-Frobenius-Erweiterung. Es ist nämlich $R[G]/R$ eine 1-symmetrische 1-Frobenius-Erweiterung. Daher gilt auch hier der Zusatz von Satz 8.

Satz 9: *Seien $R \supseteq S \supseteq T$ Ringerweiterungen. Seien R/T eine β-Frobenius-Erweiterung, S_T endlich erzeugt und projektiv,*

$${}_T R_S = \bigoplus_{i=1}^{n} {}_T x_i S_S \quad \text{mit} \quad {}_T x_i S_S \cong {}_T S_S$$

und

$${}_S R_T = \bigoplus_{i=1}^{n} {}_S S\, y_{iT} \quad \text{mit} \quad {}_S S\, y_{iT} \cong {}_S S_T ,$$

und erfülle ${}_T S_S$ Minimal- und Maximal-Bedingung. Dann ist S/T eine β-Frobenius-Erweiterung.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\bigoplus_{i=1}^{n} {}_T x_i\, S_S &= {}_T R_S \\ &\cong {}_T\mathrm{Hom}(R_T, T_{\beta T})_S \\ &\cong {}_T\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} S\, y_{iT}, T_{\beta T}\right)_S \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^{n} {}_T\mathrm{Hom}(S\, y_{iT}, T_{\beta T})_S\end{aligned}$$

Da ${}_T S_S$ Minimal- und Maximal-Bedingung erfüllt, erfüllt auch ${}_T R_S$ Minimal- und Maximal-Bedingung, also ist nach dem Satz von REMAK-KRULL-SCHMIDT ${}_T S_S \cong {}_T\mathrm{Hom}(S_T, T_{\beta T})_S$ und, da nach Voraussetzung S_T endlich erzeugt und projektiv ist, ist S/T β-Frobenius-Erweiterung.

Aus Satz 9 folgt unmittelbar der

Zusatz: *Seien $R \supsetneqq S \supsetneqq T$ Ringerweiterungen, R/T eine β-Frobenius-Erweiterung, R/S eine freie α-Frobenius-Erweiterung, S ein Artinscher Ring, $T \subseteq Z_R(R)$ und S_T endlich erzeugt und projektiv. Dann ist S/T eine β-Frobenius-Erweiterung.*

5. K. GRUENBERG wies auf eine mögliche Verallgemeinerung der Spur hin (s. Zusatz in [6][1]). Betrachten wir eine β-Frobenius-Erweiterung R/S, so ist bekanntlich für jeden S-Links-Modul A

$$\mathrm{Hom}({}_S\mathrm{Hom}(R_S, S_S), {}_S A) \cong R \otimes_S A$$

und damit

$$\mathrm{Hom}({}_S\mathrm{Hom}(R_S, S_{\beta S}), {}_{\beta^{-1}S} A) \cong R \otimes_S A\,.$$

Setzen wir ${}_{\beta^{-1}S}A = {}_S R$, d. h. ${}_S A = {}_{\beta S} R$, so erhalten wir

$$\alpha\colon \mathrm{Hom}({}_S\mathrm{Hom}(R_S, S_{\beta S}), {}_S R) \cong R_S \otimes {}_{\beta S} R\,,$$

wobei $\alpha^{-1}(r' \otimes r'')(f) = f(r')\, r''$ ist. $R_S \otimes {}_{\beta S}R$ bedeute dabei, daß statt $r's \otimes r'' = r' \otimes sr''$ gelten soll $r's \otimes r'' = r' \otimes \beta(s)\, r''$. Wir zeigen, daß für freie β-Frobenius-Erweiterungen gilt

$$\alpha(\varphi^{-1}) = \sum r_i \otimes l_i \in R_S \otimes {}_{\beta S} R\,, \tag{10}$$

wobei $\{r_i\}$ bzw. $\{l_i\}$ die zueinander dualen Rechts- bzw. Links-Basen von R/S sind. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}\left(\sum r_i \otimes l_i\right)(f) &= \sum f(r_i)\, l_i \\ &= \sum\, [r^l \psi]\,(r_i)\, l_i \\ &= \sum \psi(r r_i)\, l_i \\ &= \sum \psi(r_i)\, l_i r \\ &= r \\ &= \varphi^{-1}(f)\,.\end{aligned}$$

---

[1]) Ein etwas allgemeineres Ergebnis als das von Satz 11 wurde von K. GRUENBERG in einer bisher unveröffentlichten Arbeit bewiesen.

