Math. Zeitschr. 104, 281—336 (1968)

Kohomologie von p-Lie-Algebren

BODO PAREIGIS

Eingegangen am 24. April 1967

Einleitung

Eine Kohomologietheorie einer Klasse von „Algebren" sollte gewisse Erweiterungen und sog. Kerne mit der zweiten bzw. dritten Kohomologiegruppe beschreiben. Ein Beispiel dafür ist etwa die Kohomologie der Gruppen. Für die Klasse der p-Lie-Algebren über einem Körper k der Charakteristik p wollen wir eine solche Kohomologietheorie $H^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ entwickeln. Ausgangspunkt ist eine neue Verallgemeinerung der Kohomologie von Lie-Algebren, die wir auffassen als rechtsabgeleitete Funktoren der Gruppe der Derivationen einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ in eine kommutative Lie-Algebra $\mathfrak{h}$, auf der $\mathfrak{g}$ operiert.

In [5] hat HOCHSCHILD eine andere Eigenschaft der Kohomologie von Lie-Algebren auf p-Lie-Algebren verallgemeinert. Mit dieser Kohomologietheorie $\tilde{H}^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ wird jedoch das oben gestellte Problem nicht in befriedigender Allgemeinheit gelöst. Trotzdem werden wir auch diese Theorie weiter entwickeln, da sich zeigen wird, daß beide Theorien für $n\geqq 3$ dieselben Kohomologiegruppen $H^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\tilde{H}^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ definieren.

Im Kapitel II werden die gewünschten Beschreibungen der Erweiterungen und Kerne durch unsere Kohomologietheorie gegeben.

Die Bemerkung, daß die assoziative p-Hülle einer endlich dimensionalen p-Lie-Algebra eine Frobenius-Algebra ist, erlaubt es, für die Hochschild-Kohomologie ein Cup-Produkt einzuführen und mit diesem Dualitätsaussagen zu machen und Fragen über die Periodizität der Kohomologiegruppen zu lösen. Das soll in den Kapiteln III und IV geschehen. Viele Aussagen aus der Kohomologie der Gruppen finden sich auch hier in ähnlicher Form wieder. Die Beweise, die im Fall von Gruppen gegeben werden (etwa in [3]), lassen sich allerdings zum großen Teil nicht verallgemeinern. Umgekehrt jedoch kann eine Anwendung der hier verwendeten Beweismethoden auf die Kohomologie der Gruppen neue und einfachere Beweise liefern, was hier jedoch nicht durchgeführt werden soll.

Im V. Kapitel sollen unsere Ergebnisse auf die Kohomologie infinitesimaler formeller Gruppen der Höhe $\leqq 1$ über einem Körper der Charakteristik $p \neq 0$ angewendet werden. Die Kategorie dieser Gruppen ist nämlich äquivalent zur Kategorie der p-Lie-Algebren. Wir werden zeigen, daß bei dieser Äquivalenz unsere Kohomologietheorie der Kohomologietheorie dieser Gruppen entspricht. Das ermöglicht es, die Sätze über periodische Kohomologie auf endliche infinitesimale formelle Gruppen der Höhe $\leqq 1$ zu übertragen. Dabei wird das Ergebnis verwendet, daß $H^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \tilde{H}^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ für $n \geqq 3$.

Im Anhang wird die verallgemeinerte Kohomologietheorie auf nicht-assoziative Algebren angewendet. Von Interesse war zunächst der Zusammenhang zwischen der zweiten Kohomologiegruppe und den Erweiterungen von nicht-assoziativen Algebren. Wir können zwischen diesen beiden Gruppen einen Monomorphismus angeben, und es stellt sich die Frage, wie man das Bild dieses Monomorphismus charakterisieren kann.

Herrn P. GABRIEL danke ich für die Gespräche, die ich mit ihm über die vorliegende Arbeit führen konnte, und die Mitteilung verschiedener Ergebnisse aus der Theorie der formellen Gruppen, die ich im V. Kapitel im Satz 1 und den anschließenden Bemerkungen dargestellt habe, da sie bisher nur teilweise und in anderem Zusammenhang publiziert worden sind.

I. Definition der Kohomologiegruppen

1. Eigenschaften von p-Lie-Algebren

Wir wollen in diesem Paragraphen die im folgenden benötigten Eigenschaften von p-Lie-Algebren zusammenstellen. Ausführliche Beweise und weitere Eigenschaften finden sich in [2, 7].

Sei k ein Körper der Charakteristik p und sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über k. $\mathfrak{g}$ heißt p-Lie-Algebra, wenn zusätzlich eine sog. p-Abbildung $g \mapsto g^{[p]}$ von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{g}$ mit den folgenden Axiomen gegeben ist:

$$(\alpha g)^{[p]} = \alpha^p g^{[p]}, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{ad}(g^{[p]}) = (\operatorname{ad} g)^p, \tag{1.2}$$

$$(g_0 + g_1)^{[p]} = g_0^{[p]} + g_1^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(g_0, g_1), \tag{1.3}$$

wobei $\alpha \in k$; $g, g_0, g_1 \in \mathfrak{g}$ und $i \cdot s_{p-i}(g_0, g_1)$ der Koeffizient von λ^{i-1} bei der Entwicklung von $(\operatorname{ad}(g_0+\lambda g_1))^{p-1}(g_1)$ sei. Es ist also

$$[g_0+\lambda g_1, [\dots [g_0+\lambda g_1, g_1] \dots]] = \sum_{i=1}^{p-1} i \cdot s_{p-i}(g_0, g_1) \lambda^{i-1}.$$

Daraus folgt sofort

$$s_i(g_0, g_1) = -\frac{1}{i} \sum_t [g_{t(1)}, [\dots [g_{t(p-1)}, g_1] \dots]], \tag{1.4}$$

wobei t alle Abbildungen von $\{1, \dots, p-1\}$ nach $\{0,1\}$ durchläuft, die i-mal den Wert 0 annehmen. Also ist

$$(g_0+g_1)^{[p]} = g_0^{[p]} + g_1^{[p]} - \sum_t \frac{1}{|t^{-1}(0)|} [g_{t(1)}, [\dots [g_{t(p-1)}, g_1]]], \tag{1.5}$$

wobei t alle Abbildungen von $\{1, \dots, p-1\}$ nach $\{0,1\}$ mit $1 \leqq |t^{-1}(0)| = \operatorname{kard}\{n \mid t(n)=0\}$ durchläuft.

Nach [7] gilt auch

$$(a_0+a_1)^p = a_0^p + a_1^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a_0, a_1) \tag{1.6}$$

in einer beliebigen assoziativen Algebra A über k. In der zu A gehörigen Lie-Algebra A_L läßt sich $s_i(a_0, a_1)$ wie in (1.4) ausdrücken. Die rechts stehenden Klammerausdrücke haben aber auch in A ihre wohldefinierte Bedeutung als Summe von Produkten der a_0 und a_1. Wenn wir in einer assoziativen Algebra $s_i(a_0, a_1)$ durch die Klammerausdrücke schreiben, so sei damit immer diese Bedeutung gemeint. Speziell gilt für assoziative Algebren (1.5), wobei p statt $[p]$ zu setzen ist.

Eine p-Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ heiße abelsch (oder kommutativ), wenn $[h_0, h_1]=0$ für alle $h_i \in \mathfrak{h}$. $\mathfrak{h}$ heiße stark abelsch, wenn $\mathfrak{h}$ abelsch ist und die p-Abbildung Null ist. Wenn $\mathfrak{h}$ eine abelsche p-Lie-Algebra über k ist, so bedeutet das, daß $\mathfrak{h}$ ein Vektorraum über k ist, und daß wegen (1.5) gilt

$$(h_0+h_1)^{[p]} = h_0^{[p]} + h_1^{[p]}. \tag{1.7}$$

Auf $\mathfrak{h}$ ist also eine additive Operation

$$P h = h^{[p]} \tag{1.8}$$

definiert. Wir haben wegen (1.1) die Regel

$$P \alpha = \alpha^p P \qquad \text{für } \alpha \in k. \tag{1.9}$$

Bilden wir den Ring $k[P]$ der formalen Polynome in P mit der Multiplikationsregel (1.9), so erhalten wir einen nichtkommutativen Ring, der auf der Gruppe $\mathfrak{h}$ operiert. $\mathfrak{h}$ ist also ein $k[P]$-Modul. Umgekehrt definiert jeder $k[P]$-Modul $\mathfrak{h}$ wegen (1.7), (1.8) und (1.9) eine abelsche p-Lie-Algebra über k.

Unter einem p-Homomorphismus f einer p-Lie-Algebra $\mathfrak{g}_1$ in eine p-Lie-Algebra $\mathfrak{g}_2$ verstehen wir eine k-lineare Abbildung $f\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ mit

$$f([g, g']) = [f(g), f(g')], \quad f(g^{[p]}) = (f(g))^{[p]}.$$

Die Kategorie der abelschen p-Lie-Algebren und p-Homomorphismen ist also isomorph zur Kategorie der $k[P]$-Links-Moduln.

Sei A eine assoziative k-Algebra und D eine Derivation von A. Dann gilt für $a \in A$

$$D(a^p) = \sum_{i=0}^{p-1} a^i D(a) a^{p-1-i}.$$

Nach ([7], S. 186, (61)) gilt daher

$$D(a^p) = (\operatorname{ad} a)^{p-1} D(a). \tag{1.10}$$

Wir nennen eine Derivation D der p-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ eine p-Derivation, wenn für alle $g \in \mathfrak{g}$ gilt

$$D(g^{[p]}) = (\operatorname{ad} g)^{p-1} D(g). \tag{1.11}$$

Wir zeigen zunächst, daß die p-Derivationen einer p-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra $D(\mathfrak{g})$ bilden und zwar eine Unteralgebra der Lie-Algebra aller Derivationen. Offenbar bilden sie einen k-Vektorraum. Zu zeigen ist, daß für p-Derivationen D_1, D_2 auch $D_1 D_2 - D_2 D_1$ wieder eine p-Derivation ist. Verwenden wir ([7], S. 197, Ex. 23), so ist

$$\begin{aligned}
(D_1 D_2 - D_2 D_1)(g^{[p]}) &= D_1((\operatorname{ad} g)^{p-1} D_2 g) - D_2((\operatorname{ad} g)^{p-1} D_1 g) \\
&= (\operatorname{ad} g)^{p-1} D_1 D_2 g - (\operatorname{ad} g)^{p-1} D_2 D_1 g \\
&\quad + \sum_{i=0}^{p-2} (\operatorname{ad} g)^{p-2-i} \operatorname{ad}(D_1 g)(\operatorname{ad} g)^i D_2 g \\
&\quad - \sum_{i=0}^{p-2} (\operatorname{ad} g)^{p-2-i} \operatorname{ad}(D_2 g)(\operatorname{ad} g)^i D_1 g \\
&= (\operatorname{ad} g)^{p-1}(D_1 D_2 - D_2 D_1)(g).
\end{aligned}$$

$D(\mathfrak{g})$ ist sogar eine p-Lie-Algebra. Es ist nämlich

$$D^p[g, g'] = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} [D^{p-i} g, D^i g'] = [D^p g, g'] + [g, D^p g'].$$

Ehe wir zeigen, daß D^p eine p-Derivation ist, führen wir die assoziative p-Hülle U von $\mathfrak{g}$ ein. Sei $U(\mathfrak{g})$ die assoziative Hülle von $\mathfrak{g}$, und sei Q das von den Elementen $g^p - g^{[p]}$ in $U(\mathfrak{g})$ erzeugte zweiseitige Ideal für alle $g \in \mathfrak{g}$. Dann ist $U = U(\mathfrak{g})/Q$. Nach ([7], S. 196, Ex. 18) läßt sich eine p-Lie-Derivation D von $\mathfrak{g}$ zu einer Derivation $\bar{D}$ auf U fortsetzen. Dann ist auch $\bar{D}^p$ eine Derivation von

U. Da $\bar{D}g \in \mathfrak{g}$ für $g \in \mathfrak{g}$, ist auch $\bar{D}^p g \in \mathfrak{g}$. Wegen (1.10) gilt also

$$\bar{D}^p g^p = (\mathrm{ad}\, g)^{p-1}\, \bar{D}^p g$$

und wegen $g^p = g^{[p]}$ in U und $\bar{D}^p g = D^p g$ gilt dann $D^p g^{[p]} = (\mathrm{ad}\, g)^{p-1}\, D^p g$.

Eine innere Derivation ad g von $\mathfrak{g}$ ist eine p-Derivation und die Menge der inneren Derivationen von $\mathfrak{g}$ bildet ein p-Ideal $I(\mathfrak{g})$ von $D(\mathfrak{g})$. Also ist $D(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{g})$ wieder eine p-Lie-Algebra.

Seien $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ p-Lie-Algebren über k, und sei

$$\mu\colon\ \mathfrak{g} \to D(\mathfrak{g}')/I(\mathfrak{g}')$$

ein p-Homomorphismus. Sei $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}'$ das Zentrum von $\mathfrak{g}'$, d.h. die Menge der $g \in \mathfrak{g}'$ mit $[g, g'] = 0$ für alle $g' \in \mathfrak{g}'$. Eine Derivation D von $\mathfrak{g}'$ führt $\mathfrak{h}$ wegen $[Dh, g] = D[h, g] - [h, Dg] = 0$ in sich über, und eine innere Derivation von $\mathfrak{g}'$ annulliert $\mathfrak{h}$, also existiert ein p-Homomorphismus $\eta\colon\ D(\mathfrak{g}')/I(\mathfrak{g}') \to D(\mathfrak{h})$. Dadurch erhalten wir einen p-Homomorphismus $\eta\,\mu\colon\ \mathfrak{g} \to D(\mathfrak{h})$. Wir sagen, daß $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}$ (durch p-Derivationen) operiert. Statt $\eta\,\mu(g)(h)$ schreiben wir oft $g\,h$ bzw. $[g,h]$. Wenn $\mathfrak{g}'$ abelsch ist, dann ist $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}'$. Dann gilt wegen (1.11) immer

$$D(h^{[p]}) = 0. \tag{1.12}$$

Operiere die p-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf der abelschen p-Lie-Algebra $\mathfrak{h}$. Dann ist durch $\mathfrak{g} \to D(\mathfrak{h}) \subset \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{h},\mathfrak{h})$ ein Ringhomomorphismus von U in $\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{h},\mathfrak{h})$ gegeben. Auf $\mathfrak{h}$ operieren jetzt $k[P]$ und U. Wegen (1.12) gilt für $g \in \mathfrak{g}$ immer $g P h = 0$. Wir bilden den Ring $T = k[P] \otimes U$ [1] mit der Multiplikation $g P = 0$ für alle $g \in \mathfrak{g}$. Dann ist $\mathfrak{h}$ ein T-Modul. Umgekehrt ist jeder T-Modul $\mathfrak{h}$ eine abelsche p-Lie-Algebra, weil $k[P] \subset T$. Wegen $g P = 0$ operiert auch $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}$ durch p-Derivationen. Wir nennen $\mathfrak{h}$ einen $\mathfrak{g}$-Modul.

Seien $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$ abelsche p-Lie-Algebren, auf denen $\mathfrak{g}$ operiert, d.h. $\mathfrak{g}$-Moduln. Sei $f\colon\ \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$ ein p-Homomorphismus derart, daß $g f(h) = f(g h)$. Dann heißt f auch $\mathfrak{g}$-Homomorphismus. Offenbar ist dann f auch ein T-Homomorphismus. Umgekehrt ist jeder T-Homomorphismus ein $\mathfrak{g}$-Homomorphismus. Die Kategorie der $\mathfrak{g}$-Moduln und $\mathfrak{g}$-Homomorphismen ist also isomorph zur Kategorie der T-Moduln.

U ist ein unitärer Unterring von T. Es existiert aber auch ein unitärer Ringepimorphismus $T \to U$, der durch $P \mapsto 0$ definiert wird. Diese beiden Ringhomomorphismen definieren (exakte) vergessende Funktoren [15] von der Kategorie der T-Moduln in die Kategorie der U-Moduln und umgekehrt.

Nach Definition von U ist die Kategorie der U-Moduln isomorph zur Kategorie der stark abelschen p-Lie-Algebren, auf denen $\mathfrak{g}$ operiert.

2. Definition der Kohomologiegruppen von p-Lie-Algebren

Wir wollen zunächst die in der Einleitung schon erwähnte Definition von Hochschild geben. Sei dazu $\mathfrak{h}$ eine stark abelsche p-Lie-Algebra, auf der $\mathfrak{g}$ operiert. Der Körper k werde als stark abelsche p-Lie-Algebra aufgefaßt, auf

[1] Das Tensorprodukt ohne nähere Bezeichnung des Ringes soll immer ein Tensorprodukt über k sein.

der $\mathfrak{g}$ trivial operiert, d.h. $g\alpha=0$ für $g\in\mathfrak{g}$, $\alpha\in k$. Da $\mathfrak{h}$ und k U-Moduln sind, ist die folgende Definition sinnvoll:

$$\tilde{H}^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\mathrm{Ext}_U^n(k,\mathfrak{h}). \tag{2.1}$$

Diese Definition wurde von Hochschild in [5] gegeben.

Wir wollen diese Definition noch ausdehnen auf abelsche (aber nicht notwendig stark abelsche) p-Lie-Algebren $\mathfrak{h}$. Jede solche p-Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ kann zu einer stark abelschen p-Lie-Algebra $\mathfrak{h}^*$ gemacht werden, indem wir die p-Abbildung gleich Null setzen. Wegen (1.12) kann eine Operation von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}$ unverändert auf $\mathfrak{h}^*$ beibehalten werden. Wir bezeichnen also

$$\tilde{H}^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\mathrm{Ext}_U^n(k,\mathfrak{h}^*) \tag{2.2}$$

als die Kohomologiegruppen von Hochschild.

Diese Definition der Kohomologiegruppen liefert allerdings nicht die gewünschte Bedeutung speziell der zweiten Kohomologiegruppe, außer in dem Falle, wo $\mathfrak{h}$ stark abelsch ist. Wir werden sie für andere Zwecke in den Kapiteln III und IV benötigen.

Zur Beschreibung der Erweiterungen von p-Lie-Algebren (in Kapitel II) benötigen wir also andere Kohomologiegruppen. Um diese zu definieren, betrachten wir zunächst die Kohomologie von Lie-Algebren. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über k, die auf einer kommutativen Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ operiert. Eine Derivation von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$ sei eine k-lineare Abbildung $\partial\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ mit $\partial[g,g']=g\partial g'-g'\partial g$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Der}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ die Menge aller Derivationen von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$. $\mathrm{Der}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ ist als Funktor in $\mathfrak{h}$, wobei $\mathfrak{h}$ als $\mathfrak{g}$-Modul aufgefaßt wird, darstellbar, und die rechts-abgeleiteten Funktoren sind die Kohomologiegruppen $H^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ für $n\geqq 2$.

Wir bilden jetzt von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ das semidirekte Produkt $\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}$, wobei $\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$ als k-Vektorraum ist und die Lie-Multiplikation $[(g,h),(g',h')]=([g,g'],gh'-g'h)$ trägt. $\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}$ ist eine Lie-Algebra. Eine Derivation $\partial\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ kann dann als Graph mit einer Untermenge von $\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}$ identifiziert werden. Weil ∂ k-linear ist, ist der Graph von ∂ ein k-Vektorraum in $\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}$ und weil ∂ eine Derivation ist, ist der Graph von ∂ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}$. Ist umgekehrt der Graph einer Abbildung $\partial\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}$ eine Lie-Unteralgebra, so ist ∂ eine Derivation. Wir bezeichnen mit Lie-Graph $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ die Menge der Abbildungen von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$, deren Graph in $\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}$ eine Lie-Unteralgebra ist. Da Lie-Graph $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\mathrm{Der}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, ist Lie-Graph $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ darstellbarer Funktor in $\mathfrak{h}$, und die rechts-abgeleiteten Funktoren sind die $H^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ für $n\geqq 2$.

Diese Eigenschaft der Kohomologiegruppen wollen wir zur Definition der Kohomologiegruppen von p-Lie-Algebren verwenden. Seien $\mathfrak{g}$ eine p-Lie-Algebra und $\mathfrak{h}$ eine abelsche p-Lie-Algebra, auf der $\mathfrak{g}$ operiert. Wir wollen auf $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$ eine p-Lie-Algebren-Struktur so definieren, daß $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ p-Lie-Unteralgebren sind und die Operation von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}$ mit der Multiplikation von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$ übereinstimmt. Damit ist die Lie-Multiplikation festgelegt durch

$$[(g,h),(g',h')]=([g,g'],gh'-g'h). \tag{2.3}$$

Eine p-Abbildung muß speziell (1.5) erfüllen, also

$$(2.4) \qquad (g, h)^{[p]} = (g^{[p]}, h^{[p]} + g^{p-1} h).$$

Zu zeigen bleibt, daß in der Lie-Algebra $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ überhaupt eine p-Abbildung existiert. Sei U die assoziative Hülle von $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Wir rechnen in U aus:

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad}(g, h))^p(g', h') &= \operatorname{ad}\big(g^p + h^p + \textstyle\sum s_i(g, h)\big)(g', h')\\ &= \big(\operatorname{ad}(g)^p + \operatorname{ad}(h)^p + \operatorname{ad}(g^{p-1} h)\big)(g', h')\\ &= [(g^{[p]}, h^{[p]} + g^{p-1} h), (g', h')],\end{aligned}$$

also ist (2.4) eine p-Abbildung in $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Die so erhaltene p-Lie-Algebra bezeichnen wir mit $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$. Sie heißt semi-direktes Produkt von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$.

Mit p-Lie-Graph$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ werde die Menge der Abbildungen von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$ bezeichnet, deren Graph in $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ eine p-Lie-Unteralgebra bildet.

Lemma 2.1. *p-Lie-Graph$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ist ein darstellbarer Funktor in der Kategorie der $\mathfrak{g}$-Moduln $\mathfrak{h}$.*

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, daß p-Lie-Graph$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein Funktor in $\mathfrak{h}$ ist. Sei $\mathfrak{h}'$ ein weiterer $\mathfrak{g}$-Modul, und sei $f: \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$ ein $\mathfrak{g}$-Homomorphismus. Dann definiert $(g, h) \mapsto (g, f(h))$ einen p-Homomorphismus von $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}'$, wie man leicht an (2.3) und (2.4) nachprüft. Ein $\partial \in p$-Lie-Graph$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ definiert eine p-Lie-Unteralgebra in $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$. Diese geht über in eine p-Lie-Unteralgebra in $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}'$. Diese ist der Graph von $f\,\partial$, also ist $f\,\partial \in p$-Lie-Graph$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$. Man sieht damit, daß p-Lie-Graph$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein Funktor in $\mathfrak{h}$ ist.

Sei $\partial \in p$-Lie-Graph$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Das gilt genau dann, wenn $\partial: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ k-linear ist und wenn gilt:

$$(2.5) \qquad \partial[g, g'] = g\,\partial g' - g'\,\partial g, \qquad \partial(g^{[p]}) = (\partial g)^{[p]} + g^{p-1}\,\partial g,$$

wie aus (2.3) und (2.4) sofort folgt. Damit erhalten wir einen T-Homomorphismus $1 \otimes \partial: T \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ mit

$$\begin{aligned}(1 \otimes \partial)(1 \otimes [g, g']) &= g\,\partial g' - g'\,\partial g\\ &= (1 \otimes \partial)(g \otimes g' - g' \otimes g)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(1 \otimes \partial)(1 \otimes g^{[p]}) &= (\partial g)^{[p]} + g^{p-1}\,\partial g\\ &= (1 \otimes \partial)\big((P + g^{p-1}) \otimes g\big),\end{aligned}$$

d.h. einen T-Homomorphismus von $T \otimes \mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$, der den T-Untermodul K von $T \otimes \mathfrak{g}$, der von

$$\{1 \otimes [g, g'] - g \otimes g' + g' \otimes g,\ 1 \otimes g^{[p]} - (P + g^{p-1}) \otimes g\}$$

erzeugt wird, annulliert. Umgekehrt definiert ein solcher Homomorphismus einen k-Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$, der (2.5) erfüllt. Sei $C = T \otimes \mathfrak{g}/K$. Dann ist also

$$p\text{-Lie-Graph}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cong \operatorname{Hom}_T(C, \mathfrak{h}). \tag{2.6}$$

Dieser Isomorphismus ist trivialerweise funktoriell in $\mathfrak{h}$, wenn man $\mathfrak{h}$ gleichzeitig als $\mathfrak{g}$- und als T-Modul auffaßt.

Wir definieren jetzt die Kohomologiegruppen der p-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit Koeffizienten im $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{h}$ durch

$$\begin{aligned} &H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = 0 \\ &H^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \operatorname{Ext}_T^{n-1}(C, \mathfrak{h}), \qquad n \geqq 1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Wir wollen die Struktur von C näher bestimmen. Sei dazu $\{u_i\}_{i \in I}$ eine fest gewählte k-Basis von $\mathfrak{g}$ mit einer geordneten Menge I. Dann gilt

Satz 2.2. *Es existiert ein $k[P]$-Isomorphismus $C \cong k[P] \otimes U^+$, wobei U^+ das Augmentationsideal von U ist.*

Beweis. Der k-Vektorraum U^+ hat eine Basis

$$\{\prod_{i \in I} u_i^{e_i} \mid \text{fast alle } e_i = 0,\ p > e_i \geqq 0,\ \textstyle\sum e_i > 0\},$$

wobei die Ordnung der Faktoren durch die Ordnung von I bestimmt wird. Es genügt zu zeigen, daß C ein freier $k[P]$-Modul mit einer Basis gleicher Mächtigkeit ist. Dazu stellen wir C in anderer Form durch Erzeugende und Relationen dar. Seien $R = U(\mathfrak{g})$ die assoziative Hülle der $\mathfrak{g}$ unterliegenden Lie-Algebra und R^+ das Augmentationsideal. $k[P] \otimes R$ ist ein Ring mit der Multiplikation $gP = 0$. Dann existiert ein $k[P] \otimes R$-Epimorphismus von $k[P] \otimes R^+$ auf $T \otimes \mathfrak{g}/(g \otimes g' - g' \otimes g - 1 \otimes [g, g'])$, wobei $\langle g \otimes g' - g' \otimes g - 1 \otimes [g, g'] \rangle$ der durch alle Elemente der angegebenen Form erzeugte T-Untermodul ist. Der Kern besteht aus dem Untermodul $\langle (g^p - g^{[p]})u \mid g \in \mathfrak{g}, u \in R^+ \rangle$ von $k[P] \otimes R^+$. Bei dem Epimorphismus von $k[P] \otimes R^+$ auf C wird der Kern von den Elementen $(g^p - g^{[p]})u$ und $g^p - g^{[p]} + Pg$ als $k[P] \otimes R$-Modul erzeugt. Wir kennen eine $k[P]$-Basis von $k[P] \otimes R^+$, nämlich

$$\{\prod_{i \in I} u_i^{e_i} \mid \text{fast alle } e_i = 0,\ e_i \geqq 0,\ \textstyle\sum e_i > 0\}.$$

Ähnlich wie in ([2], Ex. 2.6.b) führen wir eine neue Basis ein. Sei $\varepsilon = (e_i)_{i \in I}$ eine Menge natürlicher Zahlen mit $0 < \sum e_i < \infty$. Die

$$S_\varepsilon = \prod_{i \in I} u_i^{e_i}$$

sind dann die Basiselemente von $k[P] \otimes R^+$. Schreiben wir $e_i = x_i + p y_i$ mit $0 \leqq x_i < p$, so definieren wir

$$T_\varepsilon = \prod_{i \in I} u_i^{e_i} \psi_\varepsilon(u_i)^{y_i},$$

wobei

$$\psi_\varepsilon(u_i) = \begin{cases} u_i^p - u_i^{[p]}, & \text{falls ein } j > i \text{ mit } e_j > 0 \text{ existiert}, \\ u_i^p - u_i^{[p]} + P u_i, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Der zweite Fall der Definition für ψ_ε tritt also immer nur beim letzten von 1 verschiedenen Faktor des Produkts in T_ε auf. Dabei kann $y_i=0$ sein.

