3

Professor Dr. Bodo Pareigis ist Ordinarius an der Fakultät für Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität München. Er hat den Lehrstuhl für Mathematik unter besonderer Berücksichtigung der Algebra inne (Forschungen auf den Gebieten der Hopf-Algebren, der Kategorien und Funktoren und der quadratischen Formen).

Das vorliegende Referat wurde im Rahmen des Fortbildungslehrganges "Raum und Zeit" am 06.11.1989 in der Akademie für Lehrerfortbildung gehalten.

Prof. Dr. Bodo Pareigis:

Der Raum und physikalische Quanteneffekte

Nachdem sich Physik und Mathematik über Jahrzehnte dieses Jahrhunderts immer mehr entfremdet hatten, ist in den letzten Jahren eine aufsehenerregende neue Entwicklung eingetreten. Über einen ganz kleinen Ausschnitt davon möchte ich Ihnen heute vorwiegend aus der Sicht des Mathematikers, vielleicht ein wenig auch aus der Sicht des philosophierenden Mathematikers, berichten. Die Entwicklung auf diesem Gebiet ist atemberaubend schnell, jedoch sind die Resultate keineswegs abgeschlossen. In vielem muß ich daher bei Andeutungen bleiben, zumal ich in der zur Verfugung stehenden Zeit das mathematische Rustzeug sowieso nicht bereitstellen kann. Ich will also auf mathematische Formeln weitgehend oder gänzlich verzichten. Auf mathematische Begriffsbildungen kann ich jedoch nicht ganz verzichten.

Die Mathematiker haben ihr Gebäude der Mathematik in diesem Jahrhundert völlig verändert. Wo früher schöne Funktionen mit ihren Reihenentwicklungen und Nullstellen standen, da stehen heute Funktionenräume auf Funktionenräumen, abstrakte Konstruktionen, die dort eingreifen, wo man gern Funktionen hätte, aber weiß , daß keine zur Verfügung stehen, kurz die Sprache der Mathematik ist ungemein abstrakt geworden, die Erkenntnisse sind dementsprechend verfeinert und vertieft worden - und kein Physiker glaubte noch, daß diese abtrakten Gebilde jemals für die realitätsnahe Physik von Nutzen sein würden. Das jedoch hat sich gründlich geändert. Ich bin überzeugt, daß das jetzt zu Ende gehende Jahrzehnt und wohl auch noch das nächste Marksteine für die Physik gesetzt hat und setzten wird, die vergleichbar sind mit der Einführung der Relativitätstheorie oder ähnlicher großer Theorien. Einer der Exponenten der modernen theoretischen Physik ist der Physiker E. Witten, der die modernsten mathematischen Entwicklungen, z.B. die exotischen Strukturen von Donaldson auf 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, in seinen Entwurf einer Quantenfeldtheorie aufgenommen hat. Seine mathematischen Modelle werden wiederum von so ausgezeichneten Mathematikern wie Sir Michael Atiyah in Oxford für die Mathematik ausgewertet. Von dieser aufregenden modernen Zusammenarbeit der Mathematik und der Physik will ich versuchen, hier einen kleinen Eindruck zu geben.

1. Die Geometrie des Raumes und sein Funktionenring

Der uns umgebende Raum wird durch unsere Erfahrung, durch Experimente, durch Messungen auf eine merkwürdige Weise zugänglich gemacht. Wenn man Punkte im dreidimensionalen Raum durch Koordinaten darstellen will, so braucht man drei Funktionen, die auf dem ganzen Raun definiert sind und die Werte in den reellen Zahlen annehmen, die Funktion "x-Wert", die Funktion "y-Wert" und die Funktion "z-Wert". Diese Funktionen müssen auf dem gesamten Raum definert sein, sonst könnten wir nicht jedem Punkt seine Koordinaten zuweisen. Für verschiedene Koordinatensysteme für den Raum erhalten wir verschiedene solche Funktionen. Andere interessante Funktionen sind z.B. die Stärke der Anziehungskraft der Erde bei verschiedenen Punkten - oder aber die Anziehungskraft selber aufgefaßt als bzgl. der gegebenen Koordinaten ausgerichtete Kraftvektoren. Auch diese Kraftvektoren kann man wieder als Tripel von Funktionen oder aber als drei einzelne Funktionen auf dem Raum mit Werten in den reellen Zahlen auffassen. Viele weitere solche Funktionen können angegeben werden. Wir werden die Menge aller möglichen Funktionen betrachten. Diese werden wir mit O bezeichnen.