Auch für die quasifreien β-Frobenius-Erweiterungen aus [9] gilt diese Beziehung wegen [9] Prop. 11 und [9] (40). Sei für beliebige β-Frobenius-Erweiterungen im folgenden $\alpha(\varphi^{-1}) = \sum r_i \otimes l_i$. Wir wollen sehen, welche Eigenschaften der $\{r_i\}$ und $\{l_i\}$ eine Frobenius-Erweiterung eindeutig bestimmen.

Satz 10: *Sei $R \supseteqq S$ eine Ringerweiterung. R/S ist dann und nur dann eine β-Frobenius-Erweiterung, wenn in R Elementensysteme $\{r_i\}$ und $\{l_i\}$ $i = 1, \ldots, n$ und $\psi \in \mathrm{Hom}(R_S, S_{\beta S})$ und $\psi' \in \mathrm{Hom}({}_S R_S, {}_{\beta^{-1}S}S_S)$ derart existieren, daß*

1) $\sum r r_i \otimes l_i = \sum r_i \otimes l_i r$ für $\sum r_i \otimes l_i \in R_S \otimes {}_{\beta S}R$ *und alle* $r \in R$

2) $\sum \psi(r_i)\, l_i = 1 = \sum r_i \psi'(l_i)$.

Zusatz: *Sei $R \supseteqq S$ eine Ringerweiterung. R/S ist dann und nur dann freie β-Frobenius-Erweiterung, wenn in R Erzeugendensysteme $\{r_i\}$ und $\{l_i\}$ $i = 1, \ldots, n$ und $\psi \in \mathrm{Hom}({}_S R_S, {}_S S_{\beta S})$ derart existieren, daß*

1) $\sum r r_i \otimes l_i = \sum r_i \otimes l_i r$ *für* $\sum r_i \otimes l_i \in R_S \otimes {}_{\beta S}R$ *und alle* $r \in R$

2) $\psi(l_i r_j) = \delta_{ij}$, *wobei* δ_{ij} *das Kronecker-Symbol sei.*

Beweis: Sei R/S eine β-Frobenius-Erweiterung. Dann ist

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}(\textstyle\sum r r_i \otimes l_i)(f) &= \textstyle\sum [r^l f](r_i)\, l_i \\
&= \alpha^{-1}(\textstyle\sum r_i \otimes l_i)([r^l f]) \\
&= \varphi^{-1}([r^l f]) \\
&= \varphi^{-1}(f)\, r \\
&= \alpha^{-1}(\textstyle\sum r_i \otimes l_i)(f)\, r \\
&= \textstyle\sum f(r_i)\, l_i r \\
&= \alpha^{-1}(\textstyle\sum r_i \otimes l_i r)(f)\,.
\end{aligned}$$

Da das für alle $f \in \mathrm{Hom}(R_S, S_{\beta S})$ gilt und α ein Isomorphismus ist, ist $\sum r r_i \otimes l_i = \sum r_i \otimes l_i r$. Weiter ist

$$\begin{aligned}
r &= \varphi^{-1}([r^l \psi]) \\
&= \alpha^{-1}(\textstyle\sum r_i \otimes l_i)([r^l \psi]) \\
&= \textstyle\sum \psi(r r_i)\, l_i\,,
\end{aligned}$$

also ist $\{l_i\}$ ein Erzeugendensystem von R und $\sum \psi(r_i)\, l_i = 1$. Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\beta^{-1}\psi(r) &= \beta^{-1}\psi(\textstyle\sum \psi(r_i)\, l_i r) \\
&= \beta^{-1}(\textstyle\sum \psi(r_i)\, \psi(l_i r)) \\
&= \beta^{-1}\psi(\textstyle\sum r_i\, \beta^{-1}\psi(l_i r)) \\
&= \beta^{-1}\psi(r \textstyle\sum r_i\, \beta^{-1}\psi(l_i)) \\
&= [(\textstyle\sum r_i\, \beta^{-1}\psi(l_i))^r\, \beta^{-1}\psi](r)\,.
\end{aligned}$$