Die übliche Graduierung von R definiert eine Graduierung von $k[P]\otimes R^+$. Sei $|\varepsilon|=\sum e_i$. Dann zeigen wir zunächst durch vollständige Induktion, daß $\{T_\varepsilon \,|\, |\varepsilon|\leqq r\}$ den $k[P]$-Modul $(k[P]\otimes R^+)_r$ erzeugt. Für $\{S_\varepsilon \,|\, |\varepsilon|\leqq r\}$ ist das bekannt ([2], loc. cit.). Für $r<p$ ist $T_\varepsilon=S_\varepsilon$. Sei die Behauptung für $(k[P]\otimes R^+)_{r-1}$ bewiesen. Wir müssen S_ε mit $|\varepsilon|=r$ durch die T_ε mit $|\varepsilon|\leqq r$ darstellen.

$$S_\varepsilon=\prod_{i\in I} u_i^{e_i}=\prod_{i\in I} u_i^{x_i}\psi_\varepsilon(u_i)^{y_i}+v_\varepsilon=T_\varepsilon+v_\varepsilon,$$

wobei $v_\varepsilon\in(k[P]\otimes R^+)_{r-1}$.

Durch vollständige Induktion nach r sieht man damit auch sofort, daß die $\{T_\varepsilon \,|\, |\varepsilon|\leqq r\}$ eine $k[P]$-Basis bilden.

Wir zeigen jetzt, daß $\{T_\varepsilon \,|\, e_i=x_i+p y_i,\ |(y_i)|>0\}$ eine $k[P]$-Basis für den Kern J von $k[P]\otimes R^+\to C$ ist. Nach Definition sind diese T_ε alle in J enthalten. Sei $v\in J$. Dann ist $v=\sum a_i v_i$ mit $a_i\in k[P]$ und $v_i=s(g^p-g^{[p]})u$ oder $v_i=s(g^p-g^{[p]}+Pg)$, wobei $s\in R$, $u\in R^+$, $g\in\mathfrak{g}$ sind. Da die Ausdrücke für v_i p-semilinear sind, genügt es, Elemente der Form $s(u_i^p-u_i^{[p]})u$ bzw. $s(u_i^p-u_i^{[p]}+Pu_i)$ durch die T_ε darzustellen.

Wir betrachten den ersten Fall. Da $u_i^p-u_i^{[p]}$ im Zentrum von R liegt, können wir annehmen, daß su ein Basiselement von R von der Form T_ε ist. Fügen wir jetzt $u_i^p-u_i^{[p]}$ an der i-ten Stelle von T_ε ein, so erhalten wir wieder ein Basiselement $T_{\varepsilon'}$ mit $e_i'\geqq p$, also $|(y_i)|>0$. Ist im zweiten Fall s ein Basiselement aus R^+, so ist $sPu_i=0$, d.h. wir sind auf den ersten Fall zurückgeführt. Ist $s\in k$, so ist $u_i^p-u_i^{[p]}+Pu_i=T_\varepsilon$ mit $e_j=\delta_{ij}p$, also $|(y_i)|>0$. Also erzeugen die T_ε mit $|(y_i)|>0$ den Kern J.

Als $k[P]$-Modul ist C isomorph zum Komplement von J in $k[P]\otimes R^+$ bezüglich der Basis T_ε. Bei dem Epimorphismus $k[P]\otimes R^+\to C$ gehen die $T_\varepsilon=S_\varepsilon$ mit $|\varepsilon|>0$ und $|(y_i)|=0$ über in eine $k[P]$-Basis von C. Die Bilder dieser S_ε bilden bei $k[P]\otimes R^+\to k[P]\otimes U^+$ auch genau die angegebene $k[P]$-Basis von $k[P]\otimes U^+$.

3. *Ein universelles Problem*

Wir werden im zweiten Kapitel für eine p-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und einen $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{h}$ Abbildungen $\tau\colon \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ und $\pi\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ mit folgenden Eigenschaften betrachten:

a) τ ist k-linear,

b) $\pi(\alpha g)=\alpha^p\pi(g)$, für $\alpha\in k$, $g\in\mathfrak{g}$,

c) $\pi(g_0)+\pi(g_1)-\pi(g_0+g_1)$

(3.1)
$$=\sum_t\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{|t^{-1}(0)|}\, g_{t(1)}\cdots g_{t(i-1)}\,\tau(g_{t(i)}\otimes \mathrm{ad}\, g_{t(i+1)}\cdots \mathrm{ad}\, g_{t(p-1)}(g_1)),$$

wobei t wie in (1.5) läuft. Offensichtlich spielt hier die p-Abbildung von $\mathfrak{h}$ keine Rolle. Wir können also annehmen, daß $\mathfrak{h}$ ein U-Modul ist, den wir jetzt mit M bezeichnen wollen.

Seien (τ,π) und (τ',π') zwei Paare von Abbildungen von $\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{g}$ in M, die (3.1) erfüllen. Dann erfüllen auch $(\tau+\tau', \pi+\pi')$ (3.1), wobei die Addition durch Addition der Werte definiert wird. Die Menge der Paare (τ,π) mit (3.1) werde mit $\mathfrak{E}(M)$ bezeichnet. $\mathfrak{E}(M)$ bildet mit der soeben definierten Addition eine kommutative Gruppe.

Sei N ein weiterer U-Modul und $\varphi\colon M\to N$ ein U-Homomorphismus. Dann erfüllen $\varphi\tau$ und $\varphi\pi$ wieder (3.1). Also ist $\mathfrak{E}$ ein kovarianter Funktor von der Kategorie der U-Moduln in die Kategorie der abelschen Gruppen. Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{E}$ ein darstellbarer Funktor ist, d.h. daß es einen U-Modul $E(\mathfrak{g})$ gibt mit $\mathfrak{E}(M)\cong \mathrm{Hom}_U(E(\mathfrak{g}),M)$ funktoriell in M.

Nehmen wir zunächst an, daß $E(\mathfrak{g})$ existiert. Dann entspricht

$$1\in \mathrm{Hom}_U(E(\mathfrak{g}), E(\mathfrak{g}))$$

einem Paar $(\tau^*, \pi^*)\in\mathfrak{E}(E(\mathfrak{g}))$. τ^* definiert einen U-Homomorphismus

$$i=1\otimes\tau^*\colon\ U\otimes(\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g})\to E(\mathfrak{g})\,.$$

$U\otimes(\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g})$ hat die Eigenschaft, daß für jeden k-Homomorphismus f von $\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ in einen U-Modul M genau ein U-Homomorphismus von $U\otimes(\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g})$ in M existiert, der f fortsetzt.

Sei $\omega\colon k\to k$ definiert durch $\omega(\alpha)=\alpha^p$. Sei $k\otimes_\omega\mathfrak{g}$ der Vektorraum, der aus $\mathfrak{g}$ durch Skalarerweiterung vermöge ω entsteht. Sei $U\otimes_\omega\mathfrak{g}=U\otimes k\otimes_\omega\mathfrak{g}$. Wir definieren $\tau\colon\ \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}\to U\otimes_\omega\mathfrak{g}$ durch $\tau(g\wedge g')=0$ und $\pi\colon\ \mathfrak{g}\to U\otimes_\omega\mathfrak{g}$ durch $\pi(g)=1\otimes g$. Dann ist (3.1) erfüllt. Also existiert $q\colon E(\mathfrak{g})\to U\otimes_\omega\mathfrak{g}$. Da $\mathrm{Bild}(q)\supseteq\mathrm{Bild}(\pi)$, enthält $\mathrm{Bild}(q)$ den von $\{1\otimes g\}$ erzeugten U-Untermodul $U\otimes_\omega\mathfrak{g}$. Also ist q ein Epimorphismus. Da $U\otimes_\omega\mathfrak{g}$ U-projektiv ist, existiert zu q ein Schnitt s, so daß $s(U\otimes_\omega\mathfrak{g})$ direkter Summand in $E(\mathfrak{g})$ ist.

$U\otimes_\omega\mathfrak{g}$ hat die Eigenschaft, daß für jedes Paar $(\tau', \pi')\in\mathfrak{E}(M)$ mit $\tau'=0$ genau ein U-Homomorphismus $\varphi\colon\ U\otimes_\omega\mathfrak{g}\to M$ existiert mit $\varphi\tau=\tau'=0$ und $\varphi\pi=\pi'$.

Bisher haben wir universelle Eigenschaften für τ und π getrennt untersucht. Aber (3.1c) bringt eine wechselseitige Beziehung hervor. Bezeichnen wir die rechte Seite von (3.1c) mit $\sigma(g_0, g_1)$. Man sieht leicht, daß $\sigma(\alpha g_0, \alpha g_1)=\alpha^p\sigma(g_0, g_1)$ und $\sigma(g_0, g_1)=\sigma(g_1, g_0)$ gelten. Anders ist es mit der folgenden Gleichung:

(3.2) $$\sigma(g_0+g_1, g_2)+\sigma(g_0, g_1)-\sigma(g_0, g_1+g_2)-\sigma(g_1, g_2)=0\,.$$

Diese Gleichung ist im allgemeinen für beliebige k-lineare τ nicht erfüllt, etwa im Falle $p=3$ für $M=U\otimes(\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g})$ und $\tau(g\wedge g')=1\otimes g\wedge g'$. Die drei oben genannten Gleichungen sind jedoch von der linken Seite von (3.1c) erfüllt wegen (3.1b) und der Modulgesetze. Daher können die τ nur so gewählt werden, daß (3.2) gilt. Sei B der U-Faktormodul von $U\otimes(\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g})$ nach den durch (3.2) definierten Relationen. Dann läßt sich jedes $\tau\in(\tau,\pi)\in\mathfrak{E}(M)$ eindeutig durch B faktorisieren. Also läßt sich auch i durch $i'\colon B\to E(\mathfrak{g})$ faktorisieren.

Satz 3.1. *Der Funktor $\mathfrak{E}$ ist darstellbar durch $E(\mathfrak{g})$, und die Folge*

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{i'} E(\mathfrak{g}) \xrightarrow{q} U \otimes_\omega \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

ist exakt.

Beweis. Da q den Schnitt s hat, muß $E(\mathfrak{g}) \cong B \oplus (U \otimes_\omega \mathfrak{g})$ sein. Setzen wir also $E(\mathfrak{g}) = B \oplus (U \otimes_\omega \mathfrak{g})$, dann sind q, i' und s festgelegt. Wir definieren τ^*: $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \to E(\mathfrak{g})$ durch $\tau^* = i\tau'$, wobei $\tau'(g \wedge g') = 1 \otimes (g \wedge g')$. Sei $\{g_i\}$ eine k-Basis von $\mathfrak{g}$. Dann definieren wir π^*: $\mathfrak{g} \to E(\mathfrak{g})$ durch $\pi^*(g_i) = 1 \otimes g_i \in U \otimes_\omega \mathfrak{g} \subseteq E(\mathfrak{g})$ und Fortsetzung vermöge (3.1b) und (3.1c). Durch (3.2) bzw. die Definition von B ist die Fortsetzung von π^* eindeutig und wohldefiniert. Mit (3.2) zeigt man leicht, daß (τ^*, π^*) die Bedingungen (3.1a) und (3.1b) erfüllen. Gelte (3.1c) schon, wenn die Menge der Basiselemente bei der Darstellung von g'_0 und g'_1 mit Koeffizienten $\neq 0$ kleiner als n ist. Seien

$$g'_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i, \qquad g'_1 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\pi^*(g'_0 + g'_1) &= \pi^*(\alpha_1 g_1 + \beta_1 g_1 + (g'_0 - \alpha_1 g_1) + (g'_1 - \beta_1 g_1)) \\
&= \pi^*(\alpha_1 g_1 + \beta_1 g_1) + \pi^*((g'_0 - \alpha_1 g_1) + (g'_1 + \beta_1 g_1)) \\
&\quad - \sigma((\alpha_1 + \beta_1) g_1, (g'_0 - \alpha_1 g_1) + (g'_1 - \beta_1 g_1)) \\
&= \pi^*(\alpha_1 g_1) + \pi^*(\beta_1 g_1) + \pi^*(g'_0 - \alpha_1 g_1) + \pi^*(g'_1 - \beta_1 g_1) \\
&\quad - \sigma((\alpha_1 + \beta_1) g_1, (g'_0 - \alpha_1 g_1) + (g'_1 - \beta_1 g_1)) \\
&\quad - \sigma(\alpha_1 g_1, \beta_1 g_1) - \sigma(g'_0 - \alpha_1 g_1, g'_1 - \beta_1 g_1) \\
&= \pi^*(\alpha_1 g_1) + \pi^*(\beta_1 g_1) + \pi^*(g'_0 - \alpha_1 g_1) + \pi^*(g'_1 - \beta_1 g_1) \\
&\quad - \sigma(g'_0, g'_1) - \sigma(\alpha_1 g_1, g'_0 - \alpha_1 g_1) - \sigma(\beta_1 g_1, g'_1 - \beta_1 g_1) \\
&= \pi^*(g'_0) + \pi^*(g'_1) - \sigma(g'_0, g'_1).
\end{aligned}$$

Sei M ein U-Modul und $(\tau'', \pi'') \in \mathfrak{E}(M)$. τ'' erfüllt (3.2), definiert also eindeutig φ_1: $B \to M$. Definieren wir ein neues Paar $(0, \pi''_0) \in \mathfrak{E}(M)$ durch $\pi''_0(g_i) = \pi''(g_i)$, so ist dadurch genau ein Homomorphismus φ_2: $U \otimes_\omega \mathfrak{g} \to M$ bestimmt. Sei $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$: $E(\mathfrak{g}) \to M$. Dann ist

$$\varphi \tau^* = \varphi_1 \tau^* = \tau'' \quad \text{und} \quad \varphi \pi^*(g_i) = \varphi_2 \pi^*(g_i) = \varphi_2(1 \otimes g_i) = \pi''_0(g_i) = \pi''(g_i).$$

Da $\varphi \pi^*$ und π'' (3.1) genügen, ist $\varphi \pi^* = \pi''$ für alle $g \in \mathfrak{g}$. Damit haben wir einen zu (τ'', π'') gehörigen Homomorphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}_U(E(\mathfrak{g}), M)$ konstruiert. Man sieht leicht, daß diese Konstruktion additiv ist. Sei jetzt φ derart gegeben, daß $\varphi \tau^* = 0$ und $\varphi \pi^* = 0$. Dann ist $\varphi i' = 0$ und $\varphi(u \otimes g_i) = u \varphi(1 \otimes g_i) = u \varphi \pi^*(g_i) = 0$. Also ist $\varphi = 0$. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{E}$ durch $E(\mathfrak{g})$ darstellbar ist.

Nach der Definition von B ist $U \otimes (\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g})$ eine projektive Erweiterung von B. Wir setzen diese zu einer projektiven Erweiterung $(U \otimes (\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g})) \oplus (U \otimes_\omega \mathfrak{g}) = P(\mathfrak{g})$ von $E(\mathfrak{g})$ fort.

Beispiel 3.2. Seien $M=U\otimes\mathfrak{g}$, $\tau(g\wedge g')=g\otimes g'-g'\otimes g-1\otimes[g,g']$ *und* $\pi(g)=g^{p-1}\otimes g-1\otimes g^{[p]}$. *Dann ist* $(\tau,\pi)\in\mathfrak{C}(M)$. *Das zugehörige* φ *definiert einen U-Homomorphismus* $d_1\colon P(\mathfrak{g})\to U\otimes\mathfrak{g}$.

Wir müssen beweisen, daß (τ,π) der Bedingung (3.1c) gehorcht. Dazu führen wir den Polynomring $k[x_1,x_2,\ldots]$ in nichtkommutativen Unbestimmten x_i ein. Er hat eine k-Basis, bestehend aus den Elementen $x_{i(1)}^{j(1)}\ldots x_{i(n)}^{j(n)}$, $n\geqq 1$ mit $i(r),j(r)\in\{1,2,3,\ldots\}$ und $i(r)\neq i(r+1)$. Als weiteres Basiselement tritt 1 hinzu. Wir definieren eine k-lineare Abbildung $\eta\colon k[x_1,x_2,\ldots]\to U\otimes\mathfrak{g}$ für eine Folge von Elementen $g_1,g_2,\ldots\in\mathfrak{g}$ durch

$$\eta(x_{i(1)}^{j(1)}\ldots x_{i(n)}^{j(n)})=g_{i(1)}^{j(1)}\ldots g_{i(n)}^{j(n)-1}\otimes g_{i(n)},$$
$$\eta(1)=0.$$

Man sieht sofort, daß

$$\eta(x_{i(1)}^{j(1)}\ldots x_{i(n)}^{j(n)})=g_{i(1)}^{j(1)}\eta(x_{i(2)}^{j(2)}\ldots x_{i(n)}^{j(n)})\qquad\text{für } n\geqq 2.$$

Wir wollen jetzt η anwenden auf Ausdrücke, wie $s_i(x_1,x_2)$ bzw. $[x_1,[x_2,\ldots[x_{n-1},x_n]\ldots]]$. Nach Definition ist

$$\tau(g_1\wedge g_2)=\eta([g_1,g_2])-1\otimes[g_1,g_2]$$

und

$$\pi(g)=\eta(g^p)-1\otimes g^{[p]}.$$

Für $n\geqq 2$ zeigt man durch vollständige Induktion

$$\eta([x_1,\ldots,[x_{n-1},x_n]\ldots])-1\otimes[g_1,\ldots,[g_{n-1},g_n]\ldots]$$

(3.3)
$$=\sum_{i=1}^{n-1}g_1\ldots g_{i-1}\tau(g_i\otimes\mathrm{ad}(g_{i+1})\ldots\mathrm{ad}(g_{n-1})(g_n)).$$

Also ist

$$\sum_{i=1}^{p-1}(\eta(s_i(x_1,x_2))-1\otimes s_i(g_1,g_2))$$

(3.4)
$$=\sum_t\sum_{i=1}^{p-1}\frac{-1}{|t^{-1}(0)|}\,g_{t(1)}\ldots g_{t(i-1)}\tau(g_{t(i)}\otimes\mathrm{ad}g_{t(i+1)}\ldots\mathrm{ad}g_{t(p-1)}(g_2)),$$

wobei t analog zu (1.5) läuft. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\pi(g_1+g_2)&=\eta((x_1+x_2)^p)-1\otimes(g_1+g_2)^{[p]}\\&=\eta(x_1^p)+\eta(x_2^p)-1\otimes g_1^{[p]}-1\otimes g_2^{[p]}\\&\quad+\sum_{i=1}^{p-1}(\eta(s_i(x_1,x_2))-1\otimes s_i(g_1,g_2))\\&=\pi(g_1)+\pi(g_2)-\sigma(g_1,g_2).\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung aus dem Beispiel 3.2 bewiesen.

Wir betrachten jetzt den Funktor $\mathfrak{E}_T$, der jedem T-Modul M die Menge der Paare (τ, π), die (3.1) erfüllen, zuordnet. Fassen wir jeden T-Modul vermöge $U \to T$ als U-Modul auf, so ist $\mathfrak{E}_T(M) \cong \mathfrak{E}(M)$. Da

$$\mathfrak{E}(M) \cong \operatorname{Hom}_U(E(\mathfrak{g}), M) \cong \operatorname{Hom}_T(T \otimes_U E(\mathfrak{g}), M),$$

wird $\mathfrak{E}_T$ durch $T \otimes_U E(\mathfrak{g})$ dargestellt. $T \otimes_U P(\mathfrak{g})$ ist eine T-projektive Erweiterung von $T \otimes_U E(\mathfrak{g})$.

Satz 3.3. *Der Funktor $\mathfrak{E}_T$ ist darstellbar durch $T \otimes_U E(\mathfrak{g})$ und die Folge*

$$0 \to T \otimes_U B \to T \otimes_U E(\mathfrak{g}) \to T \otimes_\omega \mathfrak{g} \to 0$$

ist exakt.

Genau wie in Beispiel 3.2 beweist man

Beispiel 3.4. Seien $M = T \otimes \mathfrak{g}$, $\tau(g \wedge g') = g \otimes g' - g' \otimes g - 1 \otimes [g, g']$ *und* $\pi(g) = (P + g^{p-1}) \otimes g - 1 \otimes g^{[p]}$. *Dann ist* $(\tau, \pi) \in \mathfrak{E}_T(M)$. *Das zugehörige* $\varphi \in \operatorname{Hom}_T(T \otimes_U E(\mathfrak{g}), M)$ *definiert einen T-Homomorphismus* $d\colon T \otimes_U P(\mathfrak{g}) \to T \otimes \mathfrak{g}$.

Sei jetzt $\Delta\colon \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to M$ für einen beliebigen U-Modul M und $(\tau, \pi) \in \mathfrak{E}(M)$ definiert durch

$$\begin{aligned} \Delta(g_0 \otimes g_1 \otimes g_2) &= \tau(g_0 \wedge [g_1, g_2]) + \tau(g_1 \wedge [g_2, g_0]) + \tau(g_2 \wedge [g_0, g_1]) \\ &\quad + g_0 \tau(g_1 \wedge g_2) + g_1 \tau(g_2 \wedge g_0) + g_2 \tau(g_0 \wedge g_1), \end{aligned} \tag{3.5}$$

und sei $\Gamma\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to M$ definiert durch

$$\begin{aligned} \Gamma(g, g') &= \tau(g^{[p]} \wedge g') - g' \pi(g) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{p-1} g^{p-1-i} \tau(g \wedge (\operatorname{ad} g)^i (g')). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sei $F'(\mathfrak{g})$ der U-Untermodul von $E(\mathfrak{g})$, der von den Elementen $\Delta(g_0 \otimes g_1 \otimes g_2)$ und $\Gamma(g_1, g_2)$ — bezüglich (τ^*, π^*) gebildet — erzeugt wird, und sei $F(\mathfrak{g})$ das volle Urbild von $F'(\mathfrak{g})$ bei $P(\mathfrak{g}) \to E(\mathfrak{g})$. Dann ist $E(\mathfrak{g})/F'(\mathfrak{g}) \cong P(\mathfrak{g})/F(\mathfrak{g})$.

Seien $(\tau, \pi) \in \mathfrak{E}(M)$, die zusätzlich $\Delta(g_0 \otimes g_1 \otimes g_2) = 0$ und $\Gamma(g, g') = 0$ erfüllen. Die Untermenge dieser Paare von $\mathfrak{E}(M)$ wollen wir $\mathfrak{H}(M)$ nennen. $\mathfrak{H}$ ist wie $\mathfrak{E}$ ein Funktor. Nach Definition von $F'(\mathfrak{g})$ und $E(\mathfrak{g})$ gilt

Korollar 3.5. *Der Funktor $\mathfrak{H}$ ist darstellbar durch $E(\mathfrak{g})/F'(\mathfrak{g})$.*

Entsprechend erhalten wir für T-Moduln M:

$$\mathfrak{H}_T(M) \cong \operatorname{Hom}_T(T \otimes_U (E(\mathfrak{g})/F'(\mathfrak{g})), M). \tag{3.7}$$

4. Projektive Auflösungen

Satz 4.1. *Die Folge*

$$0 \to T \otimes_U F(\mathfrak{g}) \to T \otimes_U P(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d} T \otimes \mathfrak{g} \to C \to 0$$

ist exakt, wobei d wie in Beispiel 3.4 gewählt ist.

Beweis. Nach der Definition von d in Beispiel 3.4 und von C am Ende von § 2 ist

$$T \otimes_U P(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d} T \otimes \mathfrak{g} \to C \to 0$$

exakt. Außerdem ist $T \otimes_U F(\mathfrak{g}) \to T \otimes_U P(\mathfrak{g})$ ein Monomorphismus, weil T ein freier U-Rechtsmodul ist und $F(\mathfrak{g})$ ein Untermodul von $P(\mathfrak{g})$ ist.

Nach Definition des τ in Beispiel 3.4 erfüllt τ die Gleichung $\Delta(g_0 \otimes g_1 \otimes g_2) = 0$. Verwenden wir die Abbildung η aus Beispiel 3.2 und die Gl. (3.3), so ist mit der Definition von π aus Beispiel 3.4:

$$\begin{aligned}\Gamma(g, g') = {} & g^{[p]} \otimes g' - g' \otimes g^{[p]} - 1 \otimes [g^{[p]}, g'] \\ & - g' g^{p-1} \otimes g + g' \otimes g^{[p]} - \eta((\operatorname{ad} x)^p(x')) + 1 \otimes (\operatorname{ad} g)^p(g') \\ = {} & g^{[p]} \otimes g' - g' g^{p-1} \otimes g - \eta([x^p, x']) = 0,\end{aligned}$$

also ist $(\tau, \pi) \in \mathfrak{H}_T(T \otimes \mathfrak{g})$. Damit ist $d(T \otimes_U F(\mathfrak{g})) = 0$. Es bleibt zu zeigen, daß $T \otimes_U F(\mathfrak{g})$ der Kern von d ist. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$T \otimes_U P(\mathfrak{g}) / T \otimes_U F(\mathfrak{g}) \cong T \otimes_U \big(P(\mathfrak{g}) / F(\mathfrak{g})\big) \cong \operatorname{Kern}(T \otimes \mathfrak{g} \to C) = K$$

ist.

Wir zeigen, daß $\mathfrak{H}_T(M) \cong \operatorname{Hom}_T(K, M)$ ist, wobei $\tau\colon \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \to K$ und $\pi\colon \mathfrak{g} \to K$ wie in Beispiel 3.4 definiert sind. Nach Definition von d ist dann $\tau = d\tau^*$ bzw. $\pi = d\pi^*$. Wegen (3.6) und $d(T \otimes_U F(\mathfrak{g})) = 0$ sind auch $\Delta(g_0 \otimes g_1 \otimes g_2) = 0$ und $\Gamma(g, g') = 0$ erfüllt. Wegen (3.6) ist der Satz dann bewiesen.

Sei T^i das i-fache Tensorprodukt von T mit sich selbst über k und sei

$$T^3 \otimes C \xrightarrow{\partial_2} T^2 \otimes C \xrightarrow{\partial_1} T \otimes C \xrightarrow{\partial_0} C \to 0$$

die Bar-Auflösung von C ([11], X, 2). Sei $B = \operatorname{Bild} \partial_1 = \operatorname{Kern} \partial_0$, sei M ein T-Modul und seien $(\tau', \pi') \in \mathfrak{H}_T(M)$. Dann erhalten wir das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

(4.1)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[rr] \arrow[dr, "i"'] & & T \otimes \mathfrak{g} \arrow[r, "\zeta"] \arrow[dd, "j"] & C \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& & B \arrow[dr] \arrow[dd, "f'"] & & & \\
T^3 \otimes C \arrow[r] & T^2 \otimes C \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dr, "f"'] & & T \otimes C \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \\
& & M & & &
\end{tikzcd}$$

Wir definieren $j(t \otimes g) = t \otimes \zeta(1 \otimes g)$. Wegen Satz 2.2 wollen wir die Untergruppe $\zeta(1 \otimes \mathfrak{g})$ von C mit $\mathfrak{g}$ identifizieren. Dann ist $j(t \otimes g) = t \otimes g$. Da $B =$ Kern ∂_0, existiert genau ein T-Homomorphismus $i\colon K \to B$, der das Diagramm kommutativ macht.

Um f zu definieren, benötigen wir die exakte Folge

$$0 \to T^2 \otimes K \to T^3 \otimes \mathfrak{g} \xrightarrow{1 \otimes \zeta} T^2 \otimes C \to 0.$$

Wir definieren $f^*\colon T^3 \otimes \mathfrak{g} \to M$ und zeigen, daß $f^*(T^2 \otimes K)=0$ ist. Dadurch ist dann $f\colon T^2 \otimes C \to M$ definiert mit $f^* = f(1 \otimes \zeta)$.

Sei $\tau^\sim\colon \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \to T^3 \otimes \mathfrak{g}$ definiert durch $\tau^\sim(g \wedge g') = 1 \otimes g \otimes 1 \otimes g' - 1 \otimes g' \otimes 1 \otimes g$ und $\pi^\sim\colon \mathfrak{g} \to T^3 \otimes \mathfrak{g}$ durch $\pi^\sim(g) = 1 \otimes (P + g^{p-1}) \otimes 1 \otimes g$. Dann ist $\partial_1(1 \otimes \zeta)\tau^\sim = i\tau$ und $\partial_1(1 \otimes \zeta)\pi^\sim = i\pi$ nach Definition von i und j. Wir werden f^* so konstruieren, daß $f^*\tau^\sim = \tau'$, $f^*\pi^\sim = \pi'$ und $f\partial_2 = 0$. Dann existiert $f'\colon B \to M$ mit $f'\partial_1 = f$,

$$f' i \tau = \tau' \quad \text{und} \quad f' i \pi = \pi'. \tag{4.2}$$

Sei $(u_i)_{i \in I}$ eine geordnete Basis von $\mathfrak{g}$ über k. U hat die Basis $u_{i_1}^{e_1} \dots u_{i_n}^{e_n}$ mit $i_1 < \dots < i_n$ und $0 \leqq e_j < p$. Außerdem hat $k[P]$ die k-Linksbasis P^i mit $i \geqq 0$. Dann hat T die k-Linksbasis $P^i u_{i_1}^{e_1} \dots u_{i_n}^{e_n}$ mit den angegebenen Nebenbedingungen. Wir definieren die Länge eines solchen Basiselements „bezüglich $\mathfrak{g}$“ durch $\sum e_j$ und „bezüglich P“ durch i.

