PAREIGIS, B.
Math. Annalen 154, 330—340 (1964)

Über normale, zentrale, separable Algebren und Amitsur-Kohomologie*

Von

BODO PAREIGIS in Heidelberg, z. Z. Ithaca**

I. Einleitung

Wie in der klassischen Theorie der Brauerschen Gruppen eines Körpers kann man auch in der Theorie der Brauerschen Gruppen eines kommutativen Ringes die Frage stellen, ob man die normalen Algebren in den Klassen der Brauerschen Gruppe durch Kohomologiegruppen charakterisieren kann. Eine Algebra heißt normal, wenn sich gewisse Automorphismen des Grundringes zu Ringautomorphismen der Algebra fortsetzen lassen [10], [15]. Da die Brauerschen Gruppen eines kommutativen Ringes durch die von AMITSUR konstruierten Kohomologiegruppen charakterisiert werden können [13], liegt es nahe, das Problem durch Verallgemeinerung der klassischen Methoden auch mit den Kohomologiegruppen des Amitsurkomplexes zu lösen. Wir wollen in dieser Arbeit zeigen, daß im Gegensatz zur klassischen Beweisführung [10], [11] und [15] das verallgemeinerte Problem in zwei Teile zerfällt, nämlich einmal in eine Untersuchung, die nur die Kohomologiegruppen betrifft, und in einen Teil, der die normalen Algebren mit der Amitsurkohomologie charakterisiert.

Im ersten Teil der Arbeit werden die notwendigen Hilfsmittel und Definitionen vor allem der Brauerschen Gruppen eines kommutativen Ringes und der Kohomologiegruppen des Amitsurkomplexes bereitgestellt. Weiter wird die klassische Lösung des gestellten Problemes angegeben und das Problem mit Hilfe der sog. fundamentalen exakten Folge der Amitsurkohomologie genauer beschrieben.

Im zweiten Teil wird gezeigt, daß zwei verschiedene Definitionen einer Untergruppe einer Kohomologiegruppe des Amitsurkomplexes im wesentlichen äquivalent sind, wobei die erste Definition die einer Kohomologiegruppe in der fundamentalen exakten Folge ist. Die zweite Definition wird im vierten Teil zur Charakterisierung der normalen, separablen, zentralen Algebren verwendet werden.

Der dritte Teil enthält die Verallgemeinerung der Definition der normalen Algebren in der Brauerschen Gruppe und untersucht die Schwierigkeiten, die dadurch entstehen, daß eine Algebra in einer Klasse der Brauerschen Gruppe

* Dieses ist eine gekürzte Fassung einer bei der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Heidelberg eingereichten Dissertation.

** Während der Arbeit unterstützt durch Nato-Forschungs-Stipendium 4-s-nato 2/3 gf.

normal sein kann, ohne daß damit alle Algebren derselben Klasse normal sind. Allerdings werden wir sehen, daß im Falle von Brauerschen Gruppen eines lokalen Ringes und daher erst recht eines Körpers diese Schwierigkeiten nicht auftreten.

Im vierten Teil werden die normalen, separablen, zentralen Algebren schließlich durch eine Kohomologiegruppe des Amitsurkomplexes charakterisiert, und die Zusammenfassung dieses Ergebnisses mit dem im zweiten Teil gewonnenen Ergebnis gibt die Lösung des gestellten Problems.

Der letzte Teil behandelt die Anwendung der gefundenen Ergebnisse auf endliche, normale, aber nicht notwendig separable Körpererweiterungen, wobei wir im Spezialfall von galoisschen, endlichen Körpererweiterungen das klassische Resultat wieder erhalten.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Professor ALEX ROSENBERG für die zahlreichen Gespräche, die ich mit ihm über das vorliegende Problem führen durfte, und die freundlicherweise gewährte Hilfe bei der Abfassung dieser Arbeit danken.

II. Grundlagen und Definitionen

Alle in dieser Arbeit auftretenden Ringe sollen ein Einselement haben, alle Moduln sollen unitär sein, und alle Ringhomomorphismen sollen das Einselement in das Einselement abbilden. Weiterhin wollen wir in der Situation eines kommutativen Ringes C und kommutativer C-Algebren F und K $F^n = F \otimes_C \ldots \otimes_C F$ für das n-fache Tensorprodukt von F über C schreiben, bei Tensorprodukten über C das C fortlassen und die folgenden isomorphen C-Algebren identifizieren: $F^n \otimes K^m$, $(F \otimes K^m) \otimes_{K^m} \ldots \otimes_{K^m} (F \otimes K^m)$ (n Faktoren) und $(F^n \otimes K) \otimes_{F^n} \ldots \otimes_{F^n} (F^n \otimes K)$ (m Faktoren).

