THESE

présentée

pour l'obtention

du

DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE

à

L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

- Paris 6 -

spécialité : Mathématiques

mention : Combinatoire

par M. François BRY

" SUR LES COUPLAGES DANS LES GRAPHES INFINIS "

soutenue le 24 novembre 1981 devant la Commission composée de :

M. R. PALLU DE LA BARRIERE	Président,
M. C. BERGE	Examinateur,
M. J. BERSTEL	Examinateur,
M. M. LAS VERGNAS	Examinateur,
M. Y. OULD HAMIDOUNE	Invité.

Au moment d'achever la rédaction de ce travail, il m'est agréable d'exprimer ma reconnaissance à Monsieur le Professeur R. Pallu de la Barrière qui me fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de cette thèse.

Ma reconnaissance et mes remerciements vont aussi à Monsieur C. Berge, Directeur de Recherche au C.N.R.S., qui m'a accueilli dans l'Equipe de Recherche qu'il dirige et au Séminaire qu'il anime avec Monsieur P. Rosensthiel.

Il m'est agréable de remercier Monsieur le Professeur J. Berstel qui a l'amabilité de bien vouloir faire partie de ce jury.

C'est Monsieur M. Las Vergnas, Maître de Recherche au C.N.R.S., qui m'a ouvert le champs de recherche où je me suis exercé et qui m'a guidé dans mon travail, ne ménageant ni son temps ni ses conseils. Qu'il veuille bien aceepter mes plus sincères remerciements.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Y. O. Hamidoune pour les conseils et les encouragements qu'il m'a prodigués.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Nous présentons quelques résultats sur les couplages dans les graphes infinis sous des hypothèses de finitude très restrictives : les graphes que nous étudions sont localement finis (donc dénombrables s'ils sont connexes) ou n'ont qu'un nombre fini de sommets de degrés infinis. On ne peut en effet trop relâcher ces conditions de finitude sans sortir du cadre de la combinatoire[1].

L'étude des couplages tient une place importante en théorie des graphes pour des raisons théoriques, mais aussi par les applications[2].

---

(1) Citons par exemple :

P. Erdős, F. Galvin and R. Rado, Transversals and multitransversals, J. Lon. Math. Soc., 2 (1979), pp. 387-395.

(2) Citons notamment :

P.W. Kasteleyn, Graph theory and crystal physics, in Graph theory and theoretical physics, pp. 43-110, Academic Press, London 1967 ; F. Barahona et J.P. Uhry, Complexité et simplicité de certains problèmes de physique statistique, in Regards sur la théorie des graphes, Actes Coll. Cerisy 12-18 juin 1980, P. Hansen et D. de Werra éd., 1980, pp. 159-163.

Les théorèmes de König [18] [3] et P. Hall [17] d'une part, et de Tutte [28] d'autre part, sont à l'origine de l'étude des couplages dans les graphes finis. Les théorèmes de P. Hall [17] et de M. Hall [16] introduisaient naturellement à l'étude des couplages dans les graphes bipartis infinis. De nombreux travaux ont été poursuivis dans cette direction (voir [6], [14], [24] et [32] entre autres). Par contre, en ce qui concerne les graphes infinis non bipartis, nous ne disposions pratiquement que du théorème de Tutte [29] donnant une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un couplage parfait dans un graphe localement fini. L'étude des couplages dans les graphes infinis se justifie donc d'un point de vue théorique. Les travaux de Kasteleyn [4] montrent qu'on ne saurait lui dénier tout intérêt pour les applications.

Après avoir rappelé dans un premier chapitre les résultats auxquels il sera souvent fait appel par la suite, nous présentons au chapitre 2 les théorèmes sur l'existence de systèmes de représentants distincts d'une famille d'ensembles n'ayant qu'un nombre fini de membres infinis. Ces résultats ne sont pas originaux, mais nous en unifions les preuves et donnons une très courte et simple démonstration d'un théorème de Folkman [14].

Au chapitre 3 nous étudions la structure, relativement aux couplages, des graphes localement finis, généralisant un théorème de Edmonds [11] et Gallai [15] sur les graphes finis.

---

(3) Ces références renvoient à la bibliographie en fin d'ouvrage.

(4) op. cit.