Da f^* ein T-Homomorphismus wird, genügt es, f^* auf den Elementen der Form $1 \otimes t \otimes t' \otimes u$ für Basiselemente t, t' und u zu kennen. Wir definieren also

$$f^*(1 \otimes t \otimes t' \otimes u) = f^*(1 \otimes t t' \otimes 1 \otimes u) - t f^*(1 \otimes t' \otimes 1 \otimes u), \tag{4.3}$$

und rekursiv nach der Länge von t bezüglich $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} &f^*(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes u) = 0, \\ &f^*(1 \otimes t u_i \otimes 1 \otimes u_j) = f^*(1 \otimes t \otimes 1 \otimes [u_i, u_j]) + t\tau'(u_i \wedge u_j) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } i < j, \\ &f^*(1 \otimes t u_i \otimes 1 \otimes u_j) = 0 \qquad \text{für } i \geqq j, \end{aligned} \tag{4.4}$$

und rekursiv nach der Länge von t bezüglich P:

$$\begin{aligned} f^*(1 \otimes t P \otimes 1 \otimes u) = {}& f^*(1 \otimes t \otimes 1 \otimes u^{[p]}) \\ & - f^*(1 \otimes t u^{p-1} \otimes 1 \otimes u) + t\pi'(u). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Durch lineare Fortsetzung gilt (4.3) für alle $t, t' \in T$ und $u \in \mathfrak{g}$. Also ist

$$\begin{aligned} & f^*(t \otimes t' \otimes t'' \otimes g) - f^*(1 \otimes t t' \otimes t'' \otimes g) + f^*(1 \otimes t \otimes t' t'' \otimes g) \\ &\quad = f^*(t \otimes t' t'' \otimes 1 \otimes g) - f^*(t t' \otimes t'' \otimes 1 \otimes g) \\ &\qquad - f^*(1 \otimes t t' t'' \otimes 1 \otimes g) + f^*(t t' \otimes t'' \otimes 1 \otimes g) \\ &\qquad + f^*(1 \otimes t t' t'' \otimes 1 \otimes g) - f^*(t \otimes t' t'' \otimes 1 \otimes g) \\ &\quad = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Aus (4.4) folgt für Basiselemente t, u, v

$$\begin{aligned} t\tau'(u \wedge v) = {}& f^*(1 \otimes t u \otimes 1 \otimes v) - f^*(1 \otimes t v \otimes 1 \otimes u) \\ & - f^*(1 \otimes t \otimes 1 \otimes [u, v]). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Auch diese Gleichung gilt für alle $t \in T$; $u, v \in \mathfrak{g}$.

Wegen (4.3) und (4.7) ist

$$f^*(t \otimes t' \otimes t''(u \otimes v - v \otimes u - 1 \otimes [u, v])) = 0. \tag{4.8}$$

Sei jetzt u ein Basiselement von $\mathfrak{g}$. Dann gilt (4.5) durch lineare Fortsetzung für alle $t \in T$. Also ist mit (4.3)

$$f^*(t \otimes t' \otimes t''(P + u^{p-1}) \otimes u) - f^*(t \otimes t' \otimes t'' \otimes u^{[p]}) = 0. \tag{4.9}$$

Wir wollen zeigen, daß (4.9) für alle $g \in \mathfrak{g}$ gilt. Gilt (4.9) für g, so gilt (4.9) für αg. Gelte (4.9) für g_0 und g_1. Wir verwenden wieder die Abbildung η aus dem Beispiel 3.2. Damit erhalten wir wegen (4.8) ähnlich wie bei (3.3):

$$\begin{aligned} &f^*(t \otimes t' \otimes t''(P + (g_0 + g_1)^{p-1}) \otimes (g_0 + g_1)) \\ &\quad = f^*(t \otimes t' \otimes t'' P \otimes (g_0 + g_1)) + f^*(t \otimes t' \otimes t'' \eta((x_0 + x_1)^p)) \\ &\quad = f^*(t \otimes t' \otimes t'' \otimes g_0^{[p]}) + f^*(t \otimes t' \otimes t'' \otimes g_1^{[p]}) \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{p-1} f^*(t \otimes t' \otimes t'' \otimes s_i(g_0, g_1)) \\ &\quad = f^*(t \otimes t' \otimes t'' \otimes (g_0 + g_1)^{[p]}). \end{aligned}$$

Also gilt (4.9) allgemein.

Die Gl. (4.5) impliziert

$$f^*(1 \otimes (P + u^{p-1}) \otimes 1 \otimes u) = \pi'(u) \tag{4.10}$$

für Basiselemente u von $\mathfrak{g}$. Wenn (4.10) für $g \in \mathfrak{g}$ gilt, dann auch für αg. Gelte (4.10) für g_0 und g_1 aus $\mathfrak{g}$. Dann definieren wir $\eta: k[x_1, x_2, \ldots] \to T^3 \otimes \mathfrak{g}$ durch

$$\begin{gathered} \eta(x_{i(1)}^{j(1)} \ldots x_{i(n)}^{j(n)}) = 1 \otimes g_{i(1)}^{j(1)} \ldots g_{i(n)}^{j(n)-1} \otimes 1 \otimes g_{i(n)} \\ \eta(1) = 0. \end{gathered}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} &f^*(1 \otimes (P + (g_0 + g_1)^{p-1}) \otimes 1 \otimes (g_0 + g_1)) \\ &\quad = f^* \eta((x_0 + x_1)^p) \\ &\quad = f^*(1 \otimes (P + g_0^{p-1}) \otimes 1 \otimes g_0) + f^*(1 \otimes (P + g_1^{p-1}) \otimes 1 \otimes g_1) \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{p-1} f^* \eta\, s_i(x_0, x_1) \\ &\quad = \pi(g_0 + g_1). \end{aligned}$$

(4.8) und (4.9) zeigen, daß $f^*(T^2 \otimes K) = 0$. (4.7) und (4.10) zeigen $f^* \tau^{\sim} = \tau'$ und $f^* \pi^{\sim} = \pi'$ und (4.6) zeigt $f \partial_2 = 0$. Damit erfüllt f^* alle geforderten Bedingungen. Der T-Homomorphismus $f'i$ erfüllt also (4.2). Da K als T-Modul durch $\tau(\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g})$ und $\pi(\mathfrak{g})$ erzeugt wird, ist $f'i$ die einzige Abbildung, die (4.2) erfüllt. Daher ist $\mathfrak{H}_T(M) \cong \mathrm{Hom}_T(K, M)$ funktoriell in M.

Satz 4.2. *Die Folge*

$$0 \to F(\mathfrak{g}) \to P(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d_1} U \otimes \mathfrak{g} \xrightarrow{d_0} U \xrightarrow{\varepsilon} k \to 0$$

ist exakt, wobei ε die Augmentation, $d_0(u \otimes g) = ug$ und d_1 wie in Beispiel 3.2 sind.

Beweis. Wie in Satz 4.1 ist das einzige Problem zu zeigen, daß $F(\mathfrak{g}) =$ Kern d_1. Seien Kern $d_1 = \mathfrak{K}$ und i: $F(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{K}$ die Einbettung. Dann sind die Folgen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to T \otimes_U \mathfrak{K} & \longrightarrow & T \otimes_U P(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{1 \otimes d_1} & T \otimes \mathfrak{g} & \xrightarrow{1 \otimes d_0} & T \otimes_U U^+ & \to 0 \\ \uparrow{\scriptstyle 1 \otimes i} & & \Vert & & & & & \\ 0 \to T \otimes_U F(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & T \otimes_U P(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{1 \otimes d} & T \otimes \mathfrak{g} & \xrightarrow{\zeta} & C & \to 0 \end{array}$$

exakt und das linke Quadrat ist kommutativ. Wir zeigen, daß $1 \otimes i$ die Identität ist. Dann ist $F(\mathfrak{g}) = \mathfrak{K}$.

Sei $x \in T \otimes_U \mathfrak{K}$. Dann ist $x = \sum t_{ij} \otimes (g_i \wedge g_j) + \sum t_k \otimes g_k$ mit linear unabhängigen $g_i \wedge g_j$ bzw. g_k; t_{ij}, $t_k \in T$ und $(1 \otimes d_1)(x) = 0$. Also ist

$$\sum t_{ij}(g_i \otimes g_j - g_j \otimes g_i - 1 \otimes [g_i, g_j]) + \sum t_k(g_k^{p-1} \otimes g_k - 1 \otimes g_k^{[p]}) = 0\,.$$

Wenden wir ζ auf dieses Element an, so ist

$$\zeta\left(\sum t_k P \otimes g_k\right) = 0\,.$$

Durch die Multiplikation in T ist $t_k P \in k[P]$, und die $\zeta(1 \otimes g_k)$ sind in C über $k[P]$ linear unabhängig. Daher ist $t_k P = 0$, also $\sum t_k P \otimes g_k = 0$. Damit ist auch $(1 \otimes d)(x) = 0$, d.h. $T \otimes_U \mathfrak{K} \subseteq T \otimes_U F(\mathfrak{g})$. Also ist $1 \otimes i$ die Identität.

Korollar 4.3. *$H^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cong \tilde{H}^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ für $n \geqq 3$ funktoriell in $\mathfrak{h}$ und verträglich mit verbindenden Homomorphismen.*

Beweis.

$$\begin{aligned} H^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) &= \mathrm{Ext}_T^{n-1}(C, \mathfrak{h}) \\ &\cong \mathrm{Ext}_T^{n-2}(T \otimes_U (P(\mathfrak{g})/F(\mathfrak{g})), \mathfrak{h}) \\ &\cong \mathrm{Ext}_U^{n-2}(P(\mathfrak{g})/F(\mathfrak{g}), \mathfrak{h}) \\ &\cong \mathrm{Ext}_U^{n}(k, \mathfrak{h}) \\ &= \tilde{H}^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\,. \end{aligned}$$

Während die Kohomologiegruppen $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ und $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ im allgemeinen keine k-Vektorräume sind, weil k nicht im Zentrum von T liegt, ist dies für $H^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ mit $n \geqq 3$ der Fall. Diese Struktur werden wir in Kapitel II noch benötigen.

II. Deutung einiger Kohomologiegruppen

1. Erweiterungen von p-Lie-Algebren

Seien $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{e}$ p-Lie-Algebren über k. Eine k-exakte Folge

(1.1) $$0 \to \mathfrak{h} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{e} \xrightarrow{\nu} \mathfrak{g} \to 0$$

heißt p-Erweiterung von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{h}$, wenn λ und ν p-Homomorphismen sind. Die Elemente von $\mathfrak{e}$ operieren auf $\mathfrak{h}$ durch p-Derivationen nach der Gleichung

$$eh = \lambda^{-1}[e, \lambda h], \tag{1.2}$$

wobei [,] in $\mathfrak{e}$ zu bilden ist. Es ist nämlich $\nu[e, \lambda h] = 0$, also ist $[e,h]$ im Bild von λ enthalten. Weil λ ein p-Homomorphismus ist und $[e, \ ]$ eine innere p-Derivation von $\mathfrak{e}$ ist, ist (1.2) eine p-Derivation.

Wir definieren einen p-Homomorphismus μ: $\mathfrak{g} \to D(\mathfrak{h})/I(\mathfrak{h})$. Sei dazu $g \in \mathfrak{g}$ und $e \in \nu^{-1}(g)$. Dann sei die Klasse $\mu(g)$ durch die p-Derivation e bestimmt. Ist nämlich $e' \in \nu^{-1}(g)$, so ist $e - e' \in \lambda\mathfrak{h}$, also eine innere p-Derivation von $\mathfrak{h}$. Damit ist μ wohldefiniert. Man rechnet leicht nach, daß μ ein p-Homomorphismus ist.

Sei $\mathfrak{h}$ eine abelsche p-Lie-Algebra. Dann definiert μ eine $\mathfrak{g}$-Modul-Struktur auf $\mathfrak{h}$.

Eine p-Erweiterung (1.1) von $\mathfrak{g}$ durch einen $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{h}$ heißt zerfallende p-Erweiterung, wenn ein p-Homomorphismus σ: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{e}$ so existiert, daß $\nu\sigma = \mathrm{id}$. σ heißt p-Schnitt von (3.1).

Der p-Schnitt σ definiert eine Zerlegung von $\mathfrak{e}$ in $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$, wobei in $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ die Multiplikation und die p-Abbildung beschrieben werden durch (I.2.3)[2] und (I.2.4). $\mathfrak{e}$ ist also ein semi-direktes Produkt von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$.

Sei σ' ein weiterer p-Schnitt. Dann ist $\nu(\sigma' - \sigma)(g) = 0$, also $(\sigma' - \sigma)(g) \in \mathfrak{h}$. σ' definiert so eine Abbildung $\sigma' - \sigma$ von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$. Der Graph von $\sigma' - \sigma$ besteht aus $\{(\sigma g, (\sigma' - \sigma)(g)) \mid g \in \mathfrak{g}\}$. Dann ist

$$[(\sigma g, (\sigma' - \sigma) g), (\sigma g', (\sigma' - \sigma) g')] = (\sigma [g, g'], (\sigma' - \sigma)[g, g']),$$
$$(\sigma g, (\sigma' - \sigma) g)^{[p]} = (\sigma g^{[p]}, (\sigma' - \sigma)\, g^{[p]})$$

nach (I.2.3) und (I.2.4). Also ist $\sigma' - \sigma \in p$-Lie-Graph$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Umgekehrt sieht man leicht, daß $f + \sigma$ für $f \in p$-Lie-Graph$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ein p-Schnitt von (1.1) ist. Es ist also $\{p\text{-Schnitt}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{e}\} \cong p$-Lie-Graph$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Wegen (I.2.6) und (I.2.7) gilt

Satz 1.1. *Die Gruppe der p-Schnitte eines semi-direkten Produktes von* $\mathfrak{g}$ *und* $\mathfrak{h}$ *ist isomorph zu* $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

In der Kohomologie der Gruppen spielen die Schnitte, die durch Elemente von $\mathfrak{h}$ erzeugt werden, noch eine besondere Rolle. Im Fall von p-Lie-Algebren müßte man die Abbildungen $g \mapsto g + [h, g]$ von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{e}$ dazu betrachten. Aber dann ist $g^{[p]} \mapsto g^{[p]} + [h, g^{[p]}]$ im allgemeinen verschieden von

$$(g + [h, g])^{[p]} = g^{[p]} + [h, g]^{[p]} + g^{p-1}[h, g] = g^{[p]} + [h, g^{[p]}] + [h, g]^{[p]}.$$

Also ist diese Abbildung kein p-Schnitt.

[2] (I.2.3) bedeutet (2.3) in Kapitel I.

Zwei p-Erweiterungen von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{h}$ heißen äquivalent, wenn es einen p-Isomorphismus so gibt, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathfrak{h} & \to & \mathfrak{e} & \to & \mathfrak{g} & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \| & & \\ 0 & \to & \mathfrak{h} & \to & \mathfrak{e}' & \to & \mathfrak{g} & \to & 0 \end{array} \tag{1.3}$$

kommutativ ist. Die exakten Folgen zerfallen über k. Wir müssen also für

$$0 \to \mathfrak{h} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \xrightarrow{\nu} \mathfrak{g} \to 0$$

eine p-Lie-Algebren-Struktur auf $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ definieren. Dazu seien $e = g + h$, $e' = g' + h'$ Elemente aus $\mathfrak{e} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Wir bezeichnen das Lie-Produkt in $\mathfrak{e}$ mit $\{\ ,\ \}$. Dann gilt $\{h, h'\} = 0$, da $\{h, h'\} = \lambda[h, h'] = \lambda(0)$. Weiter muß nach (1.2) gelten $\{g, h\} = gh$ mit der Operation von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}$. Wegen $\nu(\{g, g'\}) = [g, g']$ kann das Lie-Produkt von g und g' in $\mathfrak{e}$ nur um ein Element $\tau(g \otimes g')$ aus $\mathfrak{h}$ von $[g, g']$ in $\mathfrak{g}$ verschieden sein. Also ist

$$\{g + h, g' + h'\} = [g, g'] + g h' - g' h + \tau(g \otimes g'). \tag{1.4}$$

Werde die p-Abbildung in $\mathfrak{e}$ durch $e \to e^{\{p\}}$ gekennzeichnet. Da λ und ν p-Homomorphismen sind, muß gelten

$$(g + h)^{\{p\}} = g^{[p]} + h^{[p]} + g^{p-1} h + \pi(g), \tag{1.5}$$

wobei π eine nicht notwendig additive Abbildung von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$ ist.

Wir wollen jetzt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Abbildungen $\tau\colon \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ und $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ dafür aufstellen, daß $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ mit den durch (1.4) und (1.5) definierten Operationen eine p-Lie-Algebra ist.

Damit die Lie-Multiplikation k-linear ist, muß gelten

(1.6) τ ist k-linear.

Weiter sind die Gesetze $\{e, e\} = 0$ und

$$\{e_0, \{e_1, e_2\}\} + \{e_1, \{e_2, e_0\}\} + \{e_2, \{e_0, e_1\}\} = 0$$

für $e, e_i \in \mathfrak{e} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ zu erfüllen. $\{e, e\} = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn

$$\tau(g \otimes g) = 0 \qquad \text{für alle } g \in \mathfrak{g}. \tag{1.7}$$

Wir fassen daher τ als k-lineare Abbildung von $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$ auf.

Durch die nach Definition von τ geltende Gleichung

$$\{g_0, \{g_1, g_2\}\} = [g_0, [g_1, g_2]] + g_0 \tau(g_1 \wedge g_2) + \tau(g_0 \wedge [g_1, g_2])$$

ist die Jacobi-Identität äquivalent mit

$$\Delta(g_0 \otimes g_1 \otimes g_2) = 0, \tag{1.8}$$

wobei Δ wie in (I.3.5) definiert sei.

Für die p-Abbildung müssen in $\mathfrak{e}$ die Gesetze (I.1.1), (I.1.2) und (I.1.3) bzw. (I.1.5) erfüllt sein. (I.1.1) bedeutet

$$(\alpha g)^{[p]}+\pi(\alpha g)=(\alpha g)^{\{p\}}=\alpha^p g^{\{p\}}=\alpha^p g^{[p]}+\alpha^p \pi(g).$$

Also muß gelten

$$\pi(\alpha g)=\alpha^p \pi(g). \tag{1.9}$$

Bezeichnen wir in $\mathfrak{e}$ die Multiplikation mit $\{e,e'\}=\operatorname{Ad} e(e')$ und in $\mathfrak{g}$ mit $[g,g']=\operatorname{ad} g(g')$. Außerdem werde die Funktion s_i von (I.1.4), in $\mathfrak{e}$ gebildet, mit S_i bezeichnet. Da $\operatorname{Ad} g(g')=[g,g']+\tau(g\wedge g')$ ist, erhält man durch Induktion

$$(\operatorname{Ad} g)^i(g')=(\operatorname{ad} g)^i(g')+\sum_{j=0}^{i-1} g^{i-1-j}\tau(g\wedge(\operatorname{ad} g)^i(g')).$$

Um (I.1.2) zu erfüllen, muß $(\operatorname{Ad} g^{\{p\}})=(\operatorname{Ad} g)^p$ gelten. Wenden wir das auf $g'\in\mathfrak{g}$ an, so ist

$$\{g^{\{p\}},g'\}=\{g^{[p]}+\pi(g),g'\}=-g'\pi(g)+[g^{[p]},g']+\tau(g^{[p]}\wedge g')=(\operatorname{Ad} g)^p(g').$$

Also ist

$$\Gamma(g,g')=0, \tag{1.10}$$

wobei wir Γ wie in (I.3.6) definieren.

Die Bedingung (I.1.3) schließlich impliziert

$$\pi(g_0+g_1)-\pi(g_0)-\pi(g_1)=\sum_{i=1}^{p-1}(S_i(g_0,g_1)-s_i(g_0,g_1)).$$

Rechnet man die S_i und s_i nach (I.1.4) aus, so ergibt das

$$\begin{aligned}&\pi(g_0+g_1)-\pi(g_0)-\pi(g_1)\\ &=\sum_t\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{|t^{-1}(0)|}g_{t(1)}\cdots g_{t(i-1)}\tau(g_{t(i)}\wedge\operatorname{ad} g_{t(i+1)}\cdots\operatorname{ad} g_{t(p-1)}(g_1)),\end{aligned} \tag{1.11}$$

wobei t wie in (I.1.5) läuft.

Man verifiziert leicht, daß die Bedingungen (1.9), (1.10) und (1.11) hinreichend dafür sind, daß die Lie-Algebra $\mathfrak{e}$ eine p-Lie-Algebra mit der p-Abbildung (1.5) wird.

Wir haben damit bewiesen, daß der Vektorraum $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$ eine p-Lie-Algebra ist und λ und ν p-Homomorphismen sind genau dann, wenn die Strukturabbildungen τ und π die Bedingungen (1.6) bis (1.11) erfüllen.

Wir haben für unsere Folge (1.1) bisher einen festen k-Homomorphsimus $\mathfrak{e}\to\mathfrak{g}$ als Schnitt vorausgesetzt, der die Zerlegung $\mathfrak{e}=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$ definiert. Sei jetzt ein weiterer Schnitt gegeben, der sich gegenüber dem ursprünglichen um $\psi\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ unterscheidet, also $g\mapsto g+\psi(g)$. Seien τ' und π' die zu diesem Schnitt gehörigen

Strukturabbildungen. Dann ist

$$\begin{aligned}[g,g']+\psi([g,g'])+\tau'(g\wedge g') &= \{g+\psi(g),\, g'+\psi(g')\}\\ &= [g,g']+\tau(g\wedge g')+g\,\psi(g')-g'\,\psi(g),\end{aligned}$$

also

$$(\tau'-\tau)(g\wedge g')=g\,\psi(g')-g'\,\psi(g)-\psi([g,g']). \tag{1.12}$$

Weiter ist

$$g^{[p]}+\psi(g^{[p]})+\pi'(g)=(g+\psi(g))^{\{p\}}=g^{[p]}+\pi(g)+\psi(g)^{[p]}+g^{p-1}\,\psi(g),$$

also

$$(\pi'-\pi)(g)=\psi(g)^{[p]}+g^{p-1}\,\psi(g)-\psi(g^{[p]}). \tag{1.13}$$

Für eine feste p-Lie-Algebren-Struktur sind die Strukturabbildungen (τ,π) nur bis auf (1.12) bzw. (1.13) bestimmt, wobei $\psi\in\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ beliebig gewählt werden darf.

(1.12) und (1.13) definieren auf der Menge der Strukturabbildungen $\{(\tau,\pi)\}$ eine Äquivalenzrelation. Jede p-Erweiterung bestimmt eine Klasse von Strukturabbildungen. Ist eine äquivalente Erweiterung nach (1.3) gegeben mit zwei festen Schnitten, so kann man φ schreiben als $\varphi(g+h)=g+\psi(g)+h$, wobei $\psi\in\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Damit definiert eine äquivalente p-Erweiterung dieselbe Klasse von Strukturabbildungen.

Sind umgekehrt zwei Strukturabbildungen durch $\psi\in\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ miteinander äquivalent, so definiert $\varphi(g+h)=g+h+\psi(g)$ eine Äquivalenz der zugehörigen p-Erweiterungen. Man rechnet nämlich leicht nach, daß φ mit der Lie-Multiplikation und den p-Abbildungen verträglich ist und das Diagramm (1.3) kommutativ macht. Also ist die Abbildung, die jeder Äquivalenzklasse von p-Erweiterungen die zugehörige Klasse von Strukturabbildungen zuordnet, eine Bijektion.

Die Äquivalenzklassen von p-Erweiterungen bilden eine kommutative Gruppe $\mathrm{Opext}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, deren Addition nach ([5], S. 566) wie folgt beschrieben wird: die Differenz der p-Erweiterungen $(\mathfrak{e},\lambda,\nu)$ und $(\mathfrak{e}',\lambda',\nu')$ wird gebildet als Unteralgebra $D=\{(e,e')\,|\,e\in\mathfrak{e},\ e'\in\mathfrak{e}',\ \nu(e)=\nu'(e')\}$ von $\mathfrak{e}\oplus\mathfrak{e}'$ mit der Äquivalenzrelation modulo $J=\{(h,h)\in\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}\}$. In D/J gilt dann bezüglich fest gewählter Schnitte über k:

$$\begin{aligned}\{g+h,\, g'+h'\}&=[g,g']+g\,h'-g'\,h+\tau(g\wedge g')-\tau'(g\wedge g'),\\ (g+h)^{\{p\}}&=g^{[p]}+h^{[p]}+g^{p-1}\,h+\pi(g)-\pi'(g).\end{aligned} \tag{1.14}$$

Die Äquivalenzklassen von Strukturabbildungen bilden eine kommutative Gruppe $S(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Die Addition wird definiert durch

$$(\tau,\pi)+(\tau',\pi')=(\tau+\tau',\pi+\pi'), \tag{1.15}$$

wobei die Addition der Abbildungen durch Addition der Werte definiert wird. Da (1.6) bis (1.11) linear in τ und π sind, erfüllt die Summe (1.15) wieder (1.6) bis (1.11). Das neutrale Element ist $(0,0)$, das Inverse von (τ,π) ist $(-\tau,-\pi)$.

Wegen (1.14) ist die Bijektion zwischen den Klassen von p-Erweiterungen und von Strukturabbildungen ein Isomorphismus:

$$\operatorname{Opext}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cong S(\mathfrak{g},\mathfrak{h}). \tag{1.16}$$

Satz 1.2. $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cong \operatorname{Opext}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

Beweis. Die exakte Folge aus I Satz 4.1 induziert eine exakte Folge

$$\operatorname{Hom}_T(T\otimes\mathfrak{g},\mathfrak{h})\to\operatorname{Hom}_T(T\otimes_U(P(\mathfrak{g})/F(\mathfrak{g})),\mathfrak{h})\to H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\to 0$$

nach Definition von $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Da aber

$$\operatorname{Hom}_T(T\otimes_U(P(\mathfrak{g})/F(\mathfrak{g})),\mathfrak{h})\cong\mathfrak{H}_T(\mathfrak{h}),$$

da $\operatorname{Hom}_T(T\otimes\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cong\operatorname{Hom}_k(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, da (1.6) bis (1.11) den Bedingungen (1.3.1) und $\Delta(g_0\otimes g_1\otimes g_2)=0$, $\Gamma(g,g')=0$ entsprechen, und da die Definition von d in I Satz 4.1 mit (1.12) und (1.13) übereinstimmt, ist der Kokern von

$$\operatorname{Hom}_T(T\otimes\mathfrak{g},\mathfrak{h})\to\operatorname{Hom}_T(T\otimes(P(\mathfrak{g})/F(\mathfrak{g})),\mathfrak{h})$$

isomorph zu $S(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, also nach (1.16) zu $\operatorname{Opext}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

Wir bemerken hier noch, daß Hochschild in [5, 4] auch eine Äquivalenzrelation für die Folgen (1.1) mit festgehaltenem $\mu\colon\mathfrak{g}\to D(\mathfrak{h})/I(\mathfrak{h})$ einführt. Die Menge dieser Äquivalenzklassen wollen wir auch mit $\operatorname{Opext}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ bezeichnen. Sei $\mathfrak{c}$ das Zentrum von $\mathfrak{h}$, dann ist nach ([5], Th. 4.1) entweder $\operatorname{Opext}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\emptyset$ oder $\operatorname{Opext}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cong\operatorname{Opext}(\mathfrak{g},\mathfrak{c})$. Da wir den letzten Isomorphismus nicht weiter benötigen, verweisen wir auf die Details in [5]. Jedenfalls genügt unser Satz 1.2 auch zur Beschreibung beliebiger Erweiterungen (1.1). Der Fall $\operatorname{Opext}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\emptyset$ wird in § 3 genauer untersucht werden.