Sei F eine endliche, galoissche Körpererweiterung von C mit der Galoisgruppe L, und sei $H^2(L, F^*)$ die zweite Kohomologiegruppe von L mit Koeffizienten in der multiplikativen Gruppe der Einheiten von F. Bekanntlich besteht ein Isomorphismus zwischen der Brauerschen Gruppe der durch F zerfällten einfachen, zentralen C-Algebren $B(F/C)$ und $H^2(L, F^*)$:

$$B(F/C) \cong H^2(L, F^*) . \tag{2.1}$$

Seien $F \supseteq K \supseteq C$ endliche, galoissche Körpererweiterungen mit den Galoisgruppen $L(F/C)$, $G(K/C)$ und $M(F/K)$. L operiert auf $H^n(M, F^*)$ durch

$$(g \cdot f)(m_0, \ldots, m_n) = gf(g^{-1}m_0 g, \ldots, g^{-1}m_n g) \quad g \in L, m_i \in M .$$

Durch geeignete Definitionen [11] kann man diese Operation auch folgendermaßen auffassen:

$$(g \cdot f)(m_0, \ldots, m_n) \sim gf(g^{-1}m_0, \ldots, g^{-1}m_n) \tag{2.2}$$

HOCHSCHILD und SERRE [11] konstruierten die fundamentale exakte Folge

$$\begin{aligned} 0 \to H^2(G, K^*) \to H^2(L, F^*) \to H^2(M, F^*)^L \\ \to H^3(G, K^*) \to H^3(L, F^*) . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Von TEICHMÜLLER [15] und später von EILENBERG und MACLANE [10] und HOCHSCHILD und SERRE [11] wurde die Untergruppe $B_G(F/K)$ von $B(F/K)$ der G-normalen Algebrenklassen untersucht, d. h. derjenigen Algebrenklassen, in denen alle Algebren G-normal sind. Dabei heiße eine K-Algebra A G-normal, wenn sich jeder Automorphismus aus G zu einem Ringautomorphismus von A fortsetzen läßt. Das Ergebnis von HOCHSCHILD und SERRE war

$$B_G(F/K) \cong H^2(M, F^*)^L \tag{2.4}$$

und deckt daher die Ergebnisse von TEICHMÜLLER, EILENBERG und MACLANE, die jeder normalen Algebrenklasse einen Kozykel in $H^3(G, K^*)$ zuordneten und Kern und Bild dieser Abbildung bestimmten.

Wir wollen wie in [2] und [13] den Amitsurkomplex einer kommutativen C-Algebra F bezeichnen mit $\mathscr{C}(F/C)$ und die Kohomologiegruppen mit $H^n(F/C)$. Dieses ist nach [13] eine Verallgemeinerung der oben betrachteten Kohomologiegruppen für endliche, galoissche Körpererweiterungen:

$$H^n(F/C) \cong H^n(L, F^*)\,. \tag{2.5}$$

Außerdem verallgemeinerten AUSLANDER und GOLDMAN [5] die Definition der Brauerschen Gruppe $B(C)$ auf beliebige kommutative Ringe C und Klassen von separablen, zentralen C-Algebren. Auch die Definition eines Zerfällungskörpers F einer Algebra kann auf kommutative C-Algebren F erweitert werden. In [13, Theorem 2] bewiesen ROSENBERG und ZELINSKY, daß die Zuordnung $t \to A(t) = \{a \in \mathrm{End}_{1\otimes F}(F^2) \mid L(t)\,(\eta_2 a)\,L(t)^{-1} = \eta_3 a\}$ zwischen Kozykeln t in F^{3*} und C-Algebren $A(t)$ mit den in [13, S. 331—332] definierten Abbildungen $\eta_i : \mathrm{End}_{1\otimes F}(F^2) \to \mathrm{End}_{1\otimes F^2}(F^3)$ und $L: F^n \to \mathrm{End}_C(F^n)$ einen Homomorphismus

$$\Psi : H^2(F/C) \to B(F/C) \tag{2.6}$$

induziert, wenn die kommutative C-Algebra F als C-Modul endlich erzeugt und projektiv ist und $C \cong C \cdot 1$ als direkten Summanden enthält.

Weiter beweisen sie [13, Lemma 3.12]: Wenn $s \in F^{2*}$ und $t \in F^{3*}$ sind, dann ist

$$L(s)\,A(t)\,L(s^{-1}) = A(t \triangle_F s)\,. \tag{2.7}$$

Um einen Isomorphismus zwischen $H^2(F/C)$ und $B(F/C)$ zu erhalten, führt man die folgende Definition ein:

Ein kommutativer Ring R habe die Eigenschaft (H), wenn R eine endliche direkte Summe von Ringen R_i ist, derart daß jeder endlich erzeugte, treue, projektive R_i-Modul frei ist.

Man kann dann den folgenden Satz beweisen [13, Theorem 3]:

Sei F eine kommutative C-Algebra, die als C-Modul endlich erzeugt und projektiv ist, und sei $C \cong C \cdot 1$ ein direkter Summand des C-Moduls F. Wenn C, F und $F \otimes F$ die Eigenschaft (H) haben, dann ist der in (2.6) definierte Homomorphismus $\Psi : H^2(F/C) \to B(F/C)$ ein Isomorphismus.

Dieses ist eine Verallgemeinerung von (2.1).

In [3] und [14] wird schließlich die Folge (2.3) verallgemeinert. Man betrachtet dazu kommutative C-Algebren K und F und den Doppelkomplex, bestehend aus den Gruppen $(F^m \otimes K^n)^*$, den Gruppen der Einheiten von $F^m \otimes K^n$ und den Homomorphismen $\triangle_K$ bzw. $\triangle_F$, die in der im Amitsurkomplex üblichen Weise nur auf den K- bzw. F-Komponenten von $(F^m \otimes K^n)^*$ operieren (siehe Definition in [3, S. 10]).

Wir bezeichnen nun mit $H^n(F \otimes K/K)^0$ diejenige Untergruppe von $H^n(F \otimes K/K)$, in der in jeder Klasse $\bar{t} \in H^n(F \otimes K/K)^0$ von Kozykeln ein Repräsentant $t \in (F^{n+1} \otimes K)^*$ derart existiert, daß man ein $s \in (F^n \otimes K^2)^*$ so finden kann, daß $\triangle_K t = \triangle_F s$. Wenn ein Repräsentant t einer Klasse von Kozykeln $\bar{t}$ diese Eigenschaft hat, so haben alle Kozykeln $t \cdot \triangle_F(u)$ aus derselben Klasse diese Eigenschaft.