Dans un quatrième chapitre, nous évaluons le nombre de couplages parfaits dans les graphes localement finis, en fonction de leurs connexités.

Nous donnons finalement dans un cinquième et dernier chapitre une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un couplage parfait dans un graphe n'ayant qu'un seul sommet de degré infini.

Ces quelques résultats amènent à poser de nombreux problèmes.

Tout d'abord, il serait naturel de chercher une extension du théorème 3.4.7 [5] en relation avec le théorème 5.2.1 : la décomposition de Edmonds et Gallai s'étend-elle aux graphes ayant un sommet de degré infini ?

Il serait bon d'étendre les résultats du chapitre 5 : peut-on trouver une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un couplage parfait pour des graphes ayant un nombre fini quelconque de sommets de degrés infinis ?

D'autre part, il reste à préciser la borne inférieure du nombre de couplages parfaits d'un graphe localement fini en fonction de sa connexité. Dans le cas particulier des graphes bicritiques, Lovász pense que cette borne est infinie : cela reste à démontrer. Ainsi que Mader [23] l'a fait pour les graphes finis, on peut espérer pouvoir estimer le nombre de couplages parfaits d'un graphe localement fini en fonction de son

---

(5) Cette référence renvoie au chapitre 3, paragraphe 4, Théorème 4.7 . Dans un même chapitre, les renvois ne précisent pas le chapitre.

degré minimum et non de sa connexité.

Il reste aussi à caractériser les graphes localement finis 2-connexes ne contenant qu'un seul couplage parfait. Nous faisons une conjecture (conjecture 4.3.4) dont la preuve permettrait cette caractérisation.

1. RESULTATS PRELIMINAIRES

1. Terminologie et Notations

Les graphes que nous considérerons sont des *graphes simples* [2]. Un tel graphe $G = (V,E)$ est un couple formé d'un ensemble V de *sommets* et d'un ensemble E d'*arêtes*, c'est à dire de parties de V de cardinal 2.

Le nombre de sommets de G est l'*ordre* de G. On dit que G est *fini* s'il est d'ordre fini.

Etant donné un sommet x de G, un sommet y est un *voisin* de x si $\{x,y\}$ est une arête de G. On dit alors que y est *adjacent* à x et que l'arête $\{x,y\}$ est *incidente* à x. On note $\Gamma_G(x)$ l'ensemble des sommets de G adjacents à x. Pour $X \subset V$, on pose $\Gamma_G(X) = \bigcup_{x \in X} \Gamma_G(x)$.

Le *degré* $d_G(x)$ d'un sommet x de G est défini par $d_G(x) = |\Gamma_G(x)|$. G est *localement fini* si $d_G(x)$ est fini pour tout $x \in V$. Le *degré maximum* $d(G)$ de G est défini par $d(G) = \text{Sup}\ \{d_G(x)/x \in V\}$.

G est *biparti* s'il existe une partition $V = V_1 + V_2$ telle que deux sommets de V_i $(i = 1,2)$ ne soient pas adjacents. On note alors $G = (V_1,V_2;E)$.

G est *complet* si deux quelconques de ses sommets sont adjacents.

Si $X \subset V$, le *sous - graphe de* G *engendré par* X, noté $G[X]$, est le graphe dont l'ensemble des sommets est X et les arêtes, celles de G qui sont incluses dans X.

Si $F \subset E$, le *graphe partiel de* G *engendré par* F est le graphe (V,F).

Une *chaîne* est une suite (x_n) - finie ou infinie - de sommets telle que x_{n+1} soit adjacent à x_n. Si $x_i \neq x_j$ dès que $i \neq j$, la chaîne est *élémentaire*.

G est *connexe* s'il contient une chaîne entre deux quelconques de ses sommets.

Les *composantes connexes* de G sont les sous - graphes connexes maximaux - pour l'inclusion - de G. $C_0(G)$, $C_1(G)$, $C_\infty(G)$ dénotent respectivement les nombres de composantes connexes de G d'ordres pairs, impairs et infini. Si $X \subset V$ et si cela ne prête pas à confusion, on abrégera $C_0(G[X])$, $C_1(G[X])$ et $C_\infty(G[X])$ en $C_0(X)$, $C_1(X)$ et $C_\infty(X)$.