2. *Modulerweiterungen*

Wir wollen in diesem Paragraphen Erweiterungen von U-Moduln durch Kohomologiegruppen beschreiben. Dazu vergleichen wir zunächst $H^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ und $\tilde{H}^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ für stark abelsche p-Lie-Algebren.

Satz 2.1. *Für stark abelsche p-Lie-Algebren* $\mathfrak{h}$, *auf denen* $\mathfrak{g}$ *operiert, gilt* $H^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cong\operatorname{Ext}_U^{n-1}(U^+,\mathfrak{h})$ *für* $n\geq 1$.

Beweis. Wir benötigen projektive Auflösungen von U^+ und C, die nach den Sätzen 4.1 und 4.2 aus Kapitel I folgendermaßen gewählt werden können:

$$\ldots P'\xrightarrow{d_2}P(\mathfrak{g})\xrightarrow{d_1}U\otimes\mathfrak{g}\xrightarrow{d_0}U^+\to 0,$$

$$\ldots T\otimes_U P'\xrightarrow{1\otimes d_2}T\otimes_U P(\mathfrak{g})\xrightarrow{d}T\otimes\mathfrak{g}\to C\to 0,$$

wobei P' ein freier U-Modul ist. Damit erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
0\to & \operatorname{Hom}_U(U\otimes\mathfrak{g},\mathfrak{h}) & \to & \operatorname{Hom}_U(P(\mathfrak{g}),\mathfrak{h}) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_U(P',\mathfrak{h}) \\
\| & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| \\
0\to & \operatorname{Hom}_T(T\otimes\mathfrak{g},\mathfrak{h}) & \to & \operatorname{Hom}_T(T\otimes P(\mathfrak{g}),\mathfrak{h}) & \to & \operatorname{Hom}_T(T\otimes P',\mathfrak{h}),
\end{array} \tag{2.1}$$

wobei die senkrechten Isomorphismen durch Operatorerweiterung definiert sind. Daher sind das dritte und alle folgenden Quadrate kommutativ. Außerdem ist das erste Quadrat kommutativ.

Sei $\varphi \in \operatorname{Hom}_T(T \otimes \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Dann ist $\varphi(Pu \otimes g) = P\varphi(u \otimes g) = 0$. Also kann φ faktorisiert werden durch

$$\begin{tikzcd} T \otimes \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathfrak{h} \\ U \otimes \mathfrak{g} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd} \tag{2,2}$$

wobei $\rho\colon T \otimes \mathfrak{g} \to U \otimes \mathfrak{g}$ durch den in (I.1) definierten Ringhomomorphismus $T \to U$ induziert wird. Da $U \to T \to U$ die Identität von U ist, ist $U \otimes \mathfrak{g} \to T \otimes \mathfrak{g} \to U \otimes \mathfrak{g}$ die Identität. $U \otimes \mathfrak{g} \to T \otimes \mathfrak{g}$ wollen wir ϑ nennen. Dann ist $\varphi\vartheta = \psi\rho\vartheta = \psi$, also ist die Zuordnung (2.2) genau die in (2.1) verwendete.

Bei ρ geht der Untermodul K von $T \otimes \mathfrak{g}$ über in den Untermodul $\rho(K)$ von $U \otimes \mathfrak{g}$, der nach der Definition von K als U-Modul (oder auch als T-Modul) von

$$\{g \otimes g' - g' \otimes g - 1 \otimes [g, g'],\ g^{p-1} \otimes g - 1 \otimes g^{[p]} \mid g, g' \in \mathfrak{g}\}$$

erzeugt wird. Also ist $\varphi d(t \otimes x) = t\varphi d(1 \otimes x) = t\psi\rho d(1 \otimes x) = t\psi d_1(x)$. Damit ist die Kommutativität von (2.1) nachgewiesen.

Aus (2.1) folgt die Behauptung des Satzes nach Definition (I.2.7).

Korollar 2.2. *Für stark abelsche p-Lie-Algebren* $\mathfrak{h}$, *auf denen* $\mathfrak{g}$ *operiert, gilt* $H^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cong \tilde{H}^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *für* $n \geqq 2$.

Beweis. Die U-exakte Folge $0 \to U^+ \to U \to k \to 0$ induziert eine exakte Folge und Isomorphismen

$$0 \to \operatorname{Hom}_U(k, \mathfrak{h}) \to \mathfrak{h} \to \operatorname{Hom}_U(U^+, \mathfrak{h}) \to \operatorname{Ext}^1_U(k, \mathfrak{h}) \to 0, \tag{2.3}$$

$$\operatorname{Ext}^n_U(U^+, \mathfrak{h}) \cong \operatorname{Ext}^{n+1}_U(k, \mathfrak{h}), \qquad n \geqq 1. \tag{2.4}$$

Da $\operatorname{Ext}^{n+1}_U(k, \mathfrak{h}) = \tilde{H}^{n+1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, erhalten wir die Behauptung des Korollars.

Seien jetzt M, N beliebige U-Moduln. Wir machen $\operatorname{Hom}_k(M, N)$ zu einem U-Modul. Dazu genügt es, eine Lie-Operation von $\mathfrak{g}$ auf $\operatorname{Hom}_k(M, N)$ anzugeben, die dann eindeutig zu einer Operation von U auf $\operatorname{Hom}_k(M, N)$ fortgesetzt wird. Seien $g \in \mathfrak{g}$, $f \in \operatorname{Hom}_k(M, N)$ und $m \in M$. Dann ist

$$(g f)(m) = g(f(m)) - f(g m). \tag{2.5}$$

Von dieser Operation rechnet man leicht nach, daß sie eine Lie-Operation ist, d.h. daß $[g, g']f = g(g'f) - g'(gf)$.

Genauso machen wir $M \otimes N$ zu einem U-Modul durch

$$g(m \otimes n) = (g m) \otimes n + m \otimes (g n). \tag{2.6}$$

Auch hier rechnet man leicht nach, daß diese Operation eine Lie-Operation ist.

Seien jetzt L, M, N U-Moduln. Dann ist

(2.7) $$\mathrm{Hom}_U(L, \mathrm{Hom}_k(M, N)) \cong \mathrm{Hom}_U(L \otimes M, N)$$

funktoriell in L, M, und N. $f \in \mathrm{Hom}_k(L, \mathrm{Hom}_k(M,N))$ ist ein U-Homomorphismus genau dann, wenn

$$f(g\,l)(m) = (g(f(l)))(m) = g(f(l)(m)) - f(l)(g\,m),$$

und $f \in \mathrm{Hom}_k(L \otimes M, N)$ ist genau dann ein U-Homomorphismus, wenn

$$g(f(l \otimes m)) = f(g(l \otimes m)) = f(g\,l \otimes m) + f(l \otimes g\,m).$$

Diese beiden Bedingungen sind unter dem Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_k(L, \mathrm{Hom}_k(M,N)) \cong \mathrm{Hom}_k(L \otimes M, N)$$

gleichwertig.

Speziell ist

(2.8) $$\mathrm{Hom}_U(k, \mathrm{Hom}_k(M, N)) \cong \mathrm{Hom}_U(M, N)$$

funktoriell in M und N.

Sei N U-injektiv und $L' \subset L$ ein U-Untermodul von L. Sei

$$\varphi\colon L' \to \mathrm{Hom}_k(M,N)$$

ein U-Homomorphismus. Dieser induziert einen U-Homomorphismus $L' \otimes M \to N$. Da $L' \otimes M$ ein U-Untermodul von $L \otimes M$ ist, läßt sich dieser U-Homomorphismus fortsetzen zu einem U-Homomorphismus $L \otimes M \to N$, der wiederum einen U-Homomorphismus $L \to \mathrm{Hom}_k(M,N)$ induziert. Dieser ist eine Fortsetzung von φ. Also ist $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ U-injektiv.

Lemma 2.3. *Ist N ein U-injektiver Modul, so ist auch* $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ *U-injektiv bei der Operation* (2.5).

Sei M U-projektiv und $L' \subset L$ ein U-Untermodul von L. Sei $\varphi\colon L' \to \mathrm{Hom}_k(M,N)$ ein U-Homomorphismus. Dieser induziert U-Homomorphismen $L' \otimes M \to N$ und $M \to \mathrm{Hom}_k(L',N)$. $L' \subset L$ induziert einen Epimorphismus $\mathrm{Hom}_k(L,N) \to \mathrm{Hom}_k(L',N)$. Da M U-projektiv ist, erhalten wir einen U-Homomorphismus $M \to \mathrm{Hom}_k(L,N)$, der einen U-Homomorphismus $L \to \mathrm{Hom}_k(M,N)$ induziert. Dieser ist eine Fortsetzung von φ. Also ist $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ U-injektiv.

Lemma 2.4. *Ist M ein U-projektiver Modul, so ist* $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ *ein U-injektiver Modul bei der Operation* (2.5).

Sei $L \to L'$ ein Epimorphismus und M ein U-projektiver Modul. Sei φ: $M \otimes N \to L'$ ein U-Homomorphismus. Dann induziert φ einen U-Homomorphismus $M \to \mathrm{Hom}_k(N,L')$. Da $\mathrm{Hom}_k(N,L) \to \mathrm{Hom}_k(N,L')$ ein U-Epimorphismus ist, existiert ein U-Homomorphismus $M \to \mathrm{Hom}_k(N,L)$, also $M \otimes N \to L$. Dieser ist eine Fortsetzung von φ.

Lemma 2.5. *Ist M ein U-projektiver Modul, so ist auch $M \otimes N$ U-projektiv bei der Operation* (2.6).

Eine U-injektive Auflösung X von N wird wegen Lemma 2.3 zu einer U-injektiven Auflösung $\mathrm{Hom}_k(M,X)$ von $\mathrm{Hom}_k(M,N)$. Eine U-projektive Auflösung X von M wird wegen Lemma 2.4 zu einer U-injektiven Auflösung $\mathrm{Hom}_k(X,N)$ von $\mathrm{Hom}_k(M,N)$. Das zeigt, daß (2.8) auch für die in M bzw. N rechtsabgeleiteten Funktoren gilt

$$\mathrm{Ext}_U^n(k, \mathrm{Hom}_k(M, N)) \cong \mathrm{Ext}_U^n(M, N) \tag{2.9}$$

funktoriell in M und N und verträglich mit verbindenden Homomorphismen. Als unmittelbare Folgerung erhalten wir

Korollar 2.6. *Für den trivialen U-Modul k gilt*

$$p\text{-}\dim_U(k) = gl\text{-}\dim(U).$$

Korollar 2.7. *U ist genau dann halbeinfach, wenn $\tilde{H}^n(\mathfrak{g}, N) = 0$ für alle U-Moduln N und $n \geqq 1$.*

In Kapiteln III § 3 werden wir eine weitere Charakterisierung für halbeinfache U angeben.

Satz 2.8. *Es gibt Homomorphismen, so daß die Folge*

$$0 \to \mathrm{Hom}_U(M, N) \to \mathrm{Hom}_k(M, N) \to H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(M, N)) \to \mathrm{Ext}_U^1(M, N) \to 0$$

exakt ist. Es existieren Isomorphismen für $n \geqq 2$

$$H^n(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(M, N)) \cong \mathrm{Ext}_U^n(M, N).$$

Die Homomorphismen und Isomorphismen sind funktoriell in M und N.

Beweis. Wir setzen dazu nur in (2.3) bzw. (2.4) für $\mathfrak{h}$ den U-Modul $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ ein und verwenden dann Satz 2.1.

Wie bei der Kohomologie von Gruppen erhält man auch hier zwei verschiedene U-Modul-Strukturen auf den abelschen Gruppen $U \otimes M$ bzw. $\mathrm{Hom}_k(U,M)$. Wir definieren nämlich $u(u' \otimes m) = uu' \otimes m$ und $(uf)(u') = f(u'u)$. Diese U-Moduln wollen wir durch $\langle U \otimes N \rangle$ bzw. $\langle \mathrm{Hom}_k(U,N) \rangle$ bezeichnen.

Lemma 2.9. *Es existieren U-Isomorphismen*

$$U \otimes N \cong \langle U \otimes N \rangle, \tag{2.10}$$

$$\mathrm{Hom}_k(U, N) \cong \langle \mathrm{Hom}_k(U, N) \rangle. \tag{2.11}$$

Wir beweisen nur (2.11). Der Beweis von (2.10) verläuft analog. Wir definieren U-Homomorphismen

$$\alpha\colon \mathrm{Hom}_k(U,N) \to \langle \mathrm{Hom}_k(U,N) \rangle \quad \text{und} \quad \beta\colon \langle \mathrm{Hom}_k(U,N) \rangle \to \mathrm{Hom}_k(U,N)$$

durch die Bedingungen $(\alpha f)(1)=f(1)$ bzw. $(\beta f)(1)=f(1)$ und durch

$$(2.12)\qquad \alpha(gf)=g(\alpha f) \quad \text{bzw.} \quad \beta(gf)=g(\beta f) \qquad \text{für } g\in\mathfrak{g}.$$

Die Bedingung (2.12) impliziert, daß α und β U-Homomorphismen sind. Diese Bedingungen definieren schon vollständig α und β. Da U als k-Algebra von $\mathfrak{g}$ erzeugt wird, genügt es zu zeigen, daß αf bzw. βf auf Elementen der Form $g_1 \dots g_n$ erklärt ist. Wegen (2.12) gilt

$$(2.13)\qquad \begin{aligned} &(\alpha f)(g_1 \dots g_n)=(g_n(\alpha f))(g_1 \dots g_{n-1})=\alpha(g_n f)(g_1 \dots g_{n-1}),\\ &(\beta f)(g_1 \dots g_n)=g_1(\beta f(g_2 \dots g_n))-(\beta(g_1 f))(g_2 \dots g_n). \end{aligned}$$

Also sind αf und βf rekursiv definiert, allerdings nur auf der Tensoralgebra $T(\mathfrak{g})$. Es bleibt zu zeigen, daß αf bzw. βf das zweiseitige Ideal von $T(\mathfrak{g})$, das von $\{g\otimes g'-g'\otimes g-[g,g'], g^p-g^{[p]}\}$ erzeugt wird, annullieren. Mit (2.13) rechnet man für $g, g'\in\mathfrak{g}$, $t\in T(\mathfrak{g})$ aus:

$$\begin{aligned} (\alpha f)(t(g\,g'-g'\,g-[g,g']))&=0,\\ (\alpha f)(t(g^p-g^{[p]}))&=0,\\ (\beta f)((g\,g'-g'\,g-[g,g'])\,t)&=0,\\ (\beta f)((g^p-g^{[p]})\,t)&=0. \end{aligned}$$

Ist aber $(\alpha f)(t)=0$ für ein festes t und alle f, so ist auch $(\alpha f)(t\,g)=\alpha(g f)(t)=0$. Ist $(\beta f)(t)=0$, so ist $(\beta f)(g t)=g(\beta f)(t)-(\beta(g f))(t)=0$. Damit sind αf und βf auf U definiert. α und β sind U-Homomorphismen. Mit einer Induktion sieht man

$$\begin{aligned} (\beta\alpha f)(g\,t)&=g((\beta\alpha f)(t))-\beta(g\alpha f)(t)\\ &=g(f(t))-(\beta\alpha(g f))(t)\\ &=g(f(t))-(g f)(t)\\ &=f(g\,t), \end{aligned}$$

also $\beta\alpha=\mathrm{id}$. Umgekehrt ist

$$\begin{aligned} (\alpha\beta f)(t\,g)&=(\alpha g\beta f)(t)\\ &=(\alpha\beta(g f))(t)\\ &=(g f)(t)\\ &=f(t\,g), \end{aligned}$$

also $\alpha\beta=\mathrm{id}$. Damit sind α und β U-Isomorphismen.

3. *p-Lie-Kerne*

Sei $\mathfrak{g}$ eine p-Lie-Algebra und $\mathfrak{h}$ ein $\mathfrak{g}$-Modul. Sei $\mathfrak{k}$ eine weitere p-Lie-Algebra und $\mu\colon \mathfrak{g}\to D(\mathfrak{k})/I(\mathfrak{k})$ der in I § 1 definierte p-Homomorphismus. Sei $\mathfrak{h}$ das Zentrum von $\mathfrak{k}$ und induziere μ die gegebene $\mathfrak{g}$-Modul-Struktur auf $\mathfrak{h}$. Dann heißt $(\mathfrak{k},\mu)$ p-Lie-Kern über $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{h}$ heißt der Nukleus von $(\mathfrak{k},\mu)$.

Wir sagen, daß $(\mathfrak{f}, \mu)$ eine Erweiterung besitzt, wenn $\mathrm{Opext}(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}) \neq \emptyset$.

Seien $(\mathfrak{f}, \mu)$ und $(\mathfrak{f}', \mu')$ zwei beliebige Kerne über $\mathfrak{g}$ mit dem Nukleus $\mathfrak{h}$. $J \subset \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{f}'$ sei das p-Ideal $\{(h, -h) \mid h \in \mathfrak{h}\}$. Dann existiert ein p-Homomorphismus

$$\mu + \mu' \colon \mathfrak{g} \to D(\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{f}'/J)/I(\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{f}'/J),$$

so daß $(\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{f}'/J, \mu + \mu') = (\mathfrak{f}, \mu) + (\mathfrak{f}', \mu')$ ein p-Lie-Kern über $\mathfrak{g}$ mit dem Nukleus $\mathfrak{h}$ wird. Wir führen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der p-Lie-Kerne über $\mathfrak{g}$ mit Nukleus $\mathfrak{h}$ ein. Es sei $(\mathfrak{f}, \mu) \sim (\mathfrak{f}', \mu')$ genau dann, wenn p-Lie-Kerne $(\mathfrak{e}, \nu)$ und $(\mathfrak{e}', \nu')$ mit Nukleus $\mathfrak{h}$, die Erweiterungen besitzen, so existieren, daß $(\mathfrak{f}, \mu) + (\mathfrak{e}, \nu) \cong (\mathfrak{f}', \mu') + (\mathfrak{e}', \nu')$ sind. Die oben eingeführte Addition macht aus der Menge der Äquivalenzklassen eine abelsche Gruppe $p\text{-}\mathrm{Ker}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ [6]. Wir bemerken noch, daß zu $(\mathfrak{f}, \mu) - (\mathfrak{f}', \mu')$ die Algebra $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{f}'/J$ mit $J = \{(h, h) \mid h \in \mathfrak{h}\}$ gehört.

Hochschild hat für stark abelschen Nukleus $\mathfrak{h}$ bewiesen:

$$\tilde{H}^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cong p\text{-}\mathrm{Ker}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}). \tag{3.1}$$

Zusammen mit I Korollar 4.3 ist daher für stark abelsche $\mathfrak{h}$:

$$H^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cong p\text{-}\mathrm{Ker}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}). \tag{3.2}$$

Die linke Seite von (3.2) ist aber für beliebige $\mathfrak{g}$-Moduln $\mathfrak{h}$ definiert und von der p-Abbildung in $\mathfrak{h}$ wegen I Korollar 4.3 unabhängig. Wir wollen daher (3.2) für beliebige $\mathfrak{g}$-Moduln $\mathfrak{h}$ zeigen.

Sei $\mathfrak{h}$ eine abelsche p-Lie-Algebra, auf der $\mathfrak{g}$ operiert. Sei $\mathfrak{h}^*$ isomorph zu $\mathfrak{h}$ als U-Modul und sei die p-Abbildung in $\mathfrak{h}^*$ die Nullabbildung: $h^{[p]} = 0$. Sei $\mathfrak{c}$ die Menge der Elemente von $\mathfrak{h}$, die von $\mathfrak{g}$ annulliert wird. Sei $(\mathfrak{f}, \mu)$ ein p-Lie-Kern über $\mathfrak{g}$ mit Nukleus $\mathfrak{h}$. Wir definieren auf $\mathfrak{f}$ eine Abbildung $x \to x^{\{p\}} = x^{[p]} + \varphi(x)$, wobei $\varphi \colon \mathfrak{f} \to \mathfrak{c}$ eine beliebige p-semilineare Abbildung ist. Die Abbildung ist nach [2] wieder eine p-Abbildung. Die so erhaltene p-Lie-Algebra nennen wir $\mathfrak{f}'$. Entsprechend bilden wir $\mathfrak{h}'$ mit dieser neuen p-Abbildung.

Die Abbildung $\mu \colon \mathfrak{g} \to D(\mathfrak{f})/I(\mathfrak{f})$ induziert eine Abbildung von $\mathfrak{g}$ in $D(\mathfrak{f}')/I(\mathfrak{f}')$, die wir wieder mit μ bezeichnen wollen. Sei $\rho \in \mu(g)$ eine p-Derivation von $\mathfrak{f}$. Da $\rho(h) = gh$ für alle $h \in \mathfrak{h}$, ist

$$\rho(x^{\{p\}}) = \rho(x^{[p]} + \varphi(x)) = (\mathrm{ad}\, x)^{p-1} \rho(x) + g\varphi(x).$$

Da $\varphi(x) \in \mathfrak{c}$, ist $g\varphi(x) = 0$. Also ist ρ eine p-Derivation von $\mathfrak{f}'$ aus $\mu(g)$.

Lemma 3.1. *$(\mathfrak{f}', \mu)$ ist ein p-Lie-Kern über $\mathfrak{g}$ mit Nukleus $\mathfrak{h}'$. Ist $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$, so ist $(\mathfrak{f}', \mu) \sim (\mathfrak{f}, \mu)$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$, d.h. sei die p-Abbildung in $\mathfrak{h}$ ungeändert. Dann wollen wir zeigen, daß $(\mathfrak{f}, \mu) - (\mathfrak{f}', \mu)$ eine Erweiterung besitzt. Nach ([6], Lemma 1.1) haben wir das Verschwinden der Deviationen zu zeigen. Aber die Deviationen in $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ können gleich gewählt werden, liegen also in J. Damit verschwinden die Deviationen in $(\mathfrak{f}, \mu) - (\mathfrak{f}', \mu)$.

Wir bilden jetzt aus $(\mathfrak{k},\mu)$ einen p-Lie-Kern $(\mathfrak{k}^*,\mu)$ über $\mathfrak{g}$ mit Nukleus $\mathfrak{h}^*$. Sei $\mathfrak{k}=V\oplus\mathfrak{h}$ als k-Vektorraum. Sei $\varphi\colon \mathfrak{k}\to\mathfrak{c}$ definiert durch $\varphi(v+h)=-h^{[p]}$. Dann ist $\mathfrak{h}^*$ eine stark abelsche p-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{k}^*$ und nach Lemma 3.1 ist $(\mathfrak{k}^*,\mu)$ ein p-Lie-Kern.

Aus $(\mathfrak{k}^*,\mu)$ bilden wir einen p-Lie-Kern $(\mathfrak{k}',\mu)$ über $\mathfrak{g}$ mit Nukleus $\mathfrak{h}$. Sei $\mathfrak{k}^*=V^*\oplus\mathfrak{h}$ als k-Vektorraum. Sei $\varphi'\colon \mathfrak{k}^*\to\mathfrak{c}$ definiert durch $\varphi'(v^*+h)=h^{[p]}$ mit der ursprünglichen p-Abbildung in $\mathfrak{h}$. Dann ist $(\mathfrak{k}',\mu)$ ein p-Lie-Kern.

Führen wir diese beiden Konstruktionen hintereinander aus, so ändern wir die p-Abbildung um $\varphi+\varphi'$. Aber $(\varphi+\varphi')(h)=0$ für alle $h\in\mathfrak{h}$, d.h. die p-Abbildung auf $\mathfrak{h}$ ist nicht geändert worden. Nach Lemma 3.1 erhalten wir so einen äquivalenten p-Lie-Kern. Damit ist eine bijektive Abbildung zwischen $p\text{-Ker}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ und $p\text{-Ker}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^*)$ angegeben. Diese ist offenbar ein Gruppenisomorphismus, weil eine Änderung der p-Abbildung nichts an der oben definierten Addition ändert.

Diese Methode definiert auch Isomorphismen $p\text{-Ker}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cong p\text{-Ker}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}')$, wobei in $\mathfrak{h}'$ die p-Abbildung um eine p-semilineare Abbildung $\varphi\colon \mathfrak{h}\to\mathfrak{c}$ geändert wird. Mit diesen Isomorphismen ist dann das Diagramm

$$
\begin{array}{ccc}
p\text{-Ker}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) & \cong & p\text{-Ker}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}') \\
\wr\wr & & \swarrow\!\!\cong \\
& p\text{-Ker}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^*) &
\end{array}
\tag{3.3}
$$

kommutativ.

In [6] führt Hochschild eine k-Modul-Struktur auf $p\text{-Ker}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^*)$ ein, derart daß der Isomorphismus (3.2) ein k-Isomorphismus wird. Statt der Definition von Hochschild wollen wir eine andere Definition der Multiplikation verwenden und diese für beliebige $\mathfrak{g}$-Moduln $\mathfrak{h}$ definieren.

Sei $(\mathfrak{k},\mu)$ ein p-Lie-Kern über $\mathfrak{g}$ mit Nukleus $\mathfrak{h}$. Wir wollen die Identifizierung von $\mathfrak{h}$ mit dem Zentrum von $\mathfrak{k}$ durch $i\colon \mathfrak{h}\to\mathfrak{k}$ bezeichnen. Sei $\alpha\in k$ und $\alpha\neq 0$. Dann ist $\alpha^{-1}i\colon \mathfrak{h}\to\mathfrak{k}$ ein k-Monomorphismus von $\mathfrak{h}$ auf das Zentrum von $\mathfrak{k}$. Hat $\mathfrak{h}$ eine von Null verschiedene p-Abbildung, so ist $\alpha^{-1}i$ im allgemeinen kein p-Homomorphismus mehr. Ändern wir aber die p-Abbildung in $\mathfrak{h}$ um $\varphi(h)=(\alpha^{1-p}-1)h^{[p]}$ und nennen wir diese neue p-Lie-Algebra $\mathfrak{h}'$, so ist

$$
\begin{aligned}
\alpha^{-1}i\big(h^{[p]}+\varphi(h)\big) &= \alpha^{-1}i(\alpha^{1-p}h^{[p]}) \\
&= \big(\alpha^{-1}i(h)\big)^{[p]},
\end{aligned}
$$

also ist $\alpha^{-1}i$ ein p-Homomorphismus.

Wir haben damit einen p-Lie-Kern $(\mathfrak{k}',\mu)=\alpha(\mathfrak{k},\mu)$ über $\mathfrak{g}$ mit dem Nukleus $\mathfrak{h}'$ konstruiert. Man rechnet leicht nach, daß $\alpha\colon p\text{-Ker}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\to p\text{-Ker}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}')$ ein Gruppenisomorphismus ist, der mit den in (3.3) verwendeten Isomorphismen kommutiert. Also erhalten wir Isomorphismen $\alpha\colon p\text{-Ker}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cong p\text{-Ker}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Das definiert eine k-Modul-Struktur auf $p\text{-Ker}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ derart, daß die Isomorphismen von (3.3) k-Isomorphismen sind.

Satz 3.2. *Es existiert ein k-Isomorphismus*

$$H^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cong p\text{-Ker}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}).$$

III. Vollständige Kohomologie und Dualität

$\mathfrak{g}$ sei in diesem Kapitel eine endlich-dimensionale p-Lie-Algebra. Wir werden uns im wesentlichen mit einer Verallgemeinerung der Kohomologiegruppen $\tilde{H}^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ befassen.