Unter gewissen Voraussetzungen [14, S. 231], die für endliche, galoissche Körpererweiterungen erfüllt sind, erhält man dann die fundamentale exakte Folge

$$\begin{aligned} 0 \to H^2(K/C) \to H^2(F/C) \to H^2(F \otimes K/K)^0 \\ \to H^3(K/C) \to H^3(F/C)\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Wir wollen in dieser Arbeit zeigen, daß auch das Ergebnis (2.4) sich in derselben Weise unter Benutzung von (2.8), d. h. speziell von $H^2(F \otimes K/K)^0$, verallgemeinern läßt.

III. Eigenschaften von $H^2(F \otimes K/K)^0$

Wir wollen in diesem Abschnitt beweisen, daß unter gewissen Voraussetzungen $H^n(F \otimes K/K)^0$ eine Fixgruppe von $H^n(F \otimes K/K)$ unter einer Menge von Automorphismen von K/C ist. Sei C ein kommutativer Ring, und seien F und K zwei kommutative C-Algebren. Sei weiterhin G eine beliebige Menge von Automorphismen von K, die C elementweise fest lassen. Wir betrachten das n-fache cartesische Produkt $G \times \cdots \times G = G_n$, das auf $F^m \otimes K^n$ folgendermaßen operiere

$$\begin{aligned} &(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\left(\sum f_1 \otimes \cdots \otimes f_m \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_n\right) \\ &\qquad = \sum f_1 \otimes \cdots \otimes f_m \otimes \sigma_1(k_1) \otimes \cdots \otimes \sigma_n(k_n)\,. \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, daß die Elemente aus G_n F^m-Algebren-Automorphismen und mit $\triangle_F$ vertauschbar sind. Wir betten G in G_n ein durch die Diagonalabbildung $\sigma \to (\sigma, \ldots, \sigma)$. So operiert also G auf $F^m \otimes K^n$ und ist mit $\triangle_F$ vertauschbar, operiert also auch auf $H^m(F \otimes K^n/K^n)$. Die Fixgruppe von $H^m(F \otimes K^n/K^n)$ unter G bezeichnen wir mit $H^m(F \otimes K^n/K^n)^G$.

Sei $C[G]$ der freie C-Modul mit den Elementen aus G als Basiselementen.

Hilfssatz 3.1: *Seien F und K kommutative C-Algebren, und sei G eine beliebige Menge. Dann ist* $\mathrm{Hom}_C(C[G], K)$ *eine kommutative C-Algebra. Ist G endlich, so existiert ein Ringisomorphismus*

$$\alpha : F \otimes \mathrm{Hom}_C(C[G], K) \cong \mathrm{Hom}_C(C[G], F \otimes K)\,.$$

Beweis: Wir definieren auf dem C-Modul $\mathrm{Hom}_C(C[G], K)$ eine Ringstruktur. Seien $f, g \in \mathrm{Hom}_C(C[G], K)$ und $\sigma \in G$, dann sei $(f \cdot g)(\sigma) = f(\sigma)\, g(\sigma)$.

Um zu zeigen, daß α ein Ringisomorphismus ist, beachten wir, daß α ein Homomorphismus der additiven Gruppen ist wegen der Feststellung [9 XI 3, S. 210] „φ_3 ist ein Isomorphismus“. Da dieser Isomorphismus durch $\alpha(f \otimes \lambda)(\sigma)$

$= f \otimes \lambda(\sigma)$ definiert ist, rechnet man leicht nach, daß α mit der multiplikativen Struktur der beiden Ringe verträglich ist. Man kann durch diese Definition α im allgemeinen als Einbettung von $F \otimes \mathrm{Hom}_C(C[G], K)$ in $\mathrm{Hom}_C(C[G], F \otimes K)$ betrachten, und wir werden α daher oft fortlassen.

Seien jetzt F, K und K' kommutative C-Algebren, $K' \supseteq K$ und G eine Menge von Automorphismen von K, die C elementweise fest lassen. Wir bezeichnen mit r den F^n-Algebren-Epimorphismus $r: F^n \otimes K^2 \to F^n \otimes K$,

$$r(\sum f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \otimes k_1 \otimes k_2) = \sum f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \otimes k_1 k_2 .$$

r ist offenbar mit $\triangle_F$ vertauschbar. Wir betrachten die Abbildung $\varrho: F \otimes K^2 \to F \otimes \mathrm{Hom}_C(C[G], K')$, die definiert wird durch $\varrho(\sum f \otimes k_1 \otimes k_2)(\sigma) = r(1, \sigma)(\sum f \otimes k_1 \otimes k_2) = \sum f \otimes k_1 \sigma(k_2)$. Da r und $(1, \sigma)$ mit $\triangle_F$ vertauschbar sind, induziert ϱ einen Komplexhomomorphismus

$$\mathscr{C}(F \otimes K^2/K^2) \to \mathscr{C}(F \otimes \mathrm{Hom}_C(C[G], K')/\mathrm{Hom}_C(C[G], K')) ,$$

den wir auch mit ϱ bezeichnen wollen.