Also ist wegen (11') $\sum r_i\, \beta^{-1}\psi(l_i) = 1$. Wegen

$$r = \textstyle\sum r r_i\, \beta^{-1}\psi(l_i) = \sum r_i\, \beta^{-1}\, \psi(l_i r)$$

ist auch $\{r_i\}$ ein Erzeugendensystem. Wegen $\sum \psi(l_i r_j)\, l_j = l_i$ ist im Falle einer freien Frobenius-Erweiterung $\psi(l_i r_j) = \delta_{ij}$.

Wir beweisen nun die Umkehrung des Satzes. Sei $\Phi(f) = \sum f(r_i)\, l_i$ für $f \in \operatorname{Hom}(R_S, S_{\beta S})$. Φ ist ein Homomorphismus. Wegen

$$\begin{aligned} \Phi([{}^l s\, r^l f]) &= s \sum f(r r_i)\, l_i \\ &= s \sum f(r_i)\, l_i\, r \\ &= s\, \Phi(f)\, r \end{aligned}$$

ist Φ ein S-R-Homomorphismus. Für $r \in R$ ist

$$\begin{aligned} \Phi([r^l \psi]) &= \sum \psi(r r_i)\, l_i \\ &= \sum \psi(r_i)\, l_i r \\ &= r\,. \end{aligned}$$

Für $\Phi(f) = \sum f(r_i)\, l_i$ ist

$$\begin{aligned} \beta\psi'(\sum f(r_i)\, l_i r) &= \sum f(r_i)\, \beta\psi'(l_i r) \\ &= \sum f(r_i \psi'(l_i r)) \\ &= f(r \sum r_i \psi'(l_i)) \\ &= f(r)\,. \end{aligned}$$

Also ist Φ ein Isomorphismus. Wegen

$$r = \sum r r_i \psi'(l_i) = \sum r_i \psi'(l_i r) = \sum r_i\, [l_i^l \psi']\,(r)$$

schließlich ist R_S endlich erzeugt und projektiv, und damit ist R/S eine β-Frobenius-Erweiterung.

Ist $\psi(l_i r_j) = \delta_{ij}$, so ist für $1 = \sum s_i l_i$ mit $s_i \in S$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_j \psi(r_j)\, l_j &= \textstyle\sum_{i,j} \psi(s_i l_i r_j)\, l_j \\ &= \textstyle\sum_i s_i l_i \\ &= 1. \end{aligned}$$

Weiter ist wegen $\beta^{-1}\psi \in \operatorname{Hom}({}_S R_S, {}_{\beta^{-1}S} S_S)$ symmetrisch $\sum r_i \beta^{-1}\psi(l_i) = 1$ erfüllt. Damit ist R/S β-Frobenius-Erweiterung.

Ist nun $r = \sum s_i l_i$, so ist $[r_j^r \psi]\,(r) = \psi(\sum s_i l_i r_j) = s_j$. Damit ist aber die gewählte Darstellung für r eindeutig, d. h. R/S ist eine freie β-Frobenius-Erweiterung.

Eine weitere Eigenschaft der Erzeugendensysteme $\{r_i\}$ und $\{l_i\}$ ist

$$\text{(11)} \qquad \sum r_i \otimes \varrho l_i = \sum r_i\, \psi^*(\varrho) \otimes l_i \quad \text{für alle} \quad \varrho \in Z_R(S)\,.$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(\sum r_i \otimes \varrho l_i)\,(f) &= \sum f(r_i)\, \varrho l_i \\ &= \varrho \sum f(r_i)\, l_i \\ &= \varrho\, \varphi^{-1}(f) \\ &= \varphi^{-1}([\psi^*(\varrho)^r f]) \\ &= \sum f(r_i \psi^*(\varrho))\, l_i \\ &= \alpha^{-1}(\sum r_i \psi^*(\varrho) \otimes l_i)\,(f)\,, \end{aligned}$$

woraus (11) folgt.