Was hat diese Menge für grundlegende mathematische Eigenschaften? Zunächst ist als wichtigste Eigenschaft festzuhalten, daß zwei Punkte genau dann gleich sind, wenn sie durch die Funktionen aus O nicht unterschieden werden können. Diese Aussage, die man leicht einsieht, wenn man an die Koordinaten-Funktionen denkt, und wenn man sich klarmacht, daß zwei Punkte genau dann gleich sind, wenn sie dieselben Koordinaten bzw. Koordinatenwerte haben, diese Aussage ist ungemein wichtig. Man kann sie gar nicht überschätzen. Wir werden gleich noch sehen, warum sie so wichtig ist.

Ehe wir weitere mathematische Eigenschaften der Menge O aller Funktionen auf dem Raum betrachten, wollen wir die physikalisch-philosophischen Hintergrund-Ideen diskutieren. Den Raum selbst können wir in seiner Natur gar nicht erkennen. Ich erinnere hier nur an die vielen philosophischen Abhandlungen darüber, man denke etwa an Kant. Was wir erfahren, erkennen, messen können, ist jeweils als Funktion aus O zu verstehen. Wir messen Lagen, Kräfte, ja auch Abstände, Energien usw., alles Funktionen auf dem Raum mit Werten in den reellen Zahlen, aber nicht den Raum selber. Man sollte sich hier ganz klar fragen, was mehr Realität hat, die Funktionen auf dem Raum oder aber der Raum selber! Wir werden auf diesen Gesichtspunkt sogleich zurückkommen.

Zunächst aber wollen wir die mathematischen Eigenschaften der Menge O aller Funktionen weiter entwickeln. Wenn man zwei Funktionen auf dem Raum hat, so kann man ihre Summe bilden, indem man einfach die Werte jeweils an einem Punkte addiert. Man kann also für jeden Punkt z.B. seinen x-Wert und seinen z-Wert addieren und erhält so eine neue Funktion auf dem Raum. Ebenso kann man die Werte zweier Funktionen multiplizieren und so ein Produkt von Funktionen definieren. Auch die Subtraktion von Funktionen kann so eingeführt werden - nicht jedoch die Division, weil die Funktionen leicht auch einmal den Wert Null annehmen können. Dann wäre aber eine Division nicht möglich. Die so beschriebene Struktur stellt sich tatsächlich als Struktur einer reellen Algebra (eines Ringes) heraus. Und weil die Multiplikation der Werte von Funktionen kommutativ ist, erhält man sogar einen kommutativen Ring O.

Wenn man jetzt einen anderen "Raum", als den bisher implizit als euklidisch dreidimensional angenommenen Raum betrachtet, um unserer Vorstellung gerecht zu werden, etwa die (2-)Sphäre S, d.h. die Oberfläche einer Kugel, so kann man auch auf ihr die Menge aller reell-wertigen Funktionen betrachten, die wir jetzt mit $O(S)$ bezeichnen, und stellt fest, daß sie wiederum einen kommutativen Ring bildet. Auch hier gilt die oben diskutierte Tatsache, daß man zwei Punkte mit Hilfe der Funktionen unterscheiden kann, d.h. daß zwei Punkte genau dann gleich sind, wenn sie unter allen Funktionen dieselben Werte annehmen. Sowohl für die Ringstruktur als auch für die Festlegung der Punkte kann man sich auch auf Klassen besonders schöner Funktionen beschränken, z.B. nur auf stetige Funktionen oder auf differenzierbare Funktionen oder andere Klassen.