Satz 3.2: *Seien F und K kommutative C-Algebren und G eine Menge von Automorphismen von K/C. Dann ist*

$$H^n(F \otimes K/K)^0 \subseteq H^n(F \otimes K/K)^G .$$

Beweis: Sei t ein Kozykel aus $H^n(F \otimes K/K)^0$, d. h. $\triangle_K t = \triangle_F s$ für ein $s \in (F^n \otimes K^2)^*$. Sei $K = K'$. Dann ist für alle $\sigma \in G$

$$\begin{aligned}\triangle_F(\varrho(s)(\sigma)) &= \triangle_F r(1, \sigma)(s) \\ &= r(1, \sigma) \triangle_F(s) \\ &= r(1, \sigma) \triangle_K(t) .\end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, daß $r(1, \sigma) \triangle_K(t) = \sigma(t) \cdot t^{-1}$ ist. Damit ist $\sigma(t) = t \cdot \triangle_F(\varrho(s)(\sigma))$, also ist $\sigma(t)$ kohomolog zu t, d. h. $\sigma(\bar{t}) = \bar{t}$.

Die in Satz 3.2 bewiesene Tatsache kann, falls G eine Gruppe ist, auch ausgedrückt werden durch $H^n(F \otimes K/K)^0 \subseteq H^0(G, H^n(F \otimes K/K))$. Man kann zeigen, daß dieses ein Spezialfall einer ähnlichen Gleichung für alle Kohomologiegruppen von G mit Koeffizienten in $H^n(F \otimes K/K)$ ist [16].

Satz 3.3: *Seien K, K' und F kommutative C-Algebren, $K \subseteq K'$, G eine endliche Menge von Automorphismen von K/C und induziere $\varrho: F \otimes K^2 \to F \otimes \mathrm{Hom}_C(C[G], K')$ einen Isomorphismus $H^n(F \otimes K^2/K^2) \cong H^n(F \otimes \mathrm{Hom}_C(C[G], K')/\mathrm{Hom}_C(C[G], K'))$. Dann ist $H^n(F \otimes K/K)^G = H^n(F \otimes K/K)^0$.*

Beweis: Wegen Satz 3.2 ist nur zu zeigen, daß $H^n(F \otimes K/K)^G \subseteq H^n(F \otimes K/K)^0$. Sei $\bar{t} \in H^n(F \otimes K/K)^G$ und damit $t \in F^{n+1} \otimes K$. Wir wollen ein $s \in (F^n \otimes K^2)^*$ derart konstruieren, daß $\triangle_F s = \triangle_K t$. Zunächst bemerken wir, daß wegen $\triangle_F \triangle_K t = \triangle_K \triangle_F t = 1$ gilt $\triangle_K t \in Z^n(F \otimes K^2/K^2)$. Es ist also zu zeigen, daß $\triangle_K t \in B^n(F \otimes K^2/K^2)$ ist. Betrachten wir $\varrho(\triangle_K t)(\sigma) = r(1, \sigma)(\triangle_K t) = \sigma(t) \cdot t^{-1} = \triangle_F(s_\sigma) = \triangle_F(u(\sigma))$, wobei $u \in \mathrm{Hom}_C(C[G], F^n \otimes K')$. Wegen Hilfssatz 3.1 können wir daher annehmen, daß $u \in F^n \otimes \mathrm{Hom}_C(C[G], K')$ ist. Also ist $\triangle_F(u(\sigma)) = (\triangle_F(u))(\sigma)$. Damit erhalten wir

$$\varrho(\triangle_K t) = \triangle_F(u) \in B^n(F \otimes \mathrm{Hom}_C(C[G], K')/\mathrm{Hom}_C(C[G], K')) .$$

Da nach Voraussetzung ϱ einen Isomorphismus der n-ten Kohomologiegruppen induziert, ist $\triangle_K t \in B^n(F \otimes K^2/K^2)$, d. h. $\triangle_K t = \triangle_F s$, was zu beweisen war.

Bemerkung: Wenn F eine treu flache C-Algebra und $\varrho: K^2 \to \mathrm{Hom}_C(C[G], K')$ $(\varrho(k_1 \otimes k_2)(\sigma) = k_1 \cdot \sigma(k_2))$ ein C-Algebren-Epimorphismus mit nilpotentem Kern sind, so induziert wegen [14, Corollary 3.6] ϱ einen Isomorphismus $H^n(F \otimes K^2/K^2) \cong H^n(F \otimes \mathrm{Hom}_C(C[G], K')/\mathrm{Hom}_C(C[G], K'))$ für alle n.

IV. Normale Algebren in der Brauerschen Gruppe eines kommutativen Ringes

In diesem Abschnitt soll die am Anfang für galoissche Körpererweiterungen $F \supseteqq K \supseteqq C$ gegebene Definition der Gruppe $B_G(F/K)$ auf kommutative Ringe erweitert werden. Wir betrachten die Brauersche Gruppe $B(F/K)$ und wollen annehmen, daß $F \supseteqq K$ kommutative Ringe sind und so gewählt sind, daß die in (2.6) angegebene Zuordnung ein Homomorphismus ist: $\Psi: H^2(F/K) \to \to B(F/K)$. Sei G eine beliebige Menge von Automorphismen von K. Wir wollen eine K-Algebra A (G-)normal nennen, wenn sich alle Elemente von G zu Ringautomorphismen von A derart fortsetzen lassen, daß für $k \in K$, $a \in A$, $\sigma \in G$ und σ' Fortsetzung von σ gilt: $\sigma(k) \cdot \sigma'(a) = \sigma'(ka)$.

