Grundbegriffe der Logik

Peter Hinst

(2009)

Vorbemerkung

GEO SIEGWART

PETER HINST (1936-2018) wirkte seit 1968 zunächst als wissenschaftlicher Assistent am damaligen Philosophischen Seminar II und späteren Institut für Philosophie, Logik und Wissenschaftstheorie der Ludwig-Maximilians-Universität München. Sein Engagement in der Lehre, später als Professor, reichte weit über seine Emeritierung im Jahre 2001 hinaus. Seit 1974 nahm er Lehraufträge an der Hochschule für Philosophie, an der Hochschule für Politik und der Hochschule der Bundeswehr wahr, die vornehmlich die Einführung in die Logik betrafen. Die ersten Jahre des akademischen Unterrichtens fanden ihren Abschluss in einem Werk, das 1974 bei Wilhelm Fink verlegt worden ist: „Logische Propädeutik. Eine Einführung in die deduktive Methode und logische Sprachanalyse". Das „Vorwort" (S.Vf) und die „Einleitung" (S.1-6) formulieren das auch in Zukunft verbindliche didaktische Programm. Sie lassen auch die sich durchhaltende methodische Einstellung des Autors erkennen: Die Fragestellungen (zumindest der analytischen) Wissenschaften sind, wenn machbar, mit der syntaktischen und semantischen Explizitheit anzugehen, die (insbesondere) mit dem Werk von GOTTLOB FREGE möglich geworden ist.

Der in der Folge bereitgestellte Beitrag ist eine rein strukturelle Behandlung der (klassischen) Logik erster Stufe. Er stammt aus dem Jahre 2009, einer Zeit, in der sein Autor bereits mit (seiner Version von) LATEX gearbeitet hat. In einer axiomatischen Mengensprache, die PETER HINST in anderen Skripten detailliert dargestellt hat, findet das syntaktischen Vokabular sowie der Begriff der Folgerung mit seinen Spielarten Behandlung. Die Konzepte werden so allgemein entwickelt, dass „die entsprechenden Grundbegriffe aller heute bekannten syntaktischen und logischen Systeme als Spezialfälle enthalten" (S.2) sein sollen. Als Adressaten kommen lediglich Kennerinnen der logischen Thematik in Betracht.

Es ist geplant, in absehbarer Zukunft sowohl die Sammlung von Texten von PETER HINST zu erweitern als auch einige kommentierende Erläuterungen anzufügen. Gedacht ist überdies an eine kurze wissenschaftliche Biografie, die die Schwerpunkte in Forschung und Lehre verdeutlicht und die besonderen Leistungen beschreibt; auch eine Bibliografie soll angefügt werden.

Abschließend habe ich MARLENE HINST für die Erlaubnis zur Veröffentlichung der Texte und für entgegenkommende Hilfe zu danken.

GEO SIEGWART
Greifswald/Mülheim an der Ruhr im Dezember 2021

Grundbegriffe der Logik

Peter Hinst

Version 07.2009

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Der zentrale Begriff der Logik ist der Begriff der *logischen Folgerung*. Dieser ist eine Relation zwischen *Klassen von Formeln* und *Formeln*. Bevor der Begriff der logischen Folgerung definiert werden kann, muß also der Begriff der Formel definiert werden. Dies ist Gegenstand der *Syntax*. Diese Arbeit besteht dementsprechend aus zwei Hauptabschnitten: der erste Hauptabschnitt behandelt die Grundbegriffe der

Syntax, der zweite die Grundbegriffe der formalen Logik im engeren Sinn. In beiden Teilen werden die zu entwickelnden Grundbegriffe möglichst allgemein gehalten; in ihnen sollen die entsprechenden Grundbegriffe aller heute bekannten syntaktischen und logischen Systeme als Spezialfälle enthalten sein.

Um die Aneinanderreihung von Definitionen und Theoremen möglichst kompakt und übersichtlich zu halten, sind allfällige Beweise in einem Anhang (Anhang A) zusammengestellt.

Die systematischen Teile dieser Arbeit (Definitionen, Theoreme und Beweise) sind in einer mengentheoretischen Sprache mit Urelementen und äußeren Klassen in der Tradition von NEUMANN, BERNAYS und GÖDEL formuliert.

1 Syntax

Die Definition der syntaktischen Grundbegriffe erfolgt im Rahmen von *Syntax--Basen*. Eine *Syntax-Basis* enthält die *atomaren Ausdrücke*, aus denen mit Hilfe einer *Erzeugungsrelation* alle übrigen Ausdrücke der Syntax-Basis induktiv erzeugt werden. Die verschiedenen Arten von Ausdrücken werden durch *Kategorien* unterschieden.

1.1 Kategorien

In diesem Abschnitt wird festgelegt, welche Konstrukte als Kategorien verwendet werden.

Der Kategorienbegriff wird induktiv relativ zu einer Klasse C von Grundkategorien definiert; wie die Elemente der Klasse C im einzelnen beschaffen sind, bleibt zunächst offen.

$*$ die (Klasse der) Kategorien über $\boldsymbol{C}$ $*$

1.1.1 DEF.– Für alle $\boldsymbol{C}$:

(1) $\forall c(c \in C \Rightarrow c \in \mathbf{CAT}(C))$ &

(2) $\forall c(c \in \mathbf{Tup}^{\geqslant 2}(\mathbf{CAT}(C)) \Rightarrow c \in \mathbf{CAT}(C))$ &

(3) $\forall c(c \in \mathbf{Tup}^{\geqslant 2}$ & $c_0 \in \mathbf{Tup}^{\geqslant 2}(\mathbf{CAT}(C))$ & $\forall i(i \in \mathbf{Dom}(c) \setminus \{0\} \Rightarrow c_i \in \mathbf{Tup}^{=1}(\mathbf{CAT}(C))) \Rightarrow c \in \mathbf{CAT}(C)\,)$ &

(4) (Prinzip der CAT-Induktion)

Für alle $\boldsymbol{M}$: wenn

(I.B.) $\forall c(c \in C \Rightarrow c \in M)$ &

(I.S.) $\forall c(c \in \mathbf{Tup}^{\geqslant 2}(M) \Rightarrow c \in M)$ & & $\forall c(c \in \mathbf{Tup}^{\geqslant 2}$ & $c_0 \in \mathbf{Tup}^{\geqslant 2}(M)$ & $\forall i(i \in \mathbf{Dom}(c) \setminus \{0\} \Rightarrow$ $\Rightarrow c_i \in \mathbf{Tup}^{=1}(M)) \Rightarrow c \in M)$,

dann $\mathbf{CAT}(C) \subseteq \boldsymbol{M}$.

Für einsortige Sprachen erster Stufe kann man z.B. als Grundkategorien

Für einsortige Sprachen erster Stufe kann man z.B. als Grundkategorien (Elemente der Klasse C) verwenden: 0 (Kategorie der Formeln) und 1 (Kategorie der Individuenterme). Damit sind alle Elemente von CAT($\{0, 1\}$) bestimmt. Von diesen werden für die üblichen einsortigen Sprachen erster Stufe ohne Kennzeichnungsoperatoren nur die folgenden benötigt:

(1) $\langle 1,1\rangle, \langle 1,1,1\rangle, \langle 1,1,1,1\rangle$ etc. für die Funktionskonstanten erster Stufe;

(2) $\langle 0,1\rangle, \langle 0,1,1\rangle, \langle 0,1,1,1\rangle$ etc. für die Prädikatkonstanten erster Stufe;

(3) $\langle 0,0\rangle$ für die einstelligen Junktoren, $\langle 0,0,0\rangle$ für die zweistelligen Junktoren;

(4) $\langle\langle 0,0\rangle, \langle 1\rangle\rangle$ für die Quantifikationskonstanten; das zweite Glied $\langle 1\rangle$ bestimmt, daß eine Quantifikationskonstante der Katgorie $\langle\langle 0,0\rangle, \langle 1\rangle\rangle$ auf und nur auf *Variablen* der Kategorie 1, d.h. Individuenvariablen angewendet werden kann.

Um z.B. auch Sprachen erster Stufe mit (definiten oder indefiniten) Kennzeichnungsoperatoren behandeln zu können, müßte auch die Kategorie

(5) $\langle\langle 1,0\rangle, \langle 1\rangle\rangle$

einbezogen werden.

Im Folgenden werden drei Teilklassen von $\mathrm{CAT}(C)$ öfters angesprochen werden: die Klasse der *Operatorkategorien*, die Klasse der *Konnektorkategorien* und die Klasse der *Binderkategorien*. Daher wird es sich als nützlich erweisen, für diese drei Klassen eigene Bezeichnungen einzuführen; dazu dienen die folgenden drei Definitionen.

∗ die (Klasse der) Operatorkategorien über $\boldsymbol{C}$ ∗

1.1.2 DEF.– Für alle $\boldsymbol{C}$: OprCAT($\boldsymbol{C}$) =CAT($\boldsymbol{C}$) $\setminus$ $\boldsymbol{C}$.

Wie aus Definition 1.1.1 hervorgeht, sind Operatorkategorien immer Tupel einer Länge $\geqslant 2$; wie später festgelegt werden wird, dienen Ausdrücke, deren Kategorie eine Operatorkategorie ist, dazu, aus einer geeigneten Folge von Ausdrücken einen Ausdruck zu erzeugen, dessen Kategorie das erste Glied jener Operatorkategorie ist.

∗ die (Klasse der) Konnektorkategorien über $\boldsymbol{C}$ ∗

1.1.3 DEF.– Für alle $\boldsymbol{C}$: KonnektorCAT($\boldsymbol{C}$) $=$ Tup$^{\geqslant 2}$(CAT($\boldsymbol{C}$)).

Konnektorkategorien sind Operatorkategorien. Der Ausdrucksbegriff wird später so definiert werden, daß die Kategorie genau der Ausdrücke eine Konnektorkategorie ist, die keine Variablenbinder sind.

∗ die (Klasse der) Binderkategorien über $\boldsymbol{C}$ ∗

1.1.4 DEF.– Für alle $\boldsymbol{C}$: BindCAT($\boldsymbol{C}$) $= \{\boldsymbol{c} \mid \boldsymbol{c} \in$ Tup$^{\geqslant 2}$ &
& $\boldsymbol{c}_0 \in$ KonnektorCAT($\boldsymbol{C}$) & $\forall \boldsymbol{i}(\boldsymbol{i} \in \mathbf{Dom}(\boldsymbol{c})\setminus\{\mathbf{0}\} \Rightarrow \boldsymbol{c}_i \in$ Tup$^{=1}$CAT($\boldsymbol{C}$)))$\}$.

Binderkategorien sind Operatorkategorien. Da 1-Tupel von Kategorien keine Kategorien sind, wenn die Klasse C der Grundkategorien keine Tupel enthält, sind unter letzterer Voraussetzung die Klassen der Konnektorkategorien und der Binderkategorien disjunkt; die Klasse der Operatorkategorien zerfällt also voll ständig und disjunkt in die Klasse der Konnektorkategorien und die Klasse der Binderkategorien.

In der vorstehenden Argumentation wurde die Voraussetzung verwendet, daß die Klasse C der Grundkategorien keine Tupel enthält; eine Klasse, die diese Bedingung erfüllt, heißt *zulässige Klasse von Grundkategorien*:

1.1.5 DEF.– Für alle C: *C ist eine zulässige Klasse von Grundkategorien* gdw $\mathbf{Cl}(C)$ & $C \neq 0$ & $C \cap \mathbf{Tup}^{\geqslant 1} = 0$.

Nun gilt:

1.1.6 BEH.– Für alle C: wenn C eine zulässige Klasse von Grundkategorien ist, dann ist $\mathbf{CAT}(C) \cap \mathbf{Tup}^{=1} = 0$.

1.2 Passende Folgen

Der zentrale Begriff der Syntax lautet: a ist ein Ausdruck der Kategorie c, bzw. c ist eine/die Kategorie des Ausdrucks a. Dieser Begriff wird als zweistellige Relation definiert, d.h. als Menge von geordneten Paaren der Gestalt (c, a), wobei c eine Kategorie und a ein Ausdruck ist. Diese Menge wird induktiv definiert. Im Induktionsschritt wird festgelegt, unter welchen Bedingungen aus einer endlichen Folge von geordneten Paaren der Menge ein weiteres geordnetes Paar der Menge erzeugt werden kann. Diese Bedingungen betreffen im wesentlichen die ersten Projektionen der geordneten Paare, d.h. die Kategorien der Ausdrücke, aus denen ein weiterer Ausdruck einer bestimmten Kategorie erzeugt werden soll: diese Kategorien müssen *passen*. Bevor dieser Begriff definiert wird, soll er an zwei Beispielen erläutert werden.

Der Begriff der passenden Folge wird so definiert werden, daß

$\langle(\langle 0, 1, 1\rangle, P), (1, a), (1, b)\rangle$

eine passende Folge ist, und zwar deswegen, weil die erste Projektion des ersten Gliedes dieser Folge $\langle 0, 1, 1\rangle$ und die erste Projektion der beiden anderen Glieder dieser Folge 1 lautet, also gleich dem zweiten und dritten Glied von $\langle 0, 1, 1\rangle$ ist.

Als zweites Beispiel betrachten wir die passende Folge

$\langle(\langle\langle 0, 0\rangle, \langle 1\rangle\rangle, Q), (1, v)\rangle$,

wobei v eine Variable sei. Dies ist eine passende Folge, weil die erste Projektion des ersten Gliedes dieser Folge $\langle\langle 0, 0\rangle, \langle 1\rangle\rangle$ und die erste Projektion des zweiten Gliedes 1 ist und v nach Voraussetzung eine Variable ist.

Weitere Beispiele passender Folgen sind:

$\langle(\langle 0, 0\rangle, J), (0, A)\rangle$
$\langle(\langle 1, 1, 1\rangle, f), (1, a), (1, b)\rangle$.

Die allgemeine Definition des Begriffs der passenden Folge lautet:

1.2.1 DEF.– Für alle t, C, V: *t ist eine passende Folge über C in V* genau dann, wenn gilt:

(1) $\mathbf{t \in Tup^{\geqslant 2}(\mathbb{V} \times \mathbb{V})}$ &

(2) $\mathbf{pr1(t_0) \in OprCAT(C)}$ & $\mathbf{Dom(pr1(t_0)) = Dom(t)}$ &

(3) ($\mathbf{pr1(t_0) \in KonnektorCAT(C)}$ & $\mathbf{\forall i(i \in Dom(t) \setminus \{0\} \Rightarrow}$
$\mathbf{\Rightarrow pr1(t_0)_i = pr1(t_i)))}$ **or** $\mathbf{(pr1(t_0) \in BindCAT(C)}$ & $\mathbf{\forall i(i \in Dom(t) \setminus \{0\} \Rightarrow}$
$\mathbf{pr1(t_0)_i = \langle pr1(t_i)\rangle}$ & $\mathbf{pr1(t_i) \in Dom(V)}$ & $\mathbf{pr2(t_i) \in Ran(V(pr1(t_i)))}$ &
$\mathbf{\forall j(j \in Dom(t) \setminus \{0\}}$ & $\mathbf{j \neq i \Rightarrow pr2(t_j) \neq pr2(t_i))))}$ **).**

1.3 Syntax-Basen

Die (molekularen) Ausdrücke einer Sprache werden aus gewissen *atomaren Ausdrücken* nach gewissen *Juxtapositions-Vorschriften* zusammengesetzt. In der folgenden Definition des Begriffs der Syntax-Basis werden drei Arten von atomaren Ausdrücken unterschieden und eine Juxtapositions-Vorschrift bereitgestellt. Im Anschluß an die Definition werden die einzelnen Bedingungen des Definiens inhaltlich erläutert.

1.3.1 DEF.– Für alle S: *S ist eine Syntax-Basis* genau dann, wenn gilt:

(1) $\mathbf{S \in Tup^{\geqslant 5}}$ &

(2) $\mathbf{S_0}$ **ist eine zulässige Klasse von Grundkategorien** &

(3) $\mathbf{S_1}$ **ist eine Funktion** & $\mathbf{Dom(S_1) \subseteq CAT(S_0)}$ &
$\mathbf{\forall c(c \in Dom(S_1) \Rightarrow S_1(c)}$ **ist eine unendliche Abzählung)** &
$\mathbf{\forall c \forall c'(c, c' \in Dom(S_1)}$ & $\mathbf{c \neq c' \Rightarrow Ran(S_1(c)) \cap Ran(S_1(c')) = 0)}$ &

(4) $\mathbf{S_2}$ **ist eine Funktion** & $\mathbf{Dom(S_2) \subseteq CAT(S_0)}$ &
$\mathbf{\forall c(c \in Dom(S_2) \Rightarrow S_2(c)}$ **ist eine unendliche Abzählung)** &
$\mathbf{\forall c \forall c'(c, c' \in Dom(S_2)}$ & $\mathbf{c \neq c' \Rightarrow Ran(S_2(c)) \cap Ran(S_2(c')) = 0)}$ &

(5) $\mathbf{S_3}$ **ist eine Funktion** & $\mathbf{Dom(S_3) \subseteq CAT(S_0)}$ &
$\mathbf{\forall c(c \in Dom(S_3) \Rightarrow S_3(c)}$ **ist eine eineindeutige Funktion)** &
$\mathbf{\forall c \forall c'(c, c' \in Dom(S_3)}$ & $\mathbf{c \neq c' \Rightarrow Ran(S_3(c)) \cap Ran(S_3(c')) = 0)}$ &

(6) $\mathbf{S_4}$ **ist eine Funktion** &
& $\mathbf{Dom(S_4) = \{t | t}$ **ist passende Folge über** $\mathbf{S_0}$ **in** $\mathbf{S_1\}}$ &
& $\mathbf{\forall t(t}$ **ist eine passende Folge über** $\mathbf{S_0}$ **in** $\mathbf{S_1 \Rightarrow S_4(t) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}}$ &
& $\mathbf{pr1(S_4(t)) = pr1(t_0)_0}$ & $\mathbf{\forall i(i \in Dom(t) \Rightarrow pr2(S_4(t)) \neq pr2(t_i)))}$ &
& $\mathbf{\forall t \forall t'(t, t' \in Dom(S_4)}$ & $\mathbf{pr2(S_4(t)) = pr2(S_4(t')) \Rightarrow Dom(t) = Dom(t')}$ & $\mathbf{\forall i(i \in Dom(t) \Rightarrow pr2(t_i) = pr2(t'_i)))}$ &

(7) $\mathbf{\forall i \forall j \forall c \forall c'(i, j \in \{1, 2, 3\}}$ & $\mathbf{i < j}$ & $\mathbf{c \in Dom(S_i)}$ &
& $\mathbf{c' \in Dom(S_j) \Rightarrow Ran(S_i(c)) \cap Ran(S_j(c')) = 0)}$ &

(8) $\mathbf{Ran(\bigcup(Ran(S_1 \cup S_2 \cup S_3))) \cap Dom(Ran(S_4)) = 0.}$

Erläuterungen:

Ad (1): Diese Bestimmung legt fest, daß eine Syntax-Basis ein Tupel *mindestens* der Länge 5 ist, und nicht wie üblich *genau* der Länge 5. Durch diese Abweichung wird die unangenehme Häufung von Indizes beim Zugriff auf Glieder von

Folgen vermieden, die eine Syntax-Basis als Teil enthalten. (Dies wird am Beispiel des Begriffs der Logik-Basis in Abschnitt 2.1 verständlicher werden.)

Ad (2): Das Glied S_0 einer Syntax-Basis S stellt die Grundkategorien für die Kategorien aller Ausdrücke bereit, die über S gebildet werden können. Durch die Bestimmung (2) wird erreicht, daß die Klasse der Grundkategorien, also S_0, disjunkt zur Klasse aller übrigen Kategorien ist; insbesondere gilt Theorem 1.1.6, was für das richtige Funktionieren der Binderkategorien nötig ist.

Ad(3): Mittels S_1 wird zu jeder Kategorie c in Dom(S_1) eine unendliche Abzählung $S_1(c)$ bereitgestellt; die Glieder dieser Abzählung sind vorgesehen zur Verwendung als *Variable* der Kategorie c. Durch das dritte Konjunktionsglied wird festgelegt, daß Variable verschiedener Kategorien verschieden sind.

Ad(4): In dieser Bedingung wird auf dieselbe Weise wie Bedingung (3) zu jeder Kategorie c in Dom(S_2) mittels S_2 eine unendliche Abzählung $S_2(c)$ bereitgestellt. Dadurch wird die Möglichkeit geschaffen, verschiedene Ausdrücke als durch Variablen bindende Operatoren gebundene Variablen und als freie Variable (Parameter) in Herleitungen (Beweisen) zu verwenden. Verlangt man im Einzelfall zusätzlich, daß Dom(S_1)$\subseteq$Dom(S_2), dann erspart man sich lästige Maßnahmen gegen Variablenkonfusion beim Substituieren. In Bedingung (7) ist die Festlegung enthalten, daß die in Bedingung (3) bereitgestellten Ausdrücke (gebundene Variable) verschieden sind von den in Bedingung (4) bereitgestellten Ausdrücken (freie Variable, Parameter).

Ad(5): Mittels S_3 wird zu jeder Kategorie c in Dom(S_3) eine eineindeutige Funktion $S_3(c)$ bereitgestellt; die Werte dieser Funktion sind zur Verwendung als *Konstanten* der Kategorie c vorgesehen. Durch das dritte Konjunktionsglied dieser Bedingung wird festgelegt, daß Konstante verschiedener Kategorien voneinander verschieden sind. Daß für c in Dom(S_3) nicht verlangt ist, daß $S_3(c)$ eine *Abzählung* ist, sondern allgemeiner eine *eineindeutige Funktion*, ist durch den Wunsch motiviert, die Klasse der intendierten Anwendungen der Theorie der Syntax-Basen möglichst groß zu halten; z.B. soll auf Sprachen, deren syntaktische Basis eine Syntax-Basis ist, die *Diagramm-Methode* anwendbar sein.

Ad(6): Die in den Bedingungen (3), (4) und (5) bereitgestellten Ausdrücke sind die *atomaren Ausdrücke* einer Syntax-Basis. In Bedingung (6) wird mittels S_4 eine Funktion bereitgestellt, mit der die Juxtaposition von (atomaren) Ausdrücken zu molekularen Ausdrücken bewerkstelligt werden kann. Diese Funktion erzeugt aus einer passenden Folge t ein geordnetes Paar $S_4(t)$, dessen erste Projektion eine Kategorie ist, und zwar gerade die erste Projektion des ersten Gliedes t_0 von t und dessen zweite Projektion verschieden ist von den zweiten Projektionen aller Glieder von t. Das letzte Konjunktionsglied von (6) erzwingt die eindeutige Zerlegbarkeit der zweiten Projektion von $S_4(t)$ in die zweiten Projektionen der Glieder von t.

Ad(7): Diese Bedingung legt fest, daß alle Variablen von allen Parametern und allen Konstanten und alle Parameter von allen Konstanten verschieden sind.

Ad(8): Diese Bedingung bestimmt, daß alle atomaren Ausdrücke von S verschieden von allen molekularen Ausdrücken von S sind.

In den nächsten Definitionen werden einige Bezeichnungen eingeführt.

$*$ die(Klasse der) Grundkategorien von $\boldsymbol{S}$ $*$

1.3.2 DEF.– Für alle S: $\mathbf{Cat}_S = S_0$.

$*$ die Variablenfunktion von S $*$

1.3.3 DEF.– Für alle S: $\mathbf{Var\text{-}F}_S = S_1$.

$*$ die (Klasse der) Variablenkategorien von $\boldsymbol{S}$ $*$

1.3.4 DEF.– Für alle S: $\mathbf{Var\text{-}Cat}_S = \mathbf{Dom}(S_1)$.

$*$ die (Klasse der) Variablen von $\boldsymbol{S}$ $*$

1.3.5 DEF.– Für alle S: $\mathbf{Var}_S = \{a \mid \exists c(c \in \mathbf{Dom}(S_1)$ & & $a \in \mathbf{Ran}(S_1(c)))\}$.

$*$ die (Klasse der) Variablen der Kategorie $\boldsymbol{c}$ von $\boldsymbol{S}$ $*$

1.3.6 DEF.– Für alle S,c: $\mathbf{VAR}^c_S = \mathbf{Ran}(S_1(c))$.

$*$ die Parameterfunktion von S $*$

1.3.7 DEF.– Für alle S: $\mathbf{Par\text{-}F}_S = S_2$.

$*$ die (Klasse der) Parameterkategorien von $\boldsymbol{S}$ $*$

1.3.8 DEF.– Für alle S: $\mathbf{Par\text{-}Cat}_S = \mathbf{Dom}(S_2)$.

$*$ die (Klasse der) Parameter von $\boldsymbol{S}$ $*$

1.3.9 DEF.– Für alle S: $\mathbf{Par}_S = \{a \mid \exists c(c \in \mathbf{Dom}(S_2)$ & & $a \in \mathbf{Ran}(S_2(c)))\}$.

$*$ die (Klasse der) Parameter der Kategorie $\boldsymbol{c}$ von $\boldsymbol{S}$ $*$

1.3.10 DEF.– Für alle S,c: $\mathbf{PAR}^c_S = \mathbf{Ran}(S_2(c))$.

$*$ die Konstantenfunktion von S $*$

1.3.11 DEF.– Für alle S: $\mathbf{Konst\text{-}F}_S = S_3$.

$*$ die (Klasse der) Konstantenkategorien von $\boldsymbol{S}$ $*$

1.3.12 DEF.– Für alle S: $\mathbf{Konst\text{-}Cat}_S = \mathbf{Dom}(S_3)$.

$*$ die (Klasse der) Konstanten von $\boldsymbol{S}$ $*$

1.3.13 DEF.– Für alle S: $\mathbf{Konst}_S = \{a \mid \exists c(c \in \mathbf{Dom}(S_3)$ & & $a \in \mathbf{Ran}(S_3(c)))\}$.

$*$ die (Klasse der) Konstanten der Kategorie $\boldsymbol{c}$ von $\boldsymbol{S}$ $*$

1.3.14 DEF.– Für alle S,c: $\mathbf{KONST}^c_S = \mathbf{Ran}(S_3(c))$.

$*$ die (Klasse der) atomaren Ausdrücke von $\boldsymbol{S}$ $*$

1.3.15 DEF.– Für alle S: $\mathbf{AtAdr}_S = \mathbf{Var}_S \cup \mathbf{Par}_S \cup \mathbf{Konst}_S$.

$*$ die cat-Erzeugungsfunktion von $\boldsymbol{S}$ $*$

1.3.16 DEF.– Für alle S: $\mathbf{catEF}_S = S_4$.

1.4 Die Kategorienzuordnungsfunktion

In diesem Abschnitt wird der zentrale Begriff der hier vorgeschlagenen kategorialen Syntaxbeschreibung in der Form *c ist eine/die Kategorie des Ausdrucks a von S* eingeführt. Der wesentliche Teil der Definition ist eine Induktivdefinition einer Klasse von geordneten Paaren; um die Definition übersichtlich formulieren zu können, wird zunächst eine Bezeichnung für die Klasse der Anfangselemente definiert; diese Klasse ist natürlich auch eine Klasse von geordneten Paaren (c, a), wobei a ein atomarer Ausdruck und c seine Kategorie ist; es wird später bewiesen werden, daß diese tatsächlich eindeutig bestimmt ist.

$*$ die atomare Kategorienzuordnungsfunktion von $\boldsymbol{S}$ $*$

1.4.1 DEF.–

(1) Atcat ist eine Funktion auf $\{S|S$ ist eine Syntax-Basis$\}$ &

(2) $\forall S(S \in \mathbf{Dom}(\mathbf{Atcat}) \Rightarrow \mathbf{Atcat}_S = \{p|\exists i \exists c \exists a(i \in \{1,2,3\}$ & & $c \in \mathbf{Dom}(S_i)$ & $a \in \mathbf{Ran}(S_i(c))$ & $p = (c,a))\})$.

Die nächste Definition enthält in Bedingung (2) die Induktivdefinition der Kategorienzuordnungsfunktion cat_S:

$*$ die Kategorienzuordnungsfunktion von $\boldsymbol{S}$ $*$

1.4.2 DEF.–

(1) cat ist eine Funktion auf $\{S \mid S$ ist eine Syntax-Basis$\}$ &

(2) $\forall S(S \in \mathbf{Dom}(\mathbf{cat}) \Rightarrow \mathbf{cat}_S = \{p \mid \forall M(\mathbf{Atcat}_S \subseteq M$ & & $\forall t(t$ ist eine passende Folge über $\mathbf{Cat}_S$ in S_1 & $\mathbf{Ran}(t) \subseteq M \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathbf{catEF}(t) \in M) \Rightarrow p \in M)\})$.

Aufgrund dieser Definition gilt gemäß der Theorie der Induktivdefinitionen:

1.4.3 BEH.– Für alle S: wenn S eine Syntax-Basis ist, dann gilt:

(1) $\mathbf{Atcat}_S \subseteq \mathbf{cat}_S$.

(2) $\forall t(t$ ist eine passende Folge über $\mathbf{Cat}_S$ in S_1 & & $\mathbf{Ran}(t) \subseteq \mathbf{cat}_S \Rightarrow \mathbf{catEF}_S(t) \in \mathbf{cat}_S)$.

(3) (Prinzip der cat-Induktion)

Für alle M: wenn

(I.B.) $\mathbf{Atcat}_S \subseteq M$ &

(I.S.) $\forall t(t$ ist eine passende Folge über $\mathbf{Cat}_S$ in S_1 & & $\mathbf{Ran}(t) \subseteq M \Rightarrow \mathbf{catEF}_S(t) \in M)$,

dann ist $\mathbf{cat}_S \subseteq M$.

(4) $\forall p(p \in \mathbf{cat}_S \Rightarrow p \in \mathbf{Atcat}_S$ **or** $\exists t(t$ **ist eine passende Folge über** $\mathbf{Cat}_S$ **in** S_1 **&** $\mathbf{Ran}(t) \subseteq \mathbf{cat}_S$ **&** $p = \mathbf{catEF}_S(t)))$.

(5) (Schwaches Prinzip der cat-Induktion)
Für alle M**: wenn**

(I.B.) $\mathbf{Atcat}_S \subseteq M$ **&**

(I.S.) $\forall t(t$ **ist eine passende Folge über** $\mathbf{Cat}_S$ **in** S_1 **& & $\mathbf{Ran}(t) \subseteq M \cap \mathbf{cat}_S \Rightarrow \mathbf{catEF}_S(t) \in M)$,**
dann ist $\mathbf{cat}_S \subseteq M$.

Wie oben schon erwähnt, ist Atcat$_S$ eine Funktion (hier: *links*eindeutige Relation); ebenso ist cat$_S$ eine Funktion:

1.4.4 BEH.– Für alle S**: wenn** S **eine Syntax-Basis ist, dann gilt:**

(1) $\mathbf{Atcat}_S$ **ist eine Funktion &** $\mathbf{Dom}(\mathbf{Atcat}_S) = \mathbf{AtAdr}_S$.

(2) $\mathbf{cat}_S$ **ist eine Funktion.**

1.5 Ausdrücke

Der Definitionsbereich der atomaren Kategorienzuordnungsfunktion einer Syntax-Basis S besteht aus den atomaren Ausdrücken von S. Durch die induktive Erzeugung von cat$_S$ aus Atcat$_S$ mittels catEF$_S$ werden parallel dazu im Definitionsbereich von cat$_S$ aus den atomaren Ausdrücken alle übrigen Ausdrücke von S erzeugt. Dies wird in diesem Abschnitt im Einzelnen dargestellt.

Zunächst wird der Ausdrucksbegriff für Syntax-Basen definiert.

∗ die (Klasse der) Ausdrücke von S ∗

1.5.1 DEF.–

(1) **Adr ist eine Funktion auf** $\{S \mid S$ **ist eine Syntax-Basis**$\}$ **&**

(2) $\forall S(S \in \mathbf{Dom}(S) \Rightarrow \mathbf{Adr}_S = \mathbf{Dom}(\mathbf{cat}_S))$.

Als nächstes ist die induktive Struktur der Ausdrucksklasse zu explizieren. Dazu werden zunächst zwei Begriffe definiert; der erste Begriff besteht aus einer Beziehung, die der Begriff der passenden Folge zwischen den zweiten Projektionen einer passenden Folge induziert, und der zweite Begriff ist eine Operation, welche die cat-Erzeugungsfunktion für die zweiten Projektionen der passenden Folgen ihres Definitionsbereiches induziert.

1.5.2 DEF.– Für alle S, O, t: O ***paßt auf*** t ***in*** S **genau dann, wenn gilt:**

(1) $O \in \mathbf{Adr}_S$ **&** $\mathbf{cat}_S(O) \in \mathbf{OprCAT}(\mathbf{Cat}_S)$ **&**

(2) $t \in \mathbf{Tup}^{=\mathbf{Dom}(\mathbf{cat}_S(O))-1}(\mathbf{Adr}_S)$ **&**
& $\langle(\mathbf{cat}_S(O), O)\rangle^\frown\langle(\mathbf{cat}_S(t_i), t_i)\rangle_{i \in \mathbf{Dom}(t)}$ **ist eine passende Folge über** $\mathbf{Cat}_S$ **in** S_1.

∗ das Ergebnis der Anwendung von O auf t in S ∗

1.5.3 DEF.– Für alle S, O, t:
$\boldsymbol{O \centerdot_S t = \mathrm{pr2}(\mathrm{catEF}_S(\langle(\mathrm{cat}_S(O), O)\rangle^\frown\langle(\mathrm{cat}_S(t_i), t_i)\rangle_{i\in\mathrm{Dom}(t)}))}$.

Nun kann der induktive Aufbau der Ausdrucksklasse von S beschrieben werden; wie vorstehend schon erwähnt, verläuft er parallel zum induktiven Aufbau von cat_S (vgl. das entsprechende Theorem 1.4.3 für cat_S).

1.5.4 BEH.– Für alle S: wenn S eine Syntax-Basis ist, dann gilt:

(1) $\mathbf{AtAdr}_S \subseteq \mathbf{Adr}_S$.

(2) $\forall O \forall t(O$ **paßt auf** t **in** $S \Rightarrow O \centerdot_S t \in \mathbf{Adr}_S)$.

(3) (Prinzip der Adr-Induktion)
Für alle M: wenn

(I.B.) $\mathbf{AtAdr}_S \subseteq M$ &

(I.S.) $\forall O \forall t(O$ **paßt auf** t **in** S & $\{O\} \cup \mathbf{Ran}(t) \subseteq M \Rightarrow$
$\Rightarrow O \centerdot_S t \in M)$,
dann ist $\mathbf{Adr}_S \subseteq M$.

(4) $\forall a(a \in \mathbf{Adr}_S \Rightarrow (a \in \mathbf{AtAdr}_S$ *or* $\exists O \exists t(O$ **paßt auf** t **in** S &
& $a = O \centerdot_S t)))$.

(5) (Schwaches Prinzip der Adr-Induktion)
Für alle M: wenn

(I.B.) $\mathbf{AtAdr}_S \subseteq M$ &

(I.S.) $\forall O \forall t(O$ **paßt auf** t **in** S & $\{O\} \cup \mathbf{Ran}(t) \subseteq M \cap \mathbf{Adr}_S \Rightarrow$
$\Rightarrow O \centerdot_S t \in M)$,
dann ist $\mathbf{Adr}_S \subseteq M$.

Die cat-Erzeugungsfunktion erzeugt aus den atomaren Ausdrücken einer Syntax-Basis S alle übrigen Ausdrücke von S als zweite Projektionen ihrer Werte; sie haben die Gestalt $O \centerdot_S t$, wobei O auf t paßt. Dies sind die *molekularen Ausdrücke* von S:

∗ die (Klasse der) molekularen Ausdrücke von S ∗
1.5.5 DEF.– Für alle S: $\mathbf{MolAdr}_S = \{a \mid \exists O \exists t(O$ **paßt auf** t **in** S
& $a = O \centerdot_S t)\}$.

Wenn O auf t in S paßt, dann ist $O \centerdot_S t$ ein molekularer Ausdruck von S. O heißt *Operator* von $O \centerdot_S t$ und t heißt *Operand* von $O \centerdot_S t$:

1.5.6 DEF.– Für alle S, a, O: O *ist Operator von* a *in* S genau dann, wenn $\exists t(O$ **paßt auf** t **in** S & $a = O \centerdot_S t)$.

1.5.7 DEF.– Für alle S, a, t: t *ist Operand von* a *in* S genau dann, wenn $\exists O(O$ **paßt auf** t **in** S & $a = O \centerdot_S t)$.

Operator und Operand eines molekularen Ausdrucks sind eindeutig bestimmt:

1.5.8 BEH.– Für alle S, a: wenn S ist eine Syntax-Basis und $a \in \mathrm{MolAdr}_S$, dann $1\,O\;O$ ist Operator von a in S & $1\,t\;t$ ist Operand von a in S.

Mit Theorem 1.5.8 sind die folgenden Definitionen gerechtfertigt:

∗ der Operator von a in S ∗

1.5.9 DEF.– $\forall S \forall a \forall O(\mathrm{opr}_S(a) = O$ gdw $((S$ ist eine Syntax-Basis & & $a \in \mathrm{MolAdr}_S$ & O ist Operator von a in $S)$ or $((S$ ist keine Syntax--Basis or $a \notin \mathrm{MolAdr}_S)$ & $O = \mathbb{V})))$.