Si n est un entier naturel non nul, G est *n-connexe* si pour toute partie X de V de cardinal au plus $n - 1$, $G[V \setminus X]$ est connexe. G est *n-arête-connexe* si pour toute partie F de E de cardinal au plus $n - 1$, le graphe partiel $(V,E \setminus F)$ est connexe. Si G est connexe, une partie S de V est un *ensemble de séparation* de G si $G[V \setminus S]$ n'est pas connexe. Si $S = \{x\}$ est un ensemble de séparation de G, on dit que x est un *sommet d'articulation* de G.

Une arête e d'un graphe connexe $G = (V,E)$ est un *isthme* si le graphe partiel $(V,E \setminus \{e\})$ n'est pas connexe.

Un *couplage* de G est un ensemble d'arêtes de G deux à deux disjointes. Si F est un couplage, $\cup F$ est son *support*. Un couplage F de G est *parfait* si $\cup F = V$. Un couplage F sature $X \subset V$ si $X \subset \cup F$.

G est *couplage-critique* s'il n'a pas de couplage parfait et si pour tout $x \in V$, $G[V \setminus \{x\}]$ a un couplage parfait. On vérifie aisément qu'un graphe couplage-critique est fini et d'ordre impair. On note par $C_{cr}(G)$ le nombre de composantes connexes couplage-critiques du graphe G . Si $X \subset V$, on abrégera $C_{cr}(G[X])$ en $C_{cr}(X)$ lorsqu'aucune confusion n'est à craindre. Si X et A sont deux parties de V , $C_{cr}(X,A)$ est le nombre de composantes connexes couplage-critiques de $G[X]$ incluses - au sens des sommets - dans A .

G est *bicritique* s'il a un couplage parfait et si pour toute paire de sommets distincts x et y , $G[X \setminus \{x,y\}]$ a un couplage parfait.

2. Couplages dans les graphes localement finis

Tutte a donné dans [28] et [30] une condition nécéssaire et suffisante pour qu'un graphe fini ait un couplage parfait.

Théorème 2.1 (Théorème de factorisation)

Un graphe fini $G = (V,E)$ *a un couplage parfait si et seulement si* $C_1(V \setminus S) \leqq |S|$ *pour toute partie* S *de* V .

Le théorème suivant est dû à Brualdi [5].

Théorème 2.2

Soient $G = (V,E)$ *un graphe et* X *une partie de* V *dont tous les sommets sont de degrés finis. Il existe un couplage* F *qui sature* X *si et seulement si pour toute partie finie* Y *de* X *il existe un couplage de* G *qui sature* Y .

La preuve du théorème 2.2 repose sur le principe de sélection de Rado [25]. Etant donnée une famille $\mathcal{F} = (A_i / i \in I)$ de parties d'un ensemble A , une *fonction de choix* de la famille $\mathcal{F}$ est une application χ de I dans $\bigcup_{i\varepsilon I} A_i$ telle que $\chi(i) \varepsilon A_i$ pour tout $i \varepsilon I$.

<u>Théorème 2.3</u> (Principe de sélection)

Soit $\mathcal{F} = (A_i/i\varepsilon I)$ *une famille de parties finies d'un ensemble* A. *Pour toute partie finie* J *de* I *, soit* χ_J *une fonction de choix de la famille* $(A_i/i\varepsilon J)$ *. Il existe une fonction de choix* χ *de la famille* $\mathcal{F}$ *telle que pour toute partie finie* J *de* I *, il existe une partie finie* K *de* I *contenant* J *de sorte que* $\chi{\restriction_J} = \chi_K{\restriction_J}$.

Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un théorème de Bourbaki ([4] III-§7-4 p. 58) sur les limites projectives de familles d'ensembles.

<u>Démonstration du théorème 2.2</u>

Supposons que pour toute partie finie Y de X il existe un couplage F_Y de G qui sature Y . F_Y détermine une fonction de choix injective χ_Y de la famille $(\Gamma_G(x) \cup \{x\}/x\varepsilon Y)$ de la manière suivante:

$\chi_Y(x) = y$ si $x \varepsilon Y$ et $\{x,y\} \varepsilon F$.