Wir definieren $B_G(F/K)$ als diejenige Untermenge von $B(F/K)$, in deren Klassen mindestens eine der Algebren $A(t)$ von (2.6) derart existiert, daß $A(t)$ (G-)normal ist. Der Grund dafür, daß wir diese spezielle Definition wählen, liegt darin, daß $B_G(F/K)$ im allgemeinen keine Gruppe sein wird.

Um zu zeigen, daß im Gegensatz zum klassischen Fall von normalen, einfachen, zentralen Algebren die Eigenschaft der Normalität sich bei separablen, zentralen Algebren im allgemeinen nicht auf die ganze Klasse fortsetzt, betrachten wir das folgende Beispiel.

Wir wählen für K die direkte Summe zweier Körper $K = C \oplus C'$, wobei C und C' isomorph seien. Dann betrachten wir den endlich erzeugten, projektiven, treuen K-Modul $P = K \oplus C' = (C \oplus C') \oplus C'$, wobei K auf C' nur mit der zweiten Komponente operieren soll, d. h. $(a_1 + a_2') \cdot ((b_1 + b_2') + c') = (a_1 b_1 + a_2' b_2') + a_2' c$. Wir wissen, daß $\mathrm{End}_K(P)$ eine separable, zentrale K-Algebra ist und damit der Einsklasse von $B(K)$ angehört. Außerdem gehört K selbst zu dieser Klasse. Wir betrachten den Automorphismus σ von K, der definiert ist durch $\sigma(a + b') = b + a'$. Man kann leicht zeigen, daß sich dieser Automorphismus nicht auf $\mathrm{End}_K(P)$ fortsetzen läßt. Daher versagt hier der im klassischen Fall verwendete Beweis, daß $B_G(F/K)$ eine Gruppe ist. Trotzdem werden wir später sehen, daß in den wichtigsten Fällen $B_G(F/K)$ eine Untergruppe von $B(F/K)$ ist. Ob das allerdings allgemein gilt, ist noch eine offene Frage.

Wir wollen diese Frage für einen lokalen Ring K beantworten. Zunächst betrachten wir folgende Situation. Seien A, B und B' separable, zentrale K-Algebren. Seien B und B' isomorph und in A enthalten. Beachten wir, daß separable, zentrale Algebren über einem lokalen Ring maximal zentrale Algebren im Sinne von [6] sind, so können wir [6, Theorem 18] anwenden, d. h. wir können den Isomorphismus zwischen B und B' zu einem inneren Automorphismus von A fortsetzen.

Satz 4.1: *Sei K ein lokaler, kommutativer Ring, und sei F so gewählt, daß die Zuordnung $t \to A(t)$ einen Homomorphismus $\Psi: H^2(F/K) \to B(F/K)$ induziert. Sei G eine Menge von Automorphismen von K. Dann ist $B_G(F/K)$ eine Gruppe.*

Beweis: Wir beweisen, daß in $B(K)$ mit einer Algebra alle Algebren in einer Klasse (G-)normal sind und daß diese normalen Algebrenklassen eine Untergruppe von $B(K)$ bilden. Da das Bild von Ψ eine Untergruppe von $B(F/K)$ ist, ist $B_G(F/K)$, der Durchschnitt dieser zwei Untergruppen, eine Untergruppe von $B(F/K)$.

Jeder endlich erzeugte, projektive, treue K-Modul V ist frei über K, da K ein lokaler Ring ist, und jeder Automorphismus von K läßt sich zu einem Automorphismus von $\mathrm{End}_K(V)$ fortsetzen, da $\mathrm{End}_K(V)$ ein voller Matrizenring mit Koeffizienten aus K ist. Damit ist die neutrale Klasse in $B(K)$ normal.

Lassen sich die Automorphismen aus G auf zwei Algebren A und B aus den Klassen von $B(K)$ fortsetzen, so auch auf $A \otimes_K B$ und auf A^0, die zu A inversisomorphe Algebra. Ist andererseits ein Automorphismus fortsetzbar auf $A \otimes_K B$ und auf B, so ist er auch fortsetzbar auf A. Seien nämlich für einen festen Automorphismus von $K \pi$ eine Fortsetzung auf $A \otimes_K B$ und σ auf B, so ist $\pi^{-1}\sigma$ ein Algebrenisomorphismus von B in $A \otimes_K B$, der nach der oben gemachten Bemerkung zu einem inneren Automorphismus i von $A \otimes_K B$ fortsetzbar ist. Damit ist πi ein Ringautomorphismus von $A \otimes_K B$, der mit σ auf B übereinstimmt. Wegen [5, Theorem 3.5] ist dann A der Zentralisator von B in $A \otimes_K B$. Da πi auch den Zentralisator von B in $A \otimes_K B$ auf sich automorph abbilden muß, ist $\pi i|_A$ die gesuchte Fortsetzung des Automorphismus von K. Mit diesen Eigenschaften sieht man sofort, daß die normalen Algebrenklassen eine Untergruppe von $B(K)$ bilden.