Ein tiefliegende mathematische Erkenntnis ist nun, daß man nur aus der Kenntnis des kommutativen Funktionenrings eines Raumes oder einer Mannigfaltigkeit die letztere vollständig zurückgewinnen kann. Das soll heißen, daß man aus $O(R)$ nicht nur die Punkte des Raumes R wieder zurückgewinnen kann, d.h. den Raum als Menge erhalten kann, sondern sogar seine geometrische Struktur zurückerhält. Für die letztere Behauptung müßte ich hier etwas präziser werden. Ich will daher nur diskutieren, wie man die Punkte zurückerhält. Wenn man einen Punkt im Raum R festhält, so kann man einmal die Menge $I(p)$ aller Funktionen auf dem Raum R betrachten, die den Punkt p in die Null abbilden. Die Summe zweier solcher Funktionen hat sicher wieder diese Eigenschaft, ebenso das Produkt mit einer beliebigen Funktion. Damit erhalten wir von dem Punkt $p \in R$ ausgehend eine Teilmenge $I(p)$ in $O(R)$, die ein Ideal ist. Man kann sogar leicht zeigen, daß man so ein maximales Ideal gewonnen hat. Der aufregende mathematische Satz hierzu ist, daß man so alle maximalen Ideale erhält. Das bedeutet, daß es eine Bijektion zwischen den maximalen Idealen von $O(R)$ und den Punkten von R gibt. Man kann den Raum R aus dem Funktionenring zurück konstruieren, sogar mit allen seinen geometrischen Eigenschaften.

Da man zu jedem kommutativen Ring die Menge seiner maximalen Ideale als Raum betrachten kann, erhält man so eine Konstruktionsvorschrift, die aus Räumen kommutative Ringe macht und die gleichzeitig aus kommutativen Ringen wieder zugehörige Räume macht. Diese Zuordnung ist ebenfalls bijektiv. Das ist ein Satz, der u.a. von Gelfand Neimark bewiesen wurde, aber auch in anderen geometrischen Zusammenhängen wohlbekannt ist.

Wir wollen das noch ein wenig an einem Beispiel studieren. Wir betrachten zunächst die euklidische Ebene in x- und y-Koordinaten. Als Funktionen wollen wir nur reelle Polynome in den Koordinaten x und y, also in zwei Variablen zulassen. Wenn wir ein Polynom in den Variablen x und y haben, so soll sein Wert bei einem Punkt p der Wert des Polynoms sein, den man erhält, wenn man die Koordinaten von p in die Variablen des Polynoms einfach einsetzt. Wir wollen nun in der Ebene die Kurve $y = x^2$ betrachten. Zwei Polynome sollen äquivalent heißen, wenn sie auf der Kurve dieselbe Abbildung definieren, wiederum eine Abbildung in die reellen Zahlen, diesmal nur auf der Kurve definiert. Die äquivalenzklassen der so entstehenden Abbildungen auf unserer Kurve bilden einen Restklassenring, den Polynomring $\mathbf{R}[x,y]$ modulo dem Ideal, das von der Kurvengleichung $y-x^2$ erzeugt wird. Ein in der Algebra Geübter sieht sofort, daß dieser Restklassenring nichts anderes ist, als ein Polynomring in einer Variablen, der aber als Funktionenring der euklidischen Geraden auftritt. Die beiden Ringe sind also gleich (oder besser sie sind isomorph), damit sind auch die zugehörigen Räume isomorph. Und tatsächlich ist ja auch die Parabel für sich gesehen, d.h. ohne ihre Einbettung in die Ebene, nichts anderes als eine Gerade. Die Betrachtung des Funktionenringes hat uns auf diese einfache Erkenntnis verwiesen. Räume und ihre Funktionenringe müssen also als synonyme, gleichwertige Objekte betrachtet werden. Die Punkte sind in dem Funktionenring nunmehr nicht direkt faßbar, vielleicht ein Hinweis darauf, wie man heute die Frage beantworten soll: Was ist ein Punkt?

Die Physik ist sich dieses Tatbestands eigentlich schon seit langem bewußt. Aber obwohl ich auch Physik studiert habe, ist mir dieses Bewußtsein bis vor etwa einem Jahr nie vermittelt worden, vor allem nicht mit den oben angedeuteten mathematischen Erkenntnissen zusammen. Wir machen daher jetzt einen Ausflug in die

2. Klassische Mechanik

Die klassische Mechanik beschreibt den Zustand eines Teilchens durch seinen Ortsvektor und seinen Geschwindigkeitsvektor. Das sind insgesamt 6 Koordinaten. Wem es