∗ der Operand von a in S ∗

1.5.10 DEF.– $\forall S \forall a \forall t(\mathrm{opd}_S(a) = t$ gdw $((S$ ist eine Syntax-Basis & $a \in \mathrm{MolAdr}_S$ & t ist Operand von a in $S)$ or $((S$ ist keine Syntax-Basis or $a \notin \mathrm{MolAdr}_S)$ & $t = \mathbb{V})))$.

1.6 Ausdrucksarten

Gemäß der in Abschnitt 1.1 eingeführten Terminologie zerfällt die Klasse $\mathrm{CAT}(\mathrm{S}_0)$ aller Kategorien über der Klasse der Grundkategorien S_0 einer Syntax-Basis S in die Klasse S_0 der Grundkategorien – Cat_S – und die Klasse $\mathrm{CAT}(\mathrm{S}_0) \setminus \mathrm{S}_0$ der Operatorkategorien – $\mathrm{OprCAT}(\mathrm{S}_0)$ –. Die Klasse $\mathrm{OprCAT}(\mathrm{S}_0)$ zerfällt in die Klasse der Konnektorkategorien – $\mathrm{KonnektorCAT}(\mathrm{S}_0)$ – und die Klasse der Binderkategorien – $\mathrm{BindCAT}(\ \mathrm{S}_0)$ –.

Im folgenden wird die vorstehende Klassifikation der Kategorien einer Syntax-Basis S übertragen auf die Klasse $\mathrm{Adr}(\mathrm{S}_0)$ der Ausdrücke von S.

∗ die (Klasse der) Operatoren von S ∗

1.6.1 DEF.– Für alle S:
$\mathrm{Opr}_S = \{O \mid O \in \mathrm{Adr}_S$ & $\mathrm{cat}_S(O) \in \mathrm{OprCAT}(S_0)\}$.

∗ die (Klasse der) n-stelligen Operatoren von S ∗

1.6.2 DEF.– Für alle S, n: $\mathrm{Opr}_S^n = \{O \mid O \in \mathrm{Adr}_S$ & & $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ & $\mathrm{cat}_S(O) \in \mathrm{OprCAT}(S_0) \cap \mathrm{Tup}^{n+1}\}$.

∗ die (Klasse der) Konnektoren von S ∗

1.6.3 DEF.– Für alle S:
$\mathrm{Konnektor}_S = \{O \mid O \in \mathrm{Adr}_S$ & $\mathrm{cat}_S(O) \in \mathrm{KonnektorCAT}(S_0)\}$.

∗ die (Klasse der) n-stelligen Konnektoren von S ∗

1.6.4 DEF.– Für alle S, n: $\mathrm{Konnektor}_S^n = \{O \mid O \in \mathrm{Adr}_S$ & & $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ & $\mathrm{cat}_S(O) \in \mathrm{KonnektorCAT}(S_0) \cap \mathrm{Tup}^{n+1}\}$.

∗ die (Klasse der) Variablenbinder von S ∗

1.6.5 DEF.– Für alle S:
$\mathrm{VarBind}_S = \{O \mid O \in \mathrm{Adr}_S$ & $\mathrm{cat}_S(O) \in \mathrm{BindCAT}(S_0)\}$.

∗ die (Klasse der) Variablen bindenden Operatoren von $\boldsymbol{S}$ ∗

1.6.6 DEF.– Für alle S:
$\mathbf{VarBindOpr}_S = \{Q \mid \exists O \exists t(\, O \in \mathbf{VarBind}_S \ \ \&\ \ O$ **paßt auf** t **in** $S\ \ \&\ \ Q = O \centerdot_S t)\}$.

∗ die (Klasse der) $\boldsymbol{v}$ bindenden Operatoren von $\boldsymbol{S}$ ∗

1.6.7 DEF.– Für alle S, v:
$\mathbf{BindOpr}_S(v) = \{Q \mid Q \in \mathbf{VarBindOpr}_S \ \ \&\ \ v \in \mathbf{Ran}(\mathbf{opd}_S(O))\}$.

1.7 Teilausdrücke

Neben den Begriffen der Kategorie, der Syntax-Basis, der Kategorienfunktion und des Ausdrucks sind drei weitere Begriffe grundlegende Begriffe einer Syntax: die Begriffe des Teilausdrucks, der in einem Ausdruck freien Variablen und der Substitution. In diesem Abschnitt wird der Begriff des Teilausdrucks eingeführt.

Teilausdrücke eines Ausdrucks sind alle Ausdrücke, welche beim induktiven Aufbau des Ausdrucks in diesen eingebaut werden, entweder als atomare Ausdrücke, oder als zweite Projektionen der Argumente der cat-Erzeugungsfunktion. Dementsprechend wird der Begriff des Teilausdrucks durch Adr-Rekursion definiert:

∗ die Teilausdrucksrelation ∗

1.7.1 DEF.–

(1) **TAdr ist eine Funktion auf** $\{S \mid S$ **ist eine Syntax-Basis**$\}$ &

(2) **für alle S: wenn** $S \in \mathbf{Dom}(\mathbf{TAdr})$, **dann gilt:**

(a) $\mathbf{TAdr}_S$ **ist eine Relation** &

(b) $\forall a \forall b((a, b) \in \mathbf{TAdr}_S$ **gdw** $(b \in \mathbf{AtAdr}_S\ \ \&\ \ a = b)$ **or**
or $\exists O \exists t(O$ **paßt auf** t **in** $S\ \ \&\ \ b = O \centerdot_S t\ \ \&$
$\&\ \ (a = b$ **or** $a \in \mathbf{TAdr}_S$ `` $(\{O\} \cup \mathbf{Ran}(t)))))$.

1.8 Freie und gebundene Variable

Eine Variable heißt *frei* in einem Ausdruck, wenn sie in ihm nicht im Bereich eines sie bindenden Operators steht. Die genaue Definition dieses Begriffs erfolgt wiederum durch Adr-Rekursion:

∗ die Relation der in einem Ausdruck freien Variablen ∗

1.8.1 DEF.–

(1) **Free ist Funktion auf** $\{S \mid S$ **ist eine Syntax-Basis**$\}$ &

(2) **für alle S: wenn** $S \in \mathbf{Dom}(\mathbf{Free})$, **dann gilt:**

(a) $\mathbf{Free}_S$ **ist eine Relation** &

(b) $\forall v \forall a(\,(v, a) \in \mathbf{Free}_S$ **gdw** $((a \in \mathbf{Var}_S\ \ \&\ \ v = a)$ **or**
or $\exists O \exists t(O$ **paßt auf** t **in** $S\ \ \&\ \ a = O \centerdot_S t\ \ \&\ \ (\,[\,O \in \mathbf{VarBind}_S\ \ \&\ \ (v, O) \in \mathbf{Free}_S\,]$ **or** $[\,O \notin \mathbf{VarBind}_S\ \ \&\ \ O \in \mathbf{VarBindOpr}_S\ \ \&\ \ ((v, O) \in \mathbf{Free}_S$ **or** $v \in (\mathbf{Free}_S$ `` $\mathbf{Ran}(t)) \setminus \mathbf{Ran}(\mathbf{opd}_S(O)))\,]$ **or** $[\,O \notin \mathbf{VarBind}_S\ \ \&\ \ O \notin \mathbf{VarBindOpr}_S\ \ \&\ \ \exists x(x \in \{O\} \cup \mathbf{Ran}(t)\ \ \&\ \ (v, x) \in \mathbf{Free}_S)\,]\,))))$.

Ein Ausdruck, der keine freie Variable enthält, heißt *geschlossen*:

$*$ die (Klasse der) geschlossenen Ausdrücke von S $*$
1.8.2 DEF.– Für alle S:
$\mathbf{CAdr}_S = \{a \mid a \in \mathbf{Adr}_S \ \ \& \ \ \mathbf{Free}_S \text{``} \{a\} = 0\}$.

Eine Variable heißt in einem Ausdruck *gebunden*, wenn ein diese Variable bindender Operator Teilausdruck jenes Ausdrucks ist:

$*$ die Relation der in einem Ausdruck gebundenen Variablen $*$
1.8.3 DEF.–

(1) Bound ist Funktion auf $\{S \mid S$ ist eine Syntax-Basis$\}$ &

(2) für alle S: wenn $S \in \mathrm{Dom}(S)$, dann gilt:

(a) $\mathbf{Bound}_S$ ist eine Relation &

(b) $\forall v \forall a((v, a) \in \mathbf{Bound}_S$ gdw $v \in \mathbf{Var}_S$ & $a \in \mathbf{Adr}_S$ & $\exists O(O \in \mathbf{BindOpr}_S(v)$ & $(O, a) \in \mathbf{TAdr}_S))$.

Bemerkung: gemäß der Definitionen 1.8.1 und 1.8.3 kann ein und dieselbe Variable in einem Ausdruck zugleich frei und gebunden sein.
(Abschnitt nicht weiter ausgeführt)

1.9 Substitution

Mit dem Begriff der (simultanen) Substitution wird der Begriff der (simultanen) Einsetzung von Ausdrücken für Ausdücke in Ausdrücken präzisiert. Die Definition erfolgt durch Adr-Rekursion.

$*$ die Funktion der simultanen Substitution $*$
1.9.1 DEF.–

(1) SSubst ist Funktion auf $\{S \mid S$ ist eine Syntax-Basis$\}$ &

(2) für alle S: wenn $S \in \mathrm{Dom}(\mathrm{SSubst})$, dann gilt:

(a) $\mathbf{SSubst}_S$ ist eine Funktion auf $\{t \mid t \in \mathbf{Tup}^{=3}$ & & $\exists n(n \in \mathbb{N}$ & $t_0 \in \mathbf{Tup}^{=n}(\mathbf{Adr}_S)$ & t_1 ist eine Abzählung der Länge n in $\mathbf{Adr}_S$ & $\forall i(i \in n \Rightarrow \mathbf{cat}_S(t_{0,i}) = \mathbf{cat}_S(t_{1,i})))$ & & $t_2 \in \mathbf{Adr}_S\}$ &

(b) für alle a, b, c, n: wenn $n \in \mathbb{N}$ & $a \in \mathbf{Tup}^{=n}(\mathbf{Adr}_S)$ & b ist eine Abzählung der Länge n in $\mathbf{Adr}_S$ & $\forall i(i \in n \Rightarrow \mathbf{cat}_S(a_i) = \mathbf{cat}_S(b_i))$ & $c \in \mathbf{AtAdr}_S$, dann gilt:

(i) wenn $c \in \mathrm{Ran}(b)$, dann $\mathbf{SSubst}_S \text{`} \langle a, b, c\rangle = a_{b^{-1}(c)}$ &

(ii) wenn $c \notin \mathrm{Ran}(b)$, dann $\mathbf{SSubst}_S \text{`} \langle a, b, c\rangle = c$ &

(c) für alle a, b, O, t, n: wenn $n \in \mathbb{N}$ & $a \in \mathbf{Tup}^{=n}(\mathbf{Adr}_S)$ & b ist eine Abzählung der Länge n in $\mathbf{Adr}_S$ & $\forall i(i \in n \Rightarrow \mathbf{cat}_S(a_i) = \mathbf{cat}_S(b_i))$ & O paßt auf t in S, dann gilt:

(i) wenn $O \bullet_S t \in \mathrm{Ran}(b)$, dann ist $\mathbf{SSubst}_S \text{`} \langle a, b, O \bullet_S t\rangle = a_{b^{-1}(O \bullet_S t)}$ &

(ii) $\mathbf{wenn}\ O \bullet_S t \notin \mathbf{Ran}(b)\ \ \&\ \ O \in \mathbf{VarBind}_S\mathbf{, dann\ ist}$
$\mathbf{SSubst}_S \text{`} \langle a, b, O \bullet_S t\rangle = (\mathbf{SSubst}_S \text{`} \langle a, b, O\rangle) \bullet_S t\ \ \&$

(iii) $\mathbf{wenn}\ O \bullet_S t \notin \mathbf{Ran}(b)\ \ \&\ \ O \in \mathbf{VarBindOpr}_S\mathbf{, dann\ gilt}$
$\forall j(j\ \mathbf{ist\ eine\ streng\ monotone\ Folge\ natürlicher\ Zahlen}\ \ \&\ \ \mathbf{Ran}(j) =$
$= \{i \mid i \in n\ \ \&\ \ O \notin \mathbf{BindOpr}_S(b_i)\} \Rightarrow \mathbf{SSubst}_S \text{`} \langle a, b, O \bullet_S t\rangle =$
$= (\mathbf{SSubst}_S \text{`} \langle a, b, O\rangle) \bullet_S \langle \mathbf{SSubst}_S \text{`} \langle a \circ j, b \circ j, t_i\rangle\rangle_{i \in \mathbf{Dom}(t)})\ \ \&$

(iv) $\mathbf{wenn}\ O \bullet_S t \notin \mathbf{Ran}(b)\ \ \&\ \ O \notin \mathbf{VarBind}_S\ \ \&$
$\&\ \ O \notin \mathbf{VarBindOpr}_S\mathbf{, dann\ ist\ SSubst}_S \text{`} \langle a, b, O \bullet_S t\rangle =$
$= (\mathbf{SSubst}_S \text{`} \langle a, b, O\rangle) \bullet_S \langle \mathbf{SSubst}_S \text{`} \langle a, b, t_i\rangle\rangle_{i \in \mathbf{Dom}(t)}.$

Beschränkt man den Definitionsbereich der Funktion der simultanen Substitution auf die 3-Tupel, deren erste beiden Glieder 1-Tupel sind, erhält man das Definiens der Definition des Begriffs der Substitution *eines* Ausdrucks für *einen* Ausdruck in einem Ausdruck:

∗ die Substitutionsfunktion ∗

1.9.2 DEF.–

(1) $\mathbf{Subst\ ist\ eine\ Funktion\ auf}\ \{S \mid S\ \mathbf{ist\ eine\ Syntax\text{-}Basis}\}\ \ \&$

(2) $\mathbf{für\ alle}\ S\mathbf{: wenn}\ S \in \mathbf{Dom}(\mathbf{Subst})\mathbf{, dann\ gilt:}$

(a) $\mathbf{Subst}_S\ \mathbf{ist\ eine\ Funktion\ auf}\ \{t \mid t \in \mathbf{Tup}^{=3}(\mathbf{Adr}_S)\ \ \&$
$\&\ \ t_0 \in \mathbf{Tup}^{=1}(\mathbf{Adr}_S)\ \ \&\ \ t_1 \in \mathbf{Tup}^{=1}(\mathbf{Adr}_S)\ \ \&\ \ \mathbf{cat}_S(t_0) = \mathbf{cat}_S(t_1)\}\ \ \&$
$\&\ \ t_2 \in \mathbf{Adr}_S\ \ \&$

(b) $\forall a \forall b \forall c(a,\ b,\ c \in \mathbf{Adr}_S\ \ \&\ \ \mathbf{cat}_S(a) = \mathbf{cat}_S(b) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{Subst}_S \text{`} \langle a,\ b,\ c\rangle = \mathbf{SSubst}_S \text{`} \langle\langle a\rangle,\ \langle b\rangle,\ c\rangle).$

Durch die Beschränkung der ersten beiden Argumentglieder der Funktion der simultanen Substitution auf 1-Tupel ergeben sich einige Vereinfachungen im Definiens dieser Funktion und damit der Substitutionsfunktion, die wiederum die Anwendung der Substitutionsfunktion vereinfachen. Die Einzelheiten können dem nächsten Theorem entnommen werden.

1.9.3 BEH.– $\mathbf{Für\ alle}\ S\mathbf{: wenn}\ S\ \mathbf{eine\ Syntax\text{-}Basis\ ist, dann\ gilt:}$

(1) $\mathbf{Subst}_S\ \mathbf{ist\ eine\ Funktion\ auf}\ \{t \mid t \in \mathbf{Tup}^{=3}(\mathbf{Adr}_S)\ \ \&\ \ \mathbf{cat}_S(t_0) = \mathbf{cat}_S(t_1)\}\ \ \&$

(2) $\mathbf{für\ alle}\ a,\ b,\ c\mathbf{: wenn}\ a,\ b,\ c \in \mathbf{Adr}_S\ \ \&\ \ \mathbf{cat}_S(a) = \mathbf{cat}_S(b)\ \ \&\ \ c \in \mathbf{AtAdr}_S\mathbf{, dann\ gilt:}$

(a) $\mathbf{wenn}\ b = c\mathbf{, dann\ Subst}_S \text{`} \langle a,\ b,\ c\rangle = a\ \ \&$

(b) $\mathbf{wenn}\ b \neq c\mathbf{, dann\ Subst}_S \text{`} \langle a,\ b,\ c\rangle = c\ \ \&$

(3) $\mathbf{für\ alle}\ a,\ b,\ O,\ t\mathbf{: wenn}\ a,\ b \in \mathbf{Adr}_S\ \ \&\ \ \mathbf{cat}_S(a) = \mathbf{cat}_S(b)\ \ \&$
$\&\ \ O\ \mathbf{paßt\ auf}\ t\ \mathbf{in}\ S\mathbf{, dann\ gilt:}$

(a) $\mathbf{wenn}\ b = O \bullet_S t\mathbf{, dann\ Subst}_S \text{`} \langle a,\ b,\ O \bullet_S t\rangle = a\ \ \&$

(b) $\mathbf{wenn}\ b \neq O \bullet_S t\ \ \&\ \ O \in \mathbf{VarBind}_S\mathbf{, dann}$
$\mathbf{Subst}_S \text{`} \langle a,\ b,\ O \bullet_S t\rangle = (\mathbf{Subst}_S \text{`} \langle a,\ b,\ O\rangle) \bullet_S t\ \ \&$

(c) $\mathbf{wenn}\ b \neq O \bullet_S t\ \ \&\ \ \mathrm{O} \notin \mathbf{VarBind}_S\ \ \&\ \ \mathrm{O} \in \mathbf{BindOpr}_S(b)\mathbf{, dann}$
$\mathbf{Subst}_S \text{`} \langle a,\ b,\ O \bullet_S t\rangle = (\mathbf{Subst}_S \text{`} \langle a,\ b,\ O\rangle) \bullet_S t\ \ \&$

(d) **wenn** $b \neq O{\bullet_S}t$ & $O \notin \mathrm{VarBind}_S$ & $O \notin \mathrm{BindOpr}_S(b)$, **dann** $\mathrm{Subst}_S \,\grave{}\, \langle a,\, b,\, O \bullet_S t\rangle = (\mathrm{Subst}_S \,\grave{}\, \langle a,\, b,\, O\rangle) \bullet_S \langle \mathrm{Subst}_S \,\grave{}\, \langle a,\, b,\, t_i\rangle\rangle_{i \in \mathrm{Dom}(t)}$.

1.10 Die Funktion des Ausdrucksgrades

Mit dem Prinzip der (schwachen) Adr-Induktion steht eine Methode zur Verfügung, Beweise nach dem induktiven Aufbau der Ausdrücke zu führen. Diese Methode kann jedoch nicht immer angewendet werden, z.B. dann nicht, wenn man im Induktionsschritt nicht auf die unmittelbaren Teilausdrücke selbst eines Ausdrucks zurückgreifen kann, sondern auf Ausdrücke zurückgreifen muß, die durch Substitution aus den unmittelbaren Teilausdrücken entstehen. Für diesen Fall wird in der nächsten Defintion die *Funktion des Ausdrucksgrades* eingeführt; diese ordnet jedem Ausdruck eindeutig und monoton eine natürliche Zahl zu, wodurch es möglich ist, Beweise nach dem induktiven Aufbau der Ausdrücke durch $\mathbb{N}$-(Wertverlaufs)Induktion zu führen.

∗ die Funktion des Ausdrucksgrades ∗

1.10.1 DEF.– adrgrad ist Funktion auf $\{S \mid S$ **ist eine Syntax-Basis**$\}$ &
$\forall S(S \in \mathrm{Dom}(\mathrm{adrgrad}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathrm{adrgrad}_S$ **ist Funktion auf** Adr_S &
& $\forall a(a \in \mathrm{AtAdr}_S \Rightarrow \mathrm{adrgrad}_S(a) = 0)$ &
& $\forall O \forall t(O$ **paßt auf** t **über** $S \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathrm{adrgrad}_S(O \bullet_S t) = 1 + \mathrm{adrgrad}_S(O) + \sum_{i \in \mathrm{Dom}(t)} \mathrm{adrgrad}_S(t_i)))$

Es folgen einige Theoreme, welche nützliche Eigenschaften der Funktion des Ausdrucksgrades beschreiben.

1.10.2 BEH.– Für alle S**: wenn** S **ist eine Syntax-Basis, dann gilt** $\forall O \forall t \forall x(O$ **paßt auf** t **über** S & $x \in \{O\} \cup \mathrm{Ran}(t) \Rightarrow \mathrm{adrgrad}_S(x) <_{\mathbb{N}} \mathrm{adrgrad}_S(O{\bullet_S}t))$.

∗ Monotonie der Funktion des Ausdrucksgrades ∗

1.10.3 BEH.– Für alle S**: wenn** S **ist eine Syntax-Basis, dann gilt** $\forall a \forall b(a,\ b \in \mathrm{Adr}_S$ & $(a,\, b) \in \mathrm{TAdr}_S \Rightarrow \mathrm{adrgrad}_S(a) \leqslant_{\mathbb{N}} \mathrm{adrgrad}_S(b))$.

1.10.4 BEH.– Für alle S**: wenn** S **ist eine Syntax-Basis, dann gilt**
$\forall a \forall b \forall c \forall v(a,\ b,\ c \in \mathrm{Adr}_S$ & $v \in \mathrm{Var}_S$ & $\mathrm{cat}_S(a) = \mathrm{cat}_S(v) = \mathrm{cat}_S(b)$ & $\mathrm{adrgrad}_S(a) = \mathrm{adrgrad}_S(b) \Rightarrow \mathrm{adrgrad}_S(\mathrm{Subst}_S \,\grave{}\, \langle a,\, v,\, c\rangle) = \mathrm{adrgrad}_S(\mathrm{Subst}_S \,\grave{}\, \langle b,\, v,\, c\rangle))$.

2 Logik

Erweitert man eine Syntax-Basis um Bestimmungen, die es erlauben, einen Folgerungsbegriff zu definieren, erhält man eine *Logik-Basis*. Im folgenden werden nur solche Bestimmungen verwendet, die es erlauben, einen Folgerungsbegriff *induktiv* zu definieren und zwar als eine *Relation* zwischen *Klassen von Formeln* und *Formeln*. Ist F ein so definierter Folgerungsbegriff und ist $(X, A) \in F$, dann heißt (X, A) ein *Folgerungszusammenhang* bzgl. F, X dessen *Prämissenklasse* und A dessen *Konklusion*.

2.1 Logik-Basen

Zur Formulierung des Begriffs der Logik-Basis werden einige Begriffe eingeführt: die Begriffe der *Formel* und der *geschlossenen Formel* und der Begriff der *Herleitungsrelation*.

Formeln werden als Ausdrücke einer Syntax-Basis definiert, deren Kategorie eine Grundkategorie der Syntax-Basis ist. Diese ist frei wählbar. In der folgenden Definition wird die natürliche Zahl 0 als Kategorie von *Formeln* verwendet. (In der hier benutzten mengentheoretischen Metasprache ist dies die leere Menge.)

∗ die (Klasse der) Formeln von $\boldsymbol{S}$ ∗

2.1.1 DEF.– Für alle $\boldsymbol{S}$: $\mathbf{Fml}_{\boldsymbol{S}} = \{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A} \in \mathbf{Adr}_{\boldsymbol{S}} \ \& \ \mathbf{cat}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}\}$.

Formeln, die keine Variablen frei enthalten, heißen *geschlossene* Formeln:

∗ die (Klasse der) geschlossenen Formeln von $\boldsymbol{S}$ ∗

2.1.2 DEF.– Für alle $\boldsymbol{S}$: $\mathbf{CFml}_{\boldsymbol{S}} = \mathbf{Fml}_{\boldsymbol{S}} \cap \mathbf{CAdr}_{\boldsymbol{S}}$.

Gemäß Bedingung (3) der Definition 1.3.1 auf Seite 5 des Begriffs der Syntax-Basis gibt es zu jeder Variablenkategorie abzählbar unendlich viele Variablen dieser Kategorie und gemäß Bedingung (4) gibt es zu jeder Parameterkategorie abzählbar unendlich viele Parameter dieser Kategorie. Gemäß der Definition 1.2.1 auf Seite 5 werden die Variablen zur Bildung Variablen bindender Operatoren verwendet. Bezüglich der Formeln, die als Prämissen und Konklusionen in Folgerungsbeziehungen verwendet werden, kann man nun entweder Formeln mit freien Variablen verwenden, oder Formeln, die an Stelle der freien Variablen Parameter enthalten. Die zweite Option erfordert zwar einen geringfügig höheren syntaktischen Aufwand, hat aber den Vorteil, daß das Problem der Variablenkonfusion beim Substituieren fast gänzlich vermieden wird. *Daher wird im folgenden nur noch die zweite Option verfolgt*. Dies hat zur Folge, daß in Folgerungszusammenhängen nur *geschlossene* Formeln verwendet werden; geschlossene Formeln können ja Parameter enthalten, aber keine freien Variablen. Diese Taktik erfordert allerdings, daß jede Variablenkategorie auch eine Parameterkategorie ist. Dies wird in der Definition des Begriffs der Logik-Basis festgeschrieben werden.

Wie eingangs schon angedeutet, soll der jeweilige Folgerungsbegriff einer Logik-Basis induktiv definiert werden. Dazu werden *Anfangselemente* und *Erzeugungsrelationen* für den zu definierenden Folgerungsbegriff benötigt. Da der Folgerungsbegriff als eine Relation zwischen Klassen von Formeln und Formeln definiert werden soll, müssen die Anfangselemente geordnete Paare aus Klassen von Formeln und Formeln sein, und die Erzeugungsrelationen müssen einer Folge von geordneten Paaren aus Klassen von Formeln und Formeln wiederum ein solches geordnetes Paar zuordnen. Dabei werden als Formeln nur *geschlossene* Formeln verwendet.

Als Anfangselemente (Induktionsbasis) des jeweils zu definierenden Folgerungsbegriffs werden geordnete Paare $(0, A)$ mit $A \in \mathrm{CFml}_S$ verwendet werden. In der Definition des Begriffs der Logik-Basis wird deshalb festgelegt werden, daß eine Logik-Basis eine Klasse von geschlossenen Formeln enthalten soll, welche als zweite Projektionen der Anfangselemente verwendet werden können.

Als Erzeugungsrelationen des zu definierenden Folgerungsbegriffs werden *Herleitungsrelationen* im Sinn der folgenden Definition verwendet werden:

2.1.3 DEF.– Für alle S, R: *R ist eine Herleitungsrelation für S* genau dann, wenn $R \subseteq ((\mathrm{Pot}(\mathrm{CFml}_S) \times \mathrm{CFml}_S) \times \mathrm{Tup}^{\geqslant 0}(\mathrm{Pot}(\mathrm{CFml}_S) \times \mathrm{CFml}_S))$.

Mit der nächsten Definition wird noch ein Spezialfall des Begriffs der Herleitungsrelation eingeführt:

2.1.4 DEF.– Für alle S, R: *R ist eine Herleitungsrelation mit endlicher Prämissenverrechnung für S* genau dann, wenn gilt:
R ist eine Herleitungsrelation für S & $\forall p \forall t\, ((p, t) \in R$ &
& $\forall i (i \in \mathrm{Dom}(t) \Rightarrow \mathrm{pr1}(t_i)$ endl$\subseteq$ $\mathrm{CFml}_S) \Rightarrow \mathrm{pr1}(p)$ endl$\subseteq$ $\mathrm{CFml}_S)$.

Nun kann der Begriff der Logik-Basis und anschließend der Folgerungsbegriff einer Logik-Basis definiert werden.

2.1.5 DEF.– Für alle S: *S ist eine Logik-Basis* genau dann, wenn gilt:

(1) S ist eine Syntax-Basis & $S \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 7}$ &

(2) $0 \in \mathrm{Cat}_S$ &

(3) $\mathrm{Var\text{-}Cat}_S \subseteq \mathrm{Par\text{-}Cat}_S$ &

(4) $S_5 \subseteq \mathrm{CFml}_S$ &

(5) $S_6 \subseteq \{R \mid R$ ist eine Herleitungsrelation für $S\}$.

Für Logik-Basen werden noch zwei Bezeichnungen eingeführt:

∗ die (Klasse der) Bedeutungspostulate von S ∗
2.1.6 DEF.– Für alle S: $\mathrm{MeanPost}_S = S_5$.

∗ die (Klasse der) Herleitungsrelationen von S ∗
2.1.7 DEF.– Für alle S: $\mathrm{HR}_S = S_6$.

Bedeutungspostulate werden üblicherweise als *Axiome* bezeichnet. Da ich diese Bezeichnung aber im Zusammenhang mit *Theorien* in einer anderen Bedeutung verwende, bin ich auf den alten CARNAPschen Begriff des Bedeutungspostulats ausgewichen, zumal dieser auch inhaltlich meinen Vorstellungen entspricht. Ein Beispiel: in der Beschreibung einer mengentheoretischen Sprache wird man als Bedeutungspostulate (z.B. für die Elementschaftskonstante) eine Klasse von mengentheoretischen Axiomen wählen (ich nenne diese natürlich mengentheoretische Bedeutungspostulate).

Die nächste Definition enthält in Bedingung (2) die Induktivdefinition des Folgerungsbegriffs einer Logik-Basis:

$*$ der Folgerungsbegriff von $\boldsymbol{S}$ $*$

2.1.8 DEF.–

(1) $\mathbf{F}$ **ist eine Funktion auf** $\{\boldsymbol{S} \mid \boldsymbol{S}$ **ist eine Logik-Basis**$\}$ **&**

(2) $\forall \boldsymbol{S}(\boldsymbol{S} \in \mathbf{Dom}(\mathbf{F}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{F}_{\boldsymbol{S}} = \{\boldsymbol{q} \mid \forall \boldsymbol{M}(\{0\} \times \mathbf{MeanPost}_{\boldsymbol{S}} \subseteq \boldsymbol{M}$ **&**
$\forall \boldsymbol{R}(\boldsymbol{R} \in \mathbf{HR}_{\boldsymbol{S}} \Rightarrow \forall \boldsymbol{p} \forall \boldsymbol{t}((\boldsymbol{p}, \boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{R}$ **&** $\mathbf{Ran}(\boldsymbol{t}) \subseteq \boldsymbol{M} \Rightarrow \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{M})) \Rightarrow$
$\Rightarrow \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{M})\}$**.**

Aufgrund dieser Definition gilt gemäß der Theorie der Induktivdefinitionen:

2.1.9 BEH.– Für alle $\boldsymbol{S}$**: wenn** $\boldsymbol{S}$ **eine Logik-Basis ist, dann gilt:**

(1) $\{0\} \times \mathbf{MeanPost}_{\boldsymbol{S}} \subseteq \mathbf{F}_{\boldsymbol{S}}$**.**

(2) $\forall \boldsymbol{R}(\boldsymbol{R} \in \mathbf{HR}_{\boldsymbol{S}} \Rightarrow \forall \boldsymbol{p} \forall \boldsymbol{t}((\boldsymbol{p}, \boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{R}$ **&** $\mathbf{Ran}(\boldsymbol{t}) \subseteq \mathbf{F}_{\boldsymbol{S}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \boldsymbol{p} \in \mathbf{F}_{\boldsymbol{S}}))$**.**

(3) (Prinzip der $\mathbf{F}$-Induktion)
Für alle $\boldsymbol{M}$**: wenn**

(I.B.) $\{0\} \times \mathbf{MeanPost}_{\boldsymbol{S}} \subseteq \boldsymbol{M}$ **&**

(I.S.) $\forall \boldsymbol{R}(\boldsymbol{R} \in \mathbf{HR}_{\boldsymbol{S}} \Rightarrow \forall \boldsymbol{p} \forall \boldsymbol{t}((\boldsymbol{p}, \boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{R}$ **&** $\mathbf{Ran}(\boldsymbol{t}) \subseteq \boldsymbol{M} \Rightarrow$
$\Rightarrow \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{M}))$**,**
dann ist $\mathbf{F}_{\boldsymbol{S}} \subseteq \boldsymbol{M}$**.**

(4) $\forall \boldsymbol{p}(\boldsymbol{p} \in \mathbf{F}_{\boldsymbol{S}} \Rightarrow \boldsymbol{p} \in \{0\} \times \mathbf{MeanPost}_{\boldsymbol{S}}$ **or** $\exists \boldsymbol{R}(\boldsymbol{R} \in \mathbf{HR}_{\boldsymbol{S}}$ **&**
& $\exists \boldsymbol{t}((\boldsymbol{p}, \boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{R}$ **&** $\mathbf{Ran}(\boldsymbol{t}) \subseteq \mathbf{F}_{\boldsymbol{S}})))$**.**

(5) (Schwaches Prinzip der $\mathbf{F}$-Induktion)
Für alle $\boldsymbol{M}$**: wenn**

(I.B.) $\{0\} \times \mathbf{MeanPost}_{\boldsymbol{S}} \subseteq \boldsymbol{M}$ **&**

(I.S.) $\forall \boldsymbol{R}(\boldsymbol{R} \in \mathbf{HR}_{\boldsymbol{S}} \Rightarrow \forall \boldsymbol{p} \forall \boldsymbol{t}((\boldsymbol{p}, \boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{R}$ **&** $\mathbf{Ran}(\boldsymbol{t}) \subseteq \boldsymbol{M} \cap \mathbf{F}_{\boldsymbol{S}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{M}))$**,**
dann ist $\mathbf{F}_{\boldsymbol{S}} \subseteq \boldsymbol{M}$**.**

Ferner gilt:

2.1.10 BEH.– Für alle $\boldsymbol{S}$**: wenn** $\boldsymbol{S}$ **ist eine Logik-Basis, dann gilt:**

(1) (Typisierung von $\mathbf{F}_S$)
$\mathbf{F}_S \subseteq$ Pot($\mathbf{CFml}_S$)×$\mathbf{CFml}_S$, d.h. $\mathbf{F}_S$ ist eine Relation zwischen Klassen von geschlossenen Formeln und geschlossenen Formeln von S.

(2) (Endlichkeit von $\mathbf{F}_S$)
Wenn $\forall R\,(R \in \mathbf{HR}_S \Rightarrow R$ ist Herleitungsrelation mit endlicher Prämissenverrechnung für S), dann $\forall p(p \in \mathbf{F}_S \Rightarrow \mathbf{pr1}(p)$ endl$\subseteq$ $\mathbf{CFml}_S$).

Folgerungszusammenhänge (logische Implikationen) und logische Äquivalenzen können auf die übliche Weise mit Hilfe des Fregezeichens ausgedrückt werden:

2.1.11 DEF.– Für alle F, X, A: $X \vdash_F A$ gdw $(X, A) \in F$.

**2.1.12 DEF.– Für alle F, A, B: $A \dashv\vdash_F B$ gdw $\{A\} \vdash_F B$ &
& $\{B\} \vdash_F A$.**

Die geschlossenen Formeln, welche mit dem Folgerungsbegriff einer Logik-Basis aus der leeren Prämissenmenge folgen, werden üblicherweise *Theoreme* genannt. Da ich diese Bezeichnung aber im Zusammenhang mit Theorien in einer anderen Bedeutung verwende, nenne ich Formeln, die mit dem Folgerungsbegriff einer Logik-Basis aus der leeren Menge folgen, *analytisch-wahr*.

∗ die (Klasse der) analytisch-wahren Formeln der Logik-Basis S ∗
2.1.13 DEF.– Für alle S: A-True$_S$ = $\{A \mid 0 \vdash_{\mathbf{F}_S} A\}$.

Bedeutungspostulate sind analytisch-wahr:

2.1.14 BEH.– Für alle S: wenn S ist eine Logik-Basis, dann MeanPost$_S \subseteq$ A-True$_S$.

2.2 Herleitungen

Der Folgerungsbegriff einer Logik-Basis S ist eine induktiv strukturierte Klasse von geordneten Paaren, deren erste Projektion eine Klasse von geschlossen Formeln und deren zweite Projektion eine geschlossene Formel von S ist. Der Nachweis, daß ein solches geordnetes Paar Element des Folgerungsbegriffs ist, wird in der Regel dadurch geführt, daß man ausgehend von gewissen Anfangselementen durch Anwendung von Herleitungsrelationen das fragliche geordnete Paar erzeugt. Eine solche Erzeugung kann man darstellen als eine endliche Folge, deren Glieder entweder Anfangselemente sind oder aus früheren Gliedern der Folge durch Anwendung einer Herleitungsrelation gewonnen werden, und die das fragliche geordnete Paar als (letztes) Glied enthält. Eine solche Erzeugung wird *Herleitung* genannt.