V. Isomorphie zwischen $B_G(F \otimes K/K)$ und $H^2(F \otimes K/K)^G$

Wir wollen für diesen Abschnitt annehmen, daß die kommutativen C-Algebren F und K derart gewählt sind, daß der in (2.6) angegebene Homomorphismus von $H^2(F \otimes K/K)$ in $B(F \otimes K/K)$ existiert. Weiter sei G eine Menge von Automorphismen von K/C. Dann sind $B_G(F \otimes K/K)$ und $H^2(F \otimes K/K)^G$ definiert, und wir beweisen den

Satz 5.1: *Alle $\sigma \in G$ lassen sich zu Ringautomorphismen σ' von $\mathrm{End}_{1 \otimes F \otimes K}(F^2 \otimes \otimes K)$ fortsetzen. Sei t ein Repräsentant einer Klasse aus $H^2(F \otimes K/K)^G$, dann ist die Einschränkung von σ' auf $A(t)$ ein Isomorphismus $\sigma^*(A(t)) = A(\sigma(t))$, der ein σ-halblinearer K-Algebren-Isomorphismus ist.*

Beweis: Wir setzen $\sigma \in G$ wie in Teil III auf $F^m \otimes K^n$ fort, d. h. σ operiert auf allen Elementen in K^n. Durch die Definition $\sigma'(b) = \sigma b \sigma^{-1}$ für alle $b \in \mathrm{End}_{1 \otimes F \otimes K}(F^2 \otimes K)$ setzen wir σ zu einem Automorphismus von $\mathrm{End}_{1 \otimes F \otimes K}(F^2 \otimes K)$ fort. Man sieht leicht, daß σ' ein σ-halblinearer K-Algebren-Automorphismus ist. Wegen der Definition von $A(t)$ ist für alle $a \in A(t)$ $L(t)(\eta_2 a) L(t)^{-1} = \eta_3 a$, also

$$\sigma L(t) \sigma^{-1} \sigma(\eta_2 a) \sigma^{-1} \sigma L(t)^{-1} \sigma^{-1} = \sigma(\eta_3 a) \sigma^{-1} .$$

Nun ist $\eta_i(\sigma a \sigma^{-1}) = \sigma \eta_i(a) \sigma^{-1}$ und $\sigma L(t) \sigma^{-1} = L(\sigma(t))$, also erhalten wir $L(\sigma(t))\, \eta_2(\sigma' a)\, L(\sigma(t^{-1})) = \eta_3(\sigma'(a))$. Nennen wir σ^* die Einschränkung von σ' auf $A(t)$, so sieht man daher, daß $\sigma^*(A(t)) \subseteq A(\sigma(t))$. Aus Symmetriegründen erhält man dann $\sigma^*(A(t)) = A(\sigma(t))$.

Mit diesen Hilfsmitteln können wir nun eine Verallgemeinerung von (2.4) angeben.

Satz 5.2: *Sei der in* (2.6) *angegebene Homomorphismus* $\Psi: H^2(F \otimes K/K) \to \to B(F \otimes K/K)$ *gegeben. Dann ist* $\Psi(H^2(F \otimes K/K)^G) \subseteq B_G(F \otimes K/K)$.

Beweis: Sei t ein Repräsentant einer Klasse aus $H^2(F \otimes K/K)^G$, dann ist $\sigma(t) \cdot t^{-1} = \triangle_F(u(\sigma))$ mit $u(\sigma) \in (F^2 \otimes K)^*$. Wir verwenden (2.7) und den in Satz 5.1 definierten Isomorphismus σ^*. Bezeichnen wir den durch $L(u(\sigma))$ auf $\mathrm{End}_{1 \otimes F \otimes K}(F^2 \otimes K)$ erzeugten inneren Automorphismus mit $I[u(\sigma)]$, so ist wegen (2.7)

$$I[u(\sigma)]\,(A(t)) = A\big(t \cdot \triangle_F(u(\sigma))\big) = A(\sigma(t))\,.$$

Also ist $I[u(\sigma)^{-1}]\sigma^* : A(t) \to A(t)$ ein Ringautomorphismus. Wenden wir diesen auf $K \cdot 1 \subseteq A(t)$ an, so sehen wir, daß er σ-halblinear ist. Damit haben wir eine Fortsetzung von σ auf $A(t)$ konstruiert.

Satz 5.3: *Ist* Ψ *ein Isomorphismus, so ist*

$$\Psi: H^2(F \otimes K/K)^G \cong B_G(F \otimes K/K)\,.$$

Beweis: Wegen Satz 5.2 bleibt nur noch zu zeigen, daß jedes Element aus $B_G(F \otimes K/K)$ ein Element in $H^2(F \otimes K/K)^G$ bestimmt. Sei $A(t)$ in einer Klasse von $B_G(F \otimes K/K)$ enthalten, und sei σ' eine Fortsetzung von σ auf $A(t)$. σ^* sei wie in Satz 5.1 gegeben. Dann ist $\sigma^* \sigma'^{-1}: A(t) \to A(\sigma(t))$ ein K-Algebrenisomorphismus. Da Ψ ein Isomorphismus ist und $A(t)$ und $A(\sigma(t))$ in derselben Klasse von $B(F \otimes K/K)$ liegen, ist $t \sim \sigma(t)$. Diese Konstruktion kann für alle $\sigma \in G$ verwendet werden, und daher ist t ein Kozykel in $H^2(F \otimes K/K)^G$.

Folgerung: Wenn F und K derart gewählt sind, daß Ψ ein Isomorphismus ist, so ist $B_G(F \otimes K/K)$ eine Untergruppe von $B(F \otimes K/K)$. Damit haben wir eine weitere Antwort erhalten auf die in IV diskutierte Frage, wann $B_G(F \otimes K/K)$ eine Gruppe bildet.

Mit diesem Ergebnis und mit Satz 3.3 haben wir die in Teil II gestellte Aufgabe gelöst. Wenn die fundamentale exakte Folge (2.8) existiert, so können wir auch eine Verallgemeinerung der Ergebnisse von Eilenberg und MacLane [10] angeben.