1. Vollständige Kohomologie und Homologie

Nach [1] ist die assoziative p-Hülle einer endlich-dimensionalen p-Lie-Algebra eine Frobeniusalgebra. Also besitzt jeder endlich erzeugte U-Modul A eine endlich erzeugte freie vollständige Auflösung [10]:

(1.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}\colon \cdots \arrow[r, "\lambda_2"] & A_1 \arrow[r, "\lambda_1"] & A_0 \arrow[rr, "\lambda_0"] \arrow[dr] & & A_{-1} \arrow[r, "\lambda_{-1}"] & A_{-2} \arrow[r, "\lambda_{-2}"] & \cdots \\
& & & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Die (vollständigen) Kohomologiegruppen von A mit Koeffizienten in dem U-Modul $\mathfrak{h}$ werden definiert durch

$$\hat{H}_U^n(A, \mathfrak{h}) = H_n(\mathrm{Hom}_U(\mathfrak{A}, \mathfrak{h})). \tag{1.2}$$

Setzen wir für A den trivialen U-Modul k ein, so ist $\tilde{H}^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \hat{H}_U^n(k, \mathfrak{h})$ für $n > 0$. Also definieren wir allgemein

$$\hat{H}^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \hat{H}_U^n(k, \mathfrak{h}). \tag{1.3}$$

Wie im allgemeinen für Frobeniuserweiterungen kann man auch über U Homologiegruppen definieren. Wir wollen hier nur die vollständige Homologie betrachten, wobei ein Koeffizientenmodul wieder der triviale U-Modul k sei. Sei A ein U-Rechts-Modul und $\mathfrak{A}$ eine endlich erzeugte freie vollständige Auflösung von A durch Rechts-Moduln. Sei $\hat{H}_n^U(A, \mathfrak{h}) = H_n(\mathfrak{A} \otimes_U \mathfrak{h})$. Ist A ein U-Links-Modul, dann ist $A^* = \mathrm{Hom}_k(A, k)$ ein U-Rechts-Modul und $\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{A}, k) = \mathfrak{A}^*$ eine endlich erzeugte freie vollständige Auflösung von A^*. Also ist $\hat{H}_n^U(A^*, \mathfrak{h})$ definiert. Ist A der triviale U-Modul k, so ist $k \cong k^*$ als zweiseitiger trivialer U-Modul. Da die Homologiegruppen unabhängig von der vollständigen Auflösung sind, ist $\hat{H}_n^U(k, \mathfrak{h}) \cong \hat{H}_n^U(k^*, \mathfrak{h})$. Wir definieren jetzt

$$\hat{H}_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \hat{H}_n^U(k, \mathfrak{h}) \cong \hat{H}_n^U(k^*, \mathfrak{h}). \tag{1.4}$$

Wir benötigen jetzt einige Eigenschaften, die aus der Tatsache folgen, daß U eine Frobeniusalgebra ist. Zunächst ist $U \cong \mathrm{Hom}_k(U, k)$ als U-Links-Moduln durch den Frobeniusisomorphismus. Der dem Bild von $1 \in U$ entsprechende Frobenius-Homomorphismus werde mit $\psi\colon U \to k$ bezeichnet. $\{\psi\}$ ist also ein freies Erzeugendensystem von $\mathrm{Hom}_k(U,k)$ und zwar sowohl als U-Links-Modul als auch als U-Rechts-Modul. Sei $u \in U$. Dann existiert genau ein $v \in U$, so daß $u\psi = \psi v$. Die Zuordnung $u \mapsto v$ definiert einen Algebrenautomorphismus ψ^*: $U \to U$, der wie in [10] Nakayama-Automorphismus heiße. ψ^* definiert einen vergessenden Funktor [15] von der Kategorie der U-Moduln in die Kategorie der U-Moduln. Ähnlich wie in [10] wollen wir das Bild eines Moduls $\mathfrak{h}$ bei diesem Funktor mit $\mathfrak{h}^0$ bezeichnen. Dann gilt wegen ([10], Satz 2) der

Satz 1.1. $\hat{H}_n(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cong \hat{H}^{-n-1}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^0)$.

Damit sind die Homologiegruppen durch Kohomologiegruppen vollständig beschrieben, und wir brauchen nur noch die letzteren genauer zu untersuchen.

Wir wollen die Form des Nakayama-Automorphismus ψ^* noch genauer angeben. Sei dazu $g_1, \ldots, g_n$ die Basis von $\mathfrak{g}$. Sei $u = \sum \alpha_I g_1^{i_1} \ldots g_n^{i_n}$. Dann ist $\psi(u) = \alpha_{(p-1,\ldots,p-1)}$, d.h. der Koeffizient von $g_1^{p-1} \ldots g_n^{p-1}$. Wir erhalten wegen ([1], Lemma):

$$\psi(g_1^{i_1} \ldots g_n^{i_n} g_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i_j < p-2 \\ 0 & \text{falls } i_j = p-2, \text{ ein } i_k \leqq p-2, \ k \neq j \\ 1 & \text{falls } i_j = p-2, \text{ alle } i_k = p-1, \ k \neq j. \end{cases}$$

Dasselbe erhalten wir, wenn wir $\psi(g_j g_1^{i_1} \ldots g_n^{i_n})$ berechnen. Sei $\psi(g_1^{p-1} \ldots g_n^{p-1} g_j) = \alpha$ und $\psi(g_j g_1^{p-1} \ldots g_n^{p-1}) = \beta$. Dann ist

$$\psi(g_1^{i_1} \ldots g_n^{i_n}(g_j - \alpha)) = \psi((g_j - \beta) g_1^{i_1} \ldots g_n^{i_n}),$$

also $\psi^*(g_j - \alpha) = g_j - \beta$. Da ψ^* k-linear ist, existiert für jedes g ein α, so daß

$$\psi^*(g) = g + \alpha. \tag{1.5}$$

2. *Berechnung einiger Kohomologiegruppen*

Zunächst wollen wir die Kohomologiegruppen $H^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ für besonders einfache abelsche p-Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ angeben. Die einfachste nicht-triviale p-Lie-Algebra ist die eindimensionale stark abelsche p-Lie-Algebra kX. Diese wollen wir aus Gründen, die in Kapitel V auftreten werden, α_p^* nennen. Die assoziative p-Hülle ist $k[X]/(X^p)$. Eine weitere kommutative p-Lie-Algebra ist die eindimensionale abelsche p-Lie-Algebra $\mu_p = kX$ mit $X^{[p]} = X$. Die assoziative p-Hülle ist hierbei $U = k[X]/(X^p - X)$.

Wir wollen untersuchen, wie α_p^* und μ_p auf α_p^* und μ_p operieren können. Sei D: $\alpha_p^* \to \alpha_p^*$ eine p-Derivation. Dann ist $DX = \alpha X$ mit $\alpha \in k$. $D(X^{[p]}) = 0 = (\mathrm{ad}\, X)^{p-1} DX$ ist immer erfüllt. Sei φ: $\alpha_p^* \to D(\alpha_p^*)$ ein p-Homomorphismus, und sei $D = \varphi(\beta X)$. Dann ist $D^p = D^{[p]} = \varphi((\beta X)^{[p]}) = 0$, also $\alpha^p = 0$. Damit ist $\alpha = 0$, d.h. α_p^* operiert nur trivial auf α_p^*.

Sei φ: $\mu_p \to D(\alpha_p^*)$ ein p-Homomorphismus, und sei $D = \varphi(X)$. Dann ist $D^p = \varphi(X^{[p]}) = \varphi(X) = D$, also $\alpha^p = \alpha$. Damit gibt es mehrere Operationen von μ_p auf α_p^*, nämlich außer der trivialen Operation die Operationen $\varphi(X)(X) = \alpha X$ mit $\alpha^{p-1} = 1$.

Sei D: $\mu_p \to \mu_p$ eine p-Derivation. Dann ist $DX = \alpha X$ mit $\alpha \in k$. $D(X^{[p]}) = D(X) = \alpha X = (\operatorname{ad} X)^{p-1} D(X) = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn $\alpha = 0$. Also ist $D(\mu_p) = 0$. α_p^* und μ_p können nur trivial auf μ_p operieren.

Wir geben jetzt einfache projektive Auflösungen von C (Kapitel I, § 2) über T an für die beiden Fälle $\mathfrak{g} = \alpha_p^*$ bzw. $\mathfrak{g} = \mu_p$. Es sei X wie oben das erzeugende Element von U und X: $T \to T$ die Rechtsmultiplikation mit X. Entsprechend seien die Abbildungen X^{p-1}, $X^{p-1} - 1$, $X^{p-1} - 1 + P$ definiert. Da $\mathfrak{g}$ als k-Modul isomorph zu k ist, können wir $T \otimes \mathfrak{g} \to C$ ersetzen durch $T \to C$. Dann gilt:

Lemma 2.1. *Für* $\mathfrak{g} = \alpha_p^*$ *ist*

$$\dots T \xrightarrow{X^{p-1}} T \xrightarrow{X} T \xrightarrow{X^{p-1}} T \xrightarrow{X} T \xrightarrow{X^{p-1}+P} T \to C \to 0$$

eine projektive Auflösung. Für $\mathfrak{g} = \mu_p$ *ist*

$$\dots T \xrightarrow{X^{p-1}-1} T \xrightarrow{X} T \xrightarrow{X^{p-1}-1+P} T \to C \to 0$$

eine projektive Auflösung.

Aus den Multiplikationsregeln für T sieht man sofort, daß die beiden Folgen Komplexe sind. Da $\mathfrak{g}$ und U von X erzeugt werden, ist nach Definition $C \cong T/T(X^{p-1} + P)$ bzw. $C \cong T/T(X^{p-1} - 1 + P)$. Die Exaktheit der Folgen folgt aus einem Koeffizientenvergleich.

Für $H^n(\alpha_p^*, \alpha_p^*)$ erhalten wir mit $\alpha_p^* = kY$ den Komplex

$$0 \to kY \xrightarrow{X^{p-1}+P} kY \xrightarrow{X} kY \xrightarrow{X^{p-1}} kY \xrightarrow{X} kY \dots .$$

Alle Abbildungen sind Nullabbildungen. Also ist

$$H^n(\alpha_p^*, \alpha_p^*) \cong k, \qquad n \geqq 1. \tag{2.1}$$

Entsprechend erhalten wir bei trivialer Operation von μ_p auf α_p^*:

$$H^n(\mu_p, \alpha_p^*) = 0, \qquad n \geqq 1. \tag{2.2}$$

Operiert μ_p nicht trivial auf α_p^*, so sind $X^{p-1} - 1 + P$ und $X^{p-1} - 1$ Nullabbildungen und X ein Isomorphismus. Also ist

$$H^1(\mu_p, \alpha_p^*) \cong k; \qquad H^n(\mu_p, \alpha_p^*) = 0 \qquad \text{für } n \geqq 2. \tag{2.3}$$

Für den Koeffizientenmodul $\mu_p = kY$ ist $P\alpha Y = \alpha^p Y$. Im allgemeinen ist $\alpha \to \alpha^p$ kein Epimorphismus. So erhalten wir wie oben

$$H^1(\alpha_p^*, \mu_p) = 0, \qquad H^2(\alpha_p^*, \mu_p) \cong k/k^p, \qquad H^n(\alpha_p^*, \mu_p) \cong k \qquad \text{für } n \geqq 3 \tag{2.4}$$

und

$$\begin{gathered} H^1(\mu_p, \mu_p) \cong \{\alpha \mid \alpha^p = \alpha, \alpha \in k\}, \qquad H^2(\mu_p, \mu_p) \cong k/\{\alpha^p - \alpha \mid \alpha \in k\}, \\ H^n(\mu_p, \mu_p) = 0 \qquad \text{für } n \geqq 3. \end{gathered} \tag{2.5}$$

(2.2) bis (2.4) zeigen, daß es zwar keine nicht-zerfallenden p-Erweiterungen von μ_p durch α_p^* gibt, daß aber nur für perfekte Körper alle p-Erweiterungen von α_p^* durch μ_p zerfallen. Da α_p^* abelsch ist und trivial auf μ_p operiert, und da $\alpha_p^* \wedge \alpha_p^* = 0$ ist, sind alle p-Erweiterungen wegen (II.1.4) kommutativ.

Mit (2.1) und (2.5) zeigt man, daß es nicht-zerfallende p-Erweiterungen von α_p^* durch α_p^* bzw. von μ_p durch μ_p gibt. Mit demselben Argument wie oben sind auch diese Erweiterungen kommutativ.

Wir wollen jetzt die Kohomologiegruppen $\hat{H}^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ für endlich-dimensionale p-Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ für $n=0, -1, -2$ beschreiben. Dazu geben wir jetzt den Anfang einer vollständigen U-projektiven Auflösung von k an:

(2.6)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\dots U \otimes \mathfrak{g} \arrow[r, "d_0"] & U \arrow[rr, "N"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & U \arrow[r, "d^0"] & U \otimes Hom_k(\mathfrak{g}, k) \dots \\
& & k \arrow[ur, "\eta"'] \arrow[dr] & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

wobei ε die Augmentation und $d_0(u \otimes g) = ug$ seien. Der zweite Teil der Auflösung entsteht, indem wir eine Auflösung von k als trivialem U-Rechts-Modul

$$\dots \mathfrak{g} \otimes U \xrightarrow{d_0} U \xrightarrow{\varepsilon} k \longrightarrow 0$$

dualisieren:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(k, k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(U, k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g} \otimes U, k) \dots$$

und die U-Isomorphismen

$$k \cong \mathrm{Hom}_k(k, k)$$
$$U \cong \mathrm{Hom}_k(U, k)$$
$$U \otimes \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}, k) \cong \mathrm{Hom}_k(U, \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}, k)) \cong \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g} \otimes U, k)$$

einsetzen. Die letzten Isomorphismen gelten wegen ([9], II):

(2.7) $$U \otimes A \cong \mathrm{Hom}_k(U, A).$$

Dieser Isomorphismus wird beschrieben durch

$$u \otimes a \mapsto \psi(u)a \quad \text{und} \quad f \mapsto \sum r_i \otimes f(l_i),$$

wobei $\{r_i\}$, $\{l_i\}$ zueinander duale Basen bezüglich ψ von U über k sind [13]. Sei $\varepsilon = N\psi$ mit $N \in U$. N ist wegen (2.7) für $A = k$ eindeutig bestimmt. In der Kohomologie der Gruppen wird N oft die Norm genannt. N ist unabhängig von einer Grundkörpererweiterung, da ε und ψ dabei erhalten bleiben.

Nach ([9], (9)) erhalten wir in U:

$$\begin{aligned}\sum r_i \varepsilon(l_i) &= \sum r_i \psi(l_i N) \\ &= \sum N r_i \psi(l_i) \\ &= N\end{aligned}$$

und analog

$$\sum \varepsilon(r_i) l_i = \psi^*(N).$$

Man sieht durch Einsetzen der verschiedenen Homomorphismen

$$\eta(\alpha)=\alpha N, \quad d^0(u)=u\sum r_i\otimes\rho(l_i),$$

wobei $\rho(l_i)\in\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g},k)$ definiert ist durch $\rho(l_i)(g)=\psi(g l_i)$. Da

$$(\varepsilon(u)\,N\,\psi)(v)=\varepsilon(v)\,\varepsilon(u)=\varepsilon(v\,u)=(u\,N\,\psi)(v),$$

ist

(2.8) $$\varepsilon(u)\,N=u\,N \quad \text{und} \quad \eta\,\varepsilon(u)=u\,N.$$

Damit wollen wir für einen U-Modul $\mathfrak{h}$ die Kohomologiegruppe $\hat{H}^0(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ aus

$$\ldots\mathrm{Hom}_U(U,\mathfrak{h})\xrightarrow{N^*}\mathrm{Hom}_U(U,\mathfrak{h})\xrightarrow{d_0^*}\mathrm{Hom}_U(U\otimes\mathfrak{g},\mathfrak{h})\ldots$$

berechnen. Setzen wir $\mathrm{Hom}_U(U,\mathfrak{h})\cong\mathfrak{h}$ in diese Folge ein, so geht der Homomorphismus N^* in $h\mapsto Nh$ über. Wir müssen den Kern von d_0^* berechnen. Es ist $d_0^*(f_h)(u\otimes g)=f_h d_0(u\otimes g)=ugh$. Also ist $d_0^*(f_h)=0$ genau dann, wenn $gh=0$ für alle $g\in\mathfrak{g}$. Wir nennen $\mathfrak{h}^{\mathfrak{g}}=\{h\,|\,h\in\mathfrak{h},\ gh=0 \text{ für alle } g\in\mathfrak{g}\}$ den Fixmodul von $\mathfrak{h}$. Damit ist

(2.9) $$\hat{H}^0(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cong\mathfrak{h}^{\mathfrak{g}}/N\,\mathfrak{h}.$$

Statt $\hat{H}^{-1}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ direkt zu bestimmen, werden wir die nach Satz 1.1 dazu isomorphe Homologiegruppe $\hat{H}_0(\mathfrak{g},\mathfrak{h}')$ bestimmen, wobei $\mathfrak{h}'$ das Bild von $\mathfrak{h}$ bei dem durch $(\psi^*)^{-1}\colon U\to U$ definierten vergessenden Funktor ist. Dazu benötigen wir eine Auflösung von k als U-Rechts-Modul:

$$\ldots\mathfrak{g}\otimes U\xrightarrow{d_0}U\xrightarrow{N'}U\xrightarrow{d^0}\cdots,$$

wobei wegen Vertauschung der Seiten N' definiert ist durch $\varepsilon=\psi N'$, also $N'=\psi^*(N)$. In dem Komplex

$$\ldots\mathfrak{g}\otimes U\otimes_U\mathfrak{h}'\xrightarrow{d_0\otimes 1}U\otimes_U\mathfrak{h}'\xrightarrow{N'\otimes 1}U\otimes_U\mathfrak{h}'\ldots$$

gilt dann $\mathrm{Bild}(d_0\otimes 1)\cong\mathfrak{g}\mathfrak{h}'=U^+\mathfrak{h}'\cong\mathrm{Kern}(N)$, wobei $N(h)=Nh$. Also ist

(2.10) $$\hat{H}^{-1}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cong\mathrm{Kern}(N)/(\psi^*)^{-1}(U^+)\,\mathfrak{h}.$$

Sei jetzt $\mathfrak{h}$ ein trivialer U-Modul. Wir wollen $\hat{H}_1(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ bestimmen. Nach Definition ist $\hat{H}_1(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\mathrm{Tor}_1^U(k,\mathfrak{h})$. Nach ([3], S. 184, (4)) ist

$$\mathrm{Tor}_1^U(k,\mathfrak{h})\cong(U^+/(U^+)^2)\otimes\mathfrak{h}.$$

Sei $T(\mathfrak{g})$ die Tensor-Algebra von $\mathfrak{g}$ und $T^+=\mathfrak{g}\oplus(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})\oplus\cdots$ das Augmentationsideal von $T(\mathfrak{g})$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T^+ \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\eta"] & T^+/(T^+)^2 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\vartheta"] & \mathfrak{g}/([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]+k\,\mathfrak{g}^{[p]}) \arrow[dl, "\nu"] \\ U^+ \arrow[r, "\lambda"] & U^+/(U^+)^2 & \end{tikzcd}$$

ist kommutativ, wobei $\zeta, \eta, \vartheta, \lambda$ die natürlichen Abbildungen sind, μ durch $T^+/(T^+)^2 \cong \mathfrak{g}$ induziert wird, und ν durch die natürliche Einbettung von $\mathfrak{g}$ in U^+ induziert wird. Die Elemente $[g, g'] = g\,g' - g'g$ und $\alpha g^{[p]} = \alpha g^p$ liegen dabei in $(U^+)^2$. Da $\lambda\eta$ ein Epimorphismus, ist auch ν ein Epimorphismus. Auch $\mu\zeta$ ist ein Epimorphismus, also ist $\mathrm{Kern}\,\nu = \mu\zeta(\mathrm{Kern}\,\lambda\eta)$. Sei $I \subseteq T(\mathfrak{g})$ das zweiseitige Ideal, das von $\{g \otimes g' - g' \otimes g - [g, g'], g^p - g^{[p]} \mid g, g' \in \mathfrak{g}\}$ erzeugt wird. Dann ist Kern $\lambda\eta = I + (T^+)^2$. Weiter ist $\mu\zeta(I + (T^+)^2) = \mu\zeta(I)$. Die einzigen Elemente von I, die nicht in $(T^+)^2$ liegen, sind Linearkombinationen von $g \otimes g' - g' \otimes g - [g, g']$ und $g^p - g^{[p]}$ über k. Diese werden von $\mu\zeta$ annulliert. Also ist $\mathrm{Kern}\,\nu = 0$, d.h. ν ist ein Isomorphismus.

Wir haben für triviale U-Moduln $\mathfrak{h}$ gezeigt:

$$\hat{H}^{-2}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^0) \cong (\mathfrak{g}/([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + k\,\mathfrak{g}^{[p]})) \otimes \mathfrak{h}. \tag{2.11}$$

Wir wissen, daß $\dim_k U < \infty$ ist, also ist die vollständige Auflösung (1.1) für endlich erzeugte U-Moduln A endlich-dimensional. Sei B auch ein endlich erzeugter U-Modul, so ist $\mathrm{Ext}_U^n(A, B)$ endlich-dimensional. Speziell gilt:

Satz 2.2. *Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ endlich-dimensional. Dann ist auch $\hat{H}^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ endlich-dimensional.*

3. *Cup-Produkt und Dualität*

Wie in der Kohomologie endlicher Gruppen wollen wir auch hier ein Produkt der Kohomologiegruppen $\hat{H}^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ einführen. Da $\hat{H}^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = 0$ für injektive (und projektive) U-Moduln $\mathfrak{h}$ ist, gilt wegen ([11], XII, Th. 7.2 und 7.6)

Lemma 3.1. *$\hat{H}^{n+1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cong S^1 \hat{H}^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ und $\hat{H}^{n-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cong S_1 \hat{H}^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ funktoriell für alle $\mathfrak{h}$ und n.*

Dabei bezeichnen S^1 bzw. S_1 wie in [3] Rechts- bzw. Links-Satelliten.

Der Diagonalhomomorphismus Δ: $U \to U \otimes U$ ist ein k-Algebrenhomomorphismus, der durch $\Delta(g) = g \otimes 1 + 1 \otimes g$ definiert ist. Für einen festen U-Modul B werde der Funktor $A \mapsto A \otimes B$ von der Kategorie der U-Moduln in die Kategorie der $U \otimes U$-Moduln, gefolgt von dem durch Δ definierten vergessenden Funktor, mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet. Dann ordnet $\mathfrak{T}$ dem U-Modul A den U-Modul $A \otimes B$ mit der Multiplikation (II.2.6) zu. Nach Definition ist $\mathfrak{T}$ exakt und mit direkten Summen vertauschbar. Wegen II Lemma 2.5 führt $\mathfrak{T}$ projektive Moduln in projektive Moduln über. Da in der Kategorie der U-Moduln die projektiven und injektiven Moduln übereinstimmen, gilt für jeden additiven kovarianten Funktor $\mathfrak{F}$ wegen ([11], XII, loc.cit.)

$$S^1(\mathfrak{F}\mathfrak{T}) \cong (S^1 \mathfrak{F})\mathfrak{T}, \quad S_1(\mathfrak{F}\mathfrak{T}) \cong (S_1 \mathfrak{F})\mathfrak{T}.$$

Speziell gilt

Lemma 3.2.

$$\hat{H}^{n+1}(\mathfrak{g}, A \otimes B) \cong S_A^1(\hat{H}^n(\mathfrak{g}, A \otimes B))$$

und

$$\hat{H}^{n-1}(\mathfrak{g}, A \otimes B) \cong S_1^A(\hat{H}^n(\mathfrak{g}, A \otimes B))$$

funktoriell in A für alle n.

Lemma 3.3. *$H^n(\mathfrak{g}, A) \otimes \hat{H}^m(\mathfrak{g}, B)$ und $\hat{H}^{n+m}(\mathfrak{g}, A \otimes B)$ sind für festes m und B rechts-universell und links-kouniversell exakt verbundene Folgen von Funktoren in A.*

Beweis. Wegen Lemma 3.1 und da $. \otimes \hat{H}^m(\mathfrak{g}, B)$ exakt ist, gilt die Behauptung für $\hat{H}^n(\mathfrak{g}, A) \otimes \hat{H}^m(\mathfrak{g}, B)$. Wegen Lemma 3.2, weil $\mathfrak{T}$ exakt ist, und $\hat{H}^n(\mathfrak{g}, .)$ exakt verbunden ist, gilt die Aussage auch für $\hat{H}^{n+m}(\mathfrak{g}, A \otimes B)$.

Seien

$$E\colon\ 0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

und

$$E'\colon\ 0 \to B' \to B \to B'' \to 0$$

exakte Folgen von U-Moduln. Bezeichnen wir den verbindenden Homomorphismus von $\hat{H}^n(\mathfrak{g}, .)$ zu E mit E_*, so ist der verbindende Homomorphismus von $\hat{H}^n(\mathfrak{g}, .) \otimes \hat{H}^m(\mathfrak{g}, B)$ der Homomorphismus $E_* \otimes 1$. Damit $\hat{H}^n(\mathfrak{g}, .) \otimes \hat{H}^m(\mathfrak{g}, .)$ ein exakt verbundener Bifunktor wird, muß zu E' der verbindende Homomorphismus $(-1)^n(1 \otimes E'_*)$ sein.

Der verbindende Homomorphismus von $\hat{H}^{n+m}(\mathfrak{g}, . \otimes B)$ zu E ist $(E \otimes B)_*$.

Satz 3.4. *Sei $\xi\colon \hat{H}^{n_0}(\mathfrak{g}, A) \otimes \hat{H}^{m_0}(\mathfrak{g}, B) \to \hat{H}^{n_0+m_0}(\mathfrak{g}, A \otimes B)$ ein in A und B funktorieller Homomorphismus. Dann existiert genau eine Familie von Homomorphismen*

$$\varphi^{n,m}\colon\ \hat{H}^n(\mathfrak{g}, A) \otimes \hat{H}^m(\mathfrak{g}, B) \to \hat{H}^{n+m}(\mathfrak{g}, A \otimes B)$$

für alle n, m und alle U-Moduln A und B, so daß

1) $\varphi^{n_0, m_0} = \xi$,
2. *$\varphi^{n,m}$ funktoriell in A und B ist,*
3) $\varphi^{n+1,m}(E_* \otimes 1) = (E \otimes B)_* \varphi^{n,m}$,
4) $(-1)^n \varphi^{n,m+1}(1 \otimes E'_*) = (A \otimes E')_* \varphi^{n,m}$.

Beweis. Wir definieren $\varphi^{n_0, m_0} = \xi$. Dann halten wir B und m_0 fest. Wegen 3.3 ist $\hat{H}^n(\mathfrak{g}, A) \otimes \hat{H}^{m_0}(\mathfrak{g}, B)$ rechts-universell für $n \geqq n_0$ und $\hat{H}^{n+m_0}(\mathfrak{g}, A \otimes B)$ links-kouniversell für $n \leqq n_0$. Also existieren eindeutig in A funktorielle Homomorphismen φ^{n, m_0} für alle n, die 3) für B und $m = m_0$ für alle exakten Folgen E und alle n erfüllen.

Diese φ^{n, m_0} sind auch funktoriell in B, denn für $\gamma\colon B \to B'$ sind

$$\varphi^{n, m_0}(\hat{H}^n(\mathfrak{g}, A) \otimes \hat{H}^{m_0}(\mathfrak{g}, \gamma)) \quad \text{und} \quad \hat{H}^{n+m_0}(\mathfrak{g}, A \otimes \gamma)\, \varphi^{n, m_0}$$

in A funktorielle Homomorphismen von $\hat{H}^n(\mathfrak{g}, A) \otimes \hat{H}^{m_0}(\mathfrak{g}, B)$ in

$$\hat{H}^{n+m_0}(\mathfrak{g}, A \otimes B'),$$

die für $n = n_0$ übereinstimmen. Also stimmen sie wegen Lemma 3.3 für alle n überein.

Für festes n und A erhalten wir in gleicher Weise $\varphi^{n,m}$, die 2) und 4) erfüllen. Es bleibt zu zeigen, daß die $\varphi^{n,m}$ auch 3) erfüllen. Das beweist man genau wie ([11], XII, Th. 10.4).

Korollar 3.5. *Bei der Identifizierung* $A \otimes B = B \otimes A$ *gilt*

$$\varphi^{n,m}(a \otimes b) = (-1)^{nm} \varphi^{m,n}(b \otimes a).$$

Man rechnet nämlich leicht nach, daß $(-1)^{nm}\varphi^{m,n}$ die vier Eigenschaften von Satz 3.4 erfüllt.