2.2.1 DEF.– Für alle S, H, p: H *ist eine Herleitung für p über S* genau dann, wenn gilt:

(1) S ist eine Logik-Basis &

(2) H **ist eine endliche Folge** $\ \&\ H \neq 0\ \&\ \forall i\,(i \in \mathbf{Dom}(H) \Rightarrow (H_i \in (\{0\} \times \mathbf{MeanPost}_S)$ **or** $\exists R \exists j\,(R \in \mathbf{HR}_S\ \&\ j \in \mathbf{Tup}^{\geqslant 0}(i)\ \&$
$\&\ (H_i,\ \langle H_{j_k}\rangle_{k \in \mathbf{Dom}(j)}) \in R)))\ \&$

(3) $p = H_{\mathbf{Dom}(H)-1}$.

2.2.2 DEF.– Für alle S, H: H ***ist eine Herleitung über*** S **gdw** $\exists p$ H **ist eine Herleitung für** p **über** S.

2.2.3 DEF.– Für alle S, p: p ***ist herleitbar über*** S **gdw** $\exists H$ H **ist eine Herleitung für** p **über** S.

Der Herleitbarkeitsbegriff ist mit dem Folgerungsbegriff identisch:

2.2.4 BEH.– Für alle S**: wenn** S **ist eine Logik-Basis, dann** $\mathbf{F}_S = \{p \mid p$ **ist herleitbar über** $S\}$.

2.3 Zulässige Herleitungen

Im allgemeinen wird man sich bemühen, die Klasse der Herleitungsrelationen einer Logik-Basis so zu definieren, daß keine der Herleitungsrelationen überflüssig ist, d.h. daß sie Folgerungszusammenhänge erzeugt, die schon durch die übrigen Herleitungsrelationen erzeugt werden. Nachdem die Klasse der Herleitungsrelationen einer Logik-Basis aber erst einmal festgelegt ist, können "überflüssige" Herleitungsrelationen sehr nützlich sein, da sie die Herleitung von Folgerungszusammenhängen abkürzen können. Solche Herleitungsrelationen heißen *zulässige Herleitungsrelationen*. Um den Begriff der zuläßigen Herleitungsrelation bequem definieren zu können, wird zuvor der Begriff der *Erweiterung einer Logik-Basis um eine Herleitungsrelation* definiert:

∗ die Extension von S um die Herleitungsrelation R ∗

2.3.1 DEF.– Für alle S, R:
$\mathbf{ExtHR}(S,\ R) = (S \setminus \{(\mathbf{HR}_S,\ 6)\}) \cup \{(\mathbf{HR}_S \cup \{R\},\ 6)\}$.

2.3.2 BEH.– Für alle S, R**: wenn** S **ist eine Logik-Basis** $\ \&\ $ R **ist eine Herleitungsrelation für** S**, dann gilt:**

(1) $\mathbf{ExtHR}(S,\ R)$ **ist eine Logik-Basis** $\ \&\ \mathbf{Dom}(\mathbf{ExtHR}(S,\ R)) =$
$= \mathbf{Dom}(S)\ \&$

(2) $\mathbf{HR}_{\mathbf{ExtHR}(S,\ R)} = \mathbf{HR}_S \cup \{R\}\ \&$

(3) $\forall i(i \in \mathbf{Dom}(S) \setminus \{6\} \Rightarrow \mathbf{ExtHR}(S,\ R)_i = S_i)\ \&$

(4) $\mathbf{F}_S \subseteq \mathbf{F}_{\mathbf{ExtHR}(S,\ R)}$.

2.3.3 DEF.– Für alle S, R: R ***ist eine zulässige Herleitungsrelation für*** S **genau dann, wenn gilt:**

(1) S **ist eine Logik-Basis** $\ \&$

(2) R **ist eine Herleitungsrelation für** S $\ \&$

(3) $\mathbf{F}_{\mathbf{ExtHR}(S,\ R)} \subseteq \mathbf{F}_S$.

$*$ die (Klasse der) zulässigen Herleitungsrelationen für $\boldsymbol{S}$ $*$

2.3.4 DEF.– Für alle S: $\mathbf{ZulHR}_S = \{R \mid R$ ist eine Herleitungsrelation für S & $\mathbf{F}_{\mathbf{ExtHR}(S,\,R)} \subseteq \mathbf{F}_S\}$.

Das folgende Theorem formuliert eine andere Charakterisierung des Begriffs der zulässigen Herleitungsrelation:

2.3.5 BEH.– Für alle S, R: wenn S ist eine Logik-Basis & R ist eine Herleitungsrelation für S, dann R ist eine zulässige Herleitungsrelation für S gdw $\forall p \forall t((p,t) \in R$ & $\mathrm{Ran}(t) \subseteq \mathbf{F}_S \Rightarrow p \in \mathbf{F}_S)\}$.

Jede Herleitungsrelation einer Logik-Basis ist eine zulässige Herleitungsrelation für diese Logik-Basis:

2.3.6 BEH.– Für alle S: wenn S ist eine Logik-Basis, dann gilt $\forall R(R \in \mathrm{HR}_S \Rightarrow R$ ist zulässige Herleitungsrelation für $S)$.

In Herleitungen gemäß Definition 2.2.1 können als Anfangselemente nur geordnete Paare $(0,\,A)$ verwendet werden, in welchen $A \in \mathrm{MeanPost}_S$; ferner können als Erzeugungsrelationen nur Elemente von HR_S verwendet werden. Durch Verwendung analytisch-wahrer Formeln in den Anfangselementen und zulässiger Herleitungsrelationen als Erzeugungsrelationen können Herleitungen verkürzt werden:

2.3.7 DEF.– Für alle S, H, p: H *ist eine zulässige Herleitung für p über S* genau dann, wenn gilt:

(1) S ist eine Logik-Basis &

(2) H ist eine endliche Folge & $H \neq 0$ & $\forall i\,(i \in \mathrm{Dom}(H) \Rightarrow (H_i \in (\{0\} \times \text{A-True}_S)$ or $\exists R \exists j\,(R \in \mathrm{ZulHR}_S$ & $j \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 0}(i)$ & $(H_i,\, \langle H_{j_k} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R)$ &

(3) $p = H_{\mathrm{Dom}(H)-1}$.

2.3.8 DEF.– Für alle S, H: H *ist eine zulässige Herleitung über* S gdw $\exists p$ H ist eine zulässige Herleitung für p über S.

2.3.9 DEF.– Für alle S, p: p *ist zulässig herleitbar über* S gdw $\exists H$ H ist eine zulässige Herleitung für p über S.

Jede Herleitung ist eine zulässige Herleitung:

2.3.10 BEH.– Für alle S: wenn S ist eine Logik-Basis, dann gilt $\forall H \forall p(H$ ist eine Herleitung für p über $S \Rightarrow H$ ist eine zulässige Herleitung für p über $S)$.

Und umgekehrt gibt es zu jeder zulässigen Herleitung eine Herleitung für denselben Folgerungszusammenhang:

2.3.11 BEH.– Für alle S: wenn S ist eine Logik-Basis, dann gilt $\forall H \forall p(H$

ist eine zulässige Herleitung für p über $S \Rightarrow \exists H'\ H'$ ist eine Herleitung für p über S).

Und es folgt

2.3.12 BEH.– Für alle S: wenn S ist eine Logik-Basis, dann $\mathbf{F}_S = \{p \mid p$ ist zulässig herleitbar über $S\}$.

2.4 Pragmatisierte Herleitungen

Eine Herleitung gemäß Definition 2.2.1 ist eine Folge von geordneten Paaren, deren erste Projektion eine Klasse von geschlossenen Formeln und deren zweite Projektion eine geschlossene Formel ist. Nach einem anderen Vorverständnis des Begriffs der Herleitung (des Beweises, der Ableitung) ist eine Herleitung eine Folge von Sprechakten, die z.B. darin bestehen können, eine Schlußfolgerung zu ziehen oder eine Annahme zu machen. Solche Sprechakte können darin bestehen, geeignete *Sätze* zu äußern. Z.B. kann man eine Annahme dadurch machen, daß man einen *Annahmesatz* äußert, und man kann eine Folgerung dadurch ziehen, daß man einen *Folgerungssatz* äußert. Nach diesem Ansatz entspricht einer Folge von Sprechhandlungen eindeutig eine Folge von Sätzen. Dadurch ist es möglich, die *logischen* Eigenschaften einer Herleitung im Sinn einer Folge von Sprechakten an der entsprechenden Folge von Sätzen festzumachen. Eine solche Folge von Sätzen heiße *pragmatisierte Herleitung*.

Für die Definition des Begriffs der pragmatisierten Herleitung werden zwei neue Begriffe benötigt:

2.4.1 DEF.– Für alle S, R: R ist *prämissenkonservative Herleitungsrelation für S* genau dann, wenn gilt:

(1) S ist eine Logik-Basis &

(2) R ist eine Herleitungsrelation für S &

(3) $\forall p \forall t((p, t) \in R \Rightarrow t \neq 0\ \ \&\ \ \mathbf{pr1}(p) \subseteq \bigcup(\{\mathbf{pr1}(t_j)\}_{j \in \mathbf{Dom}(t)}))$.

∗ die Herleitungsrelation der Reflexivität des Folgerungsbegriffs für S ∗

2.4.2 DEF.– Für alle S: $\mathbf{ReflFolg}_S = \{q \mid \exists B(B \in \mathbf{CFml}_S\ \ \&\ \ q = ((\{B\}, B), 0)\}$.

Nachtrag zur Metasprache NBGU

∗ die (Klasse der) endlichen Teilklassen von A ∗

2.4.3 DEF.– Für alle A: $\mathbf{ePot}(A) = \{e \mid e\ \mathbf{endl}\subseteq A\}$.

∗ das Tupelprodukt von A, B ∗

2.4.4 DEF.– Für alle A, B: $(A \otimes B) = \{t \mid t \in \mathbf{Tup}^{=2}\ \ \&\ \ t_0 \in A\ \ \&\ \ t_1 \in B\}$.

2.4.5 DEF.– Für alle a : $a. = \{a\}$.

2.4.6 DEF.– Für alle a, b: $a, b. = \{a, b\}$.

2.4.7 DEF.– Für alle a, b, c: $a, b, c. = \{a, b\} \cup \{c\}$.

2.4.8 DEF.– Für alle a, b, c, d: $a, b, c, d. = a, b, c. \cup \{d\}$.

Und so weiter.

Ende Nachtrag

Eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen entsteht aus einer Logik-Basis durch Hinzufügung von *Performatoren*, die in *Sätzen* als Anzeiger der Art des Sprechakts dienen, der mit der Äußerung des Satzes vollzogen wird. Es werden drei Performatoren bereitgestellt: ein *Annahmeperformator*, ein *Folgerungsperformator* und ein *Anziehungsperformator*. Weitere Performatoren könnten hinzugefügt werden, z.B. ein *Behauptungsperformator* oder ein *Frageperformator*. Ferner soll jede Herleitungsrelation entweder die Herleitungsrelation der Reflexivität des Folgerungsbegriffs oder eine prämissenkonservative Herleitungsrelation sein.

2.4.9 DEF.– Für alle S: S *ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen* genau dann, wenn gilt:

(1) S ist eine Logik-Basis & $S \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 8}$ &

(2) S_7 ist eine eineindeutige Funktion auf $\{0, 1, 2\}$ &

(a) $S_{7,0}$ ist eine eineindeutige Funktion auf CFml_S &

(b) $S_{7,1}$ ist eine eineindeutige Funktion auf $(\mathbb{N} \otimes \mathrm{CFml}_S)$ &

(c) $S_{7,2}$ ist eine eineindeutige Funktion auf $(\mathrm{ePot}(\mathbb{N}) \otimes \mathrm{CFml}_S)$ &

(3) $\forall i \forall j(i, j \in \{0, 1, 2\}$ & $i \neq j \Rightarrow \mathrm{Ran}(S_{7,i}) \cap \mathrm{Ran}(S_{7,j}) = 0)$ &

(4) $\forall i(i \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow \mathrm{Ran}(S_{7,i}) \cap \mathrm{Adr}_S = 0)$ &

(5) $\forall R(R \in \mathrm{HR}_S \Rightarrow R = \mathrm{ReflFolg}_S$ oder R ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für $S)$.

2.4.10 DEF.– Für alle S: der_Anziehungsperformator_von_$S = S_{7,0}$.

2.4.11 DEF.– Für alle S: der_Annahmeperformator_von_$S = S_{7,1}$.

2.4.12 DEF.– Für alle S: der_Folgerungsperformator_von_$S = S_{7,2}$.

Nach dieser Konstruktion sind die drei Performatoren einer Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen keine Ausdrücke, sondern metatheoretische Funktionen, welche einer Formel, bzw. einer natürlichen Zahl und einer Formel, bzw. einer endlichen Teilmenge der natürlicher Zahlen und einer Formel ein Gebilde eineindeutig zuordnen, von dem nur bekannt ist, daß die jeweiligen Argumente des jeweiligen Performators an ihm (dem Gebilde) eindeutig identifizierbar sind.

In den folgenden Definitionen werden weitere Bezeichnungen eingeführt.

$*$ der Anziehungssatz für B von S $*$

2.4.13 DEF.– Für alle S, B: ${}^{S}\mathbb{E}\, B = S_{7,0}(B)$.

2.4.14 DEF.– Für alle S, a, B: *a ist der Anziehungssatzs für B von S* gdw $a = {}^{S}\mathbb{E}\, B$.

2.4.15 DEF.– Für alle S, a: *a ist ein Anziehungssatz von S* gdw $\exists B(B \in \mathrm{CFml}_S \ \& \ a = {}^{S}\mathbb{E}\, B)$.

$*$ der Annahmesatz für B mit Index i von S $*$

2.4.16 DEF.– Für alle S, B, i: ${}^{S}\mathbb{A}_i\, B = S_{7,1}(\langle i, B\rangle)$.

2.4.17 DEF.– Für alle S, a, B: *a ist ein Annahmesatz für B* von S gdw $B \in \mathrm{CFml}_S \ \& \ \exists i(i \in \mathbb{N} \ \& \ a = {}^{S}\mathbb{A}_i\, B)$.

2.4.18 DEF.– Für alle S, a, i: *a ist ein Annahmesatz mit Index i* von S gdw $i \in \mathbb{N} \ \& \ \exists B(B \in \mathrm{CFml}_S \ \& \ a = {}^{S}\mathbb{A}_i\, B)$.

2.4.19 DEF.– Für alle S, a: *a ist ein Annahmesatz von S* gdw $\exists B \exists i(B \in \mathrm{CFml}_S \ \& \ i \in \mathbb{N} \ \& \ a = {}^{S}\mathbb{A}_i\, B)$.

$*$ der Folgerungssatz für B mit Indexklasse e von S $*$

2.4.20 DEF.– Für alle S, B, e: ${}^{S}\mathbb{F}_e\, B = S_{7,2}(\langle e, B\rangle)$.

2.4.21 DEF.– Für alle S, a, B: *a ist ein Folgerungssatz für B* von S gdw $B \in \mathrm{CFml}_S \ \& \ \exists e(e \in \mathrm{ePot}(\mathbb{N}) \ \& \ a = {}^{S}\mathbb{F}_e\, B)$.

2.4.22 DEF.– Für alle S, a, e: *a ist ein Folgerungssatz mit Indexklasse e* von S gdw $e \in \mathrm{ePot}(\mathbb{N}) \ \& \ \exists B(B \in \mathrm{CFml}_S \ \& \ a = {}^{S}\mathbb{F}_e\, B)$.

2.4.23 DEF.– Für alle S, a: *a ist ein Folgerungssatz von S* gdw $\exists B \exists e(B \in \mathrm{CFml}_S \ \& \ e \in \mathrm{ePot}(\mathbb{N}) \ \& \ a = {}^{S}\mathbb{F}_e\, B)$.

2.4.24 DEF.– Für alle S, a, B: *a ist ein Satz für B von S* gdw a ist ein Anziehungssatz für B von S oder a ist ein Annahmesatz für B von S oder a ist ein Folgerungssatz für B von S.

2.4.25 DEF.– Für alle S, a: *a ist ein Satz von S* gdw a ist ein Anziehungssatz von S oder a ist ein Annahmesatz von S oder a ist ein Folgerungssatz von S.

Das folgende Theorem expliziert den Begriff der Herleitung für Logik-Basen für pragmatisierte Herleitungen:

**2.4.26 BEH.– Für alle S: wenn S ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen, dann gilt $\forall H(H$ ist eine Herleitung über S gdw H ist eine endliche Folge $\ \& \ H \neq 0 \ \& \ \forall i(i \in \mathrm{Dom}(H) \Rightarrow$
$\Rightarrow H_i \in (\{0\} \times \mathrm{MeanPost}_S)$ or $(\mathrm{ReflFolg}_S \in \mathrm{HR}_S \ \& \ \exists B(B \in \mathrm{CFml}_S \ \& \ H_i = (\{B\}, B)))$ or $\exists R \exists j(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für $S \ \& \ R \in \mathrm{HR}_S \ \& \ j \in \mathrm{Tup}^{>0}(i) \ \& \ (H_i, \langle H_{j_k}\rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R))$.**

Jede Herleitungsrelation einer Logik-Basis S für pragmatisierte Herleitungen ist entweder die Relation $\mathrm{ReflFolg_S}$ oder eine prämissenkonservative Herleitungsrelation. Dadurch wird erzwungen, daß es zu jeder Formel B, welche in der ersten Projektion eines Gliedes einer Herleitung H über einer Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen Element ist, ein Glied von H der Gestalt $(\{\mathrm{B}\}, \mathrm{B})$ gibt. Diese Tatsache wird in den beiden nächsten Theoremen präzisiert:

2.4.27 BEH.– Für alle S, H, i: wenn

(1) S ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen &

(2) H ist eine Herleitung über S &

(3) $i \in \mathrm{Dom}(H)$ &

dann $\forall C(C \in \mathrm{pr1}(H_i) \Rightarrow \exists l(l \leqslant_{\mathbb{N}} i \;\&\; H_l = (\{C\}, C)))$.

2.4.28 BEH.– Für alle S, H, R, i, j: Wenn

(1) S ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen &

(2) H ist eine Herleitung über S &

(3) R ist eine prämissenkonservative Herleitungsrelation für S & $R \in \mathrm{HR}_S$ & $i \in \mathrm{Dom}(H)$ & $j \in \mathrm{Tup}^{>0}(i)$ & $(H_i, \langle H_{j_k}\rangle_{k\in\mathrm{Dom}(j)}) \in R$,

dann gilt $\forall C(C \in \mathrm{pr1}(H_i) \Rightarrow \exists l(l <_{\mathbb{N}} i \;\&\; H_l = (\{C\}, C)))$.

Eine *pragmatisierte Herleitung* über einer Logik-Basis S für pragmatisierte Herleitungen ist eine endliche Folge von Sätzen von S, die mit den Herleitungsrelationen von S konform ist; was dies heißen soll, wird in Definition 2.4.30 präzisiert. Zuvor wird ein Hilfsbegriff für pragmatisierte Herleitungen definiert:

2.4.29 DEF.– Für alle S, H, i, X: *X ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes i in H über S* genau dann, wenn gilt:

(1) H ist eine endliche Folge von Sätzen von S & $i \in \mathrm{Dom}(H)$ &

(2) H_i ist Anziehungssatz von S & $X = 0$ oder

oder $\exists B(H_i$ ist Annahmesatz für B von S & $X = \{B\})$ oder

oder $\exists e(H_i$ ist Folgerungssatz mit der Indexklasse e von S & $X = \{D \mid D \in \mathrm{CFml}_S \;\&\; \exists j(j \in e \;\&\; {}^S\mathbb{A}_j\, D \in \mathrm{Ran}(H\lceil i))\})$.

Es folgt die Definition des Begriffs der pragmatisierten Herleitung:

2.4.30 DEF.– Für alle S, H, A, X: *H ist eine pragmatisierte Herleitung für A in Abhängigkeit von X über S* genau dann, wenn gilt:

(1) S ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen &

(2) H ist eine endliche Folge & $H \neq 0$ &

(3) für alle i: wenn $i \in \mathrm{Dom}(H)$, dann gilt:
$\exists B(B \in \mathrm{MeanPost}_S \;\&\; H_i = {}^S\mathbb{E}\, B)$ oder

oder $\mathrm{ReflFolg}_S \in \mathrm{HR}_S$ & $\exists B \exists n(B \in \mathrm{CFml}_S \;\&\; n \in \mathbb{N} \;\&\; H_i = {}^S\mathbb{A}_n\, B \;\&\; \forall C \forall m \forall j(C \in \mathrm{CFml}_S \;\&\; m \in \mathbb{N} \;\&\; j \in \mathrm{Dom}(H) \;\&\; H_j = {}^S\mathbb{A}_m\, C \;\&\; j \neq i \;\&\; C \neq B \Rightarrow m \neq n))$ oder

oder $\exists B \exists e(B \in \mathbf{CFml}_S \ \ \& \ \ e \in \mathbf{ePot}(\mathbb{N}) \ \ \& \ \ H_i = {}^S\mathbb{F}_e B \ \ \& \ \ \exists R \exists j \exists Z \exists Y \exists C(R$ **ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für** S $\&$ $R \in \mathbf{HR}_S$ $\&$ $j \in \mathbf{Tup}^{>0}(i)$ $\&$ Z **ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes** i **in** H **über** S $\&$ $Y \in \mathbf{Tup}^{=\mathbf{Dom}(j)}$ $\&$ $\forall k(k \in \mathbf{Dom}(j) \Rightarrow Y_k$ **ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes** j_k **in** H **über** $S)$ $\&$ $C \in \mathbf{Tup}^{=\mathbf{Dom}(j)}(\mathbf{CFml}_S)$ $\&$ $\forall k(k \in \mathbf{Dom}(j) \Rightarrow H_{j_k}$ **ist ein Satz für** C_k **von** $S)$ $\&$ $((Z, B), \langle (Y_k, C_k) \rangle_{k \in \mathbf{Dom}(j)}) \in R))$ $\&$

(4) $H_{\mathbf{Dom}(H)-1}$ **ist ein Satz für** A **von** S $\&$ X **ist die Klasse der Annahmeformeln für das Glied** $\mathbf{Dom}(H) - 1$ **in** H **über** S**.**

2.4.31 DEF.– Für alle S**,** H**:** H ***ist eine pragmatisierte Herleitung über*** S **genau dann, wenn gilt:** $\exists A \exists X$ H **ist eine pragmatisierte Herleitung für** A **in Abhängigkeit von** X **über** S**.**

2.4.32 DEF.– Für alle S**,** A**,** X**:** A **ist pragmatisiert herleitbar in Abhängigkeit von** X **über** S **gdw** $\exists H H$ **ist eine pragmatisierte Herleitung für** A **in Abhängigkeit von** X **über** S**.**

Das nächste Theorem besagt, daß es zu jeder Herleitung eine entsprechende pragmatisierte Herleitung gibt:

2.4.33 BEH.– Für alle S**: wenn** S **ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen, dann gilt** $\forall H \forall X \forall A(H$ **ist eine Herleitung für** (X, A) **über** $S \Rightarrow \exists H'$ H' **ist pragmatisierte Herleitung für** A **in Abhängigkeit von** X **über** $S)$**.**

Und umgekehrt gibt es zu jeder pragmatisierten Herleitung eine entsprechende Herleitung:

2.4.34 BEH.– Für alle S**: wenn** S **ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen, dann gilt** $\forall H \forall X \forall A(H$ **ist pragmatisierte Herleitung für** A **in Abhängigkeit von** X **über** $S \Rightarrow \exists H'$ H' **ist Herleitung für** (X, A) **über** $S)$**.**

Und es folgt:

2.4.35 BEH.– Für alle S**: wenn** S **ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen, dann ist** $\mathbf{F}_S = \{p \mid \exists X \exists A(A$ **ist pragmatisiert herleitbar in Abhängigkeit von** X **über** S $\&$ $p = (X, A))\}$**.**

2.5 Zulässige pragmatisierte Herleitungen

Ebenso, wie man zu einer Herleitung eine pragmatisierte Herleitung konstruieren kann, kann man zu einer zulässigen Herleitung eine zulässige pragmatisierte Herleitung konstruieren. Der Unterschied besteht nur darin, daß nicht nur Bedeutungspostulate angezogen werden dürfen, sondern alle analytisch-wahren Formeln, und daß Formeln nicht nur mit Herleitungsrelationen der zugrunde liegenden Logik-Basis, sondern mit beliebigen zulässigen und prämissenkonservativen Herleitungsrelationen gefolgert werden dürfen.

2.5.1 DEF.– Für alle S, H, A, X: *H ist eine zulässige pragmatisierte Herleitung für A in Abhängigkeit von X über S* genau dann, wenn gilt:

(1) S ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen &

(2) H ist eine endliche Folge & $H \neq 0$ &

(3) für alle i: wenn $i \in \mathrm{Dom}(H)$, dann gilt: $\exists B(B \in \text{A-True}_S \;\&\; H_i = {}^S\mathbb{E}\, B)$ oder

oder $\mathrm{ReflFolg}_S \in \mathrm{HR}_S \;\&\; \exists B \exists n(B \in \mathrm{CFml}_S \;\&\; n \in \mathbb{N} \;\&\; H_i = {}^S\mathbb{A}_n\, B \;\&\; \forall C \forall m \forall j(C \in \mathrm{CFml}_S \;\&\; m \in \mathbb{N} \;\&\; j \in \mathrm{Dom}(H) \;\&\; H_j = {}^S\mathbb{A}_m\, C \;\&\; j \neq i \;\&\; C \neq B \Rightarrow m \neq n))$ oder

oder $\exists B \exists e(B \in \mathrm{CFml}_S \;\&\; e \in \mathrm{ePot}(\mathbb{N}) \;\&\; H_i = {}^S\mathbb{F}_e\, B \;\&\; \exists R \exists j \exists Z \exists Y \exists C(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S & $R \in \mathrm{ZulHR}_S \;\&\; j \in \mathrm{Tup}^{>0}(i)$ & Z ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes i in H über S & $Y \in \mathrm{Tup}^{=\mathrm{Dom}(j)} \;\&\; \forall k(k \in \mathrm{Dom}(j) \Rightarrow Y_k$ ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes j_k in H über $S)$ & $C \in \mathrm{Tup}^{=\mathrm{Dom}(j)}(\mathrm{CFml}_S) \;\&\; \forall k(k \in \mathrm{Dom}(j) \Rightarrow H_{j_k}$ ist ein Satz für C_k von $S)$ & $((Z, B), \langle (Y_k, C_k) \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R))$ &

(4) $H_{\mathrm{Dom}(H)-1}$ ist ein Satz für A von S & X ist die Klasse der Annahmeformeln für das Glied $\mathrm{Dom}(H) - 1$ in H über S.

2.5.2 DEF.– Für alle S, H: *H ist eine zulässige pragmatisierte Herleitung über S* gdw $\exists A \exists X H$ ist eine zulässige pragmatisierte Herleitung für A in Abhängigkeit von X über S

2.5.3 DEF.– Für alle S, A, X: A ist zulässig pragmatisiert herleitbar in Abhängigkeit von X über S gdw $\exists H H$ ist eine zulässige pragmatisierte Herleitung für A in Abhängigkeit von X über S.

Jede pragmatisierte Herleitung ist eine zulässige pragmatisierte Herleitung:

2.5.4 BEH.– Für alle S: wenn S ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen, dann gilt $\forall H \forall X \forall A(H$ ist eine pragmatisierte Herleitung für A in Abhängigkeit von X über $S \Rightarrow H$ ist zulässige pragmatisierte Herleitung für A in Abhängigkeit von X über $S)$.

Und umgekehrt gibt es zu jeder zulässigen pragmatisierten Herleitung eine entsprechende pragmatisierte Herleitung:

2.5.5 BEH.– Für alle S: wenn S ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen, dann gilt $\forall H \forall X \forall A(H$ ist zulässige pragmatisierte Herleitung für A in Abhängigkeit von X über $S \Rightarrow \exists H'\, H'$ ist pragmatisierte Herleitung für A in Abhängigkeit von X über $S)$.

Und es folgt:

2.5.6 BEH.– Für alle S: wenn S ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen, dann ist $\mathbf{F}_S = \{p \mid \exists X \exists A(A$ ist zulässig pragmatisiert herleitbar in Abhängigkeit von X über S & $p = (X, A))\}$.

2.6 Substituivität

Dieser Abschnitt behandelt die Frage, unter welchen Bedingungen ein Ausdruck durch einen anderen Ausdruck in einem dritten Ausdruck *salva veritate* ersetzt werden kann. Etwas genauer: unter welchen Bedingungen aus einer Gleichheitsaussage für zwei Ausdrücke a, b eine Gleichheitsaussage für zwei Ausdrücke logisch folgt, welche dadurch auseinander hervorgehen, daß a an einer oder mehreren Stellen durch b ersetzt wird, d.h. unter welchen Bedingungen für eine Logik-Basis S gilt:

$$\{\mathrm{E}_0 \centerdot_{\mathrm{S}} \langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_{\mathrm{S}}} \mathrm{E}_1 \centerdot_{\mathrm{S}} \langle \mathrm{Substs_S} \text{`} \langle \mathrm{a}, \mathrm{v}, \mathrm{c} \rangle, \mathrm{Substs_S} \text{`} \langle \mathrm{b}, \mathrm{v}, \mathrm{c} \rangle \rangle.$$

(Dabei drücken E_0, E_1 die beiden Gleichheiten aus und v ist eine Variable von S.) Wenn die vorstehende Folgerungsbeziehung für beliebige a, b gilt, dann sagen wir, daß *der Ausdruck* c *für die Variable* v *bzgl. der Gleichheiten* E_0, E_1 *die Bedingung der Substituivität erfüllt*.

Um nun hinreichende Bedingungen dafür formulieren zu können, daß ein Ausdruck die Bedingung der Substituivität erfüllt, werden einige Begriffe eingeführt. Die erste Definition präzisiert den Begriff der Substituivität:

2.6.1 DEF.– Für alle S, c, v, E_0, E_1: *c erfüllt für v die Substituivitätsbedingung bzgl. E_0, E_1 über S* genau dann, wenn gilt:

(1) $c \in \mathbf{Adr}_S$ & $v \in \mathbf{Var}_S$ &

(2) $E_0 \in \mathbf{CAdr}_S$ & $\mathbf{cat}_S(E_0) = \langle 0, \mathbf{cat}_S(v), \mathbf{cat}_S(v) \rangle$ &

(3) $E_1 \in \mathbf{CAdr}_S$ & $\mathbf{cat}_S(E_1) = \langle 0, \mathbf{cat}_S(c), \mathbf{cat}_S(c) \rangle$ &

(4) $\forall a \forall b(a, b \in \mathbf{CAdr}_S$ & $\mathbf{cat}_S(a) = \mathbf{cat}_S(v) = \mathbf{cat}_S(b) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall w \forall p(w$ **ist Abzählung von** $(\mathbf{Free}_S \text{``} \{c\}) \setminus \{v\}$ &
& p **ist Abzählung der Länge** $\mathbf{Dom}(w)$ **in** $\mathbf{Par}_S \setminus (\mathbf{TAdr}_S \text{``} \{a, b, c\})$ &
& $\forall k(k \in \mathbf{Dom}(w) \Rightarrow \mathbf{cat}_S(w_k) = \mathbf{cat}_S(p_k)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \{E_0 \centerdot_S \langle a, b \rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_S} E_1 \centerdot_S \langle \mathbf{Substs}_S \text{`} \langle a, v, \mathbf{SSubsts}_S \text{`} \langle p, w, c \rangle \rangle,$
$\mathbf{Substs}_S \text{`} \langle b, v, \mathbf{SSubsts}_S \text{`} \langle p, w, c \rangle \rangle \rangle)))$.

Bedingung (4) im Definiens der vorstehenden Definition trägt der Tatsache Rechnung, daß einerseits im Ausdruck c Variablen frei vorkommen können, andererseits der Folgerungsbegriff $\mathbf{F}_S$ nur auf *geschlossene* Formeln angewendet werden kann. Enthält der Ausdruck c außer v keine andere freie Variable, dann kann Bedingung (4) wesentlich einfacher formuliert werden, wie das nächste Theorem zeigt:

2.6.2 BEH.– Für alle S: wenn S ist eine Logik-Basis, dann gilt für alle c, v, E_0, E_1: wenn

(1) $c \in \mathrm{Adr}_S$ & $v \in \mathrm{Var}_S$ & Free_S '' $\{c\} \subseteq \{v\}$ &

(2) $E_0 \in \mathrm{CAdr}_S$ & $\mathrm{cat}_S(E_0) = \langle 0, \mathrm{cat}_S(v), \mathrm{cat}_S(v)\rangle$ &

(3) $E_1 \in \mathrm{CAdr}_S$ & $\mathrm{cat}_S(E_1) = \langle 0, \mathrm{cat}_S(c), \mathrm{cat}_S(c)\rangle$

dann gilt:
c erfüllt für v die Substituivitätsbedingung bzgl. E_0, E_1 über S
gdw
$\forall a \forall b(a,\ b \in \mathrm{CAdr}_S$ & $\mathrm{cat}_S(a) = \mathrm{cat}_S(v) = \mathrm{cat}_S(b) \Rightarrow$
$\Rightarrow \{E_0 \bullet_S \langle a,\ b\rangle\} \vdash_{\mathrm{F}_S} E_1 \bullet_S \langle \mathrm{Subst}_S\text{ ` }\langle a,\ v,\ c\rangle,\ \mathrm{Subst}_S\text{ ` }\langle b,\ v,\ c\rangle\rangle)$.

In der nächsten Definition wird der Begriff der *Substitutionsrelevanz* eingeführt. Dieser Begriff soll bezüglich einer Variablen v auf alle Teilausdrücke eines Ausdrucks c zutreffen, in welche durch die Substitution eines Ausdrucks x für die Variable v in dem Ausdruck c tatsächlich x für v substituiert wird. Z.B. ist der Ausdruck $\mathrm{P}\bullet_S\langle v\rangle$ *kein* substitutionsrelevanter Teilausdruck des Ausdrucks

$(\mathrm{Q}\bullet_S\langle v\rangle) \bullet_S\langle \mathrm{P} \bullet_S \langle v\rangle$,

wenn $\mathrm{Q}\bullet_S\langle v\rangle$ ein die Variable v bindender Operator ist.

∗ die Relation der Substitutionsrelevanz eines Ausdrucks in einem Ausdruck bzgl. einer Variablen ∗

2.6.3 DEF.– Substrelev ist Funktion auf $\{S \mid S$ ist eine Syntax-Basis$\}$ & & für alle S: wenn $S \in \mathrm{Dom(Subsrelev)}$, dann gilt:

(1) $\mathrm{Substrelev}_S$ **ist Funktion auf** Var_S &

(2) für alle v: wenn $v \in \mathrm{Var}_S$, dann gilt:

(a) $\mathrm{Substrelev}_S(v)$ **ist Relation** &

(b) $\forall d \forall c((d,\ c) \in \mathrm{Substrelev}_S(v)$ **gdw** $((c = v$ & $d = v)$ **or**
or $\exists O \exists t(O$ **paßt auf** t **über** S & $c = O \bullet_S t$ &
& $([\,d = c$ & $v \in \mathrm{Free}_S$ '' $\{c\}\,]$ **or**
or $[\,O \in \mathrm{VarBind}_S$ & $(d,\ O) \in \mathrm{Substrelev}_S(v)\,]$ **or**
or $[\,O \notin \mathrm{VarBind}_S$ & $O \in \mathrm{VarBindOpr}_S$ & $((d,\ O) \in \mathrm{Substrelv}_S(v)$ **or** $(v \notin \mathrm{Ran}(\mathrm{opd}_S(O))$ & $\exists i(i \in \mathrm{Dom}(t)$ & $(d,\ t_i) \in \mathrm{Substrelev}_S(v))))\,]$ **or**
or $[\,O \notin \mathrm{VarBind}_S$ & $O \notin \mathrm{VarBindOpr}_S$ & $\exists x(x \in \{O\} \cup \mathrm{Ran}(t)$ & $(d,\ x) \in \mathrm{Substrelev}_S(v))\,]\,))))$.

Es folgen einige Theoreme, welche Eigenschaften des Begriffs der Substitutionsrelevanz darstellen.

2.6.4 BEH.– Für alle S, v: wenn S ist eine Syntax-Basis und $v \in \mathrm{Var}_S$, dann gilt $\forall p(p \in \mathrm{Substrelev}_S(v) \Rightarrow \mathrm{pr2}(p) \in \mathrm{Adr}_S)$.

2.6.5 BEH.– Für alle S, v: wenn S ist eine Syntax-Basis und $v \in \mathrm{Var}_S$, dann $\mathrm{Substrelev}_S(v) \subseteq \mathrm{Adr}_S \times \mathrm{Adr}_S$.

2.6.6 BEH.– Für alle S, v: wenn S ist eine Syntax-Basis und $v \in \mathbf{Var}_S$, dann gilt $\forall a \forall b \forall c((a,\, b) \in \mathbf{Substrelev}_S(v)\ \ \&\ \ (b,\, c) \in \mathbf{Substrelev}_S(v) \Rightarrow (a,\, c) \in \mathbf{Substrelev}_S(v))$.