VI. Normale, endliche Körpererweiterungen

Wir wollen die in dieser Arbeit bewiesenen Tatsachen anwenden auf endliche Körpererweiterungen $F \supseteq K \supseteq C$, wobei F/C und K/C normale, nicht notwendig separable Körpererweiterungen sein sollen.

Zunächst bemerken wir [8*], wenn F/C eine endliche, normale Körpererweiterung ist, daß dann $F \cong F_i \otimes F_s$ als C-Algebren ist und der Isomorphismus durch $f_i \otimes f_s \to f_i f_s$ erzeugt wird, wobei F_i die maximale rein inseparable Körpererweiterung von C in F ist und F_s die maximale separable Körpererweiterung von C in F ist.

Satz 6.1. *Seien $F \supsetneqq K \supsetneqq C$ endliche, normale Körpererweiterungen. Dann ist $H^n(F \otimes K/K) \cong H^n(F/K)$, und dieser Isomorphismus wird von der Abbildung $f \otimes k \to fk$ erzeugt.*

Beweis: Wir verwenden die im Beweis von [14, Theorem 4.3] gezeigte Tatsache, daß a) $H^n(F \otimes K/K) \cong H^n(F/K)$, wenn K/C rein inseparabel ist, und [3, Theorem 5.12], nach dem b) $H^n(F \otimes K/K) \cong H^n(F/K)$ ist, wenn F/K eine endliche, normale Körpererweiterung und K/C eine separable, endliche Körpererweiterung sind. Da K/C eine normale, endliche Körpererweiterung ist, ist $K \cong K_i \otimes K_s$ und $F \otimes K \cong F \otimes_{K_i} K_i \otimes K_s \otimes_{K_s} K \cong F \otimes_{K_i} K \otimes_{K_s} K$. Also ist

$$\begin{aligned} H^n(F \otimes K/K) &\cong H^n(F \otimes_{K_i} K \otimes_{K_s} K/K) \\ &\cong H^n(F \otimes_{K_i} K/K) && \text{wegen a)} \\ &\cong H^n(F/K) && \text{wegen b)}\,. \end{aligned}$$

Weiter sind die Isomorphismen a) und b) erzeugt durch die Abbildung $f \otimes k \to fk$, also auch der zusammengesetzte Isomorphismus.

Satz 6.2: *Seien $F \supsetneqq K \supsetneqq C$ endliche, normale Körpererweiterungen, und sei G die maximale Automorphismengruppe von K, die C fest läßt. Dann ist*

$$B_G(F/K) \cong H^2(F \otimes_C K/K)^0\,.$$

Bemerkung: Statt C kann hierzu auch jeder Unterkörper C' von C verwendet werden, wenn nur C eine endliche, rein inseparable Erweiterung von C' ist.

Beweis: Wir bemerken zunächst, daß es Isomorphismen $H^2(F/K) \cong B(F/K)$ und $H^2(F \otimes K/K) \cong B(F \otimes K/K)$ im Sinne von (2.6) gibt, denn $K, F, F \otimes_K F$, $F \otimes K$ und $F \otimes K \otimes_K F \otimes K$ sind semilokal, d. h. haben nur endlich viele maximale Ideale. Das schließt man aus [4, Theorem 9.3C und Theorem 9.6A]. Nach [13, Lemma 3.15] erfüllen alle diese Ringe die Bedingung (H) aus Teil II, und die in (2.6) angegebene Abbildung induziert die obigen Isomorphismen. Weiter wissen wir, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^2(F \otimes K/K) & \cong & H^2(F/K) \\ \wr\| & & \wr\| \\ B(F \otimes K/K) & \to & B(F/K) \end{array}$$

kommutativ ist, wie in [13, S. 345] bewiesen wurde. Der Isomorphismus $H^2(F \otimes K/K) \cong H^2(F/K)$ ist der in Satz 6.1 angegebene, und die Abbildung $B(F \otimes K/K) \to B(F/K)$ ist die identische Einbettung. Daher ist $B(F \otimes K/K) = B(F/K)$ und $B_G(F \otimes K/K) = B_G(F/K)$. Weiter ist wegen Satz 5.3 $B_G(F \otimes K/K) \cong H^2(F \otimes K/K)^G$. Es bleibt also noch zu zeigen, daß $H^2(F \otimes K/K)^G = H^2(F \otimes K/K)^0$ ist.

Wir beweisen allgemeiner, daß $H^n(F \otimes K/K)^G = H^n(F \otimes K/K)^0$ ist. Wir setzen $K = K'$ und verwenden die Bemerkung zu Satz 3.3. F ist offenbar eine treu flache C-Algebra [14 (2.1), S. 222], und wir haben noch zu zeigen, daß die Abbildung $\varrho' : K^2 \to \operatorname{Hom}_C(C[G], K)$, die in Satz 3.3 die Abbildung $\varrho : F \otimes K^2 \to F \otimes \operatorname{Hom}_C(C[G], K)$ induzierte, ein C-Algebren-Epimorphismus mit nilpotentem Kern ist. Wenn wir definieren $\varrho'(k \otimes k')(\sigma) = k\sigma(k')$, so induziert