Wir führen jetzt die Spur für β-Frobenius-Erweiterungen ein. Seien die R-Rechts-Moduln A_R und B_R gegeben, sei R/S eine β-Frobenius-Erweiterung, und sei $f \in \operatorname{Hom}(A_S, B_S)$. Es ist bekanntlich $\pi : \operatorname{Hom}(R_S, B_{\beta S}) \cong$ $\cong \operatorname{Hom}(R_S \otimes {}_{\beta S}R_R, B_R)$. π ist sogar ein R-Rechts-Homomorphismus wegen

$$\begin{aligned} \pi([r^l f])\,(r' \otimes r'') &= [r^l f]\,(r')\,r'' \\ &= f(rr')\,r'' \\ &= [r^l \pi(f)]\,(r' \otimes r'') \end{aligned}$$

für beliebige $r, r', r'' \in R$. Damit ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(A_S, B_{\beta S}) &\cong \operatorname{Hom}(A_R, \operatorname{Hom}(R_S, B_{\beta S})_R) \\ &\cong \operatorname{Hom}(A_R, \operatorname{Hom}(R_S \otimes {}_{\beta S}R_R, B_R)_R)\,. \end{aligned}$$

Der so konstruierte Isomorphismus werde mit ω bezeichnet. Dann ist

$$\omega(f)\,(a)\,(r' \otimes r'') = f(ar')\,r''.$$

Setzen wir nun in $R_S \otimes {}_{\beta S}R$ fest $\alpha(\varphi^{-1}) = \sum r_i \otimes l_i$ ein, so ist wegen

$$\begin{aligned} \omega(f)\,(ar)\,(\textstyle\sum r_i \otimes l_i) &= \textstyle\sum f(arr_i)\,l_i \\ &= \omega(f)\,(a)\,(\textstyle\sum rr_i \otimes l_i) \\ &= \omega(f)\,(a)\,(\textstyle\sum r_i \otimes l_i r) \\ &= \textstyle\sum f(ar_i)\,l_i r \\ &= \omega(f)\,(a)\,(\textstyle\sum r_i \otimes l_i)\,r \end{aligned}$$

eine Abbildung $\operatorname{Hom}(A_S, B_{\beta S}) \ni f \to \operatorname{Spur} f \in \operatorname{Hom}(A_R, B_R)$ definiert durch Spur $f = \sum [r_i^r\, {}^r l_i\, f]$. Diese Spur-Abbildung ist offenbar im freien Fall identisch mit der dort definierten Spur.

Mit diesen Hilfsmitteln können wir nun die Maschke-Ikeda-Kasch-Charakterisierung von relativ projektiven bzw. relativ injektiven Moduln verallgemeinern.

Satz 11: *Sei R/S eine β-Frobenius-Erweiterung, und sei A ein R-Rechts-Modul. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

1) *A ist (R, S)-projektiv.*

2) *A ist (R, S)-injektiv.*

3) *Es existiert ein $g \in \operatorname{Hom}(A_S, A_{\beta S})$ mit* $\operatorname{Spur} g = \mathrm{id}_A$.

Beweis: Die Äquivalenz von 1) und 2) ist in [6] Theorem 20 bewiesen. Wir zeigen, aus 1) folgt 3).

Wir bilden $\mathrm{id} \otimes \psi : A_S \otimes {}_S R_S \to A_S \otimes {}_S R_{\beta S}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Spur}(\mathrm{id} \otimes \psi)\,(a \otimes r) &= \omega(\mathrm{id} \otimes \psi)\,(a \otimes r)\,(\textstyle\sum r_i \otimes l_i) \\ &= a \otimes \textstyle\sum \psi(rr_i)\,l_i \\ &= a \otimes r\,. \end{aligned}$$