Nun kann das Substituivitätstheorem formuliert und bewiesen werden, welches hinreichende Bedingungen dafür angibt, daß ein Ausdruck für eine Variable bezüglich zweier Gleichheiten die Substituivitätsbedingung erfüllt:

∗ Substituivitätstheorem ∗

2.6.7 BEH.– Für alle S: wenn S ist eine Logik-Basis, dann gilt für alle c, v, E:

wenn

(1) $c \in \mathbf{Adr}_S\ \ \&\ \ v \in \mathbf{Var}_S\ \ \&$

(2) (a) E **ist Funktion** $\ \&\ \ \{v,\ c\} \cup \mathbf{Substrelev}_S(v) \text{``} \{c\} \subseteq \mathbf{Dom}(E)\ \ \&$

(b) $\forall x(x \in \{v,\ c\} \cup \mathbf{Substrelev}_S(v) \text{``} \{c\} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_x \in \mathbf{CAdr}_S\ \ \&\ \ \mathbf{cat}_S(E_x) = \langle 0,\, \mathbf{cat}_S(x),\, \mathbf{cat}_S(x)\rangle\ \ \&$

$\&\ \ \forall z(z \in \mathbf{CAdr}_S\ \ \&\ \ \mathbf{cat}_S(z) = \mathbf{cat}_S(x) \Rightarrow 0 \vdash_{\mathbf{F}_S} E_x \centerdot_S \langle z,\, z\rangle))\ \ \&$

(3) für alle P, u:

wenn

(a) P **paßt auf** u **über** S $\ \&$

(b) $P \centerdot_S u \in \mathbf{Substrelev}_S(v) \text{``} \{c\}\ \ \&$

(c) $\forall x(\, x \in \{P\} \cup \mathbf{Ran}(u)\ \ \&\ \ x \in \mathbf{Substrelev}_S(v) \text{``} \{P \centerdot_S u\} \Rightarrow x$ **erfüllt für v die Substituivitätsbedingung bzgl. E_v, E_x über S),**

dann

(d) $P \centerdot_S u$ **erfüllt für v die Substituivitätsbedingung bzgl. E_v, $E_{P\centerdot_S u}$ über S,**

dann

(4) c **erfüllt für v die Substituivitätsbedingung bzgl. E_v, E_c über S.**

2.7 Junktorenlogische Logik-Basen

Im Abschnitt 2.1 wurden Logik-Basen ganz allgemein charakterisiert; insbesondere wurden weder spezielle Bedeutungspostulate noch spezielle Herleitungsrelationen betrachtet. In diesem Abschnitt werden Logik-Basen betrachtet, die Herleitungsrelationen für einige der üblichen klassischen *Junktoren* enthalten: Negations-, Konditional-, Adjunktions-, Konjunktions- und Bikonditionaloperator. Bei den Herleitungsrelationen wird es sich im wesentlichen um die Herleitungsrelationen des natürlichen Schließens für die klassische Junktorenlogik handeln. Für jeden Junktor wird eine *Einführungs*- und eine *Beseitigungs*relation angegeben. (Diese Bezeichnungen sind nicht in allen Fällen wörtlich zu nehmen, aber Standard.)

Herleitungsrelationen für Negationsoperatoren

∗ die Relation der Negationseinführung ∗

2.7.1 DEF.–

(1) NE ist eine Funktion auf $\{S \mid S$ ist eine Logik-Basis$\}$ &

(2) Für alle S: wenn $S \in \mathrm{Dom(NE)}$, dann gilt:

(a) NE_S ist eine Funktion auf $\{N \mid N \in \mathrm{Adr}_S$ & & $\mathrm{cat}_S(N) = \langle 0, 0\rangle\}$ &

(b) für alle N: wenn $N \in \mathrm{Dom}(\mathrm{NE}_S)$, dann gilt:

(i) $\mathrm{NE}_S(N)$ ist eine Relation &

(ii) $\forall p \forall t((p,t) \in \mathrm{NE}_S(N)$ gdw $\exists X \exists Y \exists A \exists B(X, Y \subseteq \mathrm{CFml}_S$ & $A, B \in \mathrm{CFml}_S$ & $t = \langle (X, A), (Y, N{\cdot}_S\langle A\rangle)\rangle$ & & $p = ((X \cup Y) \setminus \{B\}, N{\cdot}_S\langle B\rangle)))$.

∗ die Relation der doppelten Negationsbeseitigung ∗

2.7.2 DEF.–

(1) NNB ist eine Funktion auf $\{S \mid S$ ist eine Logik-Basis$\}$ &

(2) Für alle S: wenn $S \in \mathrm{Dom(NNB)}$, dann gilt:

(a) NNB_S ist eine Funktion auf $\{N \mid N \in \mathrm{Adr}_S$ & & $\mathrm{cat}_S(N) = \langle 0, 0\rangle\}$ &

(b) für alle N: wenn $N \in \mathrm{Dom}(\mathrm{NNB}_S)$, dann gilt:

(i) $\mathrm{NNB}_S(N)$ ist eine Relation &

(ii) $\forall p \forall t((p,t) \in \mathrm{NNB}_S(N)$ gdw $\exists X \exists B(X \subseteq \mathrm{CFml}_S$ & & $B \in \mathrm{CFml}_S$ & $t = \langle (X, N{\cdot}_S\langle N{\cdot}_S\langle B\rangle\rangle)\rangle$ & $p = (X, B)))$.

Sind die Relationen der Negationseinführung und der doppelten Negationsbeseitigung für einen geschlossenen Ausdruck N der Kategorie $\langle 0, 0\rangle$ einer Logik-Basis S zulässige Herleitungsrelationen, dann heißt N *Negationsoperator* von S:

2.7.3 DEF.– Für alle S, N: *N ist ein Negationsoperator von S* genau dann, wenn gilt:

(1) S ist eine Logik-Basis &

(2) $N \in \mathrm{CAdr}_S$ & $\mathrm{cat}_S(N) = \langle 0, 0\rangle$ &

(3) $\mathrm{NE}_S(N)$, $\mathrm{NNB}_S(N)$ sind zulässige Herleitungsrelationen für S.

Herleitungsrelationen für Konditionaloperatoren

∗ die Relation der Konditionaleinführung ∗

2.7.4 DEF.–

(1) CE ist eine Funktion auf $\{S \mid S$ ist eine Logik-Basis$\}$ &

(2) Für alle S: wenn $S \in \mathrm{Dom(CE)}$, dann gilt:

(a) CE_S ist eine Funktion auf $\{C \mid C \in \mathrm{Adr}_S$ & & $\mathrm{cat}_S(C) = \langle 0, 0, 0\rangle\}$ &

(b) für alle C: wenn $C \in \mathrm{Dom}(\mathrm{CE}_S)$, dann gilt:

(i) $\mathrm{CE}_S(C)$ ist eine Relation &

(ii) $\forall p \forall t((p,t) \in \mathrm{CE}_S(C)$ gdw $\exists X \exists A \exists B(X \subseteq \mathrm{CFml}_S$ & & $A, B \in \mathrm{CFml}_S$ & $t = \langle (X, B)\rangle$ & $p = (X \setminus \{A\}, C{\cdot}_S\langle A, B\rangle)))$.

∗ die Relation der Konditionalbeseitigung ∗

2.7.5 DEF.–

(1) CB ist eine Funktion auf $\{S \mid S$ ist eine Logik-Basis$\}$ &

(2) Für alle S: wenn $S \in \mathrm{Dom(CB)}$, dann gilt:

(a) CB_S ist eine Funktion auf $\{C \mid C \in \mathrm{Adr}_S$ & & $\mathrm{cat}_S(C) = \langle 0, 0, 0\rangle\}$ &

(b) für alle C: wenn $C \in \mathrm{Dom}(\mathrm{CB}_S)$, dann gilt:

(i) $\mathrm{CB}_S(C)$ ist eine Relation &

(ii) $\forall p \forall t((p, t) \in \mathrm{CB}_S(C)$ gdw $\exists X \exists Y \exists A \exists B(X, Y \subseteq \mathrm{CFml}_S$ & & $A, B \in \mathrm{CFml}_S$ & $t = \langle (X, A), (Y, C._S\langle A, B\rangle)\rangle$ & & $p = (X \cup Y, B)))$.

Sind für einen geschlossenen Ausdruck C einer Logik-Basis S die Relationen der Konditionaleinführung und der Konditionalbeseitigung zulässige Herleitungsrelationen, dann heißt C *Konditionaloperator* von S:

2.7.6 DEF.– Für alle S, C: *C ist ein Konditionaloperator von S* genau dann, wenn gilt:

(1) S ist eine Logik-Basis &

(2) $C \in \mathrm{CAdr}_S$ & $\mathrm{cat}_S(C) = \langle 0, 0, 0\rangle$ &

(3) $\mathrm{CE}_S(C)$, $\mathrm{CB}_S(C)$ sind zulässige Herleitungsrelationen für S.

Herleitungsrelationen für Konjunktionsoperatoren

∗ die Relation der Konjunktionseinführung ∗

2.7.7 DEF.–

(1) KE ist eine Funktion auf $\{S \mid S$ ist eine Logik-Basis$\}$ &

(2) Für alle S: wenn $S \in \mathrm{Dom(KE)}$, dann gilt:

(a) KE_S ist eine Funktion auf $\{K \mid K \in \mathrm{Adr}_S$ & & $\mathrm{cat}_S(K) = \langle 0, 0, 0\rangle\}$ &

(b) für alle K: wenn $K \in \mathrm{Dom}(\mathrm{KE}_S)$, dann gilt:

(i) $\mathrm{KE}_S(K)$ ist eine Relation &

(ii) $\forall p \forall t((p, t) \in \mathrm{KE}_S(K)$ gdw $\exists X \exists Y \exists A \exists B(X, Y \subseteq \mathrm{CFml}_S$ & & $A, B \in \mathrm{CFml}_S$ & $t = \langle (X, A), (Y, B)\rangle$ & $p = (X \cup Y, K._S\langle A, B\rangle)))$.

∗ die Relation der Konjunktionsbeseitigung ∗

2.7.8 DEF.–

(1) KB ist eine Funktion auf $\{S \mid S$ ist eine Logik-Basis$\}$ &

(2) Für alle S: wenn $S \in \mathrm{Dom(KB)}$, dann gilt:

(a) KB_S ist eine Funktion auf $\{K \mid K \in \mathrm{Adr}_S$ & & $\mathrm{cat}_S(K) = \langle 0, 0, 0\rangle\}$ &

(b) für alle K: wenn $K \in \mathrm{Dom}(\mathrm{KB}_S)$, dann gilt:

(i) $\mathrm{KB}_S(K)$ ist eine Relation &

(ii) $\forall p \forall t((p, t) \in \mathrm{KB}_S(K)$ gdw $\exists X \exists A \exists B(X \subseteq \mathrm{CFml}_S$ & & $A, B \in \mathrm{CFml}_S$ & $t = \langle (X, K._S\langle A, B\rangle)\rangle$ & $p \in \{(X, A), (X, B)\}))$.

Analog zur Definition 2.7.6 des Begriffs des Konditionaloperators einer Sprache kann der Begriff des *Konjunktionsoperators* definiert werden.

Herleitungsrelationen für Adjunktionsoperatoren

$*$ die Relation der Adjunktionseinführung $*$

2.7.9 DEF.–

(1) $\mathbf{AE}$ **ist eine Funktion auf** $\{S \mid S$ **ist eine Logik-Basis**$\}$ &

(2) Für alle S**: wenn** $S \in \mathrm{Dom}(\mathrm{AE})$**, dann gilt:**

(a) AE_S **ist eine Funktion auf** $\{J \mid J \in \mathrm{Adr}_S$ & & $\mathrm{cat}_S(J) = \langle 0, 0, 0\rangle\}$ &

(b) für alle J**: wenn** $J \in \mathrm{Dom}(\mathrm{AE}_S)$**, dann gilt:**

(i) $\mathrm{AE}_S(J)$ **ist eine Relation** &

(ii) $\forall p \forall t((p,t) \in \mathrm{AE}_S(J)$ gdw $\exists X \exists A \exists B(X \subseteq \mathrm{CFml}_S$ & & $A, B \in \mathrm{CFml}_S$ & $t = \langle (X, A)\rangle$ & $(p = (X, J._S\langle A, B\rangle)$ or or $p = (X, J._S\langle B, A\rangle))))$.

$*$ die Relation der Adjunktionsbeseitigung $*$

2.7.10 DEF.–

(1) $\mathbf{AB}$ **ist eine Funktion auf** $\{S \mid S$ **ist eine Logik-Basis**$\}$ &

(2) Für alle S**: wenn** $S \in \mathrm{Dom}(\mathrm{AB})$**, dann gilt:**

(a) AB_S **ist eine Funktion auf** $\{J \mid J \in \mathrm{Adr}_S$ & & $\mathrm{cat}_S(J) = \langle 0, 0, 0\rangle\}$ &

(b) für alle J**: wenn** $J \in \mathrm{Dom}(\mathrm{AB}_S)$**, dann gilt:**

(i) $\mathrm{AB}_S(J)$ **ist eine Relation** &

(ii) $\forall p \forall t((p,t) \in \mathrm{AB}_S(J)$ gdw gdw $\exists X \exists Y \exists Z \exists A \exists B \exists C(X, Y, Z \subseteq \mathrm{CFml}_S$ & $A, B, C \in \mathrm{CFml}_S$ & & $t = \langle (X, J._S\langle A, B\rangle), (Y, C), (Z, C)\rangle$ & & $p = (X \cup (Y \setminus \{A\}) \cup (Z \setminus \{B\}), C)))$.

Analog zur Definition 2.7.6 des Begriffs des Konditionaloperators einer Logik-Basis kann der Begriff des *Adjunktionsoperators* definiert werden.

Herleitungsrelationen für Bikonditionaloperatoren

$*$ die Relation der Bikonditionaleinführung $*$

2.7.11 DEF.–

(1) $\mathbf{BE}$ **ist eine Funktion auf** $\{S \mid S$ **ist eine Logik-Basis**$\}$ &

(2) Für alle S**: wenn** $S \in \mathrm{Dom}(\mathrm{BE})$**, dann gilt:**

(a) BE_S **ist eine Funktion auf** $\{I \mid I \in \mathrm{Adr}_S$ & & $\mathrm{cat}_S(I) = \langle 0, 0, 0\rangle\}$ &

(b) für alle I**: wenn** $I \in \mathrm{Dom}(\mathrm{BE}_S)$**, dann gilt:**

(i) $\mathrm{BE}_S(I)$ **ist eine Relation** &

(ii) $\forall p \forall t((p,t) \in \mathrm{BE}_S(I)$ gdw $\exists X \exists Y \exists A \exists B(X, Y \subseteq \mathrm{CFml}_S$ & & $A, B \in \mathrm{CFml}_S$ & $t = \langle (X, B), (Y, A)\rangle$ & & $p = ((X \setminus \{A\}) \cup (Y \setminus \{B\}), I._S\langle A, B\rangle)))$.

$*$ die Relation der Bikonditionalbeseitigung $*$

2.7.12 DEF.–

(1) BB ist eine Funktion auf $\{S \mid S$ ist eine Logik-Basis$\}$ &

(2) Für alle S: wenn $S \in \mathrm{Dom(BB)}$, dann gilt:

(a) BB_S ist eine Funktion auf $\{I \mid I \in \mathrm{Adr}_S$ & & $\mathrm{cat}_S(I) = \langle 0, 0, 0\rangle\}$ &

(b) für alle I: wenn $I \in \mathrm{Dom}(\mathrm{BB}_S)$, dann gilt:

(i) $\mathrm{BB}_S(I)$ ist eine Relation &

(ii) $\forall p \forall t((p, t) \in \mathrm{BB}_S(I)$ gdw $\exists X \exists Y \exists A \exists B(X, Y \subseteq \mathrm{CFml}_S$ & & $A, B \in \mathrm{CFml}_S$ & $([t = \langle (X, I.{}_S\langle A, B\rangle), (Y, A)\rangle$ & $p = (X \cup Y, B)]$ or $[t = \langle (X, I.{}_S\langle A, B\rangle), (Y, B)\rangle$ & $p = (X \cup Y, A)])))$.

Analog zur Definition 2.7.6 des Begriffs des Konditionaloperators einer Sprache kann der Begriff des *Bikonditionaloperators* definiert werden.

Wenn eine Logik-Basis S keine Bedeutungspostulate enthält, kann mit den vorstehend definierten junktorenlogischen Herleitungsrelationen für kein geordnetes Paar $(X,\ A)$ mit $X \subseteq \mathrm{CFml}_S$ und $A \in \mathrm{CFml}_S$ bewiesen werden $(X,\ A) \in \mathbf{F}_S$, denn es sind dann keine Anfangselemente in $\mathbf{F}_S$ enthalten. Insbesondere ist für keine geschlossene Formel A von S $(\{A\},\ A) \in \mathbf{F}_S$ beweisbar. Für diesen Fall wird nun eine Herleitungsrelation definiert, die als Anfangselemente für jedes $A \in \mathrm{CFml}_S$ das geordnete Paar $(\{A\},\ A)$ als Anfangselement zur Verfügung stellt. Das bedeutet, daß im Sinn von $\mathbf{F}_S$ jede geschlossene Formel von S aus sich selbst folgt. Es wird zunächst für diese Klasse von geordneten Paaren eine Bezeichnung eingeführt.

$*$ die Reflexivitätsklasse von S $*$

2.7.13 DEF.– Für alle S:
$\mathrm{Reflex}_S = \{p \mid \exists A(A \in \mathrm{CFml}_S$ & $p = (\{A\}, A))\}$.

Nun kann die zugehörige Herleitungsrelation definiert werden:

$*$ die Reflexivitätsrelation $*$

2.7.14 DEF.–

(1) Rflx ist Funktion auf $\{S|S$ ist eine Logik-Basis$\}$ &

(2) $\forall S(S \in \mathrm{Dom(Rflx)} \Rightarrow \mathrm{Rflx}_S = \{p|\exists q(q \in \mathrm{Reflex}_S$ & $p = (q,\ 0))\})$.

Die Herleitungsrelation Rflx_S tut das, was sie soll:

2.7.15 BEH.– Für alle S: wenn S ist eine Logik-Basis & $\mathrm{Rflx}_S \in \mathrm{HR}_S$, dann $\mathrm{Reflex}_S \subseteq \mathbf{F}_S$, d.h. es gilt $\forall A(A \in \mathrm{CFml}_S \Rightarrow (\{A\},\ A) \in \mathbf{F}_S)$.

NC-Logik-Basen

Enthält eine Logik-Basis Herleitungsrelationen (und eventuell Bedeutungspostulate) für Junktoren, heißt sie eine *junktorenlogische Logik-Basis*. Handelt es sich um

Junktoren im Sinn der klassischen Logik, sind die Herleitungsrelationen bzw. Bedeutungspostulate im allgemeinen nicht unabhängig voneinander; z.B. lassen sich Konjunktions-, Adjunktions- und Bikonditionaloperatoren mit Hilfe von Negations- und Konditionaloperator definieren und ihre Herleitungsrelationen als zulässig erweisen. Beispielshalber sollen im folgenden Logik-Basen behandelt werden, welche einen Negations- und einen Konditionaloperator enthalten.

2.7.16 DEF.– Für alle S: *S ist eine NC-Logik-Basis* genau dann, wenn gilt:

(1) S ist eine Logik-Basis &

(2) $\langle 0,0\rangle \in \mathbf{Konst\text{-}Cat}_S$ & $0 \in \mathbf{Dom}(S_3(\langle 0,0\rangle))$ & & $\mathbf{NE}_S(S_3(\langle 0,0\rangle)_0)$, $\mathbf{NNB}_S(S_3(\langle 0,0\rangle)_0) \in \mathbf{HR}_S$ &

(3) $\langle 0,0,0\rangle \in \mathbf{Konst\text{-}Cat}_S$ & $0 \in \mathbf{Dom}(S_3(\langle 0,0,0\rangle))$ & $\mathbf{CE}_S(S_3(\langle 0,0,0\rangle)_0)$, $\mathbf{CB}_S(S_3(\langle 0,0,0\rangle)_0) \in \mathbf{HR}_S$.

(4) $\mathbf{Rflx}_S \in \mathbf{HR}_S$.

In den nächsten Definitionen werden einige Bezeichnungen eingeführt:

$*$ die Negationskonstante von S $*$

2.7.17 DEF.– Für alle S: $\mathbf{Neg}_S = S_3(\langle 0,0\rangle)_0$.

$*$ die Negation von A in S $*$

2.7.18 DEF.– Für alle S, A: $\neg_S A = \mathbf{Neg}_S \,\boldsymbol{\cdot}_S\, \langle A\rangle$.

$*$ die Konditionalkonstante von S $*$

2.7.19 DEF.– Für alle S: $\mathbf{Cond}_S = S_3(\langle 0,0,0\rangle)_0$.

$*$ das Konditional von A, B in S $*$

2.7.20 DEF.– Für alle S, A, B: $(A \rightarrow_S B) = \mathbf{Cond}_S \,\boldsymbol{\cdot}_S\, \langle A, B\rangle$.

Es folgen einige Theoreme, in denen Eigenschaften des Folgerungsbegriffs, der Negations- und der Konditionalkonstanten einer NC-Logik-Basis dargestellt sind.

$*$ Eigenschaften des Folgerungsbegriffs $*$

2.7.21 BEH.– Für alle S: wenn S eine NC-Logik-Basis ist, dann gilt:

(1) $\mathbf{F}_S$ erfüllt die strikte Reflexivitätsbedingung in S, d.h. es gilt: (Refl°) $\forall A(A \in \mathbf{CFml}_S \Rightarrow \{A\} \vdash_{\mathbf{F}_S} A)$.

(2) $\mathbf{F}_S$ erfüllt die Reflexivitätsbedingung in S, d.h. es gilt: (Refl) $\forall X \forall A(X \text{ endl}\subseteq \mathbf{CFml}_S \ \&\ A \in X \Rightarrow X \vdash_{\mathbf{F}_S} A)$.

(3) $\mathbf{F}_S$ erfüllt die Monotoniebedingung in S, d.h. es gilt: (Mon) $\forall X \forall Y \forall A(X \vdash_{\mathbf{F}_S} A \ \&\ Y \text{ endl}\subseteq \mathbf{CFml}_S \Rightarrow X \cup Y \vdash_{\mathbf{F}_S} A)$.

(4) $\mathbf{F}_S$ erfüllt die Schnittbedingung in S, d.h. es gilt: (Cut) $\forall X \forall Y \forall A(X \vdash_{\mathbf{F}_S} A \ \&\ Y \text{ endl}\subseteq \mathbf{CFml}_S \ \&\ \forall B(B \in X \Rightarrow$ $\Rightarrow Y \vdash_{\mathbf{F}_S} B) \Rightarrow Y \vdash_{\mathbf{F}_S} A)$.

(5) $\mathbf{F}_S$ erfüllt die Endlichkeitsbedingung in S, d.h. es gilt:
(Fin) $\forall X \forall A(X \vdash_{\mathbf{F}_S} A \Rightarrow X \text{ endl}\subseteq \mathbf{CFml}_S)$.

(6) $\mathbf{F}_S$ erfüllt die Substitutionsbedingung in S, d.h. es gilt:
(Substbed) $\forall X \forall A \forall b \forall y(X \vdash_{\mathbf{F}_S} A \;\&\; b \in \mathbf{CAdr}_S \;\&\; y \in \mathbf{Par}_S \;\&$
$\& \; \mathbf{cat}_S(b) = \mathbf{cat}_S(y) \Rightarrow \{\mathbf{Subst}_S \text{`} \langle b, y, C\rangle\}_{C \in X} \vdash_{\mathbf{F}_S} \mathbf{Subst}_S \text{`} \langle b, y, A\rangle)$.

∗ Eigenschaften der Negationskonstanten ∗

2.7.22 BEH.– Für alle S: wenn S eine NC-Logik-Basis ist, dann gilt:

(1) $\mathbf{Neg}_S$ erfüllt die Bedingung der Negationseinführung in S, d.h. es gilt:
(NE) $\forall X \forall Y \forall A \forall B(B \in \mathbf{CFml}_S \;\&\; X \vdash_{\mathbf{F}_S} A \;\&\; Y \vdash_{\mathbf{F}_S} \neg_S A \Rightarrow$
$\Rightarrow (X \cup Y) \setminus \{B\} \vdash_{\mathbf{F}_S} \neg_S B)$.

(2) $\mathbf{Neg}_S$ erfüllt die Bedingung der doppelten Negationsbeseitigung in S, d.h. es gilt:
(NNB) $\forall X \forall A(A \in \mathbf{CFml}_S \;\&\; X \vdash_{\mathbf{F}_S} \neg_S \neg_S A \Rightarrow X \vdash_{\mathbf{F}_S} A)$.

(3) $\mathbf{Neg}_S$ erfüllt die Bedingung der doppelten Negationseinführung in S, d.h. es gilt:
(NNE) $\forall X \forall A(X \vdash_{\mathbf{F}_S} A \Rightarrow X \vdash_{\mathbf{F}_S} \neg_S \neg_S A)$.

(4) (Ex contradictione quod libet sequitur)
(ECQLS) $\forall X \forall Y \forall A \forall B(X \vdash \mathbf{F}_S A \;\&\; Y \vdash_{\mathbf{F}_S} \neg_S A \;\&\; B \in \mathbf{CFml}_S \Rightarrow$
$\Rightarrow X \cup Y \vdash_{\mathbf{F}_S} B)$.

(5) (Kontraposition)
(KP) $\forall X \forall B \forall C(X \cup \{B\} \vdash_{\mathbf{F}_S} C \Rightarrow X \cup \{\neg_S C\} \vdash_{\mathbf{F}_S} \neg_S B)$.

(6) (Redundanz kontradiktorischer Prämissen)
(RedKontrPr) $\forall X \forall Y \forall B \forall C(X \cup \{B\} \vdash_{\mathbf{F}_S} C \;\&\; Y \cup \{\neg_S B\} \vdash_{\mathbf{F}_S} C \Rightarrow X \cup Y \vdash_{\mathbf{F}_S} C)$.

∗ Eigenschaften der Konditionalkonstanten ∗

2.7.23 BEH.– Für alle S: wenn S eine NC-Logik-Basis ist, dann gilt:

(1) $\mathbf{Cond}_S$ erfüllt die Bedingung der Konditionaleinführung in S, d.h. es gilt:
(CE) $\forall X \forall A \forall B(A \in \mathbf{CFml}_S \;\&\; X \vdash_{\mathbf{F}_S} B \Rightarrow X \setminus \{A\} \vdash_{\mathbf{F}_S} (A \rightarrow_S B)$.

(2) $\mathbf{Cond}_S$ erfüllt die Bedingung der Konditionalbeseitigung in S, d.h. es gilt:
(CB) $\forall X \forall Y \forall A \forall B(B \in \mathbf{CFml}_S \;\&\; X \vdash_{\mathbf{F}_S} A \;\&\; Y \vdash_{\mathbf{F}_S} (A \rightarrow_S B) \Rightarrow X \cup Y \vdash_{\mathbf{F}_S} B)$.

(3) $\mathbf{Cond}_S$ erfüllt die Bedingung der Reflexivität in S, d.h. es gilt:
(ReflCond) $\forall A(A \in \mathbf{CFml}_S \Rightarrow \mathbf{0} \vdash_{\mathbf{F}_S} (A \rightarrow_S A))$.

(4) $\mathbf{Cond}_S$ erfüllt die Bedingung der Exportation in S, d.h. es gilt:
(Export) $\forall X \forall A \forall B(A, B \in \mathbf{CFml}_S \;\&\; X \vdash_{\mathbf{F}_S} (A \rightarrow_S B) \Rightarrow X \cup \{A\} \vdash_{\mathbf{F}_S} B)$.

(5) $\mathbf{Cond}_S$ erfüllt die Bedingung der Transitivität in S, d.h. es gilt:
(TransCond) $\forall X \forall Y \forall A \forall B \forall C(A, B, C \in \mathbf{CFml}_S \;\&\; X \vdash_{\mathbf{F}_S} (A \rightarrow_S B) \;\&\; Y \vdash_{\mathbf{F}_S} (B \rightarrow_S C) \Rightarrow X \cup Y \vdash_{\mathbf{F}_S} (A \rightarrow C))$.

(6) (Ex quod libet verum sequitur)
(EQLVS) $\forall X \forall A \forall B(A \in \mathbf{CFml}_S \;\&\; X \vdash_{\mathbf{F}_S} B \Rightarrow X \vdash_{\mathbf{F}_S} (A \rightarrow_S B)$.

(7) **(Ex falso quod libet sequitur)**
(EFQLS) $\forall X \forall A \forall B(A, B \in \mathbf{CFml}_S \ \ \& \ \ X \vdash_{\mathbf{F}_S} \neg_S A \Rightarrow X \vdash_{\mathbf{F}_S} (A \rightarrow B))$.

(8) **(Ex verum falsum non sequitur)**
(EVFNS) $\forall X \forall Y \forall A \forall B(B \in \mathbf{CFml}_S \ \ \& \ \ X \vdash_{\mathbf{F}_S} A \ \ \& \ \ Y \vdash_{\mathbf{F}_S} \neg_S B \Rightarrow$
$\Rightarrow X \cup Y \vdash_{\mathbf{F}_S} \neg_S(A \rightarrow_S B))$.

Komplette junktorenlogische Logik-Basen

Enthält eine Logik-Basis mindestens je einen Negationsoperator, Konditionaloperator, Konjunktionsoperator, Adjunktionsoperator und Bikonditionaloperator, dann soll sie eine *komplette junktorenlogische Logik-Basis* heißen.

2.7.24 DEF.– Für alle S: *S ist eine komplette junktorenlogische Logik-Basis* genau dann, wenn gilt:

(1) S **ist eine Logik-Basis** &

(2) $\langle 0,0\rangle \in \mathbf{Konst\text{-}Cat}_S \ \ \& \ \ 0 \in \mathbf{Dom}(S_3(\langle 0,0\rangle)) \ \ \&$
$\& \ \ \mathbf{NE}_S(S_3(\langle 0,0\rangle)_0), \mathbf{NNB}_S(S_3(\langle 0,0\rangle)_0) \in \mathbf{HR}_S \ \ \&$

(3) $\langle 0,0,0\rangle \in \mathbf{Konst\text{-}Cat}_S \ \ \&$
$\& \ \ \{0,1,2,3\} \subseteq_S \mathbf{Dom}(S_3(\langle 0,0,0\rangle)) \ \ \&$

(a) $\mathbf{CE}_S(S_3(\langle 0,0,0\rangle)_0), \mathbf{CB}_S(S_3(\langle 0,0,0\rangle)_0), \in \mathbf{HR}_S \ \ \&$
(b) $\mathbf{KE}_S(S_3(\langle 0,0,0\rangle)_1), \mathbf{KB}_S(S_3(\langle 0,0,0\rangle)_1), \in \mathbf{HR}_S \ \ \&$
(c) $\mathbf{AE}_S(S_3(\langle 0,0,0\rangle)_2), \mathbf{AB}_S(S_3(\langle 0,0,0\rangle)_2), \in \mathbf{HR}_S \ \ \&$
(d) $\mathbf{BE}_S(S_3(\langle 0,0,0\rangle)_3), \mathbf{BB}_S(S_3(\langle 0,0,0\rangle)_3), \in \mathbf{HR}_S \ \ \&$

(4) $\mathbf{Rflx}_S \in \mathbf{HR}_S$.

2.7.25 BEH.– Für alle S: wenn S ist eine komplette junktorenlogische Logik-Basis, dann S ist eine NC-Logik-Basis.

Die Bezeichnungen und Theoreme des vorigen Unterabschnitts *NC-Logik-Basen* können also auch für komplette junktorenlogische Logik-Basen verwendet werden. Ergänzend werden für komplette junktorenlogische Logik-Basen weitere Bezeichnungen eingeführt.

∗ die Konjunktionskonstante von S ∗

2.7.26 DEF.– Für alle S: $\mathbf{Konj}_S = S_3(\langle 0,0,0\rangle)_1$.

∗ die Konjunktion von A, B in S ∗

2.7.27 DEF.– Für alle S, A, B: $(A \wedge_S B) = \mathbf{Konj}_S \cdot_S \langle A, B\rangle$.

∗ die Adjunktionskonstante von S ∗

2.7.28 DEF.– Für alle S: $\mathbf{Adj}_S = S_3(\langle 0,0,0\rangle)_2$.

∗ die Adjunktion von A, B in S ∗

2.7.29 DEF.– Für alle S, A, B: $(A \vee_S B) = \mathbf{Adj}_S \cdot_S \langle A, B\rangle$.

$*$ die Bikonditionalkonstante von S $*$

2.7.30 DEF.– Für alle S: $\mathrm{BiCond}_S = S_3(\langle 0,0,0\rangle)_3$.

$*$ das Bikonditional von A, B in S $*$

2.7.31 DEF.– Für alle S, A, B: $(A \leftrightarrow_S B) = \mathrm{BiCond}_S \cdot_S \langle A, B\rangle$.

Es folgen einige Theoreme, in denen Eigenschaften der Konjunktions-, Adjunktions- und Bikonditionalkonstanten aufgelistet werden.

$*$ Eigenschaften der Konjunktionskonstanten $*$

2.7.32 BEH.–

$*$ Eigenschaften der Adjunktionskonstanten $*$

2.7.33 BEH.–

$*$ Eigenschaften der Bikonditionkonstanten $*$

2.7.34 BEH.–

2.8 Quantorenlogische Logik-Basen

Enthalten Logik-Basen Quantoren, heißen sie *quantorenlogische Logik-Basen*. In diesem Abschnitt werden Herleitungsrelationen des natürlichen Schließens für All- und Partikularquantifikationsoperatoren betrachtet und anschließend Logik-Basen, die entsprechende Konstanten enthalten.

Herleitungsrelationen für Allquantfikationsoperatoren

$*$ die Relation der Allquantifikationseinführung $*$

2.8.1 DEF.–

(1) UE ist eine Funktion auf $\{S \mid S$ ist eine Logik-Basis$\}$ &

(2) Für alle S: wenn $S \in \mathrm{Dom(UE)}$, dann gilt:

(a) UE_S ist eine Funktion auf $\{t \mid t \in \mathrm{Tup}^{=2}$ & $t_1 \in \text{Var-Cat}_S$ & $t_0 \in \mathrm{Adr}_S$ & $\mathrm{cat}_S(t_0) = \langle\langle 0,0\rangle, \langle t_1\rangle\rangle\}$ &

(b) für alle Q, c: wenn $c \in \text{Var-Cat}_S$ & $Q \in \mathrm{Adr}_S$ & $\mathrm{cat}_S(Q) = \langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle$, dann gilt:

(i) $\mathrm{UE}_S(\langle Q, c\rangle)$ ist eine Relation &

(ii) $\forall p \forall t((p,t) \in \mathrm{UE}_S(\langle Q,c\rangle)$ gdw $\exists X \exists B \exists v \exists a(X \subseteq \mathrm{CFml}_S$ & $B \in \mathrm{Fml}_S$ & $v \in \mathrm{VAR}_S^c$ & Free_S " $\{B\} \subseteq \{v\}$ & $a \in \mathrm{PAR}_S^c$ & & $a \notin \mathrm{TAdr}_S$ " $(X \cup \{B\})$ & $t = \langle (X, \mathrm{Subst}_S$ ' $\langle a, v, B\rangle)\rangle$ & & $p = (X, (Q \cdot_S \langle v\rangle) \cdot_S \langle B\rangle)))$.

$*$ die Relation der Allquantifikationsbeseitigung $*$

2.8.2 DEF.–

(1) UB ist eine Funktion auf $\{S \mid S$ ist eine Logik-Basis$\}$ &

(2) Für alle S: wenn $S \in \mathrm{Dom(UB)}$, dann gilt:

(a) $\mathbf{UB}_S$ **ist eine Funktion auf** $\{t \mid t \in \mathbf{Tup}^{=2} \;\&\; t_1 \in \mathbf{Var\text{-}Cat}_S \;\&\; t_0 \in \mathbf{Adr}_S \;\&\; \mathbf{cat}_S(t_0) = \langle\langle 0,0\rangle, \langle t_1\rangle\rangle\} \;\&$

(b) für alle Q, c: **wenn** $c \in \mathbf{Var\text{-}Cat}_S \;\&\; Q \in \mathbf{Adr}_S \;\&\; \mathbf{cat}_S(Q) = \langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle$, **dann gilt:**

(i) $\mathbf{UB}_S(\langle Q, c\rangle)$ **ist eine Relation** $\&$

(ii) $\forall p \forall t((p,t) \in \mathbf{UB}_S(\langle Q,c\rangle)$ **gdw** $\exists X \exists B \exists v \exists a(X \subseteq \mathbf{CFml}_S \;\&\; B \in \mathbf{Fml}_S \;\&\; v \in \mathbf{VAR}^c_S \;\&\; \mathbf{Free}_S `` \{B\} \subseteq \{v\} \;\&\; a \in \mathbf{CAdr}_S \;\&\; \mathbf{cat}_S(a) = c \;\&\; t = \langle (X, (Q._S\langle v\rangle)._S\langle B\rangle)\rangle \;\&\; p = (X, \mathbf{Subst}_S ` \langle a, v, B\rangle)))$.