ϱ' die gewünschte Abbildung ϱ. Wir zerlegen $K \otimes K \cong K_i \otimes K_i \otimes K_s \otimes K_s$ und erhalten dadurch eine Abbildung $\varrho'' : K_i^2 \otimes K_s^2 \to \mathrm{Hom}_C(C[G], K)$, die definiert ist durch $\varrho''(k_i \otimes k_i' \otimes k_s \otimes k_s')(\sigma) = k_i k_i' k_s \sigma(k_s')$, da σ auf K_i als Identität wirkt. Wir schränken ϱ'' auf $K_i \otimes K_s^2$ ein und betrachten die Abbildung

$$\pi : K_i \otimes K_i \otimes K_s^2 \to K_i \otimes K_s^2$$
$$\pi(k_i \otimes k_i' \otimes k_s \otimes k_s') = k_i k_i' \otimes k_s \otimes k_s' .$$

π ist ein Epimorphismus mit nilpotentem Kern, da $K_i \otimes K_i \to K_i$ ein Epimorphismus mit nilpotentem Kern ist. Daher bleibt zu zeigen, daß $\varrho'' : K_i \otimes \otimes K_s^2 \to \mathrm{Hom}_C(C[G], K)$ ein Isomorphismus von C-Algebren ist. Beachten wir, daß $\mathrm{Hom}_C(C[G], K)$ zum Ring aller Abbildungen $f : G \times G \to K$ mit $f(\sigma\sigma_1, \sigma\sigma_2) = \sigma f(\sigma_1, \sigma_2)$ isomorph ist, so können wir [3, Lemma 5.4] anwenden. Daher ist ϱ'' ein Isomorphismus, und der Beweis ist beendet.

Seien jetzt F/C, F/K und K/C endliche, galoissche Erweiterungen mit den Galoisgruppen $L(F/C)$, $M(F/K)$ und $G(K/C)$. Nach Satz 6.1 ist

$$H^n(F \otimes K/K) \cong H^n(F/K)$$

und nach (2.5) ist

$$H^n(F/K) \cong H^n(M(F/K), F^*) .$$

Der Isomorphismus $H^n(F \otimes K/K) \cong H^n(M, F^*)$ wird induziert durch

$$p(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{n+1} \otimes k; (m_1, \ldots, m_{n+1}), 1) = m_1(f_1) \ldots m_{n+1}(f_{n+1}) \cdot k ,$$

wobei $m_i \in M$, $f_i \in F$ und $k \in K$ sind und für $H^n(M, F^*)$ die Definition mit homogenen Koketten verwendet wird. Wir wählen für jedes Element $\sigma \in G$ einen Repräsentanten σ' in den Klassen von L/M. Dann ist

$$p(\sigma(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{n+1} \otimes k); (m_1, \ldots, m_{n+1}), 1) \sim \sim (\sigma' \cdot p)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{n+1} \otimes k; (m_1, \ldots, m_{n+1}), 1) ,$$

wobei die Äquivalenzrelation die in (2.2) angegebene ist. Daher ist

$$H^n(F \otimes K/K)^G \cong H^n(M, F^*)^L .$$

Wegen des zweiten Teils des Beweises von Satz 6.2 erhalten wir

$$H^n(F \otimes K/K)^0 \cong H^n(M, F^*)^L ;$$

ein Ergebnis aus [3, Theorem 5.10].

Weiter ist damit das Ergebnis von Hochschild und Serre [11] noch einmal bewiesen:

$$H^2(M, F^*)^L \cong B_G(F/K) .$$

Literatur

[1] Adamson, I. T.: Cohomology theory for nonnormal subgroups and nonnormal fields, Proc. Glasgow Math. Assoc. **2**, 66—76 (1954).

[2] Amitsur, S. A.: Simple algebras and cohomology groups of arbitrary fields. Trans. Am. Math. Soc. **90**, 73—112 (1959).

[3] Amitsur, S. A.: Homology groups and double complexes for arbitrary fields. J. Math. Soc. Japan **14**, 1—25 (1962).
[4] Artin, E., C. J. Nesbitt, and R. M. Thrall: Rings with minimum condition. University of Michigan Press 1944.
[5] Auslander, M., and O. Goldman: The Brauer group of a commutative ring. Trans. Am. Math. Soc. **97**, 367—409 (1960).
[6] Azumaya, G.: On maximally central algebras. Nagoya Math. J. **2**, 119—159 (1951).
[7] Berkson, A. J.: On Amitsur's complex and restricted Lie algebras. Trans. Am. Math. Soc. **109**, 430—443 (1963).
[8] Bourbaki, N.: Algèbre commutative ([8*] Algèbre). Paris: Hermann 1961.
[9] Cartan, H., and S. Eilenberg: Homological Algebra. Princeton 1956.
[10] Eilenberg, S., and S. MacLane: Cohomology and Galois theory I, Normality of algebras and Teichmüller's cocycle. Trans. Am. Math. Soc. **64**, 1—20 (1948).
[11] Hochschild, G., and J.-P. Serre: Cohomology of group extensions. Trans. Am. Math. Soc. **74**, 110—134 (1953).
[12] Rosenberg, A., and D. Zelinsky: Automorphisms of separable algebras. Pacific J. Math. **11**, 1109—1117 (1961).
[13] — — On Amitsur's complex. Trans. Am. Math. Soc. **97**, 327—356 (1960).
[14] — — Amitsur's complex for inseparable fields. Osaka Math. J. **14**, 219—240 (1962).
[15] Teichmüller, O.: Über die sogenannte nicht kommutative Galoissche Theorie und die Relation ..., Dtsch. Math. **5**, 138—149 (1940).
[16] Pareigis, B., and A. Rosenberg: Addendum to: Amitsur's complex for inseparable fields. Erscheint in Osaka Math. J.

(Eingegangen am 17. Mai 1963)