Um das gewünschte Produkt zu erhalten, definieren wir den Homomorphismus ξ für $n=m=0$:

$$\xi\colon \hat{H}^0(\mathfrak{g}, A) \otimes \hat{H}^0(\mathfrak{g}, B) \to \hat{H}^0(\mathfrak{g}, A \otimes B). \tag{3.1}$$

Wegen (2.9) ist dazu ein Homomorphismus

$$\xi\colon A^{\mathfrak{g}}/NA \otimes B^{\mathfrak{g}}/NB \to (A \otimes B)^{\mathfrak{g}}/N(A \otimes B) \tag{3.2}$$

anzugeben. ξ soll induziert werden von der Identität auf $A \otimes B$. Für $a \in A^{\mathfrak{g}}$ und $b \in B^{\mathfrak{g}}$ ist $a \otimes b \in (A \otimes B)^{\mathfrak{g}}$, denn $g(a \otimes b) = ga \otimes b + a \otimes gb = 0$.

Seien $a \in A^{\mathfrak{g}}$ und $b = Nb' \in NB$. Wir zeigen $a \otimes b \in N(A \otimes B)$. Da $a \in A^{\mathfrak{g}}$ ist, ist $g(a \otimes b') = a \otimes gb'$, also für alle $u \in U^+$ $u(a \otimes b') = a \otimes ub'$. Für $\alpha \in k \subseteq U$ gilt auch $\alpha(a \otimes b') = a \otimes \alpha b'$. Also ist $N(a \otimes b') = a \otimes Nb' = a \otimes b$. Analog zeigt man für $a \in NA$ und $b \in B^{\mathfrak{g}}$, daß $a \otimes b \in N(A \otimes B)$. Damit ist ξ von (3.2) wohldefiniert.

Seien $a \in \hat{H}^n(\mathfrak{g}.A)$ und $b \in H^m(\mathfrak{g}, B)$. Dann bezeichnen wir das Produkt $\varphi^{n,m}(a \otimes b) = a \cdot b$, wobei $\varphi^{n,m}$ nach Satz 3.4 mit dem ξ von (3.1) gebildet wird.

Sei $A = k$, dann ist $\hat{H}^0(\mathfrak{g}, K) \cong k/Nk$. Wir bezeichnen das dem Element $1 + Nk \in k/Nk$ bei diesem Isomorphismus entsprechende Element von $\hat{H}^0(\mathfrak{g}, k)$ mit 1.

Lemma 3.6. *Bei der Identifizierung* $k \otimes B = B = B \otimes k$ *ist* $1 \cdot b = b = b \cdot 1$.

Beweis. $\hat{H}^m(\mathfrak{g}, B)$ ist links-universell und rechts-kouniversell exakt verbunden. Die Abbildungen $\hat{H}^m(\mathfrak{g}, B) \to \hat{H}^m(\mathfrak{g}, B)$

$$a \mapsto a$$
$$a \mapsto \varphi^{m,0}(a \otimes 1)$$
$$a \mapsto \varphi^{0,m}(1 \otimes a) \qquad .$$

stimmen für $m=0$ überein und sind mit verbindenden Homomorphismen vertauschbar, also stimmen sie für alle m überein. Ähnlich zeigt man, daß das Produkt assoziativ ist. Ein Analogon zum Satz von MASCHKE in der Theorie endlicher Gruppen ist

Korollar 3.7. *U ist genau dann separabel, wenn* $\varepsilon(N) \neq 0$ *ist.*

Beweis. Sei $\varepsilon(N) \neq 0$. In $\hat{H}^0(\mathfrak{g}, k)$ ist dann $1 = 0$. Also sind nach Lemma 3.6 alle $\hat{H}^n(\mathfrak{g}, A) = 0$. Da $\hat{H}^n(\mathfrak{g}, A) = \tilde{H}^n(\mathfrak{g}, A)$ für $n \geqq 1$, ist nach II Korollar 2.7 die Algebra U halbeinfach. Sei U halbeinfach, dann ist k U-projektiv, also ist $\hat{H}^0(\mathfrak{g}, k) = 0 = k/Nk$. Da aber $N\alpha = \varepsilon(N)\alpha$ und $Nk = k$, ist $\varepsilon(N) \neq 0$. Da N bei Grundkörpererweiterung erhalten bleibt, ist Korollar 3.7 bewiesen.

Beispiel 3.8. Die assoziative p-Hülle U von μ_p ist halbeinfach.

Wir rechnen das zu μ_p gehörige N aus. Es ist $U=k[X]/(X^p-X)$. Dann ist nach [1] $\psi(X^i)=0$ für $i<p-1$ und $\psi(X^{p-1})=1$. Also ist $\varepsilon(X^i)=\psi(X^i(X^{p-1}-1))$ für alle i. Dann ist $N=X^{p-1}-1$ und $\varepsilon(N)=-1$.

Lemma 3.9. *Sei ψ^* der in § 1 definierte Nakayama-Automorphismus. Dann ist $\varepsilon(N)=\varepsilon(\psi^*(N))$.*

Beweis.

$$\varepsilon(N)=(N\psi)(N)=(\psi\,\psi^*(N))(N)=\psi(\psi^*(N)\,N)=(N\psi)(\psi^*(N))=\varepsilon(\psi^*(N)).$$

Wegen Korollar 3.7 wollen wir jetzt immer annehmen, daß $\varepsilon(N)=0$ ist, da sonst alle Kohomologiegruppen $\hat{H}^n(\mathfrak{g},A)$ verschwinden.

Sei k^0 wie in § 1 der aus k durch ψ^* definierte U-Modul. Dann ist wegen (2.10)

$$\hat{H}^{-1}(\mathfrak{g},k^0)\cong \operatorname{Kern}(N^0)/(\psi^*)^{-1}k^0,$$

wobei $N^0\colon k^0\to k^0$ definiert ist durch $N^0(\alpha^0)=N\alpha^0$. Also ist $\operatorname{Kern}(N^0)=\{\alpha\,|\,\psi^*(N)\alpha=0\}$, d.h. $\operatorname{Kern}(N^0)=\operatorname{Kern}\psi^*(N)$. Weiter ist $(\psi^*)^{-1}(U^+)k^0=U^+k=0$. Damit ist

$$\hat{H}^{-1}(\mathfrak{g},k^0)\cong k. \tag{3.3}$$

Wir wollen jetzt die Abbildungen $\varphi^{0,-1}$ in einem Spezialfall für ξ wie in (3.1) bestimmen. Sei

$$E\colon\ 0\longrightarrow B\xrightarrow{\ \lambda\ }P\xrightarrow{\ \nu\ }A\longrightarrow 0$$

eine U-exakte Folge und sei P U-projektiv. Dann ist nach II Lemma 2.5 auch $\operatorname{Hom}_k(A,k^0)\otimes P$ U-projektiv. Also erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{H}^0(\mathfrak{g},\operatorname{Hom}_k(A,k^0))\otimes\hat{H}^{-1}(\mathfrak{g},A) & \xrightarrow{1\otimes E_*} & \hat{H}^0(\mathfrak{g},\operatorname{Hom}_k(A,k^0))\otimes\hat{H}^0(\mathfrak{g},B)\\ \big\downarrow{\scriptstyle\varphi^{0,-1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi^{0,0}}\\ \hat{H}^{-1}(\mathfrak{g},\operatorname{Hom}_k(A,k^0)\otimes A) & \xrightarrow{\ \partial\ } & \hat{H}^0(\mathfrak{g},\operatorname{Hom}_k(A,k^0)\otimes B) \end{array} \tag{3.4}$$

wobei $\partial=(\operatorname{Hom}_k(A,k^0)\otimes E)_*$ und $1\otimes E_*$ Isomorphismen aus der langen exakten Kohomologiefolge sind.

Wir wissen, daß

$$\begin{aligned}&\hat{H}^0(\mathfrak{g},\operatorname{Hom}_k(A,k^0))\otimes\hat{H}^{-1}(\mathfrak{g},A)\\ &\qquad\cong\operatorname{Hom}_U(A,k^0)/N\operatorname{Hom}_k(A,k^0)\otimes\operatorname{Kern}(N)/(\psi^*)^{-1}(U^+)A.\end{aligned}$$

Sei $f\in\operatorname{Hom}_k(A,k^0)$ und $a\in\operatorname{Kern}(N)$. Sei $q\in P$ so gewählt, daß $\nu(q)=a$. Dann ist $(1\otimes E_*)(f\otimes a)=f\otimes Nq$, wobei $Nq\in\lambda B$. Nach Definition von $\varphi^{0,0}$ geht der Repräsentant $f\otimes Nq$ bei $\varphi^{0,0}$ über in $f\otimes Nq$. Andrerseits ist $f\otimes a$ ein Repräsentant eines Elements aus $\hat{H}^{-1}(\mathfrak{g},\operatorname{Hom}_k(A,k^0)\otimes A)$, denn es ist $g(f\otimes a)=gf\otimes a+f\otimes ga=f\otimes ga$, also $N(f\otimes a)=f\otimes Na=0$. Dann ist $\partial(f\otimes a)=N(f\otimes q)=f\otimes Nq$. Weil $1\otimes E_*$ und ∂ Isomorphismen sind, ist $\varphi^{0,-1}(f\otimes a)=f\otimes a$ auf den Repräsentanten.

Der Einsetzungshomomorphismus χ: $\mathrm{Hom}_k(A,k^0)\otimes A\to k^0$ ist ein U-Homomorphismus, denn

$$\chi(g(f\otimes a))=\chi(g\,f\otimes a+f\otimes g\,a)=(g\,f)(a)+f(g\,a)$$
$$=g\,f(a)-f(g\,a)+f(g\,a)=g\,\chi(f\otimes a).$$

Die Abbildung

$$\hat{H}^0(\mathfrak{g},\mathrm{Hom}_k(A,k^0))\to\mathrm{Hom}_k(\hat{H}^{-1}(\mathfrak{g},A),k),$$

die durch

$$\hat{H}^{-1}(\mathfrak{g},\mathrm{Hom}_k(A,k^0)\otimes A)\to\hat{H}^{-1}(\mathfrak{g},k^0)\cong k$$

mit dem Einsetzungshomomorphismus χ und durch $\varphi^{0,-1}$ definiert wird, werde ζ genannt. Nach Definition ist $\zeta(f)(a)=\hat{H}^{-1}(\mathfrak{g},\zeta)\varphi^{0,-1}(f\otimes a)$. Damit gilt

Lemma 3.10. ζ: $\hat{H}^0(\mathfrak{g},\mathrm{Hom}_k(A,k^0))\to\mathrm{Hom}_k(\hat{H}^{-1}(\mathfrak{g},A),k)$ *ist ein Isomorphismus.*

ζ definiert einen Homomorphismus

$$\mathrm{Hom}_U(A,k^0)/N\,\mathrm{Hom}_k(A,k^0)\to\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Kern}(N)/(\psi^*)^{-1}(U^+)A,k).$$

Sei f: $\mathrm{Kern}(N)\to k$ gegeben mit $f((\psi^*)^{-1}(U^+)A)=0$. Dann existiert ein k-Homomorphismus f': $A\to k$, der eingeschränkt auf $\mathrm{Kern}(N)$ mit f übereinstimmt. Es ist $f'((\psi^*)^{-1}(U^+)A)=0$. Fassen wir k als U-Modul vermöge ψ^* auf, so ist

$$(\psi^*)^{-1}(U^+)f'(A)\subseteq(\psi^*)^{-1}(U^+)k^0=(U^+k)^0=0.$$

Also ist f' ein U-Homomorphismus aus $\mathrm{Hom}_U(A,k^0)$ und $f=\zeta f'$ auf den Repräsentanten. Daher ist ζ ein Epimorphismus.

Um zu zeigen, daß ζ ein Monomorphismus ist, benötigen wir den Antiautomorphismus ω: $U\to U$, der durch den p-Antiautomorphismus $g\to -g$ von $\mathfrak{g}$ induziert wird. ω läßt die Elemente aus k elementweise fest, also ist $\varepsilon(u)=\varepsilon(\omega(u))$. Außerdem ist mit der Definition von ψ in [1] $\psi(u)=\psi(\omega(u))$. Damit erhalten wir für alle u:

$$(\psi\,\psi^*(N))(u)=(N\,\psi)(u)=\varepsilon(u)=\varepsilon(\omega(u))=(N\,\psi)(\omega(u))$$
$$=\psi(\omega(u)\,N)=\psi(\omega(\omega(u)\,N))=\psi(\omega(N)\,u)=(\psi\,\omega(N))(u).$$

Also ist $\omega(N)=\psi^*(N)$.

Sei jetzt $f\in\mathrm{Hom}_k(A,k^0)$. Dann ist wegen (1.5)

$$((\psi^*)^{-1}(g)f)(a)=((g+\alpha)f)(a)=g\,f(a)+\alpha\,f(a)-f(g\,a)$$
$$=(\psi^*)^{-1}(g)\,f(a)+f(\omega(g)\,a)=f(\omega(g)\,a).$$

Also gilt für alle $u\in U$:

$$((\psi^*)^{-1}(u)f)(a)=f(\omega(u)\,a).$$

Setzen wir speziell $u=\psi^*(N)$, so ist

$$(N\,f)(a)=f(N\,a). \tag{3.5}$$

Sei jetzt $f \in \mathrm{Hom}_U(A, k^0)$ mit $f(\mathrm{Kern}(N)) = 0$. Die Folge

$$0 \longrightarrow \mathrm{Kern}(N) \longrightarrow A \xrightarrow{N} A$$

ist exakt, also auch

$$\mathrm{Hom}_k(A, k^0) \xrightarrow{N_*} \mathrm{Hom}_k(A, k^0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Kern}(N), k^0) \longrightarrow 0.$$

Also existiert ein $f' \in \mathrm{Hom}_k(A, k^0)$ mit $f(a) = f'(Na)$ für alle $a \in A$. Wegen (3.5) ist $f = Nf'$. Also ist ζ ein Monomorphismus.

Mit dem soeben bewiesenen Lemma können wir jetzt den Dualitätssatz für Kohomologiegruppen von p-Lie-Algebren beweisen:

Satz 3.11. *Es existiert genau eine Familie von Isomorphismen*

$$\gamma^{n-1,-n}\colon\ \hat{H}^{n-1}(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(A, k^0)) \cong \mathrm{Hom}_k(\hat{H}^{-n}(\mathfrak{g}, A), k),$$

die funktoriell in A sind, für die $\gamma^{0,-1} = \zeta$ ist, und die mit verbindenden Homomorphismen (in A) verträglich sind.

Wegen II, Lemma 2.4, sind $\hat{H}^{n-1}(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(A, k^0))$ und $\mathrm{Hom}_k(\hat{H}^{-n}(\mathfrak{g}, A), k)$ rechts-universell und links-kouniversell exakt verbundene Folgen von kontravarianten Funktoren. Daher existiert eindeutig eine Familie von Homomorphismen $\gamma^{n-1,-n}$ mit den geforderten Eigenschaften. Da ζ ein Isomorphismus ist, müssen auch die $\gamma^{n-1,-n}$ Isomorphismen sein.

Bezeichnen wir den dualen Modul $\mathrm{Hom}_k(A, k^0)$ als A^*, so können wir die Dualität kurz schreiben als $\hat{H}^{n-1}(\mathfrak{g}, A^*) \cong \hat{H}^{-n}(\mathfrak{g}, A)^*$.

IV. Periodische Kohomologie

1. Zyklische p-Lie-Algebren und Kohomologie abelscher p-Lie-Algebren

Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale p-Lie-Algebra, die als p-Lie-Algebra über k von einem Element X erzeugt wird. Dann nennen wir $\mathfrak{g}$ zyklisch. Da X, $X^{[p]}$, $(X^{[p]})^{[p]}, \ldots$ und alle Linearkombinationen sich gegenseitig mit dem Lie-Produkt annullieren, ist diese Menge schon ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{g}$ über k, und $\mathfrak{g}$ ist abelsch. Also ist auch die assoziative p-Hülle U von $\mathfrak{g}$ eine kommutative Algebra, die von dem Element X als k-Algebra erzeugt wird. Sei $N \in U$ die Norm, d.h. $\varepsilon = N\psi$. Dann ist $(uN\psi)(v) = (N\psi)(vu) = \varepsilon(v)\,\varepsilon(u) = (\varepsilon(u)N\psi)(v)$, also ist $uN = \varepsilon(u)N$. Speziell ist also $XN = 0$. Da U kommutativ ist, ist auch $NX = 0$. Sei $\dim_k \mathfrak{g} = n$. Dann ist $\dim_k U = p^n$ und $\dim_k UX = \dim_k U^+ = p^n - 1$. Weiter ist $\dim_k UN = \dim_k \varepsilon(U)N = \dim_k kN = 1$. Also ist die Folge

$$\begin{tikzcd}
\ldots U \arrow[r, "X"] & U \arrow[r, "N"] \arrow[dr] & U \arrow[r, "X"] & U \arrow[r, "N"] & U \ldots \\
& & k \arrow[u] \arrow[dr] & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

eine vollständige U-projektive Auflösung von k.

Bilden wir die Kohomologiegruppen $\hat{H}^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ mit dieser Auflösung, so haben wir die Homologie des Komplexes

$$\ldots \mathfrak{h} \xrightarrow{N} \mathfrak{h} \xrightarrow{X} \mathfrak{h} \xrightarrow{N} \mathfrak{h} \xrightarrow{X} \mathfrak{h} \ldots$$

zu bilden. Also ist

$$\begin{aligned} &\hat{H}^{2n}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cong \mathrm{Kern}(X)/\mathrm{Bild}(N), \\ (1.2)\qquad &\hat{H}^{2n+1}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cong \mathrm{Kern}(N)/\mathrm{Bild}(X). \end{aligned}$$

Speziell gilt also $\tilde{H}^{n+2}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cong \tilde{H}^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ für $n>0$ funktoriell in $\mathfrak{h}$. Allgemein wollen wir die Kohomologie einer endlich-dimensionalen p-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ periodisch nennen, wenn es ein $q>0$ so gibt, daß $\tilde{H}^{n+q}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cong \tilde{H}^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ für $n>0$ funktoriell in $\mathfrak{h}$. q heißt dann eine Periode von $\mathfrak{g}$. Mit q ist auch jedes ganzzahlige Vielfache von q eine Periode von $\mathfrak{g}$.

Satz 1.1. *Eine zyklische p-Lie-Algebra hat periodische Kohomologie mit der Periode* 2.

Wir kennen schon zwei Beispiele für zyklische p-Lie-Algebren, nämlich α_p^* und μ_p. Aber auch $\alpha_p^* \oplus \mu_p$ ist zyklisch. Sei nämlich $\alpha_p^* = kX$ mit $X^{[p]}=0$ und $\mu_p = kY$ mit $Y^{[p]} = Y$. Dann ist $\alpha_p^* \oplus \mu_p = kX \oplus kY$, und es ist $(X+Y)^{[p]} = Y^{[p]} = Y$. Also erzeugt $X+Y$ die p-Lie-Algebra $\alpha_p^* \oplus \mu_p$.

Sei jetzt $\mathfrak{g}'$ ein p-Ideal von $\mathfrak{g}$, wobei $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ nicht notwendig endlich-dimensional sind. Sei $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$. Seien U, V bzw. W die assoziativen p-Hüllen von $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ bzw. $\mathfrak{k}$. Wir fassen V als Unteralgebra von U auf. Seien $g' \in \mathfrak{g}' \subseteq V$ und $g \in \mathfrak{g} \subseteq U$. Dann ist $g'g = gg' + [g',g]$. Da $\mathfrak{g}'$ ein p-Ideal von $\mathfrak{g}$ ist, zeigt eine Induktion, daß UV^+ ein zweiseitiges Ideal von U ist. Also ist im Sinne von ([3], XVI, § 6) V normal in U. Man verifiziert leicht, daß $\mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$ einen Isomorphismus $U/UV^+ \cong W$ induziert. Außerdem ist U ein freier V-Modul. Nach ([3], XVI, Th. 6.1) erhalten wir für einen W-Modul A und einen U-Modul B die Spektralfolge

$$\mathrm{Ext}_W^r(A, \mathrm{Ext}_V^s(k,B)) \Rightarrow \mathrm{Ext}_U^n(A,B).$$

Setzen wir speziell $A=k$, so erhalten wir den

Satz 1.2. *Sei* $\mathfrak{g}'$ *ein p-Ideal in* $\mathfrak{g}$. *Dann existiert folgende Spektralfolge:*

$$\tilde{H}^r(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}', \tilde{H}^s(\mathfrak{g}',B)) \Rightarrow \tilde{H}^n(\mathfrak{g},B).$$

Korollar 1.3. *Sei* $\mathfrak{g}'$ *ein p-Ideal in* $\mathfrak{g}$. *Sei die assoziative p-Hülle von* $\mathfrak{g}'$ *halbeinfach. Dann gibt es funktorielle Isomorphismen*

$$\tilde{H}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}', B^{\mathfrak{g}'}) \cong \tilde{H}^n(\mathfrak{g},B).$$

Beweis. Da U halbeinfach ist, ist $\tilde{H}^m(\mathfrak{g}',B)=0$ für $m \neq 0$ und $\tilde{H}^0(\mathfrak{g}',B) = \mathrm{Hom}_U(k,B) = B^{\mathfrak{g}'}$. Also bricht die Spektralfolge von Satz 1.2 zusammen zu den Isomorphismen von Korollar 1.3.

Im Spezialfall $\mathfrak{g}' = \mu_p$ und $B=k$ erhalten wir

$$(1.3)\qquad \tilde{H}^n(\mathfrak{g}/\mu_p, k) \cong \tilde{H}^n(\mathfrak{g},k).$$

Korollar 1.4. *Sei $\mathfrak{g}'$ ein p-Ideal in $\mathfrak{g}$. Sei $\mathfrak{f}=\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$, und sei die assoziative p-Hülle von $\mathfrak{f}$ halbeinfach. Dann gibt es funktorielle Isomorphismen*

$$\tilde{H}^n(\mathfrak{g}', B)^{\mathfrak{f}} \cong \tilde{H}^n(\mathfrak{g}, B).$$

Wie oben erhält man für triviale Operation auf k

$$\tilde{H}^n(\mathfrak{g}', k) \cong \tilde{H}^n(\mathfrak{g}, k), \tag{1.4}$$

falls $\mathfrak{f} \cong \mu_p$. Die in ([3], XVI, Th. 6.1) angegebene Operation von μ_p auf $\tilde{H}^n(\mathfrak{g}', k)$ ist nämlich auch trivial.

Als Anwendung von Korollar 1.4 erhalten wir, daß eine p-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, die eine endliche absteigende Folge von p-Lie-Unteralgebren $0=\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ besitzt, so daß $\mathfrak{g}_i$ p-Ideal in $\mathfrak{g}_{i+1}$ und $\mathfrak{g}_{i+1}/\mathfrak{g}_i \cong \mu_p$ ist, verschwindende Kohomologie für $n>0$ hat. Wir sagen auch, daß $\mathfrak{g}$ eine Kompositionsreihe mit den Faktoren μ_p hat. Die assoziative p-Hülle U von $\mathfrak{g}$ ist dann halbeinfach.

Korollar 1.5. *Die assoziative p-Hülle einer endlich-dimensionalen p-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, die eine Kompositionsreihe mit den Faktoren μ_p besitzt, ist halbeinfach.*

Speziell hat $\oplus \mu_p$, eine endliche direkte Summe von μ_p' s, eine halbeinfache assoziative p-Hülle.

Korollar 1.6. *Sei $\mathfrak{g}$ kommutativ, endlich-dimensional und erzeuge $\mathfrak{g}^{[p]}$ die p-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ über k. Dann ist die assoziative p-Hülle von $\mathfrak{g}$ separabel.*

Sei N die Norm von $\mathfrak{g}$. Bei Grundkörpererweiterung zum algebraischen Abschluß $\bar{k}$ von k bleiben N und die Voraussetzungen von Korollar 1.6 erhalten. Dann ist aber $\bar{k} \otimes \mathfrak{g}$ von der Form $\oplus \mu_p$[2], also ist $\varepsilon(N) \neq 0$ nach III Korollar 3.7.

Korollar 1.7. *Sei $\mathfrak{g}'$ ein p-Ideal in $\mathfrak{g}$. Dann existieren Homomorphismen, so daß die Folge*

$$\begin{aligned} 0 &\to \tilde{H}^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}', A^{\mathfrak{g}'}) \to \tilde{H}^1(\mathfrak{g}, A) \to \tilde{H}^1(\mathfrak{g}', A) \\ &\to \tilde{H}^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}', A^{\mathfrak{g}'}) \to \tilde{H}^2(\mathfrak{g}, A) \end{aligned}$$

exakt ist.

Beweis. Das ist eine Anwendung von ([3], XV, Th. 5.12) im Falle $n=1$ auf die Spektralfolge von Satz 1.2.

Sei $\alpha_{p^i}^*$ die abelsche p-Lie-Algebra $kX_1 \oplus \cdots \oplus kX_i$ mit $X_{j-1}^{[p]} = X_j$ für $j \leq i$ und $X_i^{[p]}=0$. $\alpha_{p^i}^*$ ist zyklisch.

Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale p-Lie-Algebra. Seien $\mathfrak{h}_r$ p-Ideale von $\mathfrak{g}$, die durch $\mathfrak{h}_1 = k \cdot \mathfrak{g}^{[p]}$ und $\mathfrak{h}_r = k \cdot \mathfrak{h}_{r-1}^{[p]}$ definiert werden. Da $\mathfrak{g}$ endlich-dimensional ist, wird die Kette $\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{h}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{h}_n = \mathfrak{h}_{n+1} \cdots$ konstant. Wir erhalten eine exakte Folge

$$0 \to \mathfrak{h}_n \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_n \to 0. \tag{1.5}$$

Nach Korollar 1.6 ist die assoziative p-Hülle von $\mathfrak{h}_n$ separabel, also ist nach Korollar 1.3 $\tilde{H}^n(\mathfrak{g}, A) \cong \tilde{H}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_n, A^{\mathfrak{h}_n})$. Fassen wir $\mathfrak{h}_n$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_n$ als $k[P]$-Moduln auf, so ist $P^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_n)=0$, weil $P^n(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{h}_n$ nach Definition von $\mathfrak{h}_n$.

Sei zunächst k algebraisch abgeschlossen. Dann zerfällt $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_n$ in eine endliche direkte Summe $\oplus \alpha_{p^i}^*$ mit nicht notwendig gleichen i [2]. Die Anzahl der Summanden sei r. Außerdem ist $\mathfrak{h}_n = \oplus \mu_p$, wobei die Anzahl der Summanden s sei. Wir bezeichnen $\mathfrak{g}$ auch mit $L^{r,s}$. Operiere $L^{r,s}$ trivial auf k. Wir wollen $\tilde{H}^m(L^{r,s}, k)$ bestimmen. Nach (1.3) können wir annehmen, daß $s=0$ ist.

Seien $U_1, \ldots, U_r$ die assoziativen p-Hüllen der $\alpha_{p^i}^*$. Dann ist $U_1 \otimes \cdots \otimes U_r = W$ die assoziative p-Hülle von $L^{r,0}$. Wir zerlegen $L^{r,0} = \alpha_{p^i}^* \oplus L^{r-1,0}$ mit den assoziativen p-Hüllen U von $\alpha_{p^i}^*$, V von $L^{r-1,0}$ und $U \otimes V = W$ von $\mathfrak{g}$. Seien

$$\ldots U \xrightarrow{N} U \xrightarrow{X} U \longrightarrow k \longrightarrow 0 \tag{1.6}$$

eine U-freie Auflösung von k und

$$\ldots P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

eine V-freie Auflösung von k. Wir bezeichnen

$$\mathfrak{U} = \cdots U \xrightarrow{N} U \xrightarrow{X} U \longrightarrow 0,$$
$$\mathfrak{V} = \cdots P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0.$$

$\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ sind Komplexe mit der Homologie k. $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}$ ist ein Doppelkomplex von freien $U \otimes V$-Moduln. Dieser bildet nach ([3], XV, 6) eine Spektralfolge. Differenzieren wir erst nach den durch $\mathfrak{U}$ induzierten Differentiationen, so erhalten wir aus diesem Doppelkomplex den Komplex $k \otimes \mathfrak{V} \cong \mathfrak{V}$. Damit wird für die zu $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}$ gehörige Spektralfolge $E_2^{0,0} = k$ und $E_2^{m,n} = 0$ für $m \neq 0$ oder $n \neq 0$. Also ist $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V} \rightarrow k \rightarrow 0$ eine $U \otimes V$-freie Auflösung von k.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}_j$ die U_j-freie Auflösung (1.5) von k, so ist $\mathfrak{U}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{U}_r = \mathfrak{W}$ eine W-freie Auflösung von k. Wir haben also die Homologie von $\mathrm{Hom}_W(\mathfrak{W}, k)$ zu bestimmen. Da die $\alpha_{p^i}^*$ trivial auf k operieren, sind N und X jeweils die Nullabbildungen. Also sind auch alle Differentiationen in dem r-fachen Komplex $\mathrm{Hom}_W(\mathfrak{W}, k)$ Nullabbildungen. An jedem Punkt des r-fachen Komplexes steht $\mathrm{Hom}_W(W, k) \cong k$. Also entsteht an jedem solchen Punkt genau ein eindimensionaler Anteil zur Kohomologie von k. Eine einfache Abzählung zeigt, daß $\binom{r+m-1}{m}$ Punkte bei der Berechnung von $\tilde{H}^m(\mathfrak{g}, k)$ zu berücksichtigen sind.