Analog zu Definition 2.7.3, Seite 31 des Begriffs des Negationsoperators wird der Begriff des Allquantifikationsoperators definiert :

2.8.3 DEF.– Für alle S, Q, c: Q ***ist ein Allquantifikationsoperator für die Kategorie*** c ***von*** S **genau dann, wenn gilt:**

(1) S **ist eine Logik-Basis** $\&$

(2) $Q \in \mathbf{CAdr}_S \;\&\; \mathbf{cat}_S(Q) = \langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle \;\&\; c \in \mathbf{Var\text{-}Cat}_S \;\&$

(3) $\mathbf{UE}_S(\langle Q,c\rangle)$, $\mathbf{UB}_S(\langle Q,c\rangle)$ **sind zulässige Herleitungsrelationen für** S.

Herleitungsrelationen für Partikularquantifikationsoperatoren

∗ die Relation der Partikularquantifikationseinführung ∗

2.8.4 DEF.–

(1) PE ist eine Funktion auf $\{S \mid S$ **ist eine Logik-Basis**$\}$ $\&$

(2) Für alle S: **wenn** $S \in \mathbf{Dom}(\mathbf{PE})$, **dann gilt:**

(a) $\mathbf{PE}_S$ **ist eine Funktion auf** $\{t \mid t \in \mathbf{Tup}^{=2} \;\&\; t_1 \in \mathbf{Var\text{-}Cat}_S \;\&\; t_0 \in \mathbf{Adr}_S \;\&\; \mathbf{cat}_S(t_0) = \langle\langle 0,0\rangle, \langle t_1\rangle\rangle\} \;\&$

(b) für alle Q, c: **wenn** $c \in \mathbf{Var\text{-}Cat}_S \;\&\; Q \in \mathbf{Adr}_S \;\&\; \mathbf{cat}_S(Q) = \langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle$, **dann gilt:**

(i) $\mathbf{PE}_S(\langle Q, c\rangle)$ **ist eine Relation** $\&$

(ii) $\forall p \forall t((p,t) \in \mathbf{PE}_S(\langle Q,c\rangle)$ **gdw** $\exists X \exists B \exists v \exists a(X \subseteq \mathbf{CFml}_S \;\&\; B \in \mathbf{Fml}_S \;\&\; v \in \mathbf{VAR}^c_S \;\&\; \mathbf{Free}_S `` \{B\} \subseteq \{v\} \;\&\; a \in \mathbf{CAdr}_S \;\&$
$\&\; \mathbf{cat}_S(a) = c \;\&\; t = \langle (X, \mathbf{Subst}_S ` \langle a, v, B\rangle)\rangle \;\&$
$\&\; p = (X, (Q \cdot_S \langle v\rangle) \cdot_S \langle B\rangle)))$.

∗ die Relation der Partikularquantifikationsbeseitigung ∗

2.8.5 DEF.–

(1) PB ist eine Funktion auf $\{S \mid S$ **ist eine Logik-Basis**$\}$ $\&$

(2) Für alle S: **wenn** $S \in \mathbf{Dom}(\mathbf{PB})$, **dann gilt:**

(a) $\mathbf{PB}_S$ **ist eine Funktion auf** $\{t \mid t \in \mathbf{Tup}^{=2} \;\&\; t_1 \in \mathbf{Var\text{-}Cat}_S \;\&\; t_0 \in \mathbf{Adr}_S \;\&\; \mathbf{cat}_S(t_0) = \langle\langle 0,0\rangle, \langle t_1\rangle\rangle\} \;\&$

(b) für alle Q, c: **wenn** $c \in \mathbf{Var\text{-}Cat}_S \;\&\; Q \in \mathbf{Adr}_S \;\&\; \mathbf{cat}_S(Q) = \langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle$, **dann gilt:**

(i) $\mathbf{PB}_S(\langle Q, c\rangle)$ **ist eine Relation** $\&$

(ii) $\forall p \forall t((p,t) \in \mathbf{PB}_S(\langle Q,c\rangle)$ gdw $\exists X \exists B \exists v \exists a(X \subseteq \mathbf{CFml}_S$ & $B \in \mathbf{Fml}_S$ & $v \in \mathbf{VAR}^c_S$ & $\mathbf{Free}_S$ '' $\{B\} \subseteq \{v\}$ & $a \in \mathbf{PAR}^c_S$ &
& $a \notin \mathbf{TAdr}_S$ '' $((Y \setminus \{\mathbf{Subst}_S$ ' $\langle a,v,B\rangle\}) \cup \{B,C\})$ &
& $t = \langle (X, (Q \cdot_S \langle v\rangle) \cdot_S \langle B\rangle), (Y,C)\rangle$ &
& $p = (X \cup (Y \setminus \{\mathbf{Subst}_S$ ' $\langle a,v,B\rangle\}), C)))$.

Analog zur Definition 2.8.3, S. 39 wird nun der Begriff des Partikularquantifikationsoperators definiert.

2.8.6 DEF.– Für alle S, Q, c: *Q ist ein Partikularquantifikationsoperator für die Kategorie c von S* genau dann, wenn gilt:

(1) S **ist eine Logik-Basis** &

(2) $Q \in \mathbf{CAdr}_S$ & $\mathbf{cat}_S(Q) = \langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle$ & $c \in \mathbf{Var\text{-}Cat}_S$ &

(3) $\mathbf{PE}_S(\langle Q,c\rangle)$, $\mathbf{PB}_S(\langle Q,c\rangle)$ **sind zulässige Herleitungsrelationen für** S.

NCU-Logik-Basen

NCU-Logik-Basen sind NC-Logik-Basen, die zusätzlich zur Negations- und Konditionalkonstanten eine *Allquantifikationskonstante* enthalten, und somit quantorenlogische Logik-Basen sind.

2.8.7 DEF.– Für alle S: *S ist eine NCU-Logik-Basis für die Kategorie c* genau dann, wenn gilt:

(1) S **ist eine NC-Logik-Basis** &

(2) $c \in \mathbf{VarCat}_S$ & $\langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle \in \mathbf{Konst\text{-}Cat}_S$ &
& $0 \in \mathbf{Dom}(S_3(\langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle))$ & $\mathbf{UE}_S(S_3(\langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle)_0)$,
$\mathbf{UB}_S(S_3(\langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle)_0) \in \mathbf{HR}_S$.

In den nächsten Definitionen werden drei Bezeichnungen eingeführt:

∗ die Allquantifikationskonstante für die Kategorie c von S ∗
2.8.8 DEF.– Für alle S, c: $\mathbf{Univ}^c_S = S_3(\langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle)_0$.

∗ die Allquantifikation der Formel B bzgl. der Variablen v der Kategorie c von S ∗
2.8.9 DEF.– Für alle S, B, v, c: $\bigwedge^c_S vB = (\mathbf{Univ}^c_S \cdot_S \langle v\rangle) \cdot_S \langle B\rangle$.

2.8.10 DEF.– Für alle S, v, c: *der v bindende Allquantor für die Kategorie c von S* $= \mathbf{Univ}^c_S \cdot_S \langle v\rangle$.

Es folgt ein Theorem, in welchem einige Eigenschaften der Allquantifikationskonstanten einer NCU-Logik-Basis dargestellt sind.

2.8.11 BEH.– Für alle S, c: wenn S eine NCU-Logik-Basis für die Kategorie c ist, dann gilt:

(1) $\mathbf{Univ}^c_S$ erfüllt die Bedingung der Allquantifikationseinführung für die Kategorie c in S, d.h. es gilt:

(UE) $\forall X\forall B\forall v\forall a(B \in \mathbf{Fml}_S \ \& \ v \in \mathbf{VAR}^c_S \ \& \ \mathbf{Free}_S``\{B\} \subseteq \{v\} \ \& \ a \in \mathbf{PAR}^c_S \setminus \mathbf{TAdr}_S``(X \cup \{B\}) \ \& \ X \vdash_{\mathbf{F}_S} \mathbf{Subst}_S`\langle a, v, B\rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow X \vdash_{\mathbf{F}_S} \bigwedge^c_S vB)$.

(2) $\mathbf{Univ}^c_S$ erfüllt die Bedingung der Allquantifikationsbeseitigung für die Kategorie c in S, d.h. es gilt:

(UB) $\forall X\forall B\forall v\forall a(B \in \mathbf{Fml}_S \ \& \ v \in \mathbf{VAR}^c_S \ \& \ \mathbf{Free}_S``\{B\} \subseteq \{v\} \ \& \ a \in \mathbf{CAdr}_S \ \& \ \mathbf{cat}_S(a) = c \ \& \ X \vdash_{\mathbf{F}_S} \bigwedge^c_S vB \Rightarrow$
$\Rightarrow X \vdash_{\mathbf{F}_S} \mathbf{Subst}_S`\langle a, v, B\rangle)$.

(3) (Vertauschung zweier Allquantoren)

$\forall X\forall B\forall v\forall w(B \in \mathbf{Fml}_S \ \& \ v, w \in \mathbf{VAR}^c_S \ \& \ \mathbf{Free}_S``\{B\} \subseteq \{v, w\} \ \& \ X \vdash_{\mathbf{F}_S} \bigwedge^c_S v \bigwedge^c_S wB \Rightarrow X \vdash_{\mathbf{F}_S} \bigwedge^c_S w \bigwedge^c_S vB)$.

(4) (Umbenennung gebundener Variablen)

$\forall X\forall B\forall v\forall w(B \in \mathbf{Fml}_S \ \& \ v, w \in \mathbf{VAR}^c_S \ \& \ \mathbf{Free}_S``\{B\} \subseteq \{v\} \ \& \ w \notin \mathbf{TAdr}_S``\{B\} \Rightarrow (X \vdash_{\mathbf{F}_S} \bigwedge^c_S vB \Leftrightarrow X \vdash_{\mathbf{F}_S} \bigwedge^c_S w \ \mathbf{Subst}_S`\langle w, v, B\rangle))$.

(5) (Leerlaufender Quantor)

$\forall X\forall B\forall v(B \in \mathbf{CFml}_S \ \& \ v \in \mathbf{VAR}^c_S \Rightarrow$
$\Rightarrow (X \vdash_{\mathbf{F}_S} \bigwedge^c_S vB \Leftrightarrow X \vdash_{\mathbf{F}_S} B))$.

Mit Hilfe der Allquantifikationskonstanten einer NCU-Logik-Basis können Partikularquantifikationen ausgedrückt werden. (Partikularquantifikationen werden häufig auch Existenzquantifikationen genannt. Diese Bezeichnung hat zu gravierenden Mißverständnissen der Bedeutung dieser Formeln geführt und wird deswegen in dieser Arbeit tunlichst vermieden.)

∗ die NU-vermittelte Partikularquantifikation der Formel B bzgl. der Variablen v der Kategorie c von S ∗

2.8.12 DEF.– Für alle S, B, v, c: $\bigvee^c_S vB = \neg_S \bigwedge^c_S v \neg_S B$.

Für NCU-Logik-Basen lassen sich auf Grund der vorstehenden Definition die Einführungs- und Beseitigungsbestimmungen des natürlichen Schließens für NU-vermittelte Partikularquantifikationen beweisen:

2.8.13 BEH.– Für alle S, c: wenn S eine NCU-Logik-Basis für die Kategorie c ist, dann gilt:

(1) (Partikularquantifikationseinführung)

(PE) $\forall X\forall B\forall v\forall a(B \in \mathbf{Fml}_S \ \& \ v \in \mathbf{VAR}^c_S \ \& \ \mathbf{Free}_S``\{B\} \subseteq \{v\} \ \& \ a \in \mathbf{CAdr}_S \ \& \ \mathbf{cat}_S(a) = c \ \& \ X \vdash_{\mathbf{F}_S} \mathbf{Subst}_S`\langle a, v, B\rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow X \vdash_{\mathbf{F}_S} \bigvee^c_S vB)$.

(2) (Partikularquantifikationsbeseitigung)

(PB) $\forall X\forall Y\forall B\forall C\forall v\forall a(B \in \mathbf{Fml}_S \ \& \ v \in \mathbf{VAR}^c_S \ \& \ \mathbf{Free}_S``\{B\} \subseteq \{v\} \ \& \ a \in \mathbf{PAR}^c_S \setminus \mathbf{TAdr}_S``((Y \setminus \{\mathbf{Subst}_S`\langle a, v, B\rangle\}) \cup \{B, C\}) \ \& \ X \vdash_{\mathbf{F}_S} \bigvee^c_S vB \ \& \ Y \vdash_{\mathbf{F}_S} C \Rightarrow X \cup (Y \setminus \{\mathbf{Subst}_S`\langle a, v, B\rangle\}) \vdash_{\mathbf{F}_S} C)$.

Komplette quantorenlogische Logik-Basen

Enthält eine Logik-Basis mindestens je einen Negationsoperator, Konditionaloperator, Konjunktionsoperator, Adjunktionsoperator, Bikonditionaloperator, Allquantifikationsoperator für die Kategorie c und Partikularquantifikationsoperator für die Kategorie c, dann soll sie eine *komplette quantorenlogische Logik-Basis für die Kategorie* c heißen.

2.8.14 DEF.– Für alle S, c: *S ist eine komplette quantorenlogische Logik-Basis für die Kategorie* c genau dann, wenn gilt:

(1) S ist eine komplette junktorenlogische Logik-Basis &

(2) $c \in \mathbf{VarCat}_S$ & $\langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle \in \mathbf{Konst\text{-}Cat}_S$ &
& $\{0,1\} \subseteq_S \mathbf{Dom}(S_3(\langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle))$ &

(a) $\mathbf{AE}_S(S_3(\langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle)_0)$, $\mathbf{AB}_S(S_3(\langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle)_0) \in \mathbf{HR}_S$ &

(b) $\mathbf{PE}_S(S_3(\langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle)_1)$, $\mathbf{PB}_S(S_3(\langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle)_1) \in \mathbf{HR}_S$.

2.8.15 BEH.– Für alle S, c: wenn S ist eine komplette quantorenlogische Logik-Basis für die Kategorie c, dann S ist eine NC-Logik-Basis und S ist eine komplette junktorenlogische Logik-Basis und S ist eine NCU-Logik-Basis für die Kategorie c.

Die Bezeichnungen und Theoreme der früheren Unterabschnitte *NC-Logik-Basen*, *komplette junktorenlogische Logik-Basen*, und *NCU-Logik-Basen* können also auch für komplette quantorenlogische Logik-Basen verwendet werden. Ergänzend werden für komplette quantorenlogische Logik-Basen weitere Bezeichnungen eingeführt.

∗ die Partikularquantifikationskonstante für die Kategorie c von S ∗

2.8.16 DEF.– Für alle S, c: $\mathbf{Part}^c_S = S_3(\langle\langle 0,0\rangle, \langle c\rangle\rangle)_1$.

∗ die Partikularquantifikation der Formel B bzgl. der Variablen v der Kategorie c von S ∗

2.8.17 DEF.– Für alle S, B, v, c: $\bigvee^c_S vB = (\mathbf{Part}^c_S \cdot_S \langle v\rangle) \cdot_S \langle B\rangle$.

2.8.18 DEF.– Für alle S, v, c: *der v bindende Partikularquantor für die Kategorie c von S* $= \mathbf{Part}^c_S \cdot_S \langle v\rangle$.

Im nächsten Theorem sind einige Eigenschaften der Partikularquantifikationskonstanten aufgeführt.

2.8.19 BEH.– Für alle S, c: wenn S eine komplette quantorenlogische Logik-Basis für die Kategorie c ist, dann gilt:

(1) $\mathbf{Part}^c_S$ erfüllt die Bedingung der Partikularquantifikationseinführung für die Kategorie c in S, d.h. es gilt:
(PE) $\forall X \forall B \forall v \forall a(B \in \mathbf{Fml}_S \ \& \ v \in \mathbf{VAR}^c_S \ \& \ \mathbf{Free}_S `` \{B\} \subseteq \{v\} \ \& \ a \in \mathbf{CAdr}^c_S \ \& \ \mathbf{cat}_S = c \ \& \ X \vdash_{\mathbf{F}_S} \mathbf{Subst}_S ` \langle a, v, B\rangle \Rightarrow X \vdash_{\mathbf{F}_S} \bigvee^c_S vB)$.

(2) $\mathbf{Part}^c_S$ **erfüllt die Bedingung der Partikularquantifikationsbeseitigung für die Kategorie** $\boldsymbol{c}$ **in** $\boldsymbol{S}$**, d.h. es gilt:**

(PB) $\forall X \forall Y \forall B \forall C \forall v \forall a(B \in \mathbf{Fml}_S \ \& \ v \in \mathbf{VAR}^c_S \ \& \ \mathbf{Free}_S `` \{B\} \subseteq \{v\} \ \& \ a \in \mathbf{PAR}^c_S \backslash \mathbf{TAdr}_S `` ((Y \setminus \{\mathbf{Subst}_S ` \langle a, v, B\rangle\}) \cup \{B, C\}) \ \& \ X \vdash_{\mathbf{F}_S} \bigvee^c_S vB \ \& \ Y \vdash_{\mathbf{F}_S} C \Rightarrow X \cup (Y \setminus \{\mathbf{Subst}_S ` \langle a, v, B\rangle\}) \vdash_{\mathbf{F}_S} C)$.

(3) (Vertauschung zweier Partikularquantoren)

$\forall X \forall B \forall v \forall w(B \in \mathbf{Fml}_S \ \& \ v, w \in \mathbf{VAR}^c_S \ \& \ \mathbf{Free}_S `` \{B\} \subseteq \{v, w\} \ \& \ X \vdash_{\mathbf{F}_S} \bigvee^c_S v \bigvee^c_S wB \Rightarrow X \vdash_{\mathbf{F}_S} \bigvee^c_S w \bigvee^c_S vB)$.

(4) (Umbenennung gebundener Variablen)

$\forall X \forall B \forall v \forall w(B \in \mathbf{Fml}_S \ \& \ v, w \in \mathbf{VAR}^c_S \ \& \ \mathbf{Free}_S `` \{B\} \subseteq \{v\} \ \& \ w \notin \mathbf{TAdr}_S `` \{B\} \Rightarrow (X \vdash_{\mathbf{F}_S} \bigvee^c_S vB \Leftrightarrow X \vdash_{\mathbf{F}_S} \bigvee^c_S w \ \mathbf{Subst}_S ` \langle w, v, B\rangle))$.

(5) (Leerlaufender Quantor)

$$\forall X \forall B \forall v(B \in \mathbf{CFml}_S \ \& \ v \in \mathbf{VAR}^c_S \Rightarrow \Rightarrow (X \vdash_{\mathbf{F}_S} \bigvee^c_S vB \Leftrightarrow X \vdash_{\mathbf{F}_S} B)).$$

2.9 Identitätslogische Logik-Basen

In diesem Abschnitt wird die Möglichkeit behandelt, junktoren- und/oder quantorenlogische Logik-Basen durch Hinzunahme einer 2-stelligen Prädikatkonstanten erster Stufe und diese betreffende Herleitungsrelationen zu erweitern. Die Herleitungsrelationen legen fest, daß die neue Prädikatkonstante als total-reflexive Gleichheitskonstante verwendet wird.

Herleitungsrelationen für total-reflexive Gleichheitsoperatoren erster Stufe

A Beweise

Dieser Anhang enthält Beweise für einige Theoreme des Artikels "Grundbegriffe der Logik". Ist für ein Theorem kein Beweis ausgeführt, habe ich seine Ausführung für überflüssig gehalten. Keiner der Beweise ist in irgendeinem Sinn ein »tieferer« Beweis. Sie dienen hauptsächlich dem Nachweis, daß die Begriffe, die in den bewiesenen Theoremen benutzt werden, adäquat definiert sind, d.h. so, daß sich die angegebenen Theoreme beweisen lassen.

Der Anhang ist nach Unterabschnitten der Abschnitte 1, 2 gegliedert.

A.1 Beweise in Abschnitt 1.10

Beweis für 1.10.2

Angenommen, S ist eine Syntax-Basis.
Angenommen, O paßt auf t über S & $\mathrm{x} \in \{\mathrm{O}\} \cup \mathrm{Ran(t)}$.
Dann $\mathrm{adrgrad_S(O{\centerdot}_S t)} = 1 + \mathrm{adrgrad_S(O)} + \sum_{i\in\mathrm{Dom(t)}} \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{t}_i)$. Dann

$\mathrm{adrgrad_S(O)} <_\mathrm{S} \mathrm{adrgrad_S(O{\centerdot}_S t)}$
und
$\forall i(i \in \mathrm{Dom(t)} \Rightarrow \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{t}_i) <_\mathbb{N} \mathrm{adrgrad_S(O \centerdot_S t)})$.

Also $\mathrm{adrgrad_S(x)} <_\mathbb{N} \mathrm{adrgrad_S(O{\centerdot}_S t)}$. ■

Beweis für 1.10.3

Angenommen, S ist eine Syntax-Basis.
Sei

$\mathrm{M} = \{b \mid \forall a((a, b) \in \mathrm{TAdr_S} \Rightarrow \mathrm{adrgrad_S}(a) \leqslant_\mathbb{N} \mathrm{adrgrad_S}(b))\}$.

Dann beweisen wir durch Adr-Induktion

(A) $\mathrm{Adr_S} \subseteq \mathrm{M}$.

I.B.: Angenommen, $\mathrm{b} \in \mathrm{AtAdr_S}$.
Angenommen $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathrm{TAdr_S}$.
Dann $\mathrm{a} = \mathrm{b}$. Dann $\mathrm{adrgrad_S(a)} = \mathrm{adrgrad_S(b)}$. Dann $\mathrm{adrgrad_S(a)} \leqslant_\mathrm{S} \mathrm{adrgrad_S(b)}$.
Also $\mathrm{b} \in \mathrm{M}$.

I.S.: Angenommen, O paßt auf t über S & $\{\mathrm{O}\} \cup \mathrm{Ran(t)} \subseteq \mathrm{M}$.
Angenommen, $(\mathrm{a}, \mathrm{O{\centerdot}_S t}) \in \mathrm{TAdr_S}$.
Dann $\mathrm{a} = \mathrm{O{\centerdot}_S t}$ or $\exists x(x \in \{\mathrm{O}\} \cup \mathrm{Ran(t)}\ \&\ (\mathrm{a}, x) \in \mathrm{TAdr_S})$.

Fall 1: Angenommen, $\mathrm{a} = \mathrm{O{\centerdot}_S t}$.
Dann $\mathrm{adrgrad_S(a)} = \mathrm{adrgrad_S(O{\centerdot}_S t)}$. Dann $\mathrm{adrgrad_S(a)} \leqslant_\mathbb{N} \mathrm{adrgrad_S(O{\centerdot}_S t)}$.

Fall 2: Angenommen, $\exists x(x \in \{\mathrm{O}\} \cup \mathrm{Ran(t)}\ \&\ (\mathrm{a}, x) \in \mathrm{TAdr_S})$.
Sei x so.
Nach I.V. ist $\mathrm{x} \in \mathrm{M}$, und es folgt $\mathrm{adrgrad_S(a)} \leqslant_\mathbb{N} \mathrm{adrgrad_S(x)}$. Nach Theorem 1.10.2 ist $\mathrm{adrgrad_S(x)} <_\mathbb{N} \mathrm{adrgrad_S(O{\centerdot}_S t)}$; dann $\mathrm{adrgrad_S(a)} \leqslant_\mathbb{N} \mathrm{adrgrad_S(O{\centerdot}_S t)}$.

Also $\mathrm{adrgrad_S(a)} \leqslant_{\mathbb{N}} \mathrm{adrgrad_S(O_{\bullet S}t)}$.
Also $\mathrm{O_{\bullet S}t \in M}$.

Mit I.B. und I.S. ist (A) durch Adr-Induktion bewiesen und mit (A) folgt sofort die Behauptung. ■

Beweis für 1.10.4

Angenommen, S ist eine Logik-Basis.
Sei

$$\mathrm{M} = \{c \mid \forall a \forall b \forall v(a,\ b \in \mathrm{Adr_S}\ \&\ v \in \mathrm{Var_S}\ \&\ \mathrm{cat_S}(a) = \mathrm{cat_S}(v) = \mathrm{cat_S}(b)\ \&\ \mathrm{adrgrad_S}(a) = \mathrm{adrgrad_S}(b) \Rightarrow \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S}\,`\,\langle a,\ v,\ c\rangle) = \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S}\,`\,\langle b,\ v,\ c\rangle))\}.$$

Dann beweisen wir durch Adr-Induktion

(A) $\mathrm{Adr_S \subseteq M}$.

I.B.: Angenommen, $\mathrm{c \in AtAdr_S}$.
Angenommen, $\mathrm{a, b \in Adr_S}$ & $\mathrm{v \in Var_S}$ & $\mathrm{cat_S(a) = cat_S(v) = cat_S(b)}$ & $\mathrm{adrgrad_S(a) = adrgrad_S(b)}$.

Fall 1: Angenommen, v = c.
Dann $\mathrm{Subst_S}\,`\,\langle \mathrm{a, v, c}\rangle = \mathrm{a}$ & $\mathrm{Subst_S}\,`\,\langle \mathrm{b, v, c}\rangle = \mathrm{b}$. Dann nach Voraussetzung $\mathrm{adrgrad_S(Subst_S}\,`\,\langle \mathrm{a, v, c}\rangle) = \mathrm{adrgrad_S(Subst_S}\,`\,\langle \mathrm{b, v, c}\rangle))\}$.

Fall 2: Angenommen, $\mathrm{v \neq c}$.
Dann $\mathrm{Subst_S}\,`\,\langle \mathrm{a, v, c}\rangle = \mathrm{c} = \mathrm{Subst_S}\,`\,\langle \mathrm{b, v, c}\rangle$. Dann $\mathrm{adrgrad_S(Subst_S}\,`\,\langle \mathrm{a, v, c}\rangle) = \mathrm{adrgrad_S(Subst_S}\,`\,\langle \mathrm{b, v, c}\rangle))\}$.

Also gilt

$$\mathrm{adrgrad_S(Subst_S}\,`\,\langle \mathrm{a, v, c}\rangle) = \mathrm{adrgrad_S(Subst_S}\,`\,\langle \mathrm{b, v, c}\rangle))\}.$$

Also $\mathrm{c \in M}$.

I.S.: Angenommen, O paßt auf t über S & $\mathrm{\{O\} \cup Ran(t) \subseteq M}$.
Angenommen, $\mathrm{a, b \in Adr_S}$ & $\mathrm{v \in Var_S}$ & $\mathrm{cat_S(a) = cat_S(v) = cat_S(b)}$ & $\mathrm{adrgrad_S(a) = adrgrad_S(b)}$.
Dann ist $\mathrm{v \neq O_{\bullet S}t}$. Dann sind für die Anwendung des Substitutionsbegriffs gemäß Theorem 1.9.3 drei Fälle möglich:

Fall 1: Angenommen, $\mathrm{O \in VarBind_S}$.
Dann gilt

$$\mathrm{Subst_S}\,`\,\langle \mathrm{a, v, O_{\bullet S}\,t}\rangle = (\mathrm{Subst_S}\,`\,\langle \mathrm{a, v, O}\rangle)_{\bullet \mathrm{S}}\mathrm{t}$$
und
$$\mathrm{Subst_S}\,`\,\langle \mathrm{b, v, O_{\bullet S}\,t}\rangle = (\mathrm{Subst_S}\,`\,\langle \mathrm{b, v, O}\rangle)_{\bullet \mathrm{S}}\mathrm{t}.$$

Nach I.V. ist $\mathrm{O \in M}$. Dann gilt

$$\mathrm{adrgrad_S(Subst_S}\,`\,\langle \mathrm{a, v, O}\rangle) = \mathrm{adrgrad_S(Subst_S}\,`\,\langle \mathrm{b, v, O}\rangle).$$

Dann gilt

$\mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, O \centerdot_S t\rangle) =$
$= \mathrm{adrgrad_S}((\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, O\rangle) \centerdot_S t)$
$= 1 + \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, O\rangle + \sum_{i\in\mathrm{Dom(t)}} \mathrm{adrgrad_S}(t_i)$
$= 1 + \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, O\rangle + \sum_{i\in\mathrm{Dom(t)}} \mathrm{adrgrad_S}(t_i)$
$= \mathrm{adrgrad_S}((\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, O\rangle) \centerdot_S t)$
$= \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, O \centerdot_S t\rangle)$.

Also gilt im Fall 1

$$\mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, O \centerdot_S t\rangle) = \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, O \centerdot_S t\rangle).$$

Fall 2: Angenommen, $O \notin \mathrm{VarBind_S}$ & $O \in \mathrm{BindOpr_S}(v)$.
Dann gilt

$\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, O \centerdot_S t\rangle = (\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, O\rangle)\centerdot_S t$
und
$\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, O \centerdot_S t\rangle = (\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, O\rangle)\centerdot_S t$.

Dann folgt wie im Fall 1 auch im Fall 2

$$\mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, O \centerdot_S t\rangle) = \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, O \centerdot_S t\rangle).$$

Fall 3: Angenommen, $O \notin \mathrm{VarBind_S}$ & $O \notin \mathrm{BindOpr_S}(v)$.
Dann gilt

$\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, O \centerdot_S t\rangle = (\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, O\rangle) \centerdot_S \langle \mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, t_i\rangle\rangle_{i\in\mathrm{Dom(t)}}$
und
$\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, O \centerdot_S t\rangle = (\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, O\rangle) \centerdot_S \langle \mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, t_i\rangle\rangle_{i\in\mathrm{Dom(t)}}$.

Nach I.V. ist $\{O\} \cup \mathrm{Ran(t)} \subseteq M$. Dann gilt

$\mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, O\rangle) = \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, O\rangle)$
und
$\forall i(i \in \mathrm{Dom(t)} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, t_i\rangle) = \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, t_i\rangle))$.

Dann gilt

$\mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, O \centerdot_S t\rangle) =$
$= \mathrm{adrgrad_S}((\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, O\rangle) \centerdot_S \langle \mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, t_i\rangle\rangle_{i\in\mathrm{Dom(t)}})$
$= 1 + \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, O\rangle) +$
$\quad + \sum_{i\in\mathrm{Dom(t)}} \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, t_i\rangle)$
$= 1 + \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, O\rangle) +$
$\quad + \sum_{i\in\mathrm{Dom(t)}} \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, t_i\rangle)$
$= \mathrm{adrgrad_S}((\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, O\rangle) \centerdot_S \langle \mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, t_i\rangle\rangle_{i\in\mathrm{Dom(t)}})$
$= \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, O \centerdot_S t\rangle)$.

Also gilt im Fall 3

$$\mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, O \centerdot_S t\rangle) = \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, O \centerdot_S t\rangle).$$

Also gilt

$$\mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle a, v, O \centerdot_S t\rangle) = \mathrm{adrgrad_S}(\mathrm{Subst_S} \text{\`{}} \langle b, v, O \centerdot_S t\rangle).$$

Also $O\centerdot_S t \in M$.

Mit I.B. und I.S. ist (A) durch Adr-Induktion bewiesen, und mit (A) folgt sofort die Behauptung. ■

A.2 Beweise in Abschnitt 2.1

Beweis für 2.1.9

Angenommen, S ist eine Logik-Basis.

Ad (1): Angenommen, $\mathrm{q} \in \{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S}$.
Dann gilt

$$\forall M(\{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S} \subseteq M \ \ \& \ \ \forall R(R \in \mathrm{HR_S} \Rightarrow \forall p \forall t((p,\, t) \in R \ \ \& \ \ \mathrm{Ran}(t) \subseteq M \Rightarrow p \in M)) \Rightarrow \mathrm{q} \in M).$$

Dann $\mathrm{q} \in \mathbf{F}_\mathrm{S}$. Also $\{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S} \subseteq \mathbf{F}_\mathrm{S}$. □

Ad (2): Angenommen, $\mathrm{R} \in \mathrm{HR_S}$.
Angenommen, $(\mathrm{p}, \mathrm{t}) \in \mathrm{R} \ \ \& \ \ \mathrm{Ran(t)} \subseteq \mathbf{F}_\mathrm{S}$.
Angenommen, $\{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S} \subseteq \mathrm{M} \ \ \& \ \ \forall R(R \in \mathrm{HR_S} \Rightarrow \forall p \forall t((p,\, t) \in R \ \ \& \ \ \mathrm{Ran}(t) \subseteq \mathrm{M} \Rightarrow p \in \mathrm{M}))$.
Dann $\mathrm{Ran(t)} \subseteq \mathrm{M}$. Dann $\mathrm{p} \in \mathrm{M}$. Also gilt

$$\forall M(\{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S} \subseteq M \ \ \& \ \ \forall R(R \in \mathrm{HR_S} \Rightarrow \forall p \forall t((p,\, t) \in R \ \ \& \ \ \mathrm{Ran}(t) \subseteq M \Rightarrow p \in M)) \Rightarrow \mathrm{p} \in M).$$

Dann $\mathrm{p} \in \mathbf{F}_\mathrm{S}$.
Also gilt $\forall R(R \in \mathrm{HR_S} \Rightarrow \forall p \forall t((p,\, t) \in R \ \ \& \ \ \mathrm{Ran}(t) \subseteq \mathbf{F}_\mathrm{S} \Rightarrow p \in \mathbf{F}_\mathrm{S}))$. □

Ad (3): Angenommen, $\{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S} \subseteq \mathrm{M} \ \ \& \ \ \forall R(R \in \mathrm{HR_S} \Rightarrow \forall p \forall t((p,\, t) \in R \ \ \& \ \ \mathrm{Ran}(t) \subseteq \mathrm{M} \Rightarrow p \in \mathrm{M}))$.
Angenommen, $\mathrm{q} \in \mathbf{F}_\mathrm{S}$.
Dann folgt mit 2.1.8 $\mathrm{q} \in \mathrm{M}$. Also gilt $\forall q(q \in \mathbf{F}_\mathrm{S} \Rightarrow q \in \mathrm{M})$. Also $\mathbf{F}_\mathrm{S} \subseteq \mathrm{M}$. □

Ad(4): Um die Behauptung zu beweisen, setzen wir

$$\mathrm{M} = \{p \mid p \in \{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S} \text{ or } \exists R(R \in \mathrm{HR_S} \ \ \& \ \ \exists t((p,\, t) \in R \ \ \& \ \ \mathrm{Ran}(t) \subseteq \mathbf{F}_\mathrm{S}))\}$$

und beweisen durch $\mathbf{F}$-Induktion

(A) $\mathbf{F}_\mathrm{S} \subseteq \mathrm{M}$.

I.B.: Angenommen, $\mathrm{p} \in \{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S}$.
Dann $\mathrm{p} \in \mathrm{M}$. Also $\{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S} \subseteq \mathrm{M}$.

I.S.: Angenommen, $\mathrm{R} \in \mathrm{HR_S}$.
Angenommen, $(\mathrm{p}, \mathrm{t}) \in \mathrm{R} \ \ \& \ \ \mathrm{Ran(t)} \subseteq \mathrm{M}$.
Dann gilt

$\forall i(i \in \mathrm{Dom(t)} \Rightarrow \mathrm{t}_i \in \{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S}$ or $\exists R(R \in \mathrm{HR_S}$ & $\exists t((\mathrm{t}_i, t) \in R$ & $\mathrm{Ran}(t) \subseteq \mathbf{F}_\mathrm{S})))$.

Dann folgt mit (1) und (2) $\forall i(i \in \mathrm{Dom(t)} \Rightarrow \mathrm{t}_i \in \mathbf{F}_\mathrm{S})$, also $\mathrm{Ran(t)} \subseteq \mathbf{F}_\mathrm{S}$. Also $\exists R(R \in \mathrm{HR_S}$ & $\exists t((\mathrm{p}, t) \in R$ & $\mathrm{Ran}(t) \subseteq \mathbf{F}_\mathrm{S}))$. Dann $\mathrm{p} \in \mathrm{M}$. Also gilt $\forall p \forall t((p, t) \in \mathrm{R}$ & $\mathrm{Ran}(t) \subseteq \mathrm{M} \Rightarrow p \in \mathrm{M})$.

Und es folgt mit **F**-Induktion (A). Mit (A) folgt sofort die Behauptung. □

Ad (5): Angenommen, $\{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S} \subseteq \mathrm{M}$ & $\forall R(R \in \mathrm{HR_S} \Rightarrow \forall p \forall t((p, t) \in R$ & $\mathrm{Ran}(t) \subseteq \mathrm{M} \cap \mathbf{F}_\mathrm{S} \Rightarrow p \in \mathrm{M}))$.
Dann $\{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S} \subseteq \mathrm{M} \cap \mathbf{F}_\mathrm{S}$ & $\forall R(R \in \mathrm{HR_S} \Rightarrow \forall p \forall t((p, t) \in R$ & $\mathrm{Ran}(t) \subseteq \mathrm{M} \cap \mathbf{F}_\mathrm{S} \Rightarrow p \in \mathrm{M} \cap \mathbf{F}_\mathrm{S}))$. Dann folgt mit **F**-Induktion $\mathbf{F}_\mathrm{S} \subseteq \mathrm{M} \cap \mathbf{F}_\mathrm{S}$.
Also $\mathbf{F}_\mathrm{S} \subseteq \mathrm{M}$. □

Damit sind alle fünf Teiltheoreme von Theorem 2.1.9 bewiesen. ■

Beweis für 2.1.10

Angenommen, S ist eine Logik-Basis.

Ad (1): Wir beweisen durch **F**-Induktion

(A) $\mathbf{F}_\mathrm{S} \subseteq \mathrm{Pot(CFml_S)} \times \mathrm{CFml_S}$.