Spaß macht, der kann als siebente Koordinate noch die Zeit hinzunehmen. Der Physiker befindet sich also von Haus aus in einem 6- (oder 7-)dimensionalen Raum, weil ja zunächst einmal alle Koordinaten voneinander unabhängig sind. Dieser Raum heißt technisch auch das Tangentialbündel des dreidimensionalen Raumes, weil man sich die Geschwindigkeitsvektoren auch als Tangentialvektoren an den dreidimensionalen Raum im 6-Dimensionalen vorstellt. Sie sehen also, daß der früher besprochene 4-dimensionale Raum eigentlich für die Physik viel zu klein ist. Tatsächlich braucht nun auch jedes Teilchen noch seinen eigenen Raum, so daß wir hier zu immens hohen Dimensionen vorstoßen. Der Zustand eines Teilchens ist also seine Lage in diesem Raum.

Unsere Messungen jedoch stellen Funktionen dar, die auf diesem Raum definiert sind und reelle Werte annehmen. Diese Funktionen oder möglichen Messungen bezeichnet der Physiker treffend als Observable. Sie sind es eigentlich, zu denen wir nur Zugang haben. Messungen, Wahrnehmungen, Funktionen bilden eigentlich unser Weltbild, nicht jedoch die geometrischen Begriffe, Punkte, Räume, Strecken. Diese sind erst sekundärer Art, primär gar nicht erfaßbar. Ein Modell, das wir uns gemacht haben, weil es mit den Beobachtungen übereinstimmt. Oder sollte man besser sagen, solange es mit den Beobachtungen übereinstimmt? Wir wissen jedenfalls aus den obigen überlegungen, daß dieses Vorgehen der Modellbildung sinnvoll ist, da ja zu jedem Raum sein Funktionenring gehört (hier die Menge der Observablen), und umgekehrt.

Dann kam

3. Das quantenmechanische Dilemma

Zunächst einmal mußte man feststellen, daß jede Messung den Zustand eines Teilchens notwendigerweise verändert. Eine Observable konnte also nicht mehr einfach als Funktion in die reellen Zahlen angesehen werden, sie mußte auch den Zustand ändern. Man ging also dazu über, Observable als lineare Funktionen des Raumes in sich anzusehen. Die Messungen der Ortskoordinaten und der Impulskoordinaten wurden also jetzt in einen viel größeren Ring $B(R)$ verlagert. Dieser Ring ist zunächst einmal nicht kommutativ. Und dann stand auch schon das zweite Dilemma vor der Tür, die Heisenbergsche Unschärferelation besagt, daß die Orts- und Impuls-Observablen in diesem größeren Ring tatsächlich nicht mehr miteinander vertauschbar sind. In sogenannter integrierter Form drückt sich das aus in der Gleichung $PQ = e^{i}\hbar QP$. Für den Wert von $\hbar$ nahezu Null ist $e^{i}\hbar$ nahezu Eins, also sind die Orts- und Impuls- (oder Geschwindigkeits-) Koordinaten nahezu miteinander vertauschbar, aber eben nicht ganz. Der Ring $B(R)$ der Funktionen auf dem Raum (die man noch geeignet normiert), war schon nicht kommutativ. Aber darin ist jetzt auch der Ring, der von den Orts- bzw. Impuls-Observablen aufgespannt wird, nicht mehr kommutativ. Ich will hier nicht auf die wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung dieser Phänomene eingehen, sondern auf das Dilemma, das diese Feststellung in Bezug auf unsere obigen überlegungen bedeutet.

Plötzlich ist der betrachtete Ring der Observablen nicht mehr kommutativ. Damit gibt es plötzlich mehrere Arten von maximalen Idealen (Sie erinnern sich, diese waren die Punkte unseres Raumes), die maximalen Links-Ideale, Rechts-Ideale und zweiseitigen Ideale. Die maximalen Links-Ideale entsprechen im Wesentlichen den (1-dimensionalen) irreduziblen Darstellungen, was immer das ist. Jedenfalls haben sich die Physiker schon immer für irreduzible Darstellungen interessiert. Sind das die Punkte unserer Wirklichkeit?