Si $\chi_Y(x) = y \varepsilon Y$ alors on a $\chi_Y(y) = x$. D'après le théorème 2.2 il existe une fonction de choix χ de la famille $(\Gamma_G(x) \cup \{x\}/x\varepsilon X)$. χ est injective car les χ_Y le sont. $F = \{\{x,\chi(x)\}/x\varepsilon X\}$ est un couplage de G car χ est injective et car si $\chi(x) = y \varepsilon X$ alors en considérant $Y = \{x,y\}$, on a $\chi(y) = \chi(x)$.

Des théorèmes 2.1 et 2.2 découle le théorème suivant dû à Tutte [29], qui étend aux graphes localement finis le théorème 2.1.

<u>Théorème 2.4</u> (Théorème de factorisation)

Soit $G = (V,E)$ *un graphe localement fini.* G *a un couplage parfait si et seulement si* $C_1(V \setminus S) \leqq |S|$ *pour toute partie finie* S *de* V .

Nous utiliserons à plusieurs reprises l'observation suivante:

Lemme 2.5

Soient $G = (V,E)$ *un graphe,* F_1 *et* F_2 *deux couplages de* G . *Les composantes connexes du graphe partiel* $(V,F_1 \Delta F_2)$ *sont de cinq types:*

1. *Point isolé,*

2. *Cycle élémentaire* F_1*-alterné (une arête sur deux est dans* F_1 *),*

3. *Chaîne élémentaire* F_1*-alternée sans extrémité,*

4. *Chaîne élémentaire* F_1*-alternée finie dont chaque extrémité est insaturée par un des deux couplages,*

5. *Chaîne élémentaire* F_1*-alternée infinie issue d'un sommet insaturé par un des deux couplages.*

(On remarque en effet que le graphe partiel $(V,F_1 \Delta F_2)$ est de degré maximum 2.)

3. Composantes couplage-critiques

Lemme 3.1 [10]

Soient $G = (V,E)$ *un graphe,* A *une partie de* V *et* S *une partie finie de* V *telle que* $C_1(V \setminus S;A)$ *soit fini. Il existe une partie finie* T *de* V *telle que* $S \subset T \subset V$ *et telle que*

$$C_{cr}(V \setminus T;A) - |T| \geqq C_1(V \setminus S;A) - |S| .$$

Démonstration

Soient $C_1,\ldots,C_p$ les composantes connexes impaires de $G[V \setminus S]$ contenues dans A . Soit T une partie de V maximale pour l'inclusion à vérifier les deux propriétés suivantes:

1. $S \subset T \subset (S \cup C_1 \ \dots \cup C_p)$

2. $c_1(V \setminus T;A) - |T| \geqq c_1(V \setminus S;A) - |S|$

Montrons que toutes les composantes connexes impaires de $G[V \setminus T]$ contenues dans A sont couplage-critiques. Supposons qu'une telle composante C ne soit pas couplage-critique. D'après le théorème 2.1 il existe $x \in C$ et $X \subset C \setminus \{x\}$ tels que

$$c_1(C \setminus [X \cup \{x\}]) \geqq |X| + 1 .$$

$|C|$ étant impair, $c_1(C \setminus [X \cup \{x\}])$ est de même parité que $|X|$, d'où

$$c_1(C \setminus [X \cup \{x\}]) \geqq |X| + 2 .$$

Comme $c_1(V \setminus [T \cup X \cup \{x\}];A) = c_1(V \setminus T;A) - 1 + c_1(C \setminus [X \cup \{x\}])$ on a

$$c_1(V \setminus [T \cup X \cup \{x\}];A) - |T \cup X \cup \{x\}| \geqq c_1(V \setminus T;A) - |T|$$

ce qui contredit la maximalité de T .

Le lemme 3.1 est utile pour remplacer des conditions sur les composantes connexes impaires par des conditions sur les composantes connexes couplage-critiques dans différentes propositions relatives aux couplages. Comme conséquence immédiate du lemme 3.1 et du théorème 2.4, on a :

<u>Théorème 3.2</u> [10]

Un graphe localement fini $G = (v,E)$ *a un couplage parfait si et seulement si* $c_{cr}(V \setminus S) \leqq |S|$ *pour toute partie finie* S *de* V .