I.B.: Da $\{0\} \subseteq \mathrm{Pot(CFml_S)}$ und $\mathrm{MeanPosts_S} \subseteq \mathrm{CFml_S}$, ist $\{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S} \subseteq \mathrm{Pot(CFml_S)} \times \mathrm{CFml_S}$.

I.S.: Angenommen, $\mathrm{R} \in \mathrm{HR_S}$.
Dann folgt mit den Definitionen 2.1.7, 2.1.5 und 2.1.3 $\forall p \forall t((p, t) \in \mathrm{R}$ & $\mathrm{Ran}(t) \subseteq \mathrm{Pot(CFml_S)} \times \mathrm{CFml_S} \Rightarrow p \in \mathrm{Pot(CFml_S)} \times \mathrm{CFml_S})$.

Mit (I.B.) und (I.S.) folgt durch **F**-Induktion (A), also die Behauptung. □

Ad (2): Angenommen, $\forall R(R \in \mathrm{HR_S} \Rightarrow R$ ist Herleitungsrelation mit endlicher Prämissenverrechnung für S).
Um die Behauptung zu beweisen, setzen wir

$$\mathrm{M} = \{p \mid \mathrm{pr1}(p) \text{ endl} \subseteq \mathrm{CFml_S}\}$$

und beweisen durch **F**-Induktion

(A) $\mathbf{F}_\mathrm{S} \subseteq \mathrm{M}$.

I.B.: Angenommen, $\mathrm{p} \in \{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S}$.
Dann $\mathrm{pr1(p)} = 0$. Dann $\mathrm{pr1(p)}$ endl$\subseteq \mathrm{CFml_S}$, also $\mathrm{p} \in \mathrm{M}$. Also $\{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S} \subseteq \mathrm{M}$.

I.S.: Angenommen, $\mathrm{R} \in \mathrm{HR_S}$.
Angenommen, $(\mathrm{p}, \mathrm{t}) \in \mathrm{R}$ & $\mathrm{Ran(t)} \subseteq \mathrm{M}$.

Dann gilt $\forall i(i \in \mathrm{Dom}(t) \Rightarrow \mathrm{pr1}(\mathrm{t}_i)$ endl$\subseteq$ $\mathrm{CFml_S})$. Nach Voraussetzung ist R Herleitungsrelation mit endlicher Prämissenverrechnung für S; dann folgt mit $(\mathrm{p}, \mathrm{t}) \in \mathrm{R}$ pr1(p) endl$\subseteq$ $\mathrm{CFml_S}$, also $\mathrm{p} \in \mathrm{M}$. Also gilt $\forall p \forall t((p, t) \in \mathrm{R}$ & $\mathrm{Ran}(t) \subseteq \mathrm{M} \Rightarrow p \in \mathrm{M})$.

Mit I.B. und I.S. folgt durch **F**-Induktion (A), und mit (A) folgt sofort die Behauptung. □

Damit sind die beiden Teiltheoreme von Theorem 2.1.10 bewiesen. ■

Beweis für 2.1.14

Angenommen, S ist eine Logik-Basis.
Angenommen, $\mathrm{A} \in \mathrm{MeanPosts_S}$.
Dann folgt mit Theorem 2.1.9 (1) $(0, \mathrm{A}) \in \mathbf{F}_\mathrm{S}$. Dann $\mathrm{A} \in$ A-True. ■

A.3 Beweise in Abschnitt 2.2

Beweis für 2.2.4

Angenommen, S ist eine Logik-Basis.

Um die Behauptung von links nach rechts zu beweisen, beweisen wir durch **F**-Induktion

(A) $\mathbf{F}_\mathrm{S} \subseteq \{p \mid p$ ist herleitbar über S$\}$.

I.B.: Angenommen, $\mathrm{p} \in \{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S}$. Dann $\exists A(A \in \mathrm{MeanPosts_S}$ & $p = (0, A))$. Sei A so. Dann ist $\langle(0, \mathrm{A})\rangle$ eine Herleitung für p über S. Also $\mathrm{p} \in \{p \mid p$ ist herleitbar über S$\}$.

I.S.: Angenommen, $\mathrm{R} \in \mathrm{HR_S}$ & $(\mathrm{p}, \mathrm{t}) \in \mathrm{R}$ & $\mathrm{Ran(t)} \subseteq \{p \mid p$ ist herleitbar über S$\}$. Dann gilt $\forall j(j \in \mathrm{Dom(t)} \Rightarrow \mathrm{t}_j$ ist herleitbar über S). Dann gilt $\forall j(j \in \mathrm{Dom(t)} \Rightarrow \exists H\ H$ ist Herleitung für t_j über S). Dann $\exists H(H$ ist Funktion auf Dom(t) & $\forall j(j \in \mathrm{Dom(t)} \Rightarrow H_j$ ist Herleitung für t_j über S).
Sei H so. Dann gilt

> $\exists H'(H'$ ist Funktion auf
> $1 + \sum_{j \in \mathrm{Dom(t)}} \mathrm{Dom(H}_j)$ & $\forall k \forall l(k \in \mathrm{Dom(t)}$ & $l \in \mathrm{Dom(H}_k) \Rightarrow$
> $H'_{l+\sum_{j \in k} \mathrm{Dom(H}_j)} = \mathrm{H}_{k,l})$ & $H'_{\sum_{j \in \mathrm{Dom(t)}} \mathrm{Dom(H}_j)} = \mathrm{p})$.

Sei H′ so. Dann ist H′ eine Herleitung für p über S. Also ist $\mathrm{p} \in \{p \mid p$ ist herleitbar über S$\}$.

Mit I.B. und I.S. ist (A) durch **F**-Induktion bewiesen, und damit die Behauptung von links nach rechts.

Um die Behauptung von rechts nach links zu beweisen, setzen wir

$\mathrm{M} = \{n \mid \forall H \forall p(H \text{ ist Herleitung für } p \text{ über S}$
$\&\ \mathrm{Dom}(H) = n \Rightarrow p \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}})\},$

und beweisen durch $\mathbb{N}$-Wertverlaufsinduktion

(B) $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{M}$.

Angenommen, $n \in \mathbb{N}\ \&\ \forall m(m \in n \Rightarrow m \in \mathrm{M})$.
Angenommen, H ist Herleitung für p über S & Dom(H) = n.
Dann $\mathrm{p} = \mathrm{H}_{\mathrm{n}-1}\ \&\ \mathrm{n} - 1 \in \mathrm{Dom(H)}$. Dann sind zwei Fälle möglich.

Fall 1: Angenommen, $\mathrm{H}_{n-1} \in \{0\} \times \mathrm{MeanPost}_{\mathrm{S}}$.
Dann $\mathrm{H}_{n-1} \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$, also $\mathrm{p} \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$.

Fall 2: Angenommen, $\exists R \exists j(R \in \mathrm{HR}_{\mathrm{S}}\ \&\ j \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 0}(\mathrm{n} - 1)\ \&$
$\&\ (\mathrm{H}_{\mathrm{n}-1}, \langle \mathrm{H}_{j_k} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R)$.
Seien R, j so.
Dann gilt $\forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow \mathrm{j}_k \in \mathrm{n} - 1)$, also $\forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow \mathrm{j}_k + 1 \in \mathrm{n})$. Dann folgt mit I.V. $\forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow \mathrm{j}_k + 1 \in \mathrm{M})$. Dann folgt mit $\forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow \mathrm{H}\lceil(\mathrm{j}_k + 1)$ ist Herleitung für $\mathrm{H}_{\mathrm{j}_k}$ über S & $\mathrm{Dom}(\mathrm{H}\lceil(\mathrm{j}_k + 1)) = \mathrm{j}_k + 1)$ $\forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{j}_k} \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}})$. Dann $\mathrm{Ran}(\langle \mathrm{H}_{\mathrm{j}_k} \rangle_{k \in \mathrm{Dom(j)}}) \subseteq \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$ und es folgt mit $(\mathrm{H}_{\mathrm{n}-1}, \langle \mathrm{H}_{\mathrm{j}_k} \rangle_{k \in \mathrm{Dom(j)}}) \in \mathrm{R}$ $\mathrm{H}_{\mathrm{n}-1} \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$. Also $\mathrm{p} \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$.

Also in beiden Fällen $\mathrm{p} \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$. Also $\mathrm{n} \in \mathrm{M}$. Damit ist (B) durch $\mathbb{N}$-Wertverlaufsinduktion bewiesen, und mit (B) folgt

(C) $\{p \mid p \text{ ist herleitbar über S}\} \subseteq \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$.

Damit ist die Behauptung von rechts nach links bewiesen.

Mit (A) und (C) folgt die Behauptung. ■

A.4 Beweise in Abschnitt 2.3

Beweis für 2.3.5

Angenommen, S ist eine Logik-Basis & R ist eine Herleitungsrelation für S.

Angenommen, R ist eine zulässige Herleitungsrelation für S.
Angenommen, $(\mathrm{p}, \mathrm{t}) \in \mathrm{R}\ \&\ \mathrm{Ran(t)} \subseteq \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$.
Da $\mathrm{R} \in \mathrm{HR}_{\mathrm{ExtHR(S,\,R)}}$, gilt
$\forall p \forall t((p,\ t) \in \mathrm{R}\ \&\ \mathrm{Ran}(t) \subseteq \mathbf{F}_{\mathrm{ExtHR(S,\,R)}} \Rightarrow p \in \mathbf{F}_{\mathrm{ExtHR(S,\,R)}})$. Nach Voraussetzung ist $(\mathrm{p}, \mathrm{t}) \in \mathrm{R}$ und $\mathbf{F}_{\mathrm{S}} \subseteq \mathbf{F}_{\mathrm{ExtHR(S,\,R)}}$. Dann ist $\mathrm{p} \in \mathbf{F}_{\mathrm{ExtHR(S,\,R)}}$ und nach Voraussetzung ist $\mathbf{F}_{\mathrm{ExtHR(S,\,R)}} \subseteq \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$; also ist $\mathrm{p} \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$. Also gilt

(A) $\forall p \forall t((p,\ t) \in \mathrm{R}\ \&\ \mathrm{Ran}(t) \subseteq \mathbf{F}_{\mathrm{S}} \Rightarrow p \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}})$.

Damit ist die Behauptung von links nach rechts bewiesen.

Angenommen umgekehrt, $\forall p \forall t((p,\ t) \in \mathrm{R}\ \&\ \mathrm{Ran}(t) \subseteq \mathbf{F}_{\mathrm{S}} \Rightarrow p \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}})$.
Dann beweisen wir durch $\mathbf{F}_{\mathrm{ExtHR(S,\,R)}}$-Induktion

(B) $\mathbf{F}_{\mathrm{ExtHR(S,\,R)}} \subseteq \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$.

I.B.: Es ist $\{0\} \times \mathrm{MeanPosts}_{\mathrm{S}} \subseteq \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$. Ferner ist $\mathrm{MeanPosts}_{\mathrm{S}} = \mathrm{MeanPost}_{\mathrm{ExtHR(S,\,R)}}$. Also ist $\{0\} \times \mathrm{MeanPost}_{\mathrm{ExtHR(S,\,R)}} \subseteq \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$.

I.S.: Angenommen, $\mathrm{R}' \in \mathrm{HR}_{\mathrm{ExtHR(S,\,R)}}$.
Angenommen, $(\mathrm{p}, \mathrm{t}) \in \mathrm{R}'$ & $\mathrm{Ran}(\mathrm{t}) \subseteq \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$.
Nun sind zwei Fälle möglich:

Fall 1: Angenommen, $\mathrm{R}' \in \mathrm{HR}_{\mathrm{ExtHR(S,\,R)}}$.
Da S Logik-Basis, ist dann $\mathrm{p} \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$.

Fall 2: Angenommen, $\mathrm{R}' = \mathrm{R}$.
Dann $(\mathrm{p}, \mathrm{t}) \in \mathrm{R}$ & $\mathrm{Ran}(\mathrm{t}) \subseteq \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$. Dann nach Voraussetzung $\mathrm{p} \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$.

Also ist in beiden Fällen $\mathrm{p} \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$.

Mit I.B. und I.S. ist (B) durch $\mathbf{F}_{\mathrm{ExtHR(S,\,R)}}$-Induktion bewiesen, und mit (B) folgt

(C) R ist eine zulässige Herleitungsrelation für S.

Damit ist die Behauptung von rechts nach links bewiesen.

Damit ist die Behauptung in beiden Richtungen bewiesen. ■

Beweis für 2.3.6

Angenommen, S ist eine Logik-Basis.
Angenommen, $\mathrm{R} \in \mathrm{HR}_{\mathrm{S}}$.
Dann folgt mit Theorem 2.1.9 (2) und Theorem 2.3.5 die Behauptung. ■

Beweis für 2.3.10

Angenommen, S ist eine Logik-Basis.
Angenommen, H ist eine Herleitung für p über S.
Dann folgt mit Theorem 2.1.14 und Theorem 2.3.6 die Behauptung. ■

Beweis für 2.3.11

Angenommen, S ist eine Logik-Basis.

Um die Behauptung zu beweisen, setzen wir

$$\mathrm{M} = \{n \mid \forall H \forall p (H \text{ ist zulässige Herleitung für } p \text{ über S} \\ \& \ \mathrm{Dom}(H) = n \Rightarrow p \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}})\}.$$

und beweisen durch $\mathbb{N}$-Wertverlaufsinduktion

(A) $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{M}$.

Angenommen, $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ & $\forall m (m <_{\mathbb{N}} \mathrm{n} \Rightarrow m \in \mathrm{M})$.
Angenommen, H ist zulässige Herleitung für p über S & $\mathrm{Dom}(\mathrm{H}) = \mathrm{n}$.
Dann ist $\mathrm{p} = \mathrm{H}_{\mathrm{n}-1}$, und es ist $\mathrm{n}-1 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{H})$. Dann sind zwei Fälle möglich.

Fall 1 : Angenommen, $\mathrm{H}_{\mathrm{n}-1} \in \{0\} \times \text{A-True}_{\mathrm{S}}$.
Dann $\exists A(A \in \text{A-True}_{\mathrm{S}} \;\&\; \mathrm{p} = (0, A))$. Sei A so. Dann $(0, \mathrm{A}) \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$, also $\mathrm{p} \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$.

Fall 2 : Angenommen, $\exists R \exists j(R \in \mathrm{ZulHR}_{\mathrm{S}} \;\&\; j \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 0}(\mathrm{n}-1) \;\&$
$\& \;(\mathrm{H}_{\mathrm{n}-1}, \langle \mathrm{H}_{j_k} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R)$.
Seien R, j so.
Dann gilt $\forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow j_k <_{\mathbb{N}} \mathrm{n}-1)$, also $\forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow j_k + 1 <_{\mathbb{N}} \mathrm{n})$. Dann folgt mit I.V. $\forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow j_k + 1 \in \mathrm{M})$. Ferner gilt $\forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow$ $\mathrm{H}\lceil(\mathrm{j}_k + 1)$ ist zulässige Herleitung für $\mathrm{H}_{\mathrm{j}_k}$ über S & $\mathrm{Dom}(\mathrm{H}\lceil(\mathrm{j}_k + 1)) = \mathrm{j}_k + 1)$. Dann gilt $\forall k(k \in \mathrm{Dom}(j) \Rightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{j}_k} \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}})$, also $\mathrm{Ran}(\langle \mathrm{H}_{\mathrm{j}_k} \rangle_{k \in \mathrm{Dom(j)}}) \subseteq \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$. Dann folgt mit Theorem 2.1.9 $\mathrm{H}_{\mathrm{n}-1} \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$, also $\mathrm{p} \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$.

Also $\mathrm{p} \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$. Also $\mathrm{n} \in \mathrm{M}$.
Damit ist (A) durch $\mathbb{N}$-Wertverlaufsinduktion bewiesen,

Mit (A) folgt die Behauptung des zu beweisenden Theorems nun wie folgt: Angenommen, H ist eine zulässige Herleitung für p über S. Dann ist Dom(H) $\in \mathbb{N}$ und es folgt mit (A) $\mathrm{p} \in \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$. Dann folgt mit Theorem 2.2.4, $\exists H' \; H'$ ist eine Herleitung für p über S. ■

Beweis für 2.3.12

Direkt mit den Theoremen 2.2.4, 2.3.10 und 2.3.11. ■

A.5 Beweise in Abschnitt 2.4

Beweis für 2.4.26

Angenommen, S ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen.

Angenommen, H ist Herleitung über S.
Dann gilt

(1) H ist endliche Folge & $\mathrm{H} \neq 0$
& $\forall i(i \in \mathrm{Dom(H)} \Rightarrow \mathrm{H}_i \in \{0\} \times \mathrm{MeanPost}_{\mathrm{S}}$ or $\exists R \exists j(R \in \mathrm{HR}_{\mathrm{S}} \;\&\; j \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 0}(i) \;\&\; (\mathrm{H}_i, \langle \mathrm{H}_{j_k} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in \mathrm{R}))$.

Dann gilt

(2) H ist endliche Folge & $\mathrm{H} \neq 0$.

Angenommen, $\mathrm{i} \in \mathrm{Dom(H)}$.
Dann sind nach (1) zwei Fälle möglich:

Fall 1: Angenommen, $\mathrm{H}_{\mathrm{i}} \in \{0\} \times \mathrm{MeanPost}_{\mathrm{S}}$.
Dann $\mathrm{H}_{\mathrm{i}} \in \{0\} \times \mathrm{MeanPost}_{\mathrm{S}}$.

Fall 2: Angenommen, $\exists R \exists j(R \in \mathrm{HR}_{\mathrm{S}} \;\&\; j \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 0}(\mathrm{i}) \;\&$
$\& \;(\mathrm{H}_{\mathrm{i}}, \langle \mathrm{H}_{j_k} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R))$.

Seien R, j so.
Dann ist $\mathrm{R} \in \mathrm{HR_S}$. Dann sind zwei Unterfälle möglich:

Fall 2 .1: Angenommen, $\mathrm{R} = \mathrm{ReflFolg_S}$.
Dann $\exists B(B \in \mathrm{CFml_S}\ \&\ (\mathrm{H_i}, \langle \mathrm{H_{j_k}} \rangle_{k \in \mathrm{Dom(j)}}) = ((\{B\}, B), 0))$. Sei B so. Dann $\mathrm{H_i} = (\{\mathrm{B}\}, \mathrm{B})$. Also $\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}\ \&\ \exists B(B \in \mathrm{CFml_S}\ \&\ \mathrm{H_i} = (\{B\}, B))$.

Fall 2.2: Angenommen, R ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S.
Dann $\langle \mathrm{H_{j_k}} \rangle_{k \in \mathrm{Dom(j)}} \neq 0\ \&\ \mathrm{pr1(H)_i} \subseteq \bigcup(\{\mathrm{pr1}(\mathrm{H_{j_k}})\}_{k \in \mathrm{Dom(j)}})$. Dann $\mathrm{Dom(j)} \neq 0$, also $\mathrm{j} \neq 0$, also $\mathrm{j} \in \mathrm{Tup}^{>0}(\mathrm{i})$. Dann R ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S & $\mathrm{R} \in \mathrm{HR_S}\ \&\ \mathrm{j} \in \mathrm{Tup}^{>0}(\mathrm{i})\ \&\ (\mathrm{H_i}, \langle \mathrm{H_{j_k}} \rangle_{k \in \mathrm{Dom(j)}}) \in \mathrm{R}))$.

Also gilt im Fall 2

> $(\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}\ \&\ \exists B(B \in \mathrm{CFml_S}\ \&\ \mathrm{H_i} = (\{B\}, B)))$ or
> or $\exists R \exists j(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S
> & $R \in \mathrm{HR_S}\ \&\ j \in \mathrm{Tup}^{>0}(\mathrm{i})\ \&\ (\mathrm{H_i}, \langle \mathrm{H_{j_k}} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R)$.

Also gilt

> $\mathrm{H_i} \in \{0\} \times \mathrm{MeanPost_S}$ or
> or $(\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}\ \&\ \exists B(B \in \mathrm{CFml_S}\ \&\ \mathrm{H_i} = (\{B\}, B)))$ or
> or $\exists R \exists j(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S
> & $R \in \mathrm{HR_S}\ \&\ j \in \mathrm{Tup}^{>0}(\mathrm{i})\ \&\ (\mathrm{H_i}, \langle \mathrm{H_{j_k}} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R)$.

Damit ist die Behauptung von links nach rechts bewiesen.

Angenommen umgekehrt,

(3) H ist endliche Folge & $\mathrm{H} \neq 0$ &
& $\forall i(i \in \mathrm{Dom(H)} \Rightarrow \mathrm{H}_i \in \{0\} \times \mathrm{MeanPost_S}$ or $(\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}$ &
$\exists B(B \in \mathrm{CFml_S}\ \&\ \mathrm{H}_i = (\{B\}, B)))$ or $\exists R \exists j(R$ ist
prämissenkonservative Herleitungsrelation für S
& $\mathrm{R} \in \mathrm{HR_S}\ \&\ \mathrm{j} \in \mathrm{Tup}^{>0}(\mathrm{i})\ \&\ (\mathrm{H}_i, \langle \mathrm{H_{j_k}} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in \mathrm{R}))$.

Dann gilt zunächst

(4) H ist endliche Folge & $\mathrm{H} \neq 0$.

Angenommen, $\mathrm{i} \in \mathrm{Dom(H)}$.
Dann sind nach (3) drei Fälle möglich:

Fall 1: Angenommen, $\mathrm{H_i} \in \{0\} \times \mathrm{MeanPost_S}$.
Dann $\mathrm{H_i} \in \{0\} \times \mathrm{MeanPost_S}$.

Fall 2: Angenommen, $\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}\ \&\ \exists B(B \in \mathrm{CFml_S}\ \&\ \mathrm{H_i} = (\{B\}, B))$.
Sei B so.
Dann ist $((\{\mathrm{B}\}, \mathrm{B}), 0) \in \mathrm{ReflFolg_S}$. Ferner ist $0 \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 0}(\mathrm{i})\ \&\ 0 = \langle \mathrm{H_{j_k}} \rangle_{k \in \mathrm{Dom(0)}}$.
Dann $\exists R \exists j(R \in \mathrm{HR_S}\ \&\ j \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 0}(\mathrm{i})\ \&\ (\mathrm{H_i}, \langle \mathrm{H_{j_k}} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in \mathrm{R}))$.

Fall 3: Angenommen, $\exists R \exists j(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S & $R \in \mathrm{HR_S}\ \&\ j \in \mathrm{Tup}^{>0}(\mathrm{i})\ \&\ (\mathrm{H_i}, \langle \mathrm{H_{j_k}} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R)$.
Dann $\exists R \exists j(R \in \mathrm{HR_S}\ \&\ j \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 0}(\mathrm{i})\ \&\ (\mathrm{H_i}, \langle \mathrm{H_{j_k}} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R)$.

Also gilt

(5) $\forall i(i \in \mathrm{Dom(H)} \Rightarrow \mathrm{H}_i \in \{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S}$ or $\exists R \exists j(R \in \mathrm{HR_S}$ & $j \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 0}(i)$ & $(\mathrm{H}_i, \langle \mathrm{H}_{j_k} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in \mathrm{R}))$.

Mit (4) und (5) folgt: H ist Herleitung über S. Also gilt die Behauptung von rechts nach links.

Damit ist Theorem 2.4.26 bewiesen. ■

Beweis für 2.4.27

Angenommen, die Vorausssetzungen sind für S, H, i erfüllt.

Um die Behauptung zu beweisen, setzen wir

$$\mathrm{M} = \{n \mid n \in \mathrm{Dom(H)} \Rightarrow \forall D(D \in \mathrm{pr1}(\mathrm{H}_n) \Rightarrow \exists l(l \leqslant_{\mathbb{N}} n \ \& \ \mathrm{H}_l = (\{D\}, D)))\}$$

und beweisen durch $\mathbb{N}$-Wertverlaufsinduktion

(A) $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{M}$.

Sei also $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ & $\forall m(m <_{\mathbb{N}} n \Rightarrow m \in \mathrm{M})$.
Angenommen, $\mathrm{n} \in \mathrm{Dom(H)}$. Angenommen, $\mathrm{D} \in \mathrm{pr1}(\mathrm{H}_n)$.
Dann $\mathrm{pr1}(\mathrm{H}_n) \neq 0$, dann $\mathrm{H} \notin (0 \times \mathrm{MeanPosts_S})$. Dann folgt mit 2.4.26

(1) $(\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}$ & $\exists B(B \in \mathrm{CFml_S}$ & $\mathrm{H}_n = (\{B\}, B))$ oder $\exists R \exists j(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S & $R \in \mathrm{HR_S}$ & $j \in \mathrm{Tup}^{>0}(\mathrm{n})$ & $(\mathrm{H_n}, \langle \mathrm{H}_{j_k} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R)$.

Dann sind zwei Fälle möglich:

Fall 1: Angenommen, $\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}$ & $\exists B(B \in \mathrm{CFml_S}$ & $\mathrm{H}_n = (\{B\}, B))$.
Sei B so.
Dann $\mathrm{H_n} = (\{\mathrm{B}\}, \mathrm{B})$. Dann folgt mit $\mathrm{D} \in \mathrm{pr1}(\mathrm{H_n})$ $\mathrm{D} = \mathrm{B}$. Also $\mathrm{H_n} = (\{\mathrm{D}\}, \mathrm{D})$.
Dann $\exists l(l \leqslant_{\mathbb{N}} n$ & $\mathrm{H}_l = (\{\mathrm{D}\}, \mathrm{D}))$.

Fall 2: $\exists R \exists j(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S & $R \in \mathrm{HR_S}$ & $j \in \mathrm{Tup}^{>0}(\mathrm{n})$ & $(\mathrm{H_n}, \langle \mathrm{H}_{j_k} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R)$.
Seien R, j so.
Dann gilt $\forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow \mathrm{j}_k <_{\mathbb{N}} \mathrm{n}$ & $\mathrm{j}_k \in \mathrm{Dom(H)})$. Dann gilt nach I.V. $\forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow \mathrm{j}_k \in \mathrm{M})$. Dann $\forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow \forall D(D \in \mathrm{pr1}(\mathrm{H}_{\mathrm{j}_k}) \Rightarrow \exists l(l \leqslant_{\mathbb{N}} \mathrm{j}_k$ & $\mathrm{H}_l = (\{\mathrm{D}\}, \mathrm{D}))))$. Nach Fallannahme ist R prämissenkonservative Herleitungsrelation für S. Dann folgt mit $(\mathrm{H_n}, \langle \mathrm{H}_{\mathrm{j}_k} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R$ $\mathrm{pr1}(\mathrm{H_n}) \subseteq \bigcup(\{\mathrm{pr1}(\mathrm{H}_{\mathrm{j}_k})\}_{k \in \mathrm{Dom(j)}})$. Dann $\mathrm{D} \in \bigcup(\{\mathrm{pr1}(\mathrm{H}_{\mathrm{j}_k})\}_{k \in \mathrm{Dom(j)}})$. Dann $\exists k(k \in \mathrm{Dom(j)}$ & $\mathrm{D} \in \mathrm{pr1}(\mathrm{H}_{\mathrm{j}_k}))$. Sei k so. Dann $\exists l(l \leqslant_{\mathbb{N}} \mathrm{j_k}$ & $\mathrm{H}_l = (\{\mathrm{D}\}, \mathrm{D}))$. Dann folgt mit $\mathrm{j_k} <_{\mathbb{N}} \mathrm{n}$ $\exists l(l \leqslant_{\mathbb{N}} \mathrm{n}$ & $\mathrm{H}_l = (\{\mathrm{D}\}, \mathrm{D}))$.

In beiden Fällen gilt also $\exists l(l \leqslant_{\mathbb{N}} \mathrm{n}$ & $\mathrm{H}_l = (\{\mathrm{D}\}, \mathrm{D}))$. Dann ist $\mathrm{n} \in \mathrm{M}$.
Damit ist (A) durch $\mathbb{N}$-Wertverlaufsinduktion bewiesen.

Mit (A) folgt sofort die Behauptung. ■

Beweis für 2.4.28

Seien die Voraussetzungen für S, H, R, i, j erfüllt.
Angenommen, $\mathrm{C} \in \mathrm{pr1}(\mathrm{H}_i)$.
Nach Voraussetzung ist R prämissenkonservative Herleitungsrelation für S; dann ist $\mathrm{pr1}(\mathrm{H_i}) \subseteq \bigcup(\{\mathrm{pr1}(\mathrm{H}_{\mathrm{j}_k})\}_{k\in\mathrm{Dom(j)}})$; dann $\mathrm{C} \in \bigcup(\{\mathrm{pr1}(\mathrm{H}_{\mathrm{j}_k})\}_{k\in\mathrm{Dom(j)}})$; dann $\exists k(k \in \mathrm{Dom(j)} \;\; \& \;\; \mathrm{C} \in \mathrm{pr1}(\mathrm{H}_{\mathrm{j}_k}))$. Sei k so. Nun sind für S, H, $\mathrm{j_k}$, C die Voraussetzungen von Theorem 2.4.27 erfüllt. Dann $\exists l(l \leqslant_{\mathbb{N}} \mathrm{j_k} \;\; \& \;\; \mathrm{H}_l = (\{\mathrm{C}\}, \mathrm{C}))$. Sei l so. Dann ist $\mathrm{j_k} <_{\mathbb{N}} \mathrm{i} \;\; \& \;\; \mathrm{l} \leqslant_{\mathbb{N}} \mathrm{j_k}$, also $\mathrm{l} <_{\mathbb{N}} \mathrm{i} \;\; \& \;\; \mathrm{H_l} = (\{\mathrm{C}\}, \mathrm{C})$. Also $\exists l(l <_{\mathbb{N}} \mathrm{i} \;\; \& \;\; \mathrm{H}_l = (\{\mathrm{C}\}, \mathrm{C}))$. ■

Beweis für 2.4.33

Angenommen, S ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen.
Angenommen, H ist eine Herleitung für (X, A) über S.
Dann gilt gemäß Definitionslehre:

$\exists H'(H'$ ist Funktion auf $\mathrm{Dom(H)}$ &

& $\forall i(i \in \mathrm{Dom(H)} \;\; \& \;\; \mathrm{H}_i \in (\{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S}) \Rightarrow$
$\Rightarrow H'_i = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{E}\; \mathrm{pr2}(\mathrm{H}_i))$ &

& $\forall i(i \in \mathrm{Dom(H)} \;\; \& \;\; \mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S} \;\; \& \;\; \exists B(B \in \mathrm{CFml_S}$ &
& $\mathrm{H}_i = (\{B\}, B)) \Rightarrow$
$\Rightarrow H'_i = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_i\; \mathrm{pr2}(\mathrm{H}_i))$ &

& $\forall i(i \in \mathrm{Dom(H)} \;\; \& \;\; \exists R \exists j(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S
& $R \in \mathrm{HR_S} \;\; \& \;\; j \in \mathrm{Tup}^{>0}(i) \;\; \& \;\; (\mathrm{H}_i, \langle \mathrm{H}_{j_k} \rangle_{k\in\mathrm{Dom}(j)}) \in R) \Rightarrow$
$\forall e(e = \{\mathrm{Inf}(\{l \mid l <_{\mathbb{N}} i \;\; \& \;\; \mathrm{H}_l = (\{C\}, C)\}, \mathrm{Kl}_{\mathbb{N}})\}_{C\in\mathrm{pr1}(\mathrm{H}_i)} \Rightarrow$
$\Rightarrow H'_i = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{F}_e\; \mathrm{pr2}(\mathrm{H}_i))))$.

Sei H′ so.
Um nun zu beweisen, daß H′ eine pragmatisierte Herleitung für A in Abhängigkeit von X über S ist, beweisen wir zwei Hilfstheoreme (A), (B) und dann die vier Konjunktionsglieder des Definiens der Definition des Begriffs der pragmatisierten Herleitung als (C), ..., (F).

Wir beweisen Hilfstheorem (A):

(A) $\forall j \forall m \forall C(j \in \mathrm{Dom(H')} \;\; \& \;\; m \in \mathbb{N} \;\; \& \;\; C \in \mathrm{CFml_S} \;\; \& \;\; \mathrm{H}'_j = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_m\, C \Rightarrow$
$\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S} \;\; \& \;\; \mathrm{H}_j = (\{C\}, C))$.

Angenommen, die Voraussetzungen sind für j, m, C erfüllt. Da nach Voraussetzung S eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen und H eine Herleitung über S ist, folgt mit Theorem 2.4.26

$\mathrm{H_j} = \{0\} \times \mathrm{MeanPosts_S}$ or

or (ReflFolg$_S$ $\in$ HR$_S$ & $\exists B(B \in$ CFml$_S$ & H$_j$ = ({B}, B))) or
or $\exists R \exists l(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S
& $R \in$ HR$_S$ & $l \in \mathrm{Tup}^{>0}(j)$ & (H$_j$, $\langle \mathrm{H}_{l_k} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(l)}) \in R$).

Im *ersten Fall* wäre nach Einführung von H′ H′$_j$ = $^{\mathrm{S}}\mathbb{E}$ pr2(H$_j$), also wegen H′$_j$ = $^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_m$ C H′$_j$ $\in$ Ran(S$_{7,0}$) $\cap$ Ran(S$_{7,1}$), im Widerspruch zu Bedingung (3) der Definition 2.4.9 des Begriffs der Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen. Im *dritten Fall* wäre nach Einführung von H′ H′$_j$ = $^{\mathrm{S}}\mathbb{F}_e$ pr2(H$_j$) (für e = {Inf({l | $l <_{\mathbb{N}}$ j & H$_l$ = ({C}, C)}, Kl$_{\mathbb{N}}$)}$_{C \in \mathrm{pr1(H_j)}}$), also wegen H′$_j$ = $^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_m$ C H′$_j$ $\in$ Ran(S$_{7,2}$) $\cap$ Ran(S$_{7,1}$), im Widerspruch zu Bedingung (3) der Definition 2.4.9 des Begriffs der Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen. Also folgt

ReflFolg$_S$ $\in$ HR$_S$ & $\exists B(B \in$ CFml$_S$ & H$_j$ = ({B}, B)).

Sei B so. Dann ist nach Einführung von H′ H′$_j$ = $^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_j$ B. Dann ist $^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_j$ B = H′$_j$ = $^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_m$ C, also B = C, also H$_j$ = ({C}, C), also ReflFolg$_S$ $\in$ HR$_S$ & H$_j$ = ({C}, C).

Wir beweisen Hilfstheorem (B):

(B) $\forall l(l \in$ Dom(H) $\Rightarrow$ pr1(H$_l$) ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes l in H′ über S).

Angenommen, l $\in$ Dom(H). Nach Einführung von H′ ist H′ eine endliche Folge von Sätzen von S & l $\in$ Dom(H′). Nach Theorem 2.4.26 sind für H$_l$ drei Fälle möglich:

Fall 1: Angenommen, H$_l$ $\in$ {0} × MeanPost$_S$.
Dann ist H′$_l$ = $^{\mathbb{S}}\mathbb{E}$ pr2(H$_l$). Dann ist H′$_l$ ein Anziehungssatz von S & pr1(H$_l$) = 0. Dann folgt mit 2.4.29, pr1(H$_l$) ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes l von H′ über S.

Fall 2: Angenommen, ReflFolg$_S$ $\in$ HR$_S$ & $\exists B(B \in$ CFml$_S$ & H$_l$ = ({B}, B)).
Dann ist H′$_l$ ein Annahmesatz für pr2(H$_l$) von S & pr1(H$_l$) = {pr2(H$_l$)}. Also $\exists B$(H′$_l$ ist Annahmesatz für B von S & pr1(H$_l$) = {B}). Dann folgt mit 2.4.29, pr1(H$_l$) ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes l von H′ über S.

Fall 3: Angenommen, $\exists R \exists j(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S $R \in$ HR$_S$ & $j \in \mathrm{Tup}^0$(l) & (H$_l$, $\langle \mathrm{H}_{j_k} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R$).
Seien R, j so.
Dann gilt für

e = {Inf({l' | $l' <_{\mathbb{N}}$ l & H$_{l'}$ = ({C}, C)}, Kl$_{\mathbb{N}}$)}$_{C \in \mathrm{pr1(H_l)}}$

H′$_l$ = $^{\mathrm{S}}\mathbb{F}_e$ pr2(H$_l$). Dann ist H′$_l$ Folgerunssatz mit der Indexklasse e von S. Ferner gilt:

(1) pr1(H$_l$) = {D | $D \in$ CFml$_S$ & $\exists j(j \in$ e & $^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_j$ $D \in$ Ran(H′⌈l))}.

Denn angenommen, D $\in$ pr1(H$_l$).
Dann ist D $\in$ CFml$_S$. Ferner ist Inf({l' | $l' <_{\mathbb{N}}$ l & H$_{l'}$ = ({D}, D)}, Kl$_{\mathbb{N}}$) $\in$ e.