Sei k jetzt ein beliebiger Körper der Charakteristik p. $\mathfrak{g}$ sei eine kommutative p-Lie-Algebra über k. Die Konstruktion der Folge (1.5) ist vertauschbar mit der Grundkörpererweiterung zum algebraischen Abschluß $\bar{k}$ von k, weil $\mathfrak{h}_n$ die maximale p-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist, für die $P(\mathfrak{h}_n)$ den Vektorraum $\mathfrak{h}_n$ erzeugt. Wenn $\mathfrak{g}$ bei Grundkörpererweiterung mit $\bar{k}$ die Form $L^{r,s}$ erhält, so bezeichnen wir auch schon $\mathfrak{g}$ mit $L^{r,s}$. Verwenden wir jetzt die Isomorphismen $\bar{k} \otimes U(\mathfrak{g}) \cong U(\bar{k} \otimes \mathfrak{g})$ zwischen den assoziativen p-Hüllen und

$$\tilde{H}^n(\mathfrak{g}, \bar{k}) = \mathrm{Ext}^n_{U(\mathfrak{g})}(k, \bar{k}) \cong \mathrm{Ext}^n_{\bar{k} \otimes U(\mathfrak{g})}(\bar{k}, \bar{k}) \cong \tilde{H}^n(\bar{k} \otimes \mathfrak{g}, \bar{k}),$$

wobei $\mathfrak{g}$ in $\tilde{H}^n(\mathfrak{g}, \bar{k})$ als k-Algebra und $\bar{k} \otimes \mathfrak{g}$ in $\tilde{H}^n(\bar{k} \otimes \mathfrak{g} \bar{k},)$ als $\bar{k}$-Algebra aufgefaßt wird, so ist damit bewiesen:

Satz 1.8. *Sei $\mathfrak{g}$ eine abelsche p-Lie-Algebra von der Form $L^{r,s}$. Operiere $\mathfrak{g}$ trivial auf $\bar{k}$, dem algebraischen Abschluß von k. Dann ist $\tilde{H}^m(\mathfrak{g},\bar{k})$ ein $\binom{r+m-1}{m}$-dimensionaler $\bar{k}$-Vektorraum.*

Sei $\lambda\in\bar{k}^*$. Dann ist die Multiplikation mit λ ein $\bar{k}$-Vektorraum-Automorphismus von $\bar{k}$. Also muß ein funktorieller Isomorphismus $\tilde{H}^n(\mathfrak{g},\,.)\cong\tilde{H}^m(\mathfrak{g},\,.)$ speziell für $\bar{k}$ ein $\bar{k}$-Vektorraum-Isomorphismus $\tilde{H}^n(\mathfrak{g},\bar{k})\cong\tilde{H}^m(\mathfrak{g},\bar{k})$ sein. Ist $\mathfrak{g}$ von der Form $L^{r,s}$ und $r>1$, so kann also $\tilde{H}^n(\mathfrak{g},\,.)$ nicht periodisch sein, weil

$$\binom{r+m-1}{m}<\binom{r+m-1}{m+q}\qquad\text{für } q>0.$$

Sei $\mathfrak{g}$ von der Form $L^{1,s}$. Dann ist $\bar{k}\otimes\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_n\cong\bar{k}\otimes\alpha^*_{p^i}$, also ist $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_n=\mathfrak{e}$ i-dimensional, $P^i(\mathfrak{e})=0$ und $P^{i-1}(\mathfrak{e})\neq0$. Dann existiert ein $X\in\mathfrak{e}$ mit $P^{i-1}(X)\neq0$. Wir zeigen, daß die $P^j(X)$ mit $j=0,\dots,i-1$ linear unabhängig über k sind. Sei

$$\sum_{j=0}^{i-1}\alpha_j P^j(X)=0.$$

Sei h minimal mit $\alpha_h\neq0$. Dann ist $P^{i-h-1}(\sum\alpha_j P^j(X))=\alpha_h^{p^{i-h-1}}P^{i-1}(X)$, also ist $\alpha_h=0$. Daher sind die $P^j(X)$ eine Basis von $\mathfrak{e}$, und $\mathfrak{e}$ ist zyklisch. Wegen Korollar 1.3 und Satz 1.1 gilt also

Korollar 1.9. *Sei $\mathfrak{g}=L^{r,s}$. $\mathfrak{g}$ hat genau dann periodische Kohomologie, wenn $r\leqq1$ ist.*

Korollar 1.10. *Sei $\mathfrak{g}=L^{r,s}$ und $[\bar{k}:k]<\infty$. Dann sind äquivalent:*

a) *die Kohomologie von $\mathfrak{g}$ ist periodisch,*

b) *die Kohomologie von $\mathfrak{g}$ ist beschränkt, d.h. für jeden endlich-dimensionalen Koeffizientenmodul A existiert ein m, so daß $\dim_k\hat{H}^n(\mathfrak{g},A)\leqq m$ für alle n.*

Beweis. Da nach III Satz 2.2 die Kohomologiegruppen $\hat{H}^n(\mathfrak{g},A)$ endlich-dimensional sind und da $\tilde{H}^n(\mathfrak{g},A)\cong\tilde{H}^{n+q}(\mathfrak{g},A)$, genügt es für m das Maximum der Dimensionen von $\tilde{H}^r(\mathfrak{g},A)$ für $0<r=n_0,\ n_0+1,\ \dots,\ n_0+q-1$ zu wählen.

Sei die Kohomologie von $\mathfrak{g}$ nicht periodisch, so ist $\tilde{H}^m(\mathfrak{g},\bar{k})$ nach den Überlegungen in Korollar 1.8 auch nicht beschränkt.

2. *Periodische Kohomologie*

Sei $\mathfrak{g}$ in diesem Paragraphen eine endlich-dimensionale p-Lie-Algebra. Wir betrachten wieder die vollständige Kohomologie $\hat{H}^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Sei $\varphi^{m,n}$ die Multiplikation aus III § 3. Dann gilt

Satz 2.1. *Sei q eine ganze Zahl. Dann sind äquivalent:*

1) $\varphi^{q,-q}$: $\hat{H}^q(\mathfrak{g},k)\otimes\hat{H}^{-q}(\mathfrak{g},k)\to\hat{H}^0(\mathfrak{g},k)$ *ist ein Isomorphismus.*

2) $\varphi^{q,-q}$: $\hat{H}^q(\mathfrak{g},k)\otimes\hat{H}^{-q}(\mathfrak{g},k)\to\hat{H}^0(\mathfrak{g},k)$ *ist ein Epimorphismus.*

3) *Es existiert ein* $g \in \hat{H}^q(\mathfrak{g},k)$, *so daß* $\hat{H}^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \ni a \to a \cdot g \in \hat{H}^{n+q}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *für alle n ein funktorieller Isomorphismus ist, der mit verbindenden Homomorphismen verträglich ist.*

4) *Für alle n existieren funktorielle Isomorphismen* $\rho\colon \hat{H}^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cong \hat{H}^{n+q}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, *die mit verbindenden Homomorphismen verträglich sind.*

5) *Für ein n existiert ein funktorieller Isomorphismus* $\rho\colon \hat{H}^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cong \hat{H}^{n+q}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

Beweis. Triviale Schritte sind $1 \Rightarrow 2$, $3 \Rightarrow 4$ und $4 \Rightarrow 5$. Sei 2 erfüllt. Man wähle $g \in \hat{H}^q(\mathfrak{g},k)$ und $g^{-1} \in \hat{H}^{-q}(\mathfrak{g},k)$ mit $g \cdot g^{-1} = 1 \in \hat{H}^0(\mathfrak{g},k)$. Sei $\sigma(a) = a \cdot g^{-1}$ und $\tau(a) = a \cdot g$. Dann ist $\sigma\tau(a) = a \cdot g \cdot g^{-1} = a$ und $\tau\sigma(a) = a \cdot g^{-1} \cdot g = (-1)^q a \cdot g \cdot g^{-1} = (-1)^q a$. Also sind σ und τ Isomorphismen. Da das Produkt nach III, Satz 3.4, funktoriell und mit verbindenden Homomorphismen vertauschbar ist, gilt 3.

Sei 5 erfüllt. Da $\hat{H}^n(\mathfrak{g}, .)$ und $\hat{H}^{n+q}(\mathfrak{g}, .)$ links-universell rechts-kouniversell exakt verbundene Folgen von Funktoren sind, gilt 4.

Wir definieren eine Abbildung $\pi^{0,0}$ durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\hat{H}^0(\mathfrak{g},A) \otimes \hat{H}^0(\mathfrak{g},B) & \xrightarrow{\pi^{0,0}} & \hat{H}^0(\mathfrak{g},A \otimes B) \\
\wr\downarrow \rho\otimes 1 & & \wr\downarrow \rho \\
\hat{H}^q(\mathfrak{g},A) \otimes \hat{H}^0(\mathfrak{g},B) & \xrightarrow{\varphi^{q,0}} & \hat{H}^q(\mathfrak{g},A \otimes B).
\end{array}$$

$\pi^{0,0}$ läßt sich zu einer Familie $\pi^{m,n}$ nach III, Satz 3.4, fortsetzen. Da $\rho^{-1} \cdot \varphi^{n+q,m}(\rho \otimes 1)$ funktoriell in A und mit verbindenden Homomorphismen vertauschbar sind, gilt $\pi^{m,n} = \rho^{-1} \varphi^{m+q,n}(\rho \otimes 1)$. Mit III, Korollar 3.5, erhalten wir das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\hat{H}^0(\mathfrak{g},k) \otimes \hat{H}^0(\mathfrak{g},k) & \xrightarrow{\varphi^{0,0}} & \hat{H}^0(\mathfrak{g},k) \\
\downarrow \rho^{-1}\otimes 1 & & \downarrow \rho^{-1} \\
\hat{H}^{-q}(\mathfrak{g},k) \otimes \hat{H}^0(\mathfrak{g},k) & \xrightarrow{\pi^{-q,0}} & \hat{H}^{-q}(\mathfrak{g},k) \\
\wr\| & & \wr\| \\
\hat{H}^0(\mathfrak{g},k) \otimes \hat{H}^{-q}(\mathfrak{g},k) & \xrightarrow{\pi^{0,-q}} & \hat{H}^{-q}(\mathfrak{g},k) \\
\downarrow \rho\otimes 1 & & \downarrow \rho \\
\hat{H}^q(\mathfrak{g},k) \otimes \hat{H}^{-q}(\mathfrak{g},k) & \xrightarrow{\varphi^{q,-q}} & \hat{H}^0(\mathfrak{g},k)
\end{array}$$

in dem alle Abbildungen, also auch speziell $\varphi^{q,-q}$ Isomorphismen sind. Also gilt 1.

Wir wollen die Kohomologiegruppen $H^n(\mathfrak{g},A)$ periodisch nennen, wenn es ein $q > 0$ gibt, so daß $H^n(\mathfrak{g},A) \cong H^{n+q}(\mathfrak{g},A)$ für $n \geqq 3$ und funktoriell in A. Die Kohomologiegruppen $\hat{H}^n(\mathfrak{g},A)$ heißen periodisch, wenn es ein $q > 0$ gibt, so daß $\hat{H}^n(\mathfrak{g},A) \cong \hat{H}^{n+q}(\mathfrak{g},A)$ für alle n und funktoriell in A. Wegen I, Korollar 4.3 und $\bar{H}^n(\mathfrak{g},A) \cong \hat{H}^n(\mathfrak{g},A)$ funktoriell in A und verträglich mit verbindenden Homomorphismen für $n \geqq 1$ gilt

Korollar 2.2. *Äquivalent sind:*

a) $\tilde{H}^n(\mathfrak{g}, A)$ *sind periodisch,*

b) $\hat{H}^n(\mathfrak{g}, A)$ *sind periodisch,*

c) $H^n(\mathfrak{g}, A)$ *sind periodisch.*

Aus der Äquivalenz von 1) und 2) von Satz 2.1 folgt weiter

Korollar 2.3. *Ist* $\dim_k \hat{H}^q(\mathfrak{g},k)>1$, *so ist* $\hat{H}^q(\mathfrak{g},k)\cdot \hat{H}^{-q}(\mathfrak{g},k)=0$.

Habe $\mathfrak{g}$ die Periode q. Dann gilt für die $g\in\hat{H}^q(\mathfrak{g},k)$, die die Isomorphismen von 3 aus Satz 2.1 erzeugen: $g=g\cdot g\cdot g^{-1}=(-1)^q g\cdot g^{-1}\cdot g=(-1)^q g$. Also gilt

Korollar 2.4. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine p-Lie-Algebra mit Periode q, deren assoziative p-Hülle nicht halbeinfach ist. Sei die Charakteristik von k von 2 verschieden. Dann ist q gerade.*

Ist die Charakteristik 2, so gilt bei der Auflösung (1.3) von k bezüglich α_2^* die Gleichung $N=X$. Also ist wegen (1.2) die Periode 1.

Lemma 2.5. *Sei* $\mathfrak{g}'\subseteq\mathfrak{g}$ *eine p-Lie-Unteralgebra von* $\mathfrak{g}$, *und habe* $\mathfrak{g}$ *periodische Kohomologie mit der Periode q. Dann hat auch* $\mathfrak{g}'$ *periodische Kohomologie mit der Periode q.*

Beweis. Sei U die assoziative p-Hülle von $\mathfrak{g}$ und U' die assoziative p-Hülle von $\mathfrak{g}'$. Da $\mathfrak{g}'\subseteq\mathfrak{g}$ ist, können wir annehmen, daß $U'\subseteq U$ ist. Dann ist U frei und endlich erzeugt über U'. Also ist jede vollständige U-Auflösung $\mathfrak{X}$ von k auch eine vollständige U'-Auflösung von k. Sei A ein U-Modul, so ist A auch ein U'-Modul und es existiert ein Monomorphismus

$$i\colon \operatorname{Hom}_U(\mathfrak{X}, A)\to\operatorname{Hom}_{U'}(\mathfrak{X}, A).$$

Dieser induziert einen Homomorphismus

$$i(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')\colon \hat{H}^m(\mathfrak{g},A)\to\hat{H}^m(\mathfrak{g}',A),$$

die sogenannte Restriktion, die funktoriell in A und mit verbindenden Homomorphismen verträglich ist. Sei $\varphi^{m,n}$ das Produkt in $\hat{H}^*(\mathfrak{g},.)$ und $\varphi'^{m,n}$ das Produkt in $\hat{H}^*(\mathfrak{g}',.)$. Dann ist $i(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')\,\varphi^{0,0}=\varphi'^{0,0}\,i(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')$. Da der vergessende Funktor, der durch $U'\subseteq U$ erzeugt wird, exakt ist und projektive Moduln in projektive Moduln überführt, sind $H^*(\mathfrak{g}',.)$ und $H^*(\mathfrak{g},.)$ rechts-universell und links-kouniversell exakt verbundene Folgen von Funktoren in U-Moduln. Also sind $i(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')\,\varphi^{m,n}=\varphi'^{m,n}\,i(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')$, d.h. $i(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')$ ist mit dem Cup-Produkt verträglich. Man sieht leicht, daß $i(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')(1)=1$. Sei $g\in H^q(\mathfrak{g},k)$ mit $g\cdot g^{-1}=1$. Dann ist

$$i(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')(g)\cdot i(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')(g^{-1})=i(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')(g\cdot g^{-1})=1,$$

also ist

$$H^q(\mathfrak{g}',k)\otimes H^{-q}(\mathfrak{g}',k)\to H^0(\mathfrak{g}',k)$$

ein Epimorphismus, d.h. $\mathfrak{g}'$ hat die Periode q.

Satz 2.6. *Sei $\mathfrak{g}$ eine p-Lie-Algebra. Ist die Kohomologie von $\mathfrak{g}$ periodisch, so ist jede abelsche p-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ von der Form $L^{0,s}$ oder $L^{1,s}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine abelsche p-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Wegen Lemma 2.5 hat $\mathfrak{g}'$ periodische Kohomologie. Wegen Korollar 1.9 ist dann $r \leqq 1$ für $\mathfrak{g}' = L^{r,s}$.

V. Kohomologie infinitesimaler formeller Gruppen der Höhe $\leqq 1$

Sei k wie vorher ein Körper der Charakteristik $p \neq 0$. Sei $\mathscr{F}$ die Kategorie der formellen Schemata über k. Sei $\mathscr{L}$ die Kategorie der linear kompakten k-Algebren mit stetigen k-Algebrenhomomorphismen. Nach [4] ist $\mathscr{F}$ dual zu $\mathscr{L}$. Jede Algebra in $\mathscr{L}$ ist ein gefilterter projektiver Limes von endlich-dimensionalen k-Algebren mit der Topologie des projektiven Limes. Sei $\mathscr{A}$ die volle Unterkategorie von $\mathscr{L}$ der endlich-dimensionalen (diskreten) k-Algebren. Endliche projektive Limites von Objekten in $\mathscr{A}$ existieren in $\mathscr{A}$. Außerdem sind die Objekte von $\mathscr{A}$ artinsch. Für $\mathscr{A}$ gilt nun der allgemeine

Satz 1 (GROTHENDIECK). *Sei $\mathscr{A}$ eine kleine Kategorie mit endlichen projektiven Limites und seien die Objekte von $\mathscr{A}$ artinsch. Sei $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{M}e$ ein mit endlichen projektiven Limites vertauschbarer Funktor in die Kategorie der Mengen, so ist F ein gefilterter induktiver Limes von darstellbaren Unterfunktoren.*

Beweis. Sei A ein Objekt in $\mathscr{A}$ und bezeichne A' den durch A dargestellten kovarianten Funktor. Allgemein gilt, daß $F = \varinjlim (A', \alpha)$, wobei $\alpha\colon A' \to F$ ein funktorieller Morphismus ist ([16], Exp. 1).

Wir zeigen, daß sich $\alpha\colon A' \to F$ durch einen darstellbaren Unterfunktor $\beta\colon B' \to F$ faktorisieren läßt. Sei B ein minimales Unterobjekt von A, für das ein funktorieller Morphismus $\beta\colon B' \to F$ existiert, durch den sich α faktorisieren läßt:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & F \\ B' \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Dann ist β ein Monomorphismus von Funktoren. Es genügt zu zeigen, daß $\beta(C)\colon B'(C) \to F(C)$ injektiv für alle C ist. Seien $\gamma, \delta \in B'(C)$ mit $\beta(C)\gamma = \beta(C)\delta$. Sei D der Kern von (γ, δ). Dann ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, shift left, "\gamma"] \arrow[r, shift right, "\delta"'] & B' \arrow[r] \arrow[d] & D'. \\ & F & \end{tikzcd}$$

Also existiert $D' \to F$. Wegen der Minimalität von B ist $D \cong B$, also $\gamma = \delta$. Damit ist B' vermöge β ein Unterfunktor und $\alpha \in \mathrm{Bild}(\beta(A))$. Also ist auch $\varinjlim A' = F$ für alle darstellbaren Unterfunktoren A' von F.

Um zu zeigen, daß der so gebildete Limes gefiltert ist, seien (A', α) und (B', β) Unterfunktoren von F. Da $F(A \times B) \cong F(A) \times F(B)$ ist, ist

$$\mathrm{Hom}((A \times B)', F) \cong \mathrm{Hom}(A', F) \times \mathrm{Hom}(B', F).$$

Also existiert genau ein γ, so daß

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[dr, "\alpha"'] & (A \times B)' \arrow[d, "\gamma"] & B' \arrow[l] \arrow[dl, "\beta"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. γ läßt sich durch einen Unterfunktor C' von F faktorisieren, also $A' \to C'$ und $B' \to C'$ induzieren Faktorisierungen von α bzw. β.

Eine Algebra aus $\mathscr{L}$ ist der gefilterte projektive Limes ihrer endlichdimensionalen Faktoralgebren. Nach [4] ist dann $\mathrm{Hom}(\varprojlim B_i, C) \cong \varinjlim \cdot \mathrm{Hom}(B_i, C)$. Das gilt speziell für C aus $\mathscr{A}$. Damit ist aber ein linksexakter Funktor von $\mathscr{A}$ in $\mathscr{M}e$ darstellbar durch eine linear kompakte Algebra in $\mathscr{L}$. Umgekehrt ist auch jeder durch eine linear kompakte Algebra dargestellte Funktor linksexakt, d.h. mit projektiven Limites vertauschbar. Sei $\mathrm{Sex}(\mathscr{A}, \mathscr{M}e)$ die Kategorie der linksexakten Funktoren, dann ist die angegebene Zuordnung eine Antiäquivalenz $\mathscr{L}^0 \cong \mathrm{Sex}(\mathscr{A}, \mathscr{M}e)$, also $\mathscr{F} \cong \mathrm{Sex}(\mathscr{A}, \mathscr{M}e)$.

Wir definieren jetzt für A, B aus $\mathscr{L}$ einen Funktor $\mathscr{H}om(A,B)$ von $\mathscr{A}$ in $\mathscr{M}e$ durch $\mathscr{H}om(A,B)(C) := \mathrm{Hom}(A, B \hat{\otimes} C)$, die stetigen k-Algebrenhomomorphismen von A in $B \hat{\otimes} C$, wobei $\hat{\otimes}$ das vervollständigte Tensorprodukt sei. Sei $C = \varprojlim C_i$ ein endlicher projektiver Limes von endlich-dimensionalen k-Algebren. Da das vervollständigte Tensorprodukt linksexakt ist, ist $B \hat{\otimes} C$ $\varprojlim C_i \cong \varprojlim B \hat{\otimes} C_i$, also ist $\mathscr{H}om(A,B)$ aus $\mathrm{Sex}(\mathscr{A}, \mathscr{M}e)$. Das zeigt, daß $\mathscr{H}om(A,B)$ als Objekt von $\mathscr{L}$ aufgefaßt werden kann und ein in B kontravarianter und in A kovarianter Funktor von $\mathscr{L}$ in $\mathscr{L}$ ist. Wir fassen daher

(1) $$\mathrm{Hom}(\mathscr{H}om(A, B), C) = \mathrm{Hom}(A, B \otimes C)$$

als Gleichung für endlich-dimensionale k-Algebren C auf. Da beide Funktoren für alle C aus $\mathscr{L}$ definiert sind und mit projektiven Limites vertauschbar sind, gilt (1) für alle C in $\mathscr{L}$. Seien X, Y, Z formelle Schemata, dann folgt aus der Antiäquivalenz von $\mathscr{L}$ und $\mathscr{F}$ und aus (1)

(2) $$\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(X \times Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(Y, \mathscr{H}om(X, Z)),$$

also existiert in $\mathscr{F}$ ein zum Produkt adjungierter Funktor.

Seien A und B aus $\mathscr{L}$ und C aus $\mathscr{A}$. Dann ist

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(A, B \hat{\otimes} C) \cong \mathrm{Hom}_{C,\mathrm{st}}(A \hat{\otimes} C, B \hat{\otimes} C),$$

wobei $\mathrm{Hom}_{C,\mathrm{st}}$ aus den stetigen C-Homomorphismen der C-Algebren $A \hat{\otimes} C$ und $B \hat{\otimes} C$ bestehen. Sei

$$\Delta\colon \mathrm{Hom}_{C,\mathrm{st}}(A \hat{\otimes} C, B \hat{\otimes} C) \to \mathrm{Hom}_{C,\mathrm{st}}(A \hat{\otimes} A \hat{\otimes} C, B \hat{\otimes} B \hat{\otimes} C)$$

der jedem f den Morphismus $f \hat{\otimes} f$ zuordnet. Da Δ funktoriell in C ist, erhalten wir einen Morphismus

$$\mathcal{H}om(A, B) \to \mathcal{H}om(A \hat{\otimes} A, B \hat{\otimes} B).$$

Dieser induziert für X und Y aus $\mathcal{F}$ den Morphismus

$$\Delta\colon\ \mathcal{H}om(X, Y) \to \mathcal{H}om(X \times X, Y \times Y).$$

Seien jetzt X und Y Gruppen in $\mathcal{F}$, d.h. formelle Gruppen, mit den Multiplikationen m_X und m_Y. In der Kategorie der Funktoren von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{M}e$ existiert der Differenzkern von

$$\mathcal{H}om(X, Y) \underset{\mathcal{H}om(1, m_Y)\Delta}{\overset{\mathcal{H}om(m_X, 1)}{\rightrightarrows}} \mathcal{H}om(X \times X, Y)$$

und ist wieder linksexakt. Wir bezeichnen ihn mit $\mathcal{H}om_{\mathrm{Gr}}(X, Y)$, denn

$$\mathcal{H}om_{\mathrm{Gr}}(X, Y)(C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}, C}(X \otimes C, Y \otimes C),$$

den Gruppenhomomorphismen der formellen C-Gruppen $X \otimes C$ in $Y \otimes C$. $\mathcal{H}om_{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ ist als projektiver Limes von linksexakten Funktoren wieder linksexakt, also ein formelles Schema.

Seien X und Y isomorphe Gruppen. Dann bezeichne $\mathcal{I}so_{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ das Faserprodukt von

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{I}so_{\mathrm{Gr}}(X, Y) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathrm{Gr}}(X, Y) \times \mathcal{H}om_{\mathrm{Gr}}(Y, X) \\
\downarrow & & \downarrow \varphi \\
k & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{H}om_{\mathrm{Gr}}(X, X) \times \mathcal{H}om_{\mathrm{Gr}}(Y, Y)
\end{array}$$

wobei φ einem Paar (f, g) zugeordnet das Paar $(g f, f g)$ und ψ auf das Paar $(1, 1)$ abbildet. Das gilt natürlich wieder bei Anwendung auf Objekte C aus $\mathcal{A}$ und es ist $\mathcal{I}so_{\mathrm{Gr}}(X, Y)(C) \cong \mathrm{Iso}_{\mathrm{Gr}, C}(X \otimes C, Y \otimes C)$. Wie oben ist $\mathcal{I}so_{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ ein formelles Schema, also auch $\mathcal{A}ut_{\mathrm{Gr}}(X)$.

Offenbar ist $\mathcal{A}ut_{\mathrm{Gr}}(X)$ sogar eine formelle Gruppe. Sei G eine formelle Gruppe und H eine kommutative formelle Gruppe. G operiert auf H genau dann, wenn ein formeller Gruppenhomomorphismus $G \to \mathcal{A}ut_{\mathrm{Gr}}(H)$ gegeben ist und die Menge der möglichen Operationen ist $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(G, \mathcal{A}ut_{\mathrm{Gr}}(H))$.

Wir betrachten jetzt infinitesimale formelle Gruppen der Höhe $\leqq 1$, d.h. formelle Gruppen, deren affine Algebra lokal mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{M}$ ist, so daß für alle $x \in \mathfrak{M}$ gilt $x^p = 0$. Wir wollen solche Gruppen kurz IFG 1 bezeichnen.

Nach ([4], 4.4.1, Corollar) ist die Kategorie der IFG 1 äquivalent zur Kategorie der p-Lie-Algebren über k. Dabei entsprechen abelsche p-Lie-Algebren kommutativen IFG 1.