Ce théorème est un résultat bien connu dans le cas fini. Nous n'en connaissons cependant pas de référence explicite. Les articles [11] et [15] peuvent être donnés comme références implicites car le théorème 3.2 - dans le cas fini - est une conséquence immédiate de la décomposition de Edmonds et Gallai.

4. Couplages dans les graphes bipartis

Au graphe biparti $G = (X,Y;E)$ on peut associer la famille d'ensembles $\mathcal{F}_G = (\Gamma_G(x)/x\varepsilon X)$. Réciproquement, à la famille $\mathcal{F} = (A_i/i\varepsilon I)$ de parties d'un ensemble A, on peut associer le graphe biparti $G_{\mathcal{F}} = (I, \bigcup\limits_{i\varepsilon I} A_i;E)^{\dagger}$ où $(i,a) \varepsilon E$ si et seulement si $a \varepsilon A_i$.

A un couplage F de G saturant X est associé une famille $\mathcal{R} = (a_x/x\varepsilon X)$ d'éléments de Y telle que $\{x,a\} \varepsilon F$. Pour tout $x \varepsilon X$, on a $a_x \varepsilon \Gamma_G(x)$ et $a_x \neq a_y$ si $x \neq y$. La famille $\mathcal{R}$ est un *système de représentants distincts* de $\mathcal{F}_G$.

Un premier résultat bien connu dû à König [18] en termes de graphe et à P. Hall [17] en termes de famille d'ensembles donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille finie de parties quelconques d'un ensemble A ait un système de représentants distncts.

<u>Théorème 4.1</u>

Soit $\mathcal{F} = (A_i/1 \leqq i \leqq n)$ *une famille finie de parties d'un ensemble* A. $\mathcal{F}$ *a un système de représentants distincts si et seulement si* $|\bigcup\limits_{i\varepsilon J} A_i| \geqq |J|$ *pour toute partie* J *de* I.

M. Hall a ensuite étendu ce théorème aux familles quelconques de parties finies d'un ensemble A.

$(^{+})$ Si $(\bigcup\limits_{i\varepsilon I} A_i) \cap I \neq \emptyset$, on considère une copie I' de I disjointe de $\bigcup\limits_{i\varepsilon I} A_i$.

Théorème 4.2 [16]

Soit $\mathcal{F} = (A_i / i \varepsilon I)$ *une famille de parties finies d'un ensemble* A .
$\mathcal{F}$ *a un système de représentants distincts si et seulement si*
$\left| \bigcup_{i \varepsilon J} A_i \right| \geqq |J|$ *pour toute partie finie* J *de* I .

M. Hall a également estimé le nombre de couplages parfaits d'un graphe biparti fini [16].

Théorème 4.3

Soit $G = (X,Y;E)$ *un graphe biparti fini contenant au moins un couplage parfait. Si* $d_G(x) \geqq n$ *pour tout* $x \varepsilon X$ *, alors* G *a au moins* $n!$ *couplages parfaits.*

2. SYSTEMES DE REPRESENTANTS DISTINCTS DES FAMILLES D'ENSEMBLES N'AYANT QU'UN NOMBRE FINI DE MEMBRES INFINIS

1. Introduction

Le premier résultat (Théorème 1.4.1) établi par König [18] en termes de graphe biparti et par P. Hall [17] en termes de famille d'ensembles donne une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un système de représentants distincts pour une famille finie. Ce résultat fut ensuite étendu par M. Hall [16] aux familles de cardinalités quelconques mais formées d'ensembles finis (Théorème 1.4.2). De nombreuses preuves de ce théorème de M. Hall ont été données ([13], [26] etc...).

Le théorème 3.2, dû à Jung et Rado [27], donne une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un système de représentants distincts pour une famille n'ayant qu'un seul membre infini. De nombreuses conditions de même inspiration ont été données pour les familles n'ayant qu'un nombre fini d'ensembles infinis. La première découle d'un résultat de Brualdi et Scrimger ([6] Théorème 5) et du théorème 1.4.2. McCarthy [21] en a simplifié l'énoncé ainsi obtenu et en a donné une preuve directe. Deux autres théorèmes sont dus à Woodall [32]. Folkman [14] a donné une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un système de représentants distincts pour une famille n'ayant qu'un nombre fini de membres infinis, dont l'inspiration est différente de celle des théorèmes précedemment cités. Selon Woodall [32], ce théorème "semble être d'un type entièrement différent". Nous montrons par une preuve simple et courte qu'il n'en est rien : la condition du théorème de Folkman implique celles d'un des théorèmes de Woodall. Nous unifions ainsi les preuves des théorèmes sur les systèmes de représentants distincts des familles n'ayant qu'un nombre fini de membres infinis.