Sei m = $\mathrm{Inf}(\{l' \mid l' <_{\mathbb{N}} \mathrm{l} \;\&\; \mathrm{H}_{l'} = (\{D\}, D)\}, \mathrm{Kl}_{\mathbb{N}})$. Dann ist $\mathrm{m} <_{\mathbb{N}} \mathrm{l} \;\&\; \mathrm{H}_{\mathrm{m}} = (\{D\}, \mathrm{D})$, also $\mathrm{H'}_{\mathrm{m}} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_{\mathrm{m\,D}}$, also $\mathrm{m} \in \mathrm{e} \;\&\; {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_{\mathrm{m}}\,\mathrm{D} \in \mathrm{Ran}(\mathrm{H'}\lceil \mathrm{l})$, also $\exists j(j \in \mathrm{e} \;\&\; {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_{j}\,\mathrm{D} \in \mathrm{Ran}(\mathrm{H'}\lceil \mathrm{l}))$. Also ist $\mathrm{D} \in \{D \mid D \in \mathrm{CFml}_{\mathrm{S}} \;\&\; \exists j(j \in \mathrm{e} \;\&\; {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_{\mathrm{j}}\,\mathrm{D} \in \mathrm{Ran}(\mathrm{H'}\lceil \mathrm{l}))\}$.

Angenommen umgekehrt, $\mathrm{D} \in \{D \mid D \in \mathrm{CFml}_{\mathrm{S}} \;\&\; \exists j(j \in \mathrm{e} \;\&\; {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_{\mathrm{j}}\,\mathrm{D} \in \mathrm{Ran}(\mathrm{H'}\lceil \mathrm{l}))\}$.

Dann ist $\mathrm{D} \in \mathrm{CFml}_{\mathrm{S}} \;\&\; \exists j(j \in \mathrm{e} \;\&\; {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_{\mathrm{j}}\,\mathrm{D} \in \mathrm{Ran}(\mathrm{H'}\lceil \mathrm{l}))$. Sei j so. Dann folgt mit $\mathrm{j} \in \mathrm{e}$ $\exists C(C \in \mathrm{pr1}(\mathrm{H_l}) \;\&\; \mathrm{j} = \mathrm{Inf}(\{l' \mid l' <_{\mathbb{N}} \mathrm{l} \;\&\; \mathrm{H}_{l'} = (\{C\}, C)\}, \mathrm{Kl}_{\mathbb{N}}))$. Sei C so. Dann ist $\mathrm{C} \in \mathrm{pr1}(\mathrm{H_l}) \;\&\; \mathrm{j} <_{\mathbb{N}} \mathrm{l} \;\&\; \mathrm{H_j} = (\{\mathrm{C}\}, \mathrm{C})$. Andererseits folgt mit ${}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_{\mathrm{j}}\,\mathrm{D} \in \mathrm{Ran}(\mathrm{H'}\lceil \mathrm{l})$ $\exists k(k <_{\mathbb{N}} \mathrm{l} \;\&\; {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_{\mathrm{j}}\,\mathrm{D} = \mathrm{H'}_{k})$. Sei k so. Dann folgt mit (A) $\mathrm{H_k} = (\{\mathrm{D}\}, \mathrm{D})$; dann $\mathrm{H'}_{k} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_{\mathrm{k}}\,\mathrm{D}$; dann ${}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_{\mathrm{j}}\,\mathrm{D} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_{\mathrm{k}}\,\mathrm{D}$; dann folgt mit der Eineindeutigkeit der Funktion $\mathrm{S}_{7,2}$ j = k. Dann $(\{\mathrm{D}\}, \mathrm{D}) = \mathrm{H_k} = \mathrm{H_j} = (\{\mathrm{C}\}, \mathrm{C})$, also C = D. Dann folgt mit $\mathrm{C} \in \mathrm{pr1}(\mathrm{H_l})$ $\mathrm{D} \in \mathrm{pr1}(\mathrm{H_l})$.

Insgesamt ist damit (1) bewiesen, und mit (1) folgt, $\mathrm{pr1}(\mathrm{H_l})$ ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes l von H′ in S.

In allen drei Fällen ist damit bewiesen, $\mathrm{pr1}(\mathrm{H_l})$ ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes l von H′ in S.

Damit ist (B) bewiesen.

Wir beweisen das erste Konjunktionsglied des Definiens von 2.4.30:

(C) S ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen.

Dies gilt nach Voraussetzung.

Wir beweisen das zweite Konjunktionsglied des Definiens von 2.4.30:

(D) H′ ist eine endliche Folge & $\mathrm{H'} \neq 0$.

Nach Einführung von H′ ist H′ eine Folge der Länge Dom(H) und nach Voraussetzung ist H eine endliche Folge, also H′ eine endliche Folge. Und da ferner $\mathrm{H} \neq 0$, ist $\mathrm{Dom(H)} \neq 0$, also $\mathrm{Dom(H')} \neq 0$, also $\mathrm{H'} \neq 0$.

Wir beweisen das dritte Konjunktionsglied des Definiens von 2.4.30:

(E) Für alle i: wenn $i \in \mathrm{Dom(H')}$, dann gilt:

$\exists B(B \in \mathrm{MeanPost}_{\mathrm{S}} \;\&\; \mathrm{H'}_{i} = {}^{S}\mathbb{E}\,B)$ **oder**

oder $\mathrm{ReflFolg}_{\mathrm{S}} \in \mathrm{HR}_{\mathrm{S}} \;\&\; \exists B \exists n(B \in \mathrm{CFml}_{\mathrm{S}} \;\&\; n \in \mathbb{N} \;\&\; \mathrm{H'}_{i} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_{n}\,B \;\&\; \forall C \forall m \forall j(C \in \mathrm{CFml}_{\mathrm{S}} \;\&\; m \in \mathbb{N} \;\&\; j \in \mathrm{Dom(H')} \;\&\; \mathrm{H'}_{j} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_{m}\,C \;\&\; j \neq i \;\&\; C \neq B \Rightarrow m \neq n))$ **oder**

oder $\exists B \exists e(B \in \mathrm{CFml}_{\mathrm{S}} \;\&\; e \in \mathrm{ePot}(\mathbb{N}) \;\&\; \mathrm{H'}_{i} = {}^{S}\mathbb{F}_{e}\,B \;\&$ $\exists R \exists j \exists Z \exists Y \exists C(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S & $R \in \mathrm{HR}_{\mathrm{S}} \;\&\; j \in \mathrm{Tup}^{>0}(i) \;\&\; Z$ ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes i in H' über S & $Y \in \mathrm{Tup}^{=\mathrm{Dom}(j)}$ & $\forall k(k \in \mathrm{Dom}(j) \Rightarrow Y_k$ ist die Klasse der Annahmeformel- des Gliedes j_k in H' über S) & $C \in \mathrm{Tup}^{=\mathrm{Dom}(j)}(\mathrm{CFml}_\mathrm{S})$ & $\forall k(k \in \mathrm{Dom}(j) \Rightarrow \mathrm{H}'_{j_k}$ ist ein Satz für C_k von S) & $((Z, B), \langle(Y_k, C_k)\rangle_{k\in\mathrm{Dom}(j)}) \in R))$.

Angenommen, $\mathrm{i} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{H}')$.
Dann ist $\mathrm{i} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{H})$ & H ist Herleitung für (X, A) über S. Dann folgt mit Theorem 2.4.26

(2) $\mathrm{H_i} \in (\{0\} \times \mathrm{MeanPost_S})$ or $(\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}$ & $\exists B(B \in \mathrm{CFml_S}$ & $\mathrm{H_i} = (\{B\}, B)))$ or $\exists R\exists j(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S & $R \in \mathrm{HR_S}$ & $j \in \mathrm{Tup}^{>0}(\mathrm{i})$ & $(\mathrm{H_i}, \langle \mathrm{H}_{j_k}\rangle_{k\in\mathrm{Dom}(j)}) \in R)$.

Es sind also drei Fälle zu untersuchen:

Fall 1: Angenommen, $\mathrm{H_i} \in (\{0\} \times \mathrm{MeanPost_S})$.
Dann gilt nach Einführung von H'

$\mathrm{H'_i} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{E}\,\mathrm{pr2}(\mathrm{H_i})$.

Ferner ist $\mathrm{pr2}(\mathrm{H_i}) \in \mathrm{MeanPost_S}$. Also

(3) $\exists B(B \in \mathrm{MeanPost_S}$ & $\mathrm{H'_i} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{E}\, B)$.

Fall 2: Angenommen,
$\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}$ & $\exists B(B \in \mathrm{CFml_S}$ & $\mathrm{H_i} = (\{B\}, B))$.
Dann gilt nach Einführung von H'

$\mathrm{H'_i} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_\mathrm{i}\,\mathrm{pr2}(\mathrm{H_i})$.

Also gilt

(4) $\mathrm{pr2}(\mathrm{H_i}) \in \mathrm{CFml_S}$ & $\mathrm{i} \in \mathbb{N}$ & $\mathrm{H'_i} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_\mathrm{i}\,\mathrm{pr2}(\mathrm{H_i})$.

Angenommen, $\mathrm{C} \in \mathrm{CFml_S}$ & $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$ & $\mathrm{j} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{H}')$ & $\mathrm{H'_j} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_\mathrm{m}\,\mathrm{C}$ & $\mathrm{j} \neq \mathrm{i}$ & $\mathrm{C} \neq \mathrm{pr2}(\mathrm{H_i})$.
Dann $\mathrm{j} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{H})$ und es folgt mit (A) $\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}$ & $\mathrm{H_j} = (\{\mathrm{C}\}, \mathrm{C})$.
Dann $\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}$ & $\exists B(B \in \mathrm{CFml_S}$ & $\mathrm{H_j} = (\{B\}, B))$. Dann gilt nach Einführung von H' $\mathrm{H'_j} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_\mathrm{j}\,\mathrm{pr2}(\mathrm{H_j})$. Dann folgt mit $\mathrm{H'_j} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_\mathrm{m}\,\mathrm{C}$ ${}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_\mathrm{j}\,\mathrm{pr2}(\mathrm{H_j} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_\mathrm{m}\,\mathrm{C}$. Dann $\mathrm{j} = \mathrm{m}$. Dann folgt mit $\mathrm{j} \neq \mathrm{i}$ $\mathrm{m} \neq \mathrm{i}$. Dann folgt mit (4)

$\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}$ & $\mathrm{pr2}(\mathrm{H_i}) \in \mathrm{CFml_S}$ & $\mathrm{i} \in \mathbb{N}$ & $\mathrm{H'_i} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_\mathrm{i}\,\mathrm{pr2}(\mathrm{H_i})$ & $\forall C\forall m\forall j(C \in \mathrm{CFml_S}$ & $m \in \mathbb{N}$ & $j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{H}')$ & $\mathrm{H}'_j = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_m\, C$ & $j \neq \mathrm{i}$ & $C \neq \mathrm{pr2}(\mathrm{H_i}) \Rightarrow m \neq \mathrm{i})$.

Also gilt

(5) $\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}$ & $\exists B\exists n(B \in \mathrm{CFml_S}$ & $n \in \mathbb{N}$ & $\mathrm{H'_i} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_n\, B$ & $\forall C\forall m\forall j(C \in \mathrm{CFml_S}$ & $m \in \mathbb{N}$ & $j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{H}')$ & $\mathrm{H}'_j = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_m\, C$ & $j \neq \mathrm{i}$ & $C \neq B \Rightarrow m \neq n))$.

Fall 3: Angenommen, $\exists R\exists j(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S & $R \in \mathrm{HR_S}$ & $j \in \mathrm{Tup}^{>0}(\mathrm{i})$ &

$(\mathrm{H_i},\ \langle \mathrm{H}_{j_k}\rangle_{k\in \mathrm{Dom}(j)}) \in R)$.
Seien R, j so.
Sei e = $\{\mathrm{Inf}(\{l \mid l <_{\mathbb{N}} \mathrm{i}\ \ \&\ \ \mathrm{H}_l = (\{C\},\ C)\},\ \mathrm{Kl}_{\mathbb{N}})\}_{C\in \mathrm{pr1}(\mathrm{H_i})}$.
Dann gilt nach Einführung von H′

$$\mathrm{H'_i} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{F}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{pr2}(\mathrm{H_i}).$$

Also gilt:

(6) $\mathrm{pr2}(\mathrm{H_i}) \in \mathrm{CFml_S}\ \ \&\ \ \mathrm{e} \in \mathrm{ePot}(\mathbb{N})\ \ \&\ \ \mathrm{H'_i} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{F}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{pr2}(\mathrm{H_i})$.

Ferner folgt mit (B):

(7) $\mathrm{pr1}(\mathrm{H_i})$ ist die Klasse der Annahmeformeln des Giedes i in H′ über S,

und

(8) $\langle \mathrm{pr1}(\mathrm{H}_{\mathrm{j}_k})\rangle_{k\in\mathrm{Dom(j)}} \in \mathrm{Tup}^{=\mathrm{Dom}(j)}\ \ \&\ \ \forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow \mathrm{pr1}(\mathrm{H}_{\mathrm{j}_k})$ ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes j_k in H′ über S).

Und mit der Einführung von H′ folgt:

(9) $\langle \mathrm{pr2}(\mathrm{H}_{\mathrm{j}_k})\rangle_{k\in\mathrm{Dom(j)}} \in \mathrm{Tup}^{=\mathrm{Dom}}(j)(\mathrm{CFml_S})\ \ \&\ \ \forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow \mathrm{H'}_{\mathrm{j}_k}$ ist ein Satz für $\mathrm{pr2}(\mathrm{H}_{\mathrm{j}_k})$ von S).

Und da nach Fallannahme

$$(\mathrm{H_i},\ \langle \mathrm{H}_{\mathrm{j}_k}\rangle_{k\in\mathrm{Dom(j)}}) \in \mathrm{R},$$

gilt ferner

(10) $((\mathrm{pr1}(\mathrm{H_i}), \mathrm{pr2}(\mathrm{H_i})),\ \langle(\mathrm{pr1}(\mathrm{H}_{\mathrm{j}_k}),\ \mathrm{pr2}(\mathrm{H}_{\mathrm{j}_k}))\rangle_{k\in\mathrm{Dom(j)}}) \in \mathrm{R}$.

Dann folgt mit der Annahme für Fall 3 und (6), . . . , (10)

(11) $\exists B\exists e(B \in \mathrm{CFml_S}\ \ \&\ \ e \in \mathrm{ePot}(\mathbb{N})\ \ \&\ \ \mathrm{H'}_i = {}^{S}\mathbb{F}_e\, B\ \ \&$ $\exists R\exists j\exists Z\exists Y\exists C(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S $\&\ \ R \in \mathrm{HR_S}\ \ \&\ \ j \in \mathrm{Tup}^{>0}(i)\ \ \&\ \ Z$ ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes i in H′ über S $\&\ \ Y \in \mathrm{Tup}^{=\mathrm{Dom}(j)}\ \ \&\ \ \forall k(k \in \mathrm{Dom}(j) \Rightarrow Y_k$ ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes j_k in H′ über S) $\&$ $C \in \mathrm{Tup}^{=\mathrm{Dom}(j)}(\mathrm{CFml_S})\ \ \&\ \ \forall k(k \in \mathrm{Dom}(j) \Rightarrow \mathrm{H'}_{j_k}$ ist ein Satz für C_k von S) $\&\ \ ((Z,\ B),\ \langle(Y_k,\ C_k)\rangle_{k\in\mathrm{Dom}(j)}) \in R))$.

Nun folgt mit (2), (3), (5) und (11) und Adjunktionsbeseitigung (E).

Wir beweisen das vierte Konjunktionsglied des Definiens von 2.4.30:

(F) $\mathrm{H'}_{\mathrm{Dom(H')}-1}$ ist ein Satz für A in S & X ist die Klasse der Annahmeformeln für das Glied Dom(H′)−1 in H′ über S.

Denn nach Voraussetzung ist H Herleitung für (X, A) über S. Dann ist $\mathrm{Dom(H)}-1 \in \mathrm{Dom(H)}\ \ \&\ \ \mathrm{H}_{\mathrm{Dom(H)}-1} = (\mathrm{X}, \mathrm{A})$, also $\mathrm{pr2}(\mathrm{H}_{\mathrm{Dom(H)}-1}) = \mathrm{A}$. Dann folgt mit Theorem 2.4.26 und der Einführung von H′, $\mathrm{H'}_{\mathrm{Dom(H')}-1}$ ist ein Satz für A von S. Ferner ist $\mathrm{X} = \mathrm{pr1}(\mathrm{H}_{\mathrm{Dom(H)}-1})$. Dann folgt mit (B), X ist die Klasse der Annahmeformeln für das Glied Dom(H′)−1 in H′ über S.

Mit (C), (D), (E), (F) folgt, H′ ist eine pragmatisierte Herleitung für A in Abhängigkeit von X über S. ■

Beweis für 2.4.34

Angenommen, S ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen.
Angenommen, H ist pragmatisierte Herleitung für A in Abhängigkeit von X über S.
Dann gilt gemäß Definitionslehre:

$\exists H'(H'$ ist Funktion auf Dom(H) &
& $\forall i \forall B(i \in \mathrm{Dom(H)}$ & $B \in \mathrm{MeanPosts_S}$ & $\mathrm{H}_i = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{E}\, B \Rightarrow H'_i = (0, B))$ &
& $\forall i \forall B \forall n(i \in \mathrm{Dom(H)}$ & $\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}$ & $B \in \mathrm{CFml_S}$ & $n \in \mathbb{N}$ & $\mathrm{H}_i = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_n\, B \Rightarrow H'_i = (\{B\}, B))$ &
& $\forall i \forall B \forall e \forall Z(i \in \mathrm{Dom(H)}$ & $B \in \mathrm{CFml_S}$ & $e \in \mathrm{ePot}(\mathbb{N})$ & $\mathrm{H}_i = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{F}_e\, B$ & Z ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes i in H über S $\Rightarrow H'_i = (Z, B)))$.

Sei H′ so.
Um nun zu beweisen, daß H′ eine Herleitung für (X, A) über S ist, beweisen wir ein Hilfstheorem (A) und dann die drei Konjunktionsglieder des Definiens der Definition 2.2.1 des Begriffs der Herleitung als (B), . . . , (D).

Wir beweisen Hilfstheorem (A):

(A) $\forall i \forall U \forall D(i \in \mathrm{Dom}(H)$ & U ist die Klasse der Annahmeformeln für das Glied i von H über S & H_i ist ein Satz für D von S $\Rightarrow \mathrm{H}'_i = (U, D))$.

Angenommen, i ∈ Dom(H) & U ist die Klasse der Annahmeformeln für das Glied i von H über S & $\mathrm{H_i}$ ist ein Satz für D von S. Dann sind nach Definition 2.4.30 drei Fälle möglich:

Fall 1: Angenommen, $\exists B(B \in \mathrm{MeanPosts_S}$ & $\mathrm{H_i} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{E}\, B)$.
Sei B so.
Dann ist U = 0 und D = B. Dann folgt mit der Einführung von H′ $\mathrm{H'_i} = (\mathrm{U}, \mathrm{D})$.

Fall 2: Angenommen, $\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}$ & $\exists B \exists n(B \in \mathrm{CFml_S}$ & $n \in \mathbb{N}$ & $\mathrm{H_i} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_n\, B$ & $\forall C \forall m \forall j(C \in \mathrm{CFml_S}$ & $m \in \mathbb{N}$ & $j \in \mathrm{Dom(H)}$ & $\mathrm{H}_j = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_m\, C$ & $j \neq \mathrm{i}$ & $C \neq B \Rightarrow m \neq n))$.
Seien B, n so.
Dann ist U = {B} & B = D. Dann folgt mit der Einführung von H′ $\mathrm{H'_i} = (\mathrm{U}, \mathrm{D})$.

Fall 3: Angenommen, $\exists B \exists e(B \in \mathrm{CFml_S}$ & $e \in \mathrm{ePot}(\mathbb{N})$ & $\mathrm{H_i} = {}^{S}\mathbb{F}_e\, B$ & $\exists R \exists j \exists Z \exists Y \exists C(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S & $R \in \mathrm{HR_S}$ & $j \in \mathrm{Tup}^{>0}(\mathrm{i})$ & Z ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes i in H über S & $Y \in \mathrm{Tup}^{=\mathrm{Dom}(j)}$ & $\forall k(k \in \mathrm{Dom}(j) \Rightarrow Y_k$ ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes j_k in H über S) &
$C \in \mathrm{Tup}^{=\mathrm{Dom}(j)}(\mathrm{CFml_S})$ & $\forall k(k \in \mathrm{Dom}(j) \Rightarrow \mathrm{H}_{j_k}$ ist ein Satz für C_k von S) & $((Z, B), \langle (Y_k, C_k) \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R))$.
Seien B, e so.

Seien R, j, Z, Y, C so.
Dann ist Z die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes i in H über S. Dann ist $\mathrm{U} = \mathrm{Z}$ & $\mathrm{D} = \mathrm{B}$. Dann folgt mit der Einführung von H′ $\mathrm{H'_i} = (\mathrm{U}, \mathrm{D})$.

Damit ist in allen drei Fällen bewiesen, $\mathrm{H'_i} = (\mathrm{U}, \mathrm{D})$.

Damit ist (A) bewiesen.

Wir beweisen das erste Konjunktionsglied des Definiens der Definition 2.2.1:

(B) S ist eine Logik-Basis.

Nach Voraussetzung ist S eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen und damit eine Logik-Basis.

Wir beweisen das zweite Konjunktionglied des Definiens der Definition 2.2.1:

(C) H′ ist eine endliche Folge & $\mathrm{H'} \neq 0$
& $\forall i(i \in \mathrm{Dom(H')} \Rightarrow (\mathrm{H'}_i \in (0 \times \mathrm{MeanPost_S})$ or $\exists R \exists j(R \in \mathrm{HR_S}$ & $j \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 0}(i)$ & $(\mathrm{H'}_i, \langle \mathrm{H'}_{j_k} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R)))$.

Nach Einführung von H′ ist H′ eine Funktion auf Dom(H) und H ist eine pragmatisierte Herleitung über S, also eine endliche Folge, & $\mathrm{H} \neq 0$, also $\mathrm{H'} \neq 0$.
Also gilt

(1) H′ ist eine endliche Folge & $\mathrm{H'} \neq 0$.

Angenommen, $\mathrm{i} \in \mathrm{Dom(H')}$. Dann $\mathrm{i} \in \mathrm{Dom(H)}$. Dann sind drei Fälle möglich:

Fall 1: Angenommen, $\exists B(B \in \mathrm{MeanPost_S}$ & $\mathrm{H_i} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{E}\, B)$.
Sei B so.
Dann nach Einführung von H′ $\mathrm{H'_i} = (0, B)$. Dann $\mathrm{H'_i} \in (0 \times \mathrm{MeanPost_S})$.

Fall 2: Angenommen, $\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}$ & $\exists B \exists n(B \in \mathrm{CFml_S}$ & $n \in \mathbb{N}$ & $\mathrm{H_i} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_n\, B$ & $\forall C \forall m \forall j(C \in \mathrm{CFml_S}$ & $m \in \mathbb{N}$ & $j \in \mathrm{Dom(H)}$ & $\mathrm{H}_j = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_m\, C$ & $j \neq \mathrm{i}$ & $C \neq B \Rightarrow m \neq n))$.
Seien B, n so.
Dann folgt mit der Einführung von H′ $\mathrm{H'_i} = (\{\mathrm{B}\}, \mathrm{B})$. Dann $\mathrm{ReflFolg_S} \in \mathrm{HR_S}$ & $0 \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 0}(\mathrm{i})$ & $((\{\mathrm{B}\}, \mathrm{B}), 0) \in \mathrm{ReflFolg_S}$; also
$\exists R \exists j(R \in \mathrm{HR_S}$ & $j \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 0}(\mathrm{i})$ & $(\mathrm{H'_i}, \langle \mathrm{H'_{j_k}} \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R)$.

Fall 3: Angenommen, $\exists B \exists e(B \in \mathrm{CFml_S}$ & $e \in \mathrm{ePot}(\mathbb{N})$ & $\mathrm{H_i} = {}^{S}\mathbb{F}_e\, B$ & $\exists R \exists j \exists Z \exists Y \exists C(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S & $R \in \mathrm{HR_S}$ & $j \in \mathrm{Tup}^{>0}(\mathrm{i})$ & Z ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes i in H über S & $Y \in \mathrm{Tup}^{=\mathrm{Dom}(j)}$ & $\forall k(k \in \mathrm{Dom}(j) \Rightarrow Y_k$ ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes j_k in H über S) &
$C \in \mathrm{Tup}^{=\mathrm{Dom}(j)}(\mathrm{CFml_S})$ & $\forall k(k \in \mathrm{Dom}(j) \Rightarrow \mathrm{H}_{j_k}$ ist ein Satz für C_k von

S) & $((Z, B), \langle(Y_k, C_k)\rangle_{k\in\mathrm{Dom}(j)}) \in R))$.
Seien B, e so.
Seien R, j, Z, Y, C so.
Dann folgt mit der Einführung von H′

$$\mathrm{H'_i} = (\mathrm{Z}, \mathrm{B}).$$

Angenommen, k ∈ Dom(j).
Dann $\mathrm{j_k} <_{\mathbb{N}} \mathrm{i}$, also $\mathrm{j_k} \in \mathrm{Dom(H)}$; ferner ist $\mathrm{Y_k}$ die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes $\mathrm{j_k}$ in H über S, und $\mathrm{H_{j_k}}$ ist ein Satz für $\mathrm{C_k}$ von S. Dann folgt mit (A) $\mathrm{H'_{j_k}} = (\mathrm{Y_k}, \mathrm{C_k})$. Dann

$$\langle(Y_{\mathrm{k}}, C_{\mathrm{k}})\rangle_{\mathrm{k}\in\mathrm{Dom(j)}} = \langle\mathrm{H'_{j_k}}\rangle_{\mathrm{k}\in\mathrm{Dom(j)}}.$$

Dann

$$(\mathrm{H'_i}, \langle\mathrm{H'_{j_k}}\rangle_{k\in\mathrm{Dom(j)}}) \in \mathrm{R}.$$

Also
$\exists R\exists j(R \in \mathrm{HR_S}\ \&\ j \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 0}(i)\ \&\ (\mathrm{H'}_i, \langle\mathrm{H'}_{j_k}\rangle_{k\in\mathrm{Dom}(j)}) \in R)))$.

Damit sind die drei möglichen Fälle behandelt und es folgt mit Adjunktionsbeseitigung $(\mathrm{H'}_i \in (0 \times \mathrm{MeanPosts_S})$ or $\exists R\exists j(R \in \mathrm{HR_S}\ \&\ j \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 0}(i)\ \&\ (\mathrm{H'}_i, \langle\mathrm{H'}_{j_k}\rangle_{k\in\mathrm{Dom}(j)}) \in R)))$. Insgesamt gilt also:

(2) $\forall i(i \in \mathrm{Dom(H')} \Rightarrow (\mathrm{H'}_i \in (0 \times \mathrm{MeanPosts_S})$ or $\exists R\exists j(R \in \mathrm{HR_S}\ \&\ j \in \mathrm{Tup}^{\geqslant 0}(i)\ \&\ (\mathrm{H'}_i, \langle\mathrm{H'}_{j_k}\rangle_{k\in\mathrm{Dom}(j)}) \in R)))$.

Mit (1) und (2) ist (C) bewiesen.

Wir beweisen das dritte Konjunktionsglied des Definiens der Definition 2.2.1:

(D) $(\mathrm{X}, \mathrm{A}) = \mathrm{H'}_{\mathrm{Dom(H')}-1}$.

Denn H ist eine pragmatisierte Herleitung für A in Abhängigkeit von X über S. Dann $\mathrm{H_{Dom(H)-1}}$ ist ein Satz für A von S & X ist die Klasse der Annahmeformeln für das Glied Dom(H)−1 in H über S. Dann folgt mit Dom(H′)−1 ∈ Dom(H) und (A) $\mathrm{H'}_{\mathrm{Dom(H')}-1} = (\mathrm{X}, \mathrm{A})$.

Mit Definition 2.2.1 und (B), (C), (D) folgt, H′ ist eine Herleitung für (X, A) über S. ■

Beweis für 2.4.35

Direkt mit den Theoremen 2.2.4, 2.4.33 und 2.4.34. ■

A.6 Beweise in Abschnitt 2.5

Beweis für 2.5.4

Direkt mit den Theoremen 2.1.14 und 2.3.6. ■

Beweis für 2.5.5

Angenommen, S ist eine Logik-Basis für pragmatisierte Herleitungen.

Um die Behauptung zu beweisen, setzen wir

> M = $\{n \mid \forall H \forall X \forall A(H$ ist zulässige pragmatisierte Herleitung für A in Abhängigkeit von X über S & Dom$(H) = n \Rightarrow \exists H'\ H'$ ist zulässige Herleitung für $(X,\ A)$ über S $)\}$

und beweisen durch $\mathbb{N}$-Wertverlaufsinduktion

(A) $\mathbb{N} \subseteq$ M.

Angenommen also, n $\in \mathbb{N}$ & $\forall m(m <_{\mathbb{N}} n \Rightarrow m \in$ M).
Angenommen, H ist zulässige pragmatisierte Herleitung für A in Abhängigkeit von X über S & Dom(H) = n.
Dann ist n $-$ 1 $\in$ Dom(H) & $\mathrm{H_{n-1}}$ ist ein Satz für A von S & X ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes n $-$ 1 in H über S. Dann sind gemäß Definition 2.5.1 drei Fälle möglich:

Fall 1: Angenommen, $\exists B(B \in \text{A-True}_{\mathrm{S}}$ & $\mathrm{H_{n-1}} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{E}\, B)$.
Sei B so.
Dann ist B = A und X = 0 und$\langle(0,\ \mathrm{B})\rangle$ ist eine zulässige Herleitung für $(0, \mathrm{B})$ über S. Also $\exists H'\ H'$ ist zulässige Herleitung für (X, A) über S.

Fall 2: Angenommen, $\text{ReflFol}_{\mathrm{S}} \in \mathrm{HR}_{\mathrm{S}}$ & $\exists B \exists k(B \in \mathrm{CFml}_{\mathrm{S}}$ & $k \in \mathbb{N}$ & $\mathrm{H}_{n-1} = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_k\, B$ & $\forall C \forall m \forall j(C \in \mathrm{CFml}_{\mathrm{S}}$ & $m \in \mathbb{N}$ & $j \in$ Dom(H) & $\mathrm{H}_j = {}^{\mathrm{S}}\mathbb{A}_m\, C$ & $j \neq \mathrm{n} - 1$ & $C \neq B \Rightarrow m \neq k))$.
Seien B, k so.
Dann ist A = B und X = $\{$B$\}$, und $\langle(\{\mathrm{B}\},\ \mathrm{B})\rangle$ ist eine zulässige Herleitung für $(\{\mathrm{B}\},\ \mathrm{B})$ über S. Also $\exists H'\ H'$ ist zulässige Herleitung für (X, A) über S.

Fall 3: Angenommen,
$\exists B \exists e(B \in \mathrm{CFml}_{\mathrm{S}}$ & $e \in \mathrm{ePot}(\mathbb{N})$ & $\mathrm{H_n} - 1 = {}^{S}\mathbb{F}_e\, B$ &
$\exists R \exists j \exists Z \exists Y \exists C(R$ ist prämissenkonservative Herleitungsrelation für S
& $R \in \mathrm{ZulHR}_{\mathrm{S}}$ & $j \in \mathrm{Tup}^{>0}(\mathrm{n}-1)$ & Z ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes n -1 in H über S & $Y \in \mathrm{Tup}^{=\mathrm{Dom}(j)}$ & $\forall k(k \in \mathrm{Dom}(j) \Rightarrow Y_k$ ist die Klasse der Annahmeformeln des Gliedes j_k in H über S) &
$C \in \mathrm{Tup}^{=\mathrm{Dom}(j)}(\mathrm{CFml}_{\mathrm{S}})$ & $\forall k(k \in \mathrm{Dom}(j) \Rightarrow \mathrm{H}_{j_k}$ ist ein Satz für C_k von S) & $((Z,\ B),\ \langle(Y_k,\ C_k)\rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R))$.
Seien B, e so.
Seien R, j, Z, Y, C so.
Dann ist B = A und Z = X. Dann gilt

(1) $((\mathrm{X}, \mathrm{A}),\ \langle(Y_k,\ C_k)\rangle_{k \in \mathrm{Dom}(j)}) \in R))$.

Angenommen, k $\in$ Dom(j).
Dann $\mathrm{j_k} <_{\mathbb{N}}$ n -1, also $\mathrm{j_k} + 1 <_{\mathbb{N}}$ n, also $\mathrm{j_k} + 1 \in$ M. Ferner ist$\mathrm{H}\lceil(\mathrm{j_k}+1)$ eine zulässige pragmatisierte Herleitung für $\mathrm{C_k}$ in Abhängigkeit von $\mathrm{Y_k}$ über S & $\mathrm{Dom}(\mathrm{H}\lceil(\mathrm{j_k}+1)) = \mathrm{j_k} + 1$. Dann folgt

$\exists H'$ H' ist eine zulässige Herleitung fÃ¼r $(\mathrm{Y_k}, \mathrm{C_k})$ über S.

Also gilt

$\forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow \exists H'$ H' ist eine zulässige Herleitung fÃ¼r $(\mathrm{Y_k}, \mathrm{C_k})$ über S.

Dann folgt mit Auswahlaxiom

$\exists H'(H'$ ist eine Funktion auf $\mathrm{Dom(j)}$ & $\forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow \mathrm{H'}_k$ ist zulässige Herleitung für $(\mathrm{Y}_k, \mathrm{C}_k)$ über S)).

Sei H′ so.
Dann kann gemäß Definitionslehre eine Funktion eingeführt werden, welche die $\mathrm{H'}_k$ $(k \in \mathrm{Dom(j)})$ miteinander verkettet und als zusätzlichen letzten Wert (X, A) enthält:

$\exists G(G$ ist Funktion auf $1 + \sum_{k \in \mathrm{Dom(j)}} \mathrm{Dom}(\mathrm{H'}_k)$ &
& $\forall k(k \in \mathrm{Dom(j)} \Rightarrow \forall l(l \in \mathrm{Dom(H')} \Rightarrow G_{l + \sum_{i \in k} \mathrm{Dom}(\mathrm{H'}_i)} = \mathrm{H'}_{k,l}))$ &
& $G_{\sum_{k \in \mathrm{Dom(j)}} \mathrm{Dom}(\mathrm{H'}_k)} = (\mathrm{X},\ \mathrm{A}))$.

Sei G so.
Dann gilt

(2) $\mathrm{G} \lceil (\sum_{k \in \mathrm{Dom(j)}} \mathrm{Dom}(\mathrm{H'}_k))$ eine zulässige Herleitung über S.

Da ferner nach Einführung von H′ für $\mathrm{k} \in \mathrm{Dom(j)}$ $\mathrm{H'_k}$ zulässige Herleitung für $(\mathrm{Y_k}, \mathrm{C_k})$ über S ist, ist $\mathrm{H'}_{\mathrm{k},\, \mathrm{Dom}(\mathrm{H'_k})-1} = (\mathrm{Y_k},\ \mathrm{C_k})$ und es folgt

$\langle (\mathrm{Y}_k,\ \mathrm{C}_k) \rangle_{k \in \mathrm{Dom(j)}} =$
$= \langle \mathrm{G}_{\mathrm{Dom}(\mathrm{H'}_k) - 1 + \sum_{i \in k} \mathrm{Dom}(\mathrm{H'}_i)} \rangle_{k \in \mathrm{Dom(j)}} =$
$= \langle \mathrm{G}_{(\sum_{i \in k+1} \mathrm{Dom}(\mathrm{H'}_i)) - 1} \rangle_{k \in \mathrm{Dom(j)}}$.

Dann folgt mit (1)

(3) $((\mathrm{X}, \mathrm{A}), \langle \mathrm{G}_{(\sum_{i \in k+1} \mathrm{Dom}(\mathrm{H'}_i)) - 1} \rangle_{k \in \mathrm{Dom(j)}} \in \mathrm{R}$.

Dann folgt mit

$\mathrm{G}_{(\sum_{k \in \mathrm{Dom(j)}} \mathrm{Dom}(\mathrm{H'}_k))} = (\mathrm{X},\ \mathrm{A})$

und (2), (3)

G ist zulässige Herleitung für (X, A) über S.

Also

$\exists H'$ H' ist zulässige Herleitung für (X, A) über S.

In allen drei Fällen ist damit bewiesen

$\exists H'$ H' ist zulässige Herleitung für (X, A) über S.

Dann ist $\mathrm{n} \in \mathrm{M}$.
Damit ist (A) durch ℕ-Wertverlaufsinduktion bewiesen.