Damit ist $\operatorname{Spur}(\mathrm{id} \otimes \psi) = \mathrm{id}$. Da A (R, S)-projektiv ist, besitzt $A_S \otimes {}_S R$ einen zu A R-isomorphen R-direkten Summanden A'. Sei p die Projektion von $A_S \otimes {}_S R$ auf A', dann ist $p \in \operatorname{Hom}(A_S \otimes {}_S R_R, A_S \otimes {}_S R_R)$. Sei g' die Einschränkung von $p(\mathrm{id} \otimes \psi)$ auf A'. Dann ist für $a' \in A'$

$$\begin{aligned}\mathrm{Spur}(g')(a') &= \sum g'(a' r_i)\, l_i \\ &= \sum p(\mathrm{id} \otimes \psi)(a' r_i)\, l_i \\ &= p\big(\sum (\mathrm{id} \otimes \psi)(a' r_i)\, l_i\big) \\ &= p(\mathrm{Spur}(\mathrm{id} \otimes \psi)(a')) \\ &= p(a') \\ &= a' .\end{aligned}$$

Sei μ der Isomorphismus von A auf A', dann hat $g = \mu^{-1} g' \mu$ die gewünschte Eigenschaft, denn es ist für $a \in A$

$$\begin{aligned}\mathrm{Spur}(g)(a) &= \mu^{-1}\big(\sum g' \mu(a r_i)\, l_i\big) \\ &= \mu^{-1}\big(\sum g'(\mu(a)\, r_i)\, l_i\big) \\ &= \mu^{-1}(\mathrm{Spur}(g')\, \mu(a)) \\ &= a .\end{aligned}$$

Da p und μ R-Homomorphismen sind und $\mathrm{id} \otimes \psi$ ein βS-Homomorphismus ist, ist $g \in \mathrm{Hom}(A_S, A_{\beta S})$.

Um zu zeigen, daß 1) aus 3) folgt, beachten wir, daß $\{\sum g(a r_i) \otimes l_i \mid a \in A\} = A'$ ein R-Untermodul von $A_S \otimes {}_S R$ ist, denn für festes g und a existiert ein Homomorphismus

$$R_S \otimes {}_{\beta S} R \ni r' \otimes r'' \to g(a r') \otimes r'' \in A_S \otimes {}_S R .$$

Dann ist $\sum g(a r_i) \otimes l_i r = \sum g(a r r_i) \otimes l_i$. Der R-Homomorphismus ε: $A_S \otimes {}_S R \ni \sum a \otimes r \to \sum a r \in A$ bildet A' R-isomorph auf A ab. Also ist $A_S \otimes {}_S R_R = A'_R \oplus \mathrm{Ker}(\varepsilon)_R$, d. h. A ist (R, S)-projektiv.

Literatur

[1] CARTAN, H., and S. EILENBERG: Homological Algebra. Princeton Press 1956.

[2] KASCH, F.: Grundlagen einer Theorie der Frobenius-Erweiterungen. Math. Ann. **127**, 453—474 (1954).

[3] — Homologische Algebra, Seminarausarbeitung. Math. Institut der Universität Heidelberg 1959/60.

[4] — Ein Satz über Frobenius-Erweiterungen. Arch. Math. **12**, 102—104 (1961).

[5] — Projektive Frobenius-Erweiterungen. Sitzungsber. Heidelberger Akad. 89—109 (1960/61).

[6] — Dualitätseigenschaften von Frobenius-Erweiterungen. Math. Z. **77**, 219—227 (1961).

[7] NAKAYAMA, T.: On Frobeniusean Algebras I—III. Ann. Math. **40**, 611—633 (1939), Ann. Math. **42**, 1—21 (1941), Jap. J. Math. **18**, 49—65 (1942).

[8] —, and T. TSUZUKU: A remark on Frobenius-extensions and endomorphism rings. Nagoya Math. J. **15**, 9—16 (1959).

[9] — — On Frobenius-extensions I and II. Nagoya Math. J. **17**, 89—110 (1960), **19**, 127—148 (1961).

[10] — — Correction to our paper "On Frobenius-extensions II". Nagoya Math. J. **20**, 205 (1962).

(Eingegangen am 30. November 1962)