Operiere die IFG 1 G auf der kommutativen IFG 1 H. Da Grundringerweiterungen mit dem Funktor **Lie**, der jeder IFG 1 die zugehörige p-Lie-Algebra zuordnet, kommutieren, ist $\mathcal{A}ut_{\mathrm{Gr}}(H) \cong \mathcal{A}ut(\mathfrak{h})$, wobei $\mathcal{A}ut(\mathfrak{h})(C)$ die Menge der p-Lie-Algebren-Automorphismen der C-Algebra $\mathfrak{h} \otimes C$ bedeutet und $\mathfrak{h}$ die zu H gehörige p-Lie-Algebra ist. Wir bilden die zu $\mathcal{A}ut(\mathfrak{h})$ gehörige p-Lie-Algebra wie in [16]:

$$0 \to \mathbf{Lie}(\mathcal{A}ut(\mathfrak{h})) \to \mathcal{A}ut(\mathfrak{h})(k[d]) \to \mathcal{A}ut(\mathfrak{h})(k).$$

$\mathbf{Lie}(\mathcal{A}ut(\mathfrak{h}))$ besteht aus denjenigen $k[d]$-Automorphismen von $\mathfrak{h} \otimes k[d]$, die $\mathfrak{h} \otimes k \cong \mathfrak{h}$ fest lassen. Ein Element aus $\mathfrak{h} \otimes k[d]$ läßt sich schreiben als $x \otimes 1 + y \otimes d$. Sei ϑ ein solcher Automorphismus, dann ist

$$\vartheta(x \otimes 1 + y \otimes d) = x \otimes 1 + y \otimes d + D(x) \otimes d,$$

wobei D k-linear ist. ϑ ist also durch D vollständig bestimmt. Andererseits muß ϑ ein Automorphismus der p-Lie-Algebra sein, weil wir oben Gruppenautomorphismen betrachtet haben. Also muß gelten

$$\begin{aligned} &\vartheta([x_1 \otimes 1 + y_1 \otimes d, x_2 \otimes 1 + y_2 \otimes d]) \\ &\qquad = [\vartheta(x_1 \otimes 1 + y_1 \otimes d), \vartheta(x_2 \otimes 1 + y_2 \otimes d)], \end{aligned}$$

was genau dann gilt, wenn

$$D[x_1, x_2] = [D x_1, x_2] + [x_1, D x_2].$$

Entsprechend ist ϑ mit der p-Abbildung genau dann verträglich, wenn $D(x^{[p]}) = (\mathrm{ad}\, x)^{p-1} D x$ gilt. Also werden die ϑ bestimmt durch die p-Derivationen $D\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$, d.h. $\mathbf{Lie}(\mathcal{A}ut(\mathfrak{h})) \cong D(\mathfrak{h})$.

$G \to \mathcal{A}ut(H)$ induziert einen p-Homomorphismus $\mathfrak{g} \to D(\mathfrak{h})$. Wegen ([4], 4.2.2, Prop.) ist diese Zuordnung bijektiv. Also entsprechen die Operationen von G auf H genau den Operationen von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}$.

Wir bezeichnen jetzt mit $H^i(G,H)$ die Hochschild-Kohomologiegruppen, wie sie etwa in [16] und [13] beschrieben werden. Wir wollen beweisen:

Satz 2. *Es gibt in H bzw. $\mathfrak{h}$ funktorielle und mit verbindenden Homomorphismen verträgliche Isomorphismen $H^n(G,H) \cong H^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, $n \geqq 0$, wobei $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$ die p-Lie-Algebren von G bzw. H sind und die Operation von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}$ durch die Operation von G auf H induziert wird.*

Wir werden den *Beweis* folgendermaßen führen: wir zeigen $H^0(G,H) = 0$ und $H^1(G,H) \cong H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ funktoriell in $\mathfrak{h}$. Dann zeigen wir, daß die Funktoren $H^n(G,H)$, $n \geqq 1$, rechts-universell exakt verbunden sind. Da dasselbe auch für die $H^n(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, $n \geqq 1$ gilt, setzt sich der Isomorphismus $H^1(G,H) \cong H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ in der gewünschten Form fort.

Nach Definition ist $H^0(G,H)$ ein Faktormodul von $\mathrm{Hom}(k,H)=0$, da H infinitesimal ist. Also ist $H^0(G,H)=0$.

Um zu zeigen, daß $H^1(G,H)$ isomorph ist zur Menge der Gruppenschnitte einer zerfallenden Erweiterung

$$0 \to H \to E \leftrightarrows G \to 0, \tag{3}$$

verweisen wir auf den mengentheoretischen Fall ([11], IV, Prop. 2.1). Der Beweis hier verläuft genauso, wenn man die durch H, G und E dargestellten Funktoren verwendet. Man muß dabei nur beachten, daß wegen $\mathrm{Hom}(k,H)=0$ gilt $H^1(G,H)=Z^1(G,H)$.

Die Folge (3) geht bei der oben angegebenen Äquivalenz der Kategorien über in eine zerfallende p-Erweiterung. II, Satz 1.1, beweist dann, daß die Schnitte einer solchen Erweiterung eine zu $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ isomorphe Gruppe bilden, wobei $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$ die zu G bzw. H gehörigen p-Lie-Algebren sind. Man prüft jetzt leicht nach, daß die Isomorphie $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cong H^1(G,H)$ funktoriell in $\mathfrak{h}$ bzw. H ist. Damit ist auch die zweite Behauptung zum Beweis des Satzes gezeigt.

Um die letzte Behauptung zu zeigen, wollen wir einen Zusatz zu [13] formulieren. Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie mit endlichen direkten Produkten und finalem Objekt. Seien G eine Gruppe und H ein unitärer G-Modul in $\mathfrak{C}$.

Lemma 3. *Existiert zu dem Funktor $G\times .$ von $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}$ ein rechtsadjungierter Funktor $\mathcal{H}om(G,\,.)$ von $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}$, so sind die inhomogenen (Hochschild-)Kohomologiegruppen $H^n(G,H)$ für $n\geqq 1$ auslöschbar durch den Monomorphismus $H\to\mathcal{H}om(G,H)$ von G-Moduln.*

Zunächst ist $\mathcal{H}om(G,H)$ eine kommutative Gruppe in $\mathfrak{C}$, weil

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}(X,\mathcal{H}om(G,H)\cong \mathrm{Hom}(G\times X,H)$$

isomorphe kommutative Gruppenfunktoren sind. Wir geben jetzt einen Morphismus $G\times\mathcal{H}om(G,H)\to\mathcal{H}om(G,X)$ an, der die Operation von G auf $\mathcal{H}om(G,H)$ definieren wird. Wir definieren

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}(Y,G)\times\mathrm{Hom}(Y,\mathcal{H}om(G,X)) & \to & \mathrm{Hom}(Y,\mathcal{H}om(G,X))\\ g\times f & \mapsto & g*f\end{array}$$

durch $g*f=\varphi^{-1}(\varphi(f)(m_G\times 1)(1\times(g,1)))$. Das assoziative Gesetz von G impliziert $(g_1g_2)*f=g_1*(g_2*f)$. Für $X=H$ ist leicht nachzuprüfen $g*(f_1+f_2)=g*f_1+g*f_2$, also ist $\mathcal{H}om(G,H)$ ein G-Modul.

Sei $\mu\colon G\times H\to H$ die Operation von G auf H. Sei

$$\mathrm{Hom}(Y,H)\to\mathrm{Hom}(Y,\mathcal{H}om(G,H))$$

definiert durch $h\mapsto\varphi^{-1}(\mu(1_G,h))$. Damit ist ein Morphismus $\alpha\colon H\to\mathcal{H}om(G,H)$ gegeben. Dieser ist ein G-Modul-Homomorphismus. Ist H ein unitärer G-Modul, so ist α ein Monomorphismus.

Das folgende Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(G^{n-1}, \mathcal{H}om(G,H)) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Hom}(G^n, \mathcal{H}om(G,H)) \\
\wr\Big\| \varphi & & \wr\Big\| \varphi \\
\mathrm{Hom}(G^n, H) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{Hom}(G^{n+1}, H)
\end{array}$$

wenn wir ∂ wie in [13] und δ definieren durch

$$\delta f(p_0, \dots, p_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f(p_0, \dots, p_i p_{i+1}, \dots, p_n) + (-1)^n f(p_0, \dots, p_{n-1}).$$

Sei $\eta\colon \mathrm{Hom}(G^{n+1}, H) \to \mathrm{Hom}(G^n, H)$ durch $\eta f(p_0, \dots, p_{n-1}) = f(e, p_0, \dots, p_{n-1})$ mit $e\colon G \to G$ dem Einselement der Gruppenmultiplikation von G gegeben. Dann ist $\eta\delta + \delta\eta = 1$. Also ist der Komplex $\mathrm{Hom}(G^n, H)$ mit den Differentiationen δ exakt, d.h. $H^n(G, \mathcal{H}om(G,H)) = 0$ für $n \geqq 1$.

Wir kommen jetzt auf den Beweis von Satz 2 zurück. Da G infinitesimal mit dem Restklassenkörper k ist, ist auch $G \times \dots \times G = G^n$ infinitesimal mit dem Restklassenkörper k. Also ist

$$\mathrm{Hom}(G^n, \mathcal{H}om(G,H)) \cong \mathrm{Hom}(G^n, \mathcal{H}om(G,H)_{\mathrm{rat}}),$$

wobei $\mathcal{H}om(G,H)_{\mathrm{rat}}$ das folgende formelle Schema ist: die Punkte sind die rationalen Punkte, d.h. die Punkte mit Restklassenkörper k von $\mathcal{H}om(G,H)$, und die Halme in den rationalen Punkten sind wieder diejenigen von $\mathcal{H}om(G,H)$. Man prüft leicht nach, daß $\mathcal{H}om(G,H)_{\mathrm{rat}}$ wieder ein G-Modul ist. Also ist $H^n(G, \mathcal{H}om(G,H)_{\mathrm{rat}}) = 0$ für $n \geqq 1$.

Es existiert eine exakte Folge von G-Moduln

$$0 \to \mathcal{H}om(G,H)^0 \to \mathcal{H}om(G,H)_{\mathrm{rat}} \to \mathrm{Hom}(G,H)^k \to 0,$$

wobei $\mathcal{H}om(G,H)^0$ die zu $\mathcal{H}om(G,H)_{\mathrm{rat}}$ gehörige infinitesimale Gruppe und $\mathrm{Hom}(G,H)^k$ die zu $\mathcal{H}om(G,H)_{\mathrm{rat}}$ gehörige separable Gruppe, die eine konstante Gruppe ist, seien [4]. Da alle Restklassenkörper k sind, existiert ein Schnitt $\mathrm{Hom}(G,H)^k \to \mathcal{H}om(G,H)_{\mathrm{rat}}$. Also existiert die lange exakte Kohomologiefolge:

$$\dots H^n(G, \mathcal{H}om(G,H)^0) \to H^n(G, \mathcal{H}om(G,H)_{\mathrm{rat}}) \to H^n(G, \mathrm{Hom}(G,H)^k) \dots .$$

Da $\mathrm{Hom}(G^n, \mathrm{Hom}(G,H)^k) \cong \mathrm{Hom}(G,H)$ ist – G^n ist wie oben gezeigt infinitesimal –, ist $H^n(G, \mathrm{Hom}(G,H)^k) = 0$ für $n \geqq 1$. Aus der exakten Kohomologiefolge folgt dann $H^n(G, \mathcal{H}om(G,H)^0) = 0$ für $n \geqq 2$.

Es ist

$$\mathrm{Hom}(G^n, \mathcal{H}om(G,H)^0) = \mathrm{Hom}(G^n, {}_F\mathcal{H}om(G,H)^0),$$

wobei ${}_F\mathcal{H}om(G,H)^0$ die Untergruppe von $\mathcal{H}om(G,H)^0$ der Höhe $\leqq 1$ ist. G^n ist nämlich infinitesimal und für alle $x \in \mathfrak{M}$, dem maximalen Ideal der affinen Algebra von G^n, gilt $x^p = 0$. Also ist auch

$$H^n(G, {}_F\mathcal{H}om(G,H)^0) = 0 \qquad \text{für } n \geqq 2. \tag{4}$$

Der Monomorphismus $H \to \mathscr{H}om(G,H)$ von G-Moduln läßt sich durch den G-Modul ${}_F\mathscr{H}om(G,H)^0$ faktorisieren, weil H infinitesimal von der Höhe $\leqq 1$ ist. Also sind die Funktoren $H^n(G, .)$ für $n \geqq 2$ auslöschbar.

In der Kategorie der kommutativen IFG 1, auf denen G operiert, besitzt jede exakte Folge

$$0 \to H' \to H \to H'' \to 0$$

einen Schemaschnitt $H'' \to H$. Das folgt aus der Struktur der affinen Algebren von H, die die Form ([4], 4.4, Th.) $k[[\omega]]/(x^p)_{x \in \omega}$ haben. Da nämlich die Relationen für Elemente aus ω bei Homomorphismen dieselben bleiben, lassen sich Schnitte konstruieren. Damit bilden die $H^n(G, .)$ für $n \geqq 1$ eine rechtsuniversell exakt verbundene Folge von Funktoren, was zu beweisen war.

In der Kategorie der IFG 1 können wir jetzt speziell die Resultate über die periodische Kohomologie aus IV formulieren. Wir nennen die Kohomologie von G periodisch, wenn es ein $q \geqq 1$ gibt, so daß funktoriell in H gilt $H^n(G,H) \cong H^{n+q}(G,H)$ für $n \geqq 3$. G heiße endlich, wenn die affine Algebra von G endlich-dimensional ist. Durch IV, Satz 2.6, erhalten wir dann

Korollar 4. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Ist die Kohomologie der endlichen Gruppe G periodisch, so ist jede kommutative Untergruppe von G von der Form $\mu_p \times \cdots \times \mu_p \times \alpha_{p^i}^*$ für $i \geqq 0$, wobei $\alpha_{p^0}^* = k$ sei.*

μ_p sei dabei die Gruppe der p-ten Einheitswurzeln und $\alpha_{p^i}^*$ die duale Gruppe der Elemente mit $x^{p^i} = 0$. Diese erwähnte Dualität erzeugt eine Antiäquivalenz der Kategorie der kommutativen formellen Gruppen über k zur Kategorie der kommutativen affinen algebraischen Gruppen über k. Eine p-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist genau dann zyklisch, wenn die assoziative p-Hülle U von $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Faktoralgebra von $k[X]$ ist und wenn $\Delta \bar{X} = \bar{X} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{X}$ gilt, d.h. wenn $\bar{X}$ in $\mathfrak{g}$ liegt. Das gilt aber genau dann, wenn U eine affine kommutative endliche Untergruppe von G_a definiert. Wegen der obigen Antiäquivalenz heiße also eine IFG 1 zyklisch, wenn sie endliche Faktorgruppe von G_a^* ist, der zu G_a dualen Gruppe.

Korollar 5. *Eine zyklische infinitesimale formelle Gruppe der Höhe $\leqq 1$ hat periodische Kohomologie mit der Periode 2.*

Anhang: Zur Kohomologie nicht-assoziativer Algebren

Sei k ein beliebiger Körper. Wir verwenden die Bezeichnungen und Sätze aus [8]. Definiere S eine Klasse von k-Algebren $C(S)$ und habe S die Eigenschaften α und β ([8], S. 125, 129). Darunter fallen assoziative, alternative, Lie- und Jordan-Algebren, wobei bei Jordan-Algebren die Einschränkung zu machen ist, daß die Charakteristik von k von 2 verschieden sein muß. Sei $\mathfrak{A} \in C(S)$. Wegen [8], S. 147, existiert ein „universeller Multiplikations-Funktor", der jeder S-Algebra $\mathfrak{A}$ eine assoziative Algebra U mit 1 zuordnet, derart, daß die Kategorie der $\mathfrak{A}$-Bimoduln isomorph zur Kategorie der U-Moduln wird.

Sei k ein trivialer $\mathfrak{A}$-Bimodul, d.h. sei $a\alpha=0=\alpha a$ für $\alpha\in k$, $a\in\mathfrak{A}$. Dann definieren wir wie in I

$$\tilde{H}^n(\mathfrak{A},\mathfrak{M})=\mathrm{Ext}_U^n(k,\mathfrak{M}) \tag{A.1}$$

für $\mathfrak{A}$-Bimoduln $\mathfrak{M}$.

Sei $\mathfrak{M}$ ein Bimodul für die S-Algebra $\mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{M}=\mathfrak{E}$ eine S-Algebra mit der Multiplikation

$$(a,m)(a',m')=(a\,a',a\,m'+m\,a').$$

Wie oben definieren wir S-Graph$(\mathfrak{A},\mathfrak{M})$ als die Menge der Abbildungen von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{M}$, deren Graph in $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{M}$ eine S-Unteralgebra definiert. Das bedeutet, daß $f\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{M}$ die Eigenschaft

$$f(a\,b)=a\,f(b)+f(a)\,b=a^\lambda f(b)+b^\rho f(a) \tag{A.2}$$

haben muß. Dann gilt

Lemma 1. *Der Funktor* S-Graph$(\mathfrak{A},\mathfrak{M})$ *ist in der Kategorie der U-Moduln repräsentierbar.*

Sei $f\in S$-Graph$(\mathfrak{A},\mathfrak{M})$. Dann definieren wir einen U-Homomorphismus $g\colon U\otimes\mathfrak{A}\to\mathfrak{M}$ durch $g(u\otimes a)=u\,f(a)$. (A.2) geht dann über in die Bedingung

$$g(1\otimes a\,b)=g(a^\lambda\otimes b)+g(b^\rho\otimes a). \tag{A.3}$$

Umgekehrt definiert jeder U-Homomorphismus $g\colon U\otimes\mathfrak{A}\to\mathfrak{M}$, der (A.3) erfüllt, ein Element $f\in S$-Graph$(\mathfrak{A},\mathfrak{M})$ durch $f(a)=g(1\otimes a)$. Diese Zuordnungen sind bijektiv und funktoriell in $\mathfrak{M}$. Also ist $C\cong U\otimes\mathfrak{A}/K$, wobei K der von den Elementen $1\otimes a\,b-a^\lambda\otimes b-b^\rho\otimes a$ erzeugte U-Untermodul von $U\otimes\mathfrak{A}$ sei, und

$$S\text{-Graph}(\mathfrak{A},\mathfrak{M})\cong\mathrm{Hom}_U(C,\mathfrak{M}). \tag{A.4}$$

Wie in I definieren wir jetzt

$$\begin{aligned}&H^n(\mathfrak{A},\mathfrak{M})=\mathrm{Ext}_U^{n-1}(C,\mathfrak{M}) \qquad n\geqq 1,\\ &H^0(\mathfrak{A},\mathfrak{M})=0.\end{aligned} \tag{A.5}$$

Zur Berechnung von $H^2(\mathfrak{A},\mathfrak{M})$ verwenden wir die Bar-Auflösung von C über U:

$$\cdots\to U\otimes U\otimes C\to U\otimes C\to C\to 0.$$

Das definiert den Komplex

$$0\to\mathrm{Hom}_U(U\otimes C,\mathfrak{M})\to\mathrm{Hom}_U(U\otimes U\otimes C,\mathfrak{M})\to\cdots.$$

Da $\mathrm{Hom}_U(U\otimes A,B)\cong\mathrm{Hom}_k(A,B)$, erhalten wir

$$0\to\mathrm{Hom}_k(C,\mathfrak{M})\to\mathrm{Hom}_k(U\otimes C,\mathfrak{M})\to\mathrm{Hom}_k(U\otimes U\otimes C,\mathfrak{M})\ldots.$$

Sei $\sigma\in\mathrm{Hom}_k(U\otimes C,\mathfrak{M})$ ein 2-Kozykel, d.h. sei

$$u\,\sigma(v\otimes c)-\sigma(u\,v\otimes c)+\sigma(u\otimes v\,c)=0.$$

σ definiert einen k-Homomorphismus τ: $U \otimes U \otimes \mathfrak{A} \to \mathfrak{M}$ mit $\mathrm{Kern}(\tau) \supseteq U \otimes K$ und

$$u\,\tau(v \otimes w \otimes a) - \tau(u\,v \otimes w \otimes a) + \tau(u \otimes v\,w \otimes a) = 0.$$

Wir definieren einen k-Homomorphismus h: $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \to \mathfrak{M}$ durch

$$h(a \otimes b) = \tau(a^\lambda \otimes 1 \otimes b) + \tau(b^\rho \otimes 1 \otimes a). \tag{A.6}$$

Mit h können wir für ein festes η wie in [8], I, 6, S. 150, den k-Homomorphismus (η,h): $k\{\{X\}\}' \to \mathfrak{M}$ definieren durch

$$(\eta, h)(x_i) = 0$$
$$(\eta, h)(M_1\,M_2) = m_1^\lambda(\eta, h)(M_2) + m_2^\rho(\eta, h)(M_1),$$

wobei M_i Monome sind und $m_i = \eta(M_i)$. Wir wollen zeigen, daß für alle $f \in S$ gilt $(\eta,h)(f) = 0$.

Sei μ: $k\{\{Z\}\}' \to \mathfrak{A} \oplus U \otimes \mathfrak{A}$ der k-Algebren-Homomorphismus mit $\mu(x_i) = \eta(x_i) = a_i$ und $\mu(y_i) = 1 \otimes a_i$. Sei Δ: $k\{\{X\}\}' \to k\{\{Z\}\}'$ der k-Homomorphismus

$$\Delta(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) - f(x_1, \ldots, x_n).$$

Dann ist wegen $\mu(\mathfrak{Y}^2) = 0$:

$$\begin{aligned} \mu\,\Delta(x_i) &= 1 \otimes a_i, \\ \mu\,\Delta(M_1\,M_2) &= \mu\big(M_1\,M_2(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) - M_1\,M_2(\mathfrak{x})\big) \\ &= \mu\big(M_1(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})\,M_2(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) - M_1(\mathfrak{x})\,M_2(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})\big) \\ &\quad + \mu\big(M_1(\mathfrak{x})\,M_2(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) - M_1(\mathfrak{x})\,M_2(\mathfrak{x})\big) \\ &= m_1^\lambda\,\mu\,\Delta(M_2) + m_2^\rho\,\mu\,\Delta(M_1). \end{aligned} \tag{A.7}$$

Wegen [8], I.2, (6), ist für alle $f \in S$ $\mu\Delta f = 0$. Wegen (A.7) können wir $\mu\Delta$ auffassen als $\mu\Delta: k\{\{X\}\}' \to U \otimes \mathfrak{A}$. Wir zeigen jetzt, daß $\mu\,\Delta(f) \equiv 1 \otimes \eta(f) \bmod (K)$. Es ist $\mu\Delta(x_i) = 1 \otimes a_i = 1 \otimes \eta(x_i)$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \mu\,\Delta(M_1\,M_2) &= m_1^\lambda\,\mu\,\Delta(M_2) + m_2^\rho\,\mu\,\Delta(M_1) \\ &\equiv m_1^\lambda \otimes m_2 + m_2^\rho \otimes m_1 \equiv 1 \otimes m_1\,m_2 \bmod (K). \end{aligned}$$

Sei ψ: $k\{\{X\}\}' \to U \otimes U \otimes \mathfrak{A}$ definiert durch die Zusammensetzung von $\mu\Delta$ mit $u \otimes a \to u \otimes 1 \otimes a$. Dann ist $\tau\psi = (\eta,h)$, denn

$$\psi(x_i) = \tau(1 \otimes 1 \otimes a_i) = 0 = (\eta, h)(x_i)$$

und

$$\begin{aligned} \tau\,\psi(M_1\,M_2) &= \tau\big(m_1^\lambda\,\psi(M_2) + m_2^\rho\,\psi(M_1)\big) \\ &= m_1^\lambda\,\tau\,\psi(M_2) + m_2^\rho\,\tau\,\psi(M_1) + \tau\big(m_1^\lambda \otimes \mu\,\Delta(M_2)\big) + \tau\big(m_2^\rho \otimes \mu\,\Delta(M_1)\big) \\ &= m_1^\lambda(\eta, h)(M_2) + m_2^\rho(\eta, h)(M_1) + \tau(m_1^\lambda \otimes 1 \otimes m_2) + \tau(m_2^\rho \otimes 1 \otimes m_1) \\ &= (\eta, h)(M_1\,M_2). \end{aligned}$$

Damit ist

$$(\eta, h)(f)=0 \qquad \text{für alle } f \in S. \tag{A.8}$$

Also ist h ein Faktorensystem im Sinne von [8], S. 154.

Sei jetzt τ ein Korand, d.h. existiere ein Homomorphismus τ': $U \otimes \mathfrak{A} \to \mathfrak{M}$ mit

$$\tau(u \otimes v \otimes a) = u\,\tau'(v \otimes a) - \tau'(u\,v \otimes a)$$

und

$$\tau'(1 \otimes a\,b - a^{\lambda} \otimes b - b^{p} \otimes a) = 0.$$

Dann ist

$$h(a \otimes b) = -\tau'(1 \otimes a\,b) + a^{\lambda}\tau'(1 \otimes b) + b^{p}\,\tau'(1 \otimes a),$$

also ein triviales Faktorensystem. Die Zuordnung (A.6) definiert also einen Homomorphismus φ: $H^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \to \operatorname{Opext}(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ nach [8], I, Th. 5, S. 153.

Wir wollen den Kern von φ bestimmen. Sei

$$h(a \otimes b) = \tau(a^{\lambda} \otimes 1 \otimes b) + \tau(b^{p} \otimes 1 \otimes a) = 0.$$

Dann definieren wir $f(u \otimes a) = \tau(u \otimes 1 \otimes a)$. Wegen

$$\tau(u \otimes v \otimes a) = -u\,\tau(v \otimes 1 \otimes a) + \tau(u\,v \otimes 1 \otimes a) = -u\,f(v \otimes a) + f(u\,v \otimes a)$$

ist τ ein Korand, falls f den Modul K annulliert. Es ist

$$\begin{aligned} f(u \otimes a\,b) &= \tau(u \otimes 1 \otimes a\,b) = \tau(u \otimes a^{\lambda} \otimes b) + \tau(u \otimes b^{p} \otimes a) \\ &= -u\,\tau(a^{\lambda} \otimes 1 \otimes b) + \tau(u\,a^{\lambda} \otimes 1 \otimes b) - u\,\tau(b^{p} \otimes 1 \otimes a) + \tau(u\,b^{p} \otimes 1 \otimes a) \\ &= f(u\,a^{\lambda} \otimes b) + f(u\,b^{p} \otimes a), \end{aligned}$$

also ist $f(K)=0$ und τ ein Korand.

Satz 2. *Es existiert ein Monomorphismus* φ: $H^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \to \operatorname{Opext}(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$.

Der Beweis, daß für die Klasse der Lie-Algebren $\tilde{H}^n(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \cong H^n(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ für $n \geqq 2$, läßt sich auf den allgemeinen Fall nicht übertragen, und vermutlich ist diese Aussage für beliebige nicht-assoziative Algebren auch nicht richtig.

Bibliographie

1. Berkson, A.: The u-algebra of a restricted Lie algebra is Frobenius. Proc. Am. Math. Soc. **15**, 14–15 (1964).
2. Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie, Chap. I. Paris: Hermann 1960.
3. Cartan, H., and S. Eilenberg: Homological algebra. Princeton Press 1956.
4. Gabriel, P.: Groupes formels. Séminaire M. Demazure et A. Grothendieck, Exp. VII_B. IHES 1962–1964.
5. Hochschild, G.: Cohomology of restricted Lie algebras. Am. J. of Math. **76**, 555–580 (1954).
6. — Lie algebra kernels and cohomology. Am. J. of Math. **76**, 698–716 (1954).
7. Jacobson, N.: Lie algebras. New York: [Interscience] John Wiley & Sons 1962.

8. — Representation theory of Jordan algebras. C.I.M.E. 2 Ciclo, Some aspects of ring theory. Roma 1966.
9. KASCH, F.: Projektive Frobenius-Erweiterungen. Sitzungsber. Heidelberger Akad. 89—109 (1960/61).
10. — Dualitätseigenschaften von Frobenius-Erweiterungen. Math. Z. **77**, 219—227 (1961).
11. MACLANE, S.: Homology. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1963.
12. MAY, J. P.: The cohomology of restricted Lie algebras. J. Algebra **3**, 123—146 (1966).
13. PAREIGIS, B.: Einige Bemerkungen über Frobenius-Erweiterungen. Math. Ann. **153**, 1—13 (1964).
14. — Cohomology of groups in arbitrary categories. Proc. Am. Math. Soc. **15**, 803—809 (1964).
15. — Vergessende Funktoren und Ringhomomorphismen. Math. Z. **93**, 265—275 (1966).
16. Séminaire Heidelberg-Strasbourg, Groupes algébriques linéaires. 1965/66.

Dozent Dr. BODO PAREIGIS
Mathematisches Institut der Universität
8000 München 13, Schellingstraße 2—8