Mit (A) folgt die Behauptung von 2.5.5 nun wie folgt: Angenommen, H ist zulässige pragmatisierte Herleitung für A in Abhängigkeit von X über S. Dann folgt mit $\mathrm{Dom(H)} \in \mathbb{N}$ und (A) $\exists H'$ H' ist zulässige Herleitung für (X, A) über S. Dann folgt mit den Theoremen 2.3.11 und 2.4.33 $\exists H'$ H' ist pragmatisierte Herleitung für A in Abhängigkeit von X über S. ■

Beweis für 2.5.6

Direkt mit den Theoremen 2.4.35, 2.5.4 und 2.5.5. ■

A.7 Beweise in Abschnitt 2.6

Beweis für 2.6.2

Angenommen, S ist eine Logik-Basis.
Seien die Voraussetzungen (1), (2), (3) für c, v, E_0, E_1 erfüllt.
Angenommen, a, b $\in$ $\mathrm{CAdr_S}$ & $\mathrm{cat_S}(a) = \mathrm{cat_S}(v) = \mathrm{cat_S}(b)$.
Nach Voraussetzung ist $\mathrm{Free_S} `` \{c\} \subseteq \{v\}$. Dann $(\mathrm{Free_S} `` \{c\}) \setminus \{v\} = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\forall w \forall p(w \text{ ist Abzählung von } (\mathrm{Free}_S `` \{c\}) \setminus \{v\} \ \& \\ &\ \& \ p \text{ ist Abzählung der Länge } \mathrm{Dom}(w) \text{ in } \mathrm{Par}_S \setminus (\mathrm{TAdr_S} `` \{a,\ b,\ c\}) \ \& \\ &\ \& \ \forall k(k \in \mathrm{Dom}(w) \Rightarrow \mathrm{cat_S}(w_k) = \mathrm{cat_S}(p_k)) \Longleftrightarrow w = 0 \ \& \ p = 0).\end{aligned}$$

Dann folgt mit $\mathrm{SSubst_S} ` \langle 0,\ 0,\ c\rangle = c$

$$\begin{aligned}(1)\quad &\forall w \forall p(w \text{ ist Abzählung von } (\mathrm{Free_S} `` \{c\}) \setminus \{v\} \ \& \\ &\ \& \ p \text{ ist Abzählung der Länge } \mathrm{Dom}(w) \text{ in } \mathrm{Par}_S \setminus (\mathrm{TAdr_S} `` \{a,\ b,\ c\}) \ \& \\ &\ \& \ \forall k(k \in \mathrm{Dom}(w) \Rightarrow \mathrm{cat_S}(w_k) = \mathrm{cat_S}(p_k)) \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{E_0 \bullet_S \langle a, b\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_S} E_1 \bullet_S \langle \mathrm{Subst_S} ` \langle a, v, \mathrm{SSubst_S} ` \langle p,\ w, c\rangle\rangle, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{Subst_S} ` \langle b, v, \mathrm{SSubst_S} ` \langle p,\ w, c\rangle\rangle\rangle)) \\ &\text{gdw} \\ &\{E_0 \bullet_S \langle a, b\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_S} E_1 \bullet_S \langle \mathrm{Subst_S} ` \langle a, v, c\rangle,\ \mathrm{Subst_S} ` \langle b, v, c\rangle\rangle.\end{aligned}$$

Und mit (1) folgt sofort die Behauptung. ■

Beweis für 2.6.4

Seien die Voraussetzungen für S, v erfüllt.
Angenommen, p $\in$ $\mathrm{Substrelev_S}(v)$.
Nach Definition 2.6.3 (2)(a) ist $\mathrm{Substrelev_S}(v)$ eine Relation. Dann p = (pr1(p),pr2(p)).
Dann folgt mit 2.6.3 (2)(b) pr2(p) = v or $\exists O \exists t(O$ paßt auf t über S & pr2(p) $= O \bullet_S t)$. In beiden Fällen ist pr2(p) $\in$ $\mathrm{Adr_S}$. ■

Beweis für 2.6.5

Angenommen, die Voraussetzungen sind für S, v erfüllt.
Sei

$$\mathrm{M} = \{c \mid \forall d((d,\ c) \in \mathrm{Substrelev_S}(v) \Rightarrow (d,\ c) \in \mathrm{Adr_S} \times \mathrm{Adr_S})\}.$$

Dann beweisen wir durch Adr-Induktion

(A) $\mathrm{Adr_S} \subseteq \mathrm{M}$.

I.B.: Angenommen, c $\in$ $\mathrm{Adr_S}$.
Angenommen, $(d, c) \in \mathrm{Substrelev_S}(v)$.

Dann folgt mit Definition 2.6.3 (2)(b) und $c \in \mathrm{AtAdr_S}$ $c = v$ & $d = v$. Dann ist $d \in \mathrm{Var_S}$, also $d \in \mathrm{Adr_S}$. Also $(d, c) \in \mathrm{Adr_S} \times \mathrm{Adr_S}$. Also $c \in M$.

I.S.: Angenommen, O paßt auf t über S & $\{O\} \cup \mathrm{Ran}(t) \subseteq M$.
Angenommen, $(d, O{\bullet_S}t) \in \mathrm{Substrelev_S}(v)$.
Dann sind nach Definition 2.6.3 (2)(b) vier Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Angenommen, $d = O{\bullet_S}t$ & $v \in \mathrm{Frees}$ '' $\{O \bullet_S t\}$.
Dann folgt mit $O{\bullet_S}t \in \mathrm{Adr_S}$ $d \in \mathrm{Adr_S}$. Also $(d, O{\bullet_S}t) \in \mathrm{Adr_S} \times \mathrm{Adr_S}$.

Fall 2: Angenommen, $O \in \mathrm{VarBinds_S}$ & $(d, O) \in \mathrm{Substrelev_S}(v)$.
Nach I.V. ist $O \in M$ und es folgt $(d, O) \in \mathrm{Adr_S}{\times}\mathrm{Adr_S}$. Dann $d \in \mathrm{Adr_S}$. Dann $(d, O{\bullet_S}t){\in}\ \mathrm{Adr_S}{\times}\mathrm{Adr_S}$.

Fall 3: Angenommen, $O \in \mathrm{VarBindOpr_S}$ & $((d, O) \in \mathrm{Substrelev_S}(v)$ or $(v \notin \mathrm{Ran}(\mathrm{opd_S}(O))$ & $\exists i(i \in \mathrm{Dom}(t)$ & $(d, t_i) \in \mathrm{Substrelev_S}(v))))$.
Wenn $(d, O) \in \mathrm{Substrelev_S}(v)$, dann folgt mit $O \in M$ $(d, O) \in \mathrm{Adr_S}{\times}\ \mathrm{Adr_S}$, also $d \in \mathrm{Adr_S}$, also $(d, O{\bullet_S}t) \in \mathrm{Adr_S}{\times}\ \mathrm{Adr_S}$.
Wenn $(v \notin \mathrm{Ran}(\mathrm{opd_S}(O))$ & $\exists i(i \in \mathrm{Dom}(t)$ & $(d, t_i) \in \mathrm{Substrelev_S}(v)))$, dann $\exists i(i \in \mathrm{Dom}(t)$ & $(d, t_i) \in \mathrm{Substrelev_S}(v)))$. Sei v so. Dann folgt mit $t_i \in M$ $(d, t_i){\in}\ \mathrm{Adr_S} \times \mathrm{Adr_S}$. Dann $d \in \mathrm{Adr_S}$. Dann $(d, O{\bullet_S}t){\in}\ \mathrm{Adr_S} \times \mathrm{Adr_S}$.

Fall 4: Angenommen, $O \notin \mathrm{VarBinds_S}$ & $O \notin \mathrm{VarBindOpr_S}$ & $\exists x(x \in \{O\} \cup \mathrm{Ran}(t)$ & $(d, x) \in \mathrm{Substrelev_S}(v))$. Sei x so.
Dann folgt mit $\{O\} \cup \mathrm{Ran}(t) \subseteq M$ $x \in M$. Dann folgt mit $(d, x) \in \mathrm{Substrelev_S}(v)$ $(d, x) \in \mathrm{Adr_S}{\times}\mathrm{Adr_S}$. Dann $d \in \mathrm{Adr_S}$. Dann $(d, O{\bullet_S}t) \in \mathrm{Adr_S}{\times}\mathrm{Adr_S}$.

Also $(d, O{\bullet_S}t) \in \mathrm{Adr_S}{\times}\mathrm{Adr_S}$. Dann $O{\bullet_S}t \in M$.

Damit ist (A) durch Adr-Induktion bewiesen. Mit (A) folgt nun weiter:
Angenommen, $p \in \mathrm{Substrelev_S}(v)$.
Dann folgt mit Definition 2.6.3 (2)(a) $p = (\mathrm{pr1}(p), \mathrm{pr2}(p))$. Dann folgt mit Theorem 2.6.4 $\mathrm{pr2}(p) \in \mathrm{Adr_S}$. Dann folgt mit (A) $\mathrm{pr2}(p) \in M$. Dann folgt mit $p \in \mathrm{Substrelev_S}(v)$ $p \in \mathrm{Adr_S}{\times}\mathrm{Adr_S}$. Und es folgt $\mathrm{Substrelev_S}(v) \subseteq \mathrm{Adr_S}{\times}\mathrm{Adr_S}$.
■

Beweis für 2.6.6

Angenommen, S ist eine Syntax-Basis und $v \in \mathrm{Var_S}$.
Sei

$$M = \{c \mid \forall a \forall b((a, b) \in \mathrm{Substrelev_S}(v)\ \&\ (b, c) \in \mathrm{Substrelev_S}(v) \Rightarrow (a, c) \in \mathrm{Substrelev_S}(v))\}.$$

Dann beweisen wir durch Adr-Induktion

(A) $\mathrm{Adr_S} \subseteq M$.

I.B.: Angenommen, $c \in \mathrm{AtAdr_S}$.
Angenommen, $(a, b) \in \mathrm{Substrelev_S}(v)$ & $(b, c) \in \mathrm{Substrelev_S}(v)$. Dann folgt mit Definition 2.6.3 (2)(b) $c = v$ & $b = v$. Ferner folgt mit $(a, b) \in \mathrm{Substrelev_S}(v)$

und b = v und Definition 2.6.3 (2)(b) a = v. Also a = v & c = v. Also $(\mathrm{a}, \mathrm{c}) \in$ $\mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$. Dann $\mathrm{c} \in \mathrm{M}$.

I.S.: Angenommen, O paßt auf t über S & $\{\mathrm{O}\} \cup \mathrm{Ran}(\mathrm{t}) \subseteq \mathrm{M}$.
Angenommen, $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$ & $(\mathrm{b}, \mathrm{O}_{\bullet \mathrm{S}}\mathrm{t}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$. Dann sind gemäß Definition 2.6.3 (2)(b) vier Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Angenommen, $\mathrm{b} = \mathrm{O}_{\bullet \mathrm{S}}\mathrm{t}$ & $\mathrm{v} \in \mathrm{Frees}_{\mathrm{S}}$ " $\{\mathrm{O}_{\bullet \mathrm{S}}\, \mathrm{t}\}$.
Dann $(\mathrm{a}, \mathrm{O}_{\bullet \mathrm{S}}\mathrm{t}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$.

Fall 2: Angenommen, $\mathrm{O} \in \mathrm{VarBinds}_{\mathrm{S}}$ & $(\mathrm{b}, \mathrm{O}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$.
Nach I.V. ist $\mathrm{O} \in \mathrm{M}$. Dann folgt mit $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$ & $(\mathrm{b}, \mathrm{O}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$ $(\mathrm{a}, \mathrm{O}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$. Dann folgt mit der aktuellen Fallannahme $(\mathrm{a}, \mathrm{O}_{\bullet \mathrm{S}}\mathrm{t}) \in$ $\mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$.

Fall 3: Angenommen, $\mathrm{O} \in \mathrm{VarBindOprs}_{\mathrm{S}}$ & $((\mathrm{b}, \mathrm{O}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$ or $\mathrm{v} \notin$ $\mathrm{Ran}(\mathrm{opds}_{\mathrm{S}}(\mathrm{O}))$ & $\exists i(i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{t})$ & $(\mathrm{b}, \mathrm{t}_i) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v}))))$.
Wenn $(\mathrm{b}, \mathrm{O}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$, dann folgt mit $\mathrm{O} \in \mathrm{M}$ und $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$ $(\mathrm{a}, \mathrm{O}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$. Dann folgt mit der aktuellen Fallannahme $(\mathrm{a}, \mathrm{O}_{\bullet \mathrm{S}}\mathrm{t}) \in$ $\mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$.
Wenn $\mathrm{v} \notin \mathrm{Ran}(\mathrm{opds}_{\mathrm{S}}(\mathrm{O}))$ & $\exists i(i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{t})$ & $(\mathrm{b}, \mathrm{t}_i) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v}))$, dann $\exists i(i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{t})$ & $(\mathrm{b}, \mathrm{t}_i) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v}))$. Sei i so. Nach I.V. ist $\mathrm{t}_{\mathrm{i}} \in \mathrm{M}$. Dann folgt mit $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$ $(\mathrm{a}, \mathrm{t}_{\mathrm{i}}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$. Dann $\mathrm{v} \notin \mathrm{Ran}(\mathrm{opds}_{\mathrm{S}}(\mathrm{O}))$ & $\exists i(i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{t})$ & $(\mathrm{a}, \mathrm{t}_i) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v}))$. Dann folgt mit $\mathrm{O} \in \mathrm{VarBinds}_{\mathrm{S}}$ $(\mathrm{a}, \mathrm{O}_{\bullet \mathrm{S}}\mathrm{t}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$.

Fall 4: Angenommen, $\mathrm{O} \notin \mathrm{VarBinds}_{\mathrm{S}}$ & $\mathrm{O} \notin \mathrm{VarBindOprs}_{\mathrm{S}}$ & $\exists x(x \in$ $\{\mathrm{O}\} \cup \mathrm{Ran}(\mathrm{t})$ & $(\mathrm{b}, x) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v}))$.
Dann $\exists x(x \in \{\mathrm{O}\} \cup \mathrm{Ran}(\mathrm{t})$ & $(\mathrm{b}, x) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v}))$.
Sei x so.
Nach I.V. ist $\{\mathrm{O}\} \cup \mathrm{Ran}(\mathrm{t}) \subseteq \mathrm{M}$. Dann $\mathrm{x} \in \mathrm{M}$. Dann folgt mit $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$ $(\mathrm{a}, \mathrm{x}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$. Dann $\exists x(x \in \{\mathrm{O}\} \cup \mathrm{Ran}(\mathrm{t})$ & $(\mathrm{a}, x) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v}))$.
Dann folgt mit $\mathrm{O} \notin \mathrm{VarBinds}_{\mathrm{S}}$ & $\mathrm{O} \notin \mathrm{VarBindOprs}_{\mathrm{S}}$ $(\mathrm{a}, \mathrm{O}_{\bullet \mathrm{S}}\mathrm{t}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$.

Also $(\mathrm{a}, \mathrm{O}_{\bullet \mathrm{S}}\mathrm{t}) \in \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(\mathrm{v})$. Dann $\mathrm{O}_{\bullet \mathrm{S}}\mathrm{t} \in \mathrm{M}$.

Damit ist (A) durch Adr-Induktion bewiesen. Und mit (A) und Theorem 2.6.4 folgt das Konsequens von Theorem 2.6.6. ■

Beweis für 2.6.7

Angenommen, S ist eine Logik-Basis.
Um die Behauptung zu beweisen, setzen wir

M = $\{n \mid$ für alle c, v, E:
wenn
(1) $c \in \mathrm{Adr}_{\mathrm{S}}$ & $v \in \mathrm{Var}_{\mathrm{S}}$ & $\text{adr-grad}_{\mathrm{S}}(c) = n$ &
(2) (a) E ist Funktion & $\{v, c\} \cup \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(v)$ " $\{c\} \subseteq \mathrm{Dom}(E)$ &
(b) $\forall x(x \in \{v, c\} \cup \mathrm{Substrelevs}_{\mathrm{S}}(v)$ " $\{c\} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_x \in \mathrm{CAdr_S}$ & $\mathrm{cat_S}(E_x) = \langle 0, \mathrm{cat_S}(x), \mathrm{cat_S}(x)\rangle$ &
& $\forall z(z \in \mathrm{CAdr_S}$ & $\mathrm{cat_S}(z) = \mathrm{cat_S}(x) \Rightarrow 0 \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} E_x \centerdot_\mathrm{S} \langle z, z\rangle))$ &
(3) für alle P, u:
wenn
(a) P paßt auf u über S &
(b) $P \centerdot_\mathrm{S} u \in \mathrm{Substrelevs_S}(v) \,``\, \{c\}$ &
(c) $\forall x(x \in \{P\} \cup \mathrm{Ran}(u)$ & $x \in \mathrm{Substrelevs_S}(v) \,``\, \{P \centerdot_\mathrm{S} u\} \Rightarrow x$ erfüllt für v die Substituivitätsbedingung bzgl. E_v, E_x über S),
dann
(d) $P \centerdot_\mathrm{S} u$ erfüllt für v die Substituivitätsbedingung bzgl. E_v, $E_{P \centerdot_\mathrm{S} u}$ über S**,**
dann
(4) c erfüllt für v die Substituivitätsbedingung bzgl. E_v, E_c über S}

und beweisen durch ℕ-Wertverlaufsinduktion

(A) $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{M}$.

Angenommen also, $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ & $\forall m(m <_\mathbb{N} \mathrm{n} \Rightarrow m \in \mathrm{M})$.
Angenommen, die Voraussetzungen $(1), \ldots, (3)$ in M sind für n, c, v, E erfüllt. Dann sind die Bedingungen $(1), \ldots, (3)$ im Definiens der Definition 2.6.1 mit c für c, v für v, $\mathrm{E_v}$ für E_0 und $\mathrm{E_c}$ für E_1 erfüllt. Es ist noch Bedingung (4) im Definiens der Definition 2.6.1 mit c für c, v für v, $\mathrm{E_v}$ für E_0 und $\mathrm{E_c}$ für $\mathrm{E_1}$ zu beweisen.

Angenommen,

(5) $\mathrm{a, b} \in \mathrm{CAdr_S}$ & $\mathrm{cat_S(a) = cat_S(v) = cat_S(b)}$.

Angenommen,

(6) w ist Abzählung von $(\mathrm{Frees_S} \,``\, \{\mathrm{c}\}) \setminus \{\mathrm{v}\}$ & p ist Abzählung der Länge $\mathrm{Dom(w)}$ in $\mathrm{Pars_S} \setminus (\mathrm{TAdrs_S} \,``\, \{\mathrm{a, b, c}\})$ & $\forall k(k \in \mathrm{Dom(w)} \Rightarrow \mathrm{cat_S(w}_k) = \mathrm{cat_S(p}_k))$.

Sei

(7) $\mathrm{c}' = \mathrm{SSubst_S} \,`\, \langle \mathrm{p, w, c}\rangle$.

Dann ist zu beweisen

(8) $\{\mathrm{E_v} \centerdot_\mathrm{S} \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_c} \centerdot_\mathrm{S} \langle \mathrm{Subst_S} \,`\, \langle \mathrm{a, v, c'}\rangle, \mathrm{Subst_S} \,`\, \langle \mathrm{b, v, c'}\rangle\rangle$.

Da $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, ist $\mathrm{n} = 0$ oder $\mathrm{n} >_\mathbb{N} 0$.

Fall 1: Angenommen, $\mathrm{n} = 0$.
Dann $\mathrm{adrgrad_S(c)} = 0$. Dann $\mathrm{c} \in \mathrm{AtAdr_S}$. Wir untersuchen zwei Unterfälle:

Fall 1.1: Angenommen, $\mathrm{c = v}$.
Dann ist $\mathrm{Subst_S} \,`\, \langle \mathrm{a, v, c}\rangle = \mathrm{a}$ & $\mathrm{Subst_S} \,`\, \langle \mathrm{b, v, c}\rangle = \mathrm{b}$, und mit der Reflexivität von $\mathbf{F}_\mathrm{S}$ folgt $\{\mathrm{E_v} \centerdot_\mathrm{S} \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_v} \centerdot_\mathrm{S} \langle \mathrm{a, b}\rangle$. Dann $\{\mathrm{E_v} \centerdot_\mathrm{S} \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_v} \centerdot_\mathrm{S} \langle \mathrm{Subst_S} \,`\, \langle \mathrm{a, v, c}\rangle, \mathrm{Subst_S} \,`\, \langle \mathrm{b, v, c}\rangle\rangle$. Wegen $\mathrm{c = v}$ ist $\mathrm{E_v = E_c}$; also $\{\mathrm{E_v} \centerdot_\mathrm{S} \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_c} \centerdot_\mathrm{S} \langle \mathrm{Subst_S} \,`\, \langle \mathrm{a, v, c}\rangle, \mathrm{Subst_S} \,`\, \langle \mathrm{b, v, c}\rangle\rangle$. Wegen $\mathrm{c = v}$ ist

$(\mathrm{Frees_S} \,``\, \{c\}) \setminus \{v\} = 0$, also $\mathrm{w} = 0 = \mathrm{p}$, also $\mathrm{SSubsts_S} \,`\, \langle \mathrm{p}, \mathrm{w}, \mathrm{c}\rangle = \mathrm{c}$, also $\mathrm{c}' = \mathrm{c}$. Also gilt

(8) $\{\mathrm{E_v} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_c} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{a, v, c'}\rangle, \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{b, v, c'}\rangle\rangle$.

Fall 1.2: Angenommen, $\mathrm{c} \neq \mathrm{v}$.

Fall 1.2.1: Angenommen, $\mathrm{c} \in \mathrm{Vars_S}$. Dann ist $(\mathrm{Frees_S} \,``\, \{\mathrm{c}\}) \setminus \{\mathrm{v}\} = \mathrm{Frees_S} \,``\, \{\mathrm{c}\} = \{\mathrm{c}\}$. Dann ist $\mathrm{w} = \langle \mathrm{c}\rangle$ und $\mathrm{p} = \langle \mathrm{p_0}\rangle$, also $\mathrm{c}' = \mathrm{SSubsts_S} \,`\, \langle \mathrm{p, w, c}\rangle = \mathrm{p_0}$. Dann ist $\mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{a, v, c'}\rangle = \mathrm{p_0} = \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{b, v, c'}\rangle$. Da $\mathrm{p_0} \in \mathrm{CAdr_S}$ & $\mathrm{cat_S(p_0)} = \mathrm{cat_S(w_0)} = \mathrm{cat_S(c)}$, folgt mit der angenommenen Voraussetzung (2)(b) von M $0 \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_c} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{p_0, p_0}\rangle$. Dann folgt mit der Monotonie von $\mathbf{F}_\mathrm{S}$ $\{\mathrm{E_v} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_c} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{p_0, p_0}\rangle$. Also gilt

(8) $\{\mathrm{E_v} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_c} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{a, v, c'}\rangle, \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{b, v, c'}\rangle\rangle$.

Fall 1.2.2: Angenommen, $\mathrm{c} \notin \mathrm{Vars_S}$. Dann $\mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{a, v, c}\rangle = \mathrm{c} = \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{b, v, c}\rangle\rangle$. Ferner ist $\mathrm{c} \in \mathrm{CAdr_S}$ und es folgt mit der angenommenen Voraussetzung (2)(b) von M $0 \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_c} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{c, c}\rangle$. Dann folgt mit der Monotonie von $\mathbf{F}_\mathrm{S}$ $\{\mathrm{E_v} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_c} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{c, c}\rangle$. Also gilt

$$\{\mathrm{E_v} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_c} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{a, v, c}\rangle, \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{b, v, c}\rangle\rangle.$$

Nun ist $\mathrm{Frees_S} \,``\, \{\mathrm{c}\} = 0$, also $(\mathrm{Frees_S} \,``\, \{\mathrm{c}\}) \setminus \{\mathrm{v}\} = 0$, also $\mathrm{w} = 0 = \mathrm{p}$, also $\mathrm{SSubsts_S} \,`\, \langle \mathrm{p, w, c}\rangle = \mathrm{c}$, also $\mathrm{c}' = \mathrm{c}$. Also gilt

(8) $\{\mathrm{E_v} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_c} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{a, v, c'}\rangle, \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{b, v, c'}\rangle\rangle$.

Also gilt im Fall 1.2

(8) $\{\mathrm{E_v} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_c} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{a, v, c'}\rangle, \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{b, v, c'}\rangle\rangle$.

Also gilt im Fall 1

(8) $\{\mathrm{E_v} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_c} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{a, v, c'}\rangle, \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{b, v, c'}\rangle\rangle$.

Fall 2: Angenommen, $\mathrm{n} >_\mathbb{N} 0$.
Dann $\mathrm{adrgrad_S(c)} >_\mathbb{N} 0$. Dann $\exists O \exists t$ (O paßt auf t über S & $\mathrm{c} = O \bullet_\mathrm{S} t$).
Seien O, t so. Dann

(9) $\mathrm{c} = \mathrm{O} \bullet_\mathrm{S} \mathrm{t}$.

Es ist $\mathrm{v} \in \mathrm{Frees_S} \,``\, \{\mathrm{c}\}$ oder $\mathrm{v} \notin \mathrm{Frees_S} \,``\, \{\mathrm{c}\}$.

Fall 2.1: Angenommen, $\mathrm{v} \notin \mathrm{Frees_S} \,``\, \{\mathrm{c}\}$.
Dann $\mathrm{v} \notin \mathrm{Frees_S} \,``\, \{\mathrm{c}'\}$.
Dann $\mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{a, v, c'}\rangle = \mathrm{c}' = \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{b, v, c'}\rangle$, und $\mathrm{c}' \in \mathrm{CAdr_S}$ & $\mathrm{cat_S(c')} = \mathrm{cat_S(c)}$. Dann folgt mit der angenommenen Voraussetzung (2)(b) von M $0 \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_c} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{c', c'}\rangle$. Dann folgt mit der Monotonie von $\mathbf{F}_\mathrm{S}$ $\{\mathrm{E_v} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{a, b}\rangle\}$ $0 \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_c} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{c', c'}\rangle$. Also $\{\mathrm{E_v} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{a, b}\rangle\}$ $0 \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \langle \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{a, v, c'}\rangle, \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{b, v, c'}\rangle\rangle$. **Also gilt im Fall 2.1**

(8) $\{\mathrm{E_v} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_c} \bullet_\mathrm{S} \langle \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{a, v, c'}\rangle, \mathrm{Substs_S} \,`\, \langle \mathrm{b, v, c'}\rangle\rangle$.

Fall 2.2: Angenommen, $\mathrm{v} \in \mathrm{Frees_S} \,``\, \{\mathrm{c}\}$.
Aus der angenommenen Voraussetzung (3) in M folgt mit O für P
und t für u

(10) wenn
(a) O paßt auf t über S &
(b) $\mathrm{O}_{\bullet\mathrm{S}}\mathrm{t} \in \mathrm{Substrelev_S(v)} `` \{\mathrm{c}\}$ &
(c) $\forall x(x \in \{\mathrm{O}\} \cup \mathrm{Ran(t)}$ & $x \in \mathrm{Substrelev_S(v)} `` \{\mathrm{O}_{\bullet\mathrm{S}}\,\mathrm{t}\} \Rightarrow x$ erfüllt für v die Substituivitätsbedingung bzgl. $\mathrm{E_v}$, E_x über S)
dann
(d) $\mathrm{O}_{\bullet\mathrm{S}}\mathrm{t}$ erfüllt für v die Substituivitätsbedingung bzgl. $\mathrm{E_v}$, $\mathrm{E}_{\mathrm{O}_{\bullet\mathrm{S}}\mathrm{t}}$ über S.

Aus (d) folgt mit (5), (6), (7) und Definition 2.6.1 die zu beweisende Aussage

$$\{\mathrm{E_v}\,{}_{\bullet\mathrm{S}}\,\langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E_c}\,{}_{\bullet\mathrm{S}}\,\langle \mathrm{Substs_S}\,`\,\langle \mathrm{a, v, c'}\rangle, \mathrm{Substs_S}\,`\,\langle \mathrm{b, v, c'}\rangle\rangle.$$

Um die zu beweisende Aussage (8) zu beweisen, genügt es also, die Bedingungen (a), (b), (c) in (10) zu beweisen.
Nun gilt Voraussetzung (a) in (10) nach Einführung von O, t, und Voraussetzung (b) in (10) folgt mit Definition 2.6.3 und der Annahme von Fall 2.2. **Es ist also noch Voraussetzung (c) in (10) zu beweisen. Angenommen,**

(11) $\mathrm{x} \in \{\mathrm{O}\} \cup \mathrm{Ran(t)}$ & $\mathrm{x} \in \mathrm{Substrelev_S(v)} `` \{\mathrm{O}_{\bullet\mathrm{S}}\,\mathrm{t}\}\}$.

Dann $\mathrm{adrgrad_S(x)} <_{\mathbb{N}} \mathrm{adrgrad_S(c)}$, also $\mathrm{adrgrad_S(x)} <_{\mathbb{N}}$ n. Dann folgt mit I.V.

(12) $\mathrm{adrgrad_S(x)} \in \mathrm{M}$.

Um (12) auszunutzen, beweisen wir als (13), (14), (15) die Voraussetzungen (1), (2), (3) in M mit $\mathrm{adrgrad_S(x)}$ für n, x für c, v für v und E für E.

(13) $\mathrm{x} \in \mathrm{Adr_S}$ & $\mathrm{v} \in \mathrm{Var_S}$ & $\mathrm{adrgrad_S(x)} = \mathrm{adrgrad_S(x)}$.

Beweis: Nach Einführung von O, t paßt O auf t über S. Dann $\mathrm{O} \in \mathrm{Adr_S}$ und $\mathrm{Ran(t)} \subseteq \mathrm{Adr_S}$; also $\mathrm{x} \in \mathrm{Adr_S}$. Und nach der angenommenen Voraussetzung (1) von M ist $\mathrm{v} \in \mathrm{Var_S}$.

(14) (a) E ist Funktion & $\{\mathrm{v,\ x}\} \cup \mathrm{Substrelev_S(v)} `` \{\mathrm{x}\} \subseteq \mathrm{Dom(E)}$ &
(b) $\forall y(y \in \{\mathrm{v, x}\} \cup \mathrm{Substrelev_S(v)} `` \{\mathrm{x}\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathrm{E}_y \in \mathrm{CAdr_S}$ & $\mathrm{cat_S(E}_y) = \langle 0, \mathrm{cat_S}(y), \mathrm{cat_S}(y)\rangle$ &
& $\forall z(z \in \mathrm{CAdr_S}$ & $\mathrm{cat_S}(z) = \mathrm{cat_S}(y) \Rightarrow 0 \vdash_{\mathbf{F}_\mathrm{S}} \mathrm{E}_y\,{}_{\bullet\mathrm{S}}\,\langle z, z\rangle))$.

Beweis für (a): Nach der angenommenen Voraussetzung (2)(a) von M ist E Funktion und $\mathrm{v} \in \mathrm{Dom(E)}$. Nach Annahme (11) ist $\mathrm{x} \in \mathrm{Substrelev_S(v)} `` \{\mathrm{O}_{\bullet\mathrm{S}}\mathrm{t}\}$ und nach der angenommenen Voraussetzung (2)(a) von M ist $\mathrm{Substrelev_S(v)} `` \{\mathrm{O}_{\bullet\mathrm{S}}\,\mathrm{t}\} \subseteq \mathrm{Dom(E)}$, also $\mathrm{x} \in \mathrm{Dom(E)}$. Sei $\mathrm{z} \in \mathrm{Substrelev_S(v)} `` \{\mathrm{x}\}$; dann folgt mit Theorem 2.6.6 und $\mathrm{x} \in \mathrm{Substrelev_S(v)} `` \{\mathrm{c}\}$ $\mathrm{z} \in \mathrm{Substrelev_S(v)} `` \{\mathrm{c}\}$; dann folgt mit $\mathrm{Substrelev_S(v)} `` \{\mathrm{c}\} \subseteq \mathrm{Dom(E)}$ $\mathrm{z} \in \mathrm{Dom(E)}$; also $\mathrm{Substrelev_S(v)} `` \{\mathrm{x}\} \subseteq \mathrm{Dom(E)}$. Insgesamt gilt also $\{\mathrm{v,\ x}\} \cup \mathrm{Substrelev_S(v)} `` \{\mathrm{x}\} \subseteq \mathrm{Dom(E)}$.

Beweis für (b): Angenommen, $\mathrm{y} \in \{\mathrm{v, x}\} \cup \mathrm{Substrelev_S(v)} `` \{\mathrm{x}\}$. Wenn y = v, dann folgt mit der angenommenen Voraussetzung (2)(b) von M das Konsequens von (14)(b); wenn y = x, dann folgt mit Annahme (11) und (9) $\mathrm{y} \in \mathrm{Substrelev_S}(v) `` \{\mathrm{c}\}$; dann folgt mit der angenommenen Voraussetzung (2)(b) von M das Konsequens von (14)(b). Wenn y $\in$ Substrelev$_S(v)$ " {x}, dann folgt mit Theorem 2.6.6 und Annahme (10) y $\in$ Substrelev$_S(v)$ " {c}; dann folgt mit der angenommenen Voraussetzung (2)(b) von M das Konsequens von (14)(b).

(15) für alle P, u:
wenn
(a) P paßt auf u über S &
(b) $P \bullet_S u \in$ Substrelev$_S(v)$ " {x} &
(c) $\forall y(y \in \{P\} \cup$ Ran(u) & $y \in$ Substrelev$_S(v)$ " $\{P \bullet_S u\} \Rightarrow y$ erfüllt für v die Substituivitätsbedingung bzgl. E_v, E_y über S),
dann
(d) $P \bullet_S u$ erfüllt für v die Substituivitätsbedingung bzgl. E_v, $E_{P\bullet_S u}$ über S.

Beweis: Angenommen, die Voraussetzungen (a), (b), (c) gelten für P, u. Dann sind die entsprechenden Voraussetzungen (a), (b), (c) in der angenommenen Voraussetzung (3) von M erfüllt: für (a) und (c) folgt dies direkt, und für (b) mit (11), Theorem 2.6.6 und (9). Dann folgt mit der angenommenen Voraussetzung (3) von M $\mathrm{P}\bullet_S\mathrm{u}$ erfüllt für v die Substituivitätsbedingung bzgl. $\mathrm{E_v}$, $\mathrm{E_{P\bullet_S u}}$ über S.

Mit (13), (14), (15) sind die Voraussetzungen (1), (2), (3) in M mit adrgrad$_S$(x) für n, x für c, v für v und E für E bewiesen, und es folgt mit adrgrad$_S$(x) $\in$ M

x erfüllt für v die Substituivitätsbedingung bzgl. $\mathrm{E_v}$, $\mathrm{E_x}$ über S.

Damit ist auch Voraussetzung (c) in (10) bewiesen.
Dann folgt mit (10)

$\mathrm{O}\bullet_S\mathrm{t}$ erfüllt für v die Substituivitätsbedingung bzgl. $\mathrm{E_v}$, $\mathrm{E_{O\bullet_S t}}$ über S.

Dann folgt mit Definition 2.6.1 und (5), (6), (7)

$\{\mathrm{E_v} \bullet_S \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_S} \mathrm{E_c} \bullet_S \langle \mathrm{Substs_S}\,`\,\langle \mathrm{a, v, c'}\rangle, \mathrm{Substs_S}\,`\,\langle \mathrm{b, v, c'}\rangle\rangle$.

Also gilt im Fall 2.2

(8) $\{\mathrm{E_v} \bullet_S \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_S} \mathrm{E_c} \bullet_S \langle \mathrm{Substs_S}\,`\,\langle \mathrm{a, v, c'}\rangle, \mathrm{Substs_S}\,`\,\langle \mathrm{b, v, c'}\rangle\rangle$.

Also gilt im Fall 2

(8) $\{\mathrm{E_v} \bullet_S \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_S} \mathrm{E_c} \bullet_S \langle \mathrm{Substs_S}\,`\,\langle \mathrm{a, v, c'}\rangle, \mathrm{Substs_S}\,`\,\langle \mathrm{b, v, c'}\rangle\rangle$.

Also gilt

(8) $\{\mathrm{E_v} \bullet_S \langle \mathrm{a, b}\rangle\} \vdash_{\mathbf{F}_S} \mathrm{E_c} \bullet_S \langle \mathrm{Substs_S}\,`\,\langle \mathrm{a, v, c'}\rangle, \mathrm{Substs_S}\,`\,\langle \mathrm{b, v, c'}\rangle\rangle$.

Mit (8) folgt Bedingung (4) im Definiens von Definition 2.6.1 mit c für c, v für v, $\mathrm{E_v}$ für E_0 und Ec für E_1, und es folgt mit Definition 2.6.1 das Konsequens (4) des Konditionals von M

c erfüllt für v die Bedingung der Substituivität bzgl. $\mathrm{E_v}$, $\mathrm{E_c}$ über S.

Dann ist n $\in$ M.

Damit ist (A) durch $\mathbb{N}$-Wertverlaufsinduktion bewiesen, und mit (A) folgt sofort die Behauptung des Substituivitätstheorems 2.6.7. ■

A.8 Beweise in Abschnitt 2.7

Beweis für 2.7.15

Angenommen, S ist eine Logik-Basis und $\mathrm{Rflx}_\mathrm{S} \in \mathrm{HR}_\mathrm{S}$. Sei $\mathrm{p} \in \mathrm{Reflex}_\mathrm{S}$. Dann ist $(\mathrm{p}, 0) \in \mathrm{Rflx}_\mathrm{S}$. Dann folgt mit $\mathrm{Rflx}_\mathrm{S} \in \mathrm{HR}_\mathrm{S}$ & $(\mathrm{p}, 0) \in \mathrm{Rflx}_\mathrm{S}$ & $\mathrm{Ran}(0) \subseteq \mathbf{F}_\mathrm{S}$ (weil $\mathrm{Ran}(0) = 0$) und Theorem 2.1.9 (2) $\mathrm{p} \in \mathbf{F}_\mathrm{S}$. Also ist $\mathrm{Reflex}_\mathrm{S} \subseteq \mathbf{F}_S$. ■