Betrachten wir ein ganz einfaches Beispiel. Es handelt von der heute so benannten Quantenebene. Sie soll die Quantisierung, d.h. "Nicht-Kommutativ-Machung" des zwei-dimensionalen Tangentialbündels sein. Wir betrachten hier also den eindimensionalen Orts-Raum und den eindimensionalen Impuls- (oder Geschwindigkeits-)Raum zusammengefaßt zu einem zweidimensionalen Raum, dem sogenannten Tangentialbündel. Der gewöhnliche Funktionenring auf diesem Raum wäre wie oben der Polynomring in zwei Variablen x und y oder hier besser P und Q. Jedoch darf man die Variablen nicht einfach bei der Multiplikation miteinander vertauschbar machen, sondern man muß sie die Gleichung $PQ = e^i\hbar QP$ erfüllen lassen. Das ergibt einen nicht-kommutativen Ring. Die maximalen Ideale hiervon, die ja die Punkte unseres Raumes darstellen sollten, liegen jetzt plötzlich alle auf der x-Achse bzw. auf der y-Achse. Es gibt also keine Mischungen mehr, keine Punkte mit beliebigen x- und y-Koordinaten.

Zu diesem erst seit kurzen bekannten verblüffenden Beispiel sollte man folgendes sagen. Zunächst einmal ist der angegebene Ring im wesentlichen die einzige Möglichkeit, etwas zwei-dimensionales Nicht-Kommutatives zu konstruieren. Wir haben hier also nicht etwa eine willkürliche Konstruktion durchgeführt, sondern haben die einzige Möglichlichkeit überhaupt gefunden und studiert. Weiter sind nur gewisse Punkte aufgetreten. Was an den übrigen Stellen passiert, die man gern auch als Punkte ansehen möchte, ist weder mathematisch noch physikalisch noch gar aus philosophischer Sicht klar. Es ist zu hoffen, daß die Starrheit dieses einfachen Modells für einen quantentheoretischen Raum tatsächlich in der Erkenntnis unserer Welt weiterführt. Ob unsere geometrischen Vorstellungen richtig oder falsch sind, kann vielleicht getestet werden. Jedenfalls tritt hier hervorragend das ein, was ich vorher schon bemerkte, das Primäre ist der Funktionenring, der in der Quantenmechanik notwendig (wegen unserer Messungen) nicht-kommutativ wird. Aus ihm geht eine gewisse bisher nur schlecht verstandene Geometrie hervor. Diese ist dann der Ersatz für das, was über Generationen der physikalische Raum und auch der Anschauungsraum waren. Eine wahrhaft faszinierende Wende in der physikalischen Begriffsbildung und im Zusammenspiel zwischen Mathematik und Physik.

4. Quantengruppen

Anfang dieses Jahres besuchte ich eine internationale Tagung in Tel Aviv, in Israel. Es war eine hervorragend besuchte Tagung mit absoluten Spitzenkräften aus der Mathematik, insbesondere aus der Ringtheorie. Da hatten Mathematiker seit 60, 70 Jahren nicht-kommutative Ringe studiert, immer mit der Vorstellung, daß das sicher keine Anwendungen außerhalb der Mathematik finden würde. Es gab und gibt ja auch heute noch den feinen, elitären Unterschied zwischen der reinen und der angewandten Mathematik!

Dort in Israel nun besuchte ich auch den Vortrag des international bekannten und berühmten theoretischen Physikers Sternberg. Der Beginn seines Vortrags war eine Offenbarung für mich. Hier wurden neue Forschungsimpulse gegeben, aus denen auch dieser Vortrag entstanden ist. Etwas länglich und mit ungeheurer Faszination fing Sternberg an ein Gleichnis zu entwickeln von dem Geschäftsmann, der seit Jahren Aktien einer kleinen ganz bestimmten Spezialfirma gekauft hat, der viel investiert hat, ohne auf allzu große Rendite zu hoffen, der das Ganze als eine grundsolide Investition betrachtet hat, allerdings ohne größere Gewinnaussichten. Er meinte damit diejenigen Mathematiker, die intensiv algebraische Gruppen und allgemeine Hopf-Algebren studiert und erforscht haben. Sie taten dies aus Interesse an den merkwürdigen und schönen mathematischen Strukturen, aus innermathematischen Zusammenhängen heraus, aber niemals in der Hoffnung, größere Anwendungen dazu zu finden. Das Gleichnis geht weiter mit einer ungeheuren Hausse in den Aktien der Firma, weil plötzlich das einzige Produkt dieser Firma den ganzen großen Weltmarkt erobert hat. In diesem Vortrag erfuhr ich zum ersten Male von Quantengruppen und daß sie nichts anderes als Hopf-Algebren seien, mein ureigenstes Forschungsgebiet.

Warum war mir das so lange verborgen geblieben? Schließlich datieren Veröffentlichungen dazu sicher 5-10 Jahre zurück. Nun, nachdem ich als Student einmal auch Physik studiert hatte und dann in die reine Mathematik gegangen war, hatte ich die Verbindung zur Physik verloren gehabt. Meine Mathematik ließ sich dort nicht anwenden, die Physiker sprachen je nach Alter völlig verschiedene Sprachen und die grundlegenden Entwicklungen erfuhr man am besten aus der populärwissenschaftlichen Literatur. So war ich zwar schon über den Begriff der Quantengruppen gestolpert, hatte sie aber als etwas physikalisch motiviertes und mit meinen Forschungen nicht zusammenhängendes ad acta gelegt.

Hier waren sie nun, von den theoretischen Physikern definiert als nicht-kommutative nicht-kokommutative Hopf-Algebren. Darüber wußte ich wirklich Bescheid. Dann stellte sich heraus, daß sogar meine eigenen Arbeiten in diesen Zusammenhang mit hineingebracht worden waren. So mußte ich nun schnell den minimalen physikalischen Hintergrund mir aneignen, der zum Verständnis dieser neuen Entwicklung hilft. Wo kommen die Quantengruppen her?

Die Geometrie eines Raumes ist in zusätzlicher Information verborgen, die über die Angabe der Menge aller Punkte des Raumes hinausgeht. Das könnte eine Metrik sein, wie früher diskutiert, oder eine Topologie auf dem Raum oder eine differenzierbare Struktur. Vieles jedoch verbirgt sich in der Gruppe der zulässigen Transformationen oder Automorphismen des Raumes. Das geht schon auf Felix Klein zurück, der zeigte, wie man aus der Punktmenge Raum und der darauf operierenden Gruppe seine geometrische Struktur zurückgewinnen konnte. Dieses Rezept liegt allen heutigen physikalischen Theorien zugrunde. Da ist also nicht nur der Raum, sondern auch die Gruppe, die auf ihm operiert. Die Gruppe ist selbst auch ein Raum und hat somit einen Funktionenring. Die Gruppenstruktur macht aus dem Funktionenring sogar eine Hopf-Algebra, was immer das auch sein mag. Und diese wird nach unseren obigen Überlegungen nicht-kommutativ, wenn man die Physik damit beschreiben will, vor allem die Quantenphysik.

Ohne auf die präzise mathematische Definition einzugehen oder gar wesentliche mathematische Aussagen über Hopf-Algebren zu machen, sei nur folgendes gesagt. Die sogenannten Quanten-Gruppen sind außerordentlich schwierig zu erhalten, das soll sagen, es ist sehr schwer, alle Axiome zu erfüllen, sie sind sehr starr. Genau darin aber liegt die Hoffnung der theoretischen Physiker. Wenn aus mathematischen Gründen nur sehr wenige Möglichkeiten für ein Modell des Universums existieren, dann sollte es leichter sein, das einzig richtige Modell auszusuchen. So wie oben gesagt wurde, daß es im wesentlichen nur eine Quanteneben geben kann. Seit einiger Zeit versuche ich z.B. die Vermutung zu beweisen, daß es überhaupt keine Quantengruppe der Dimension 6 gibt. Wenn das wahr ist, sind die physikalischen Folgerungen noch gar nicht zu übersehen. Wenn ein eindeutiges mathematisches Modell unseres Universums erzielt werden könnte, dann könnte man sich auch wieder mehr mit der Frage beschäftigen: was ist ein Punkt, wie sieht die Geometrie des Universums aus, wo ist der Raum, in dem wir existieren. Vielleicht verschaffen die neuesten Entwicklungen in Mathematik und Physik demnächst tiefere Einblicke in diese Fragestellungen.