2. Terminologie et notations

Soit $\mathcal{F} = (A_i/i\varepsilon I)$ une famille de parties d'un ensemble A, indexée par un ensemble I. Si J est une partie de I, la *restriction de* $\mathcal{F}$ *à* J est la famille $\mathcal{F}_{\restriction J} = (A_i/i\varepsilon I)$. On notera $\mathcal{F}[J] = \bigcup_{i\varepsilon J} A_i$.

Un *ensemble de représentants distincts* de $\mathcal{F}$ est une partie R de $\mathcal{F}[I]$ telle qu'il existe une bijection χ de I dans R vérifiant $\chi(i) \varepsilon A_i$ pour tout $i \varepsilon I$. $(\chi(i)/i\varepsilon I)$ est alors un système de représentants distincts de $\mathcal{F}$.

3. Conditions nécessaires et suffisantes d'existence de systèmes de représentants distincts de familles n'ayant qu'un nombre fini de membres infinis

Tout au long de ce paragraphe, $\mathcal{F} = (A_i/i\varepsilon I)$ désignera une famille de parties d'un ensemble A, indexée par un ensemble $I = I_1 + I_2$ tel que I_2 soit fini, et A_i soit fini pour tout $i \varepsilon I_1$. On notera $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_{\restriction I_1} = (A_i/i\varepsilon I_1)$.

Un premier théorème, dû à Jung et Rado [27], donne des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'un système de représentants distincts de $\mathcal{F}$ lorsque $|I_2| = 1$, i.e. lorsque $\mathcal{F}$ a un seul membre infini.

Définition 3.1

Une partie J de I_1 est *critique* (relativement à la famille $\mathcal{F}$) si elle est finie et si $|\mathcal{F}[J]| = |J|$.

Le *domaine critique* I_1^+ de $\mathcal{F}$ est la réunion des parties critiques de $\mathcal{F}$.

Théorème 3.2 [27]

Soit $\mathcal{F} = (A_i/i\in I)$ *une famille de parties d'un ensemble* A *n'ayant qu'un seul membre infini* A_{i_0} $(I_1 = I \setminus \{i_0\})$.

$\mathcal{F}$ *admet un système de représentants distincts si et seulement si*

(1) $|\mathcal{F}[J]| \geqq |J|$ *pour toute partie finie* J *de* I_1,

(2) $A_{i_0} \not\subset \mathcal{F}[I_1^+]$.

Le théorème 3.2 de Jung et Rado généralise le théorème 1.4.1.

Lemme 3.3

Soit $\mathcal{F} = (A_i/i\in I)$ *une famille de parties de* A *n'ayant qu'un seul membre infini* A_{i_0}. *Si* $\mathcal{F}_1 = (A_i/i\in I \setminus \{i_0\})$ *a un système de représentants distincts, alors* $\mathcal{F}[I_1^+]$ *est l'intersection des ensembles de représentants distincts de* $\mathcal{F}_1$.

Démonstration

D'après le théorème 1.4.2, si $a \in A$, $\mathcal{F}_1$ admet un système de représentants distincts ne contenant pas a si et seulement si $|\mathcal{F}[J] \setminus \{a\}| \geqq |J|$ pour toute partie finie J de I_1, i.e. si et seulement si $|\mathcal{F}[J]| \geqq |J|$ pour toute partie finie J de I_1 et $a \notin \mathcal{F}[J]$ pour toute partie finie J de I_1 telle que $|\mathcal{F}[J]| = |J|$.

$\mathcal{F}_1$ admet donc un système de représentants distincts ne contenant pas a si et seulement si $a \notin \mathcal{F}[I_1^+]$.

Démonstration du théorème 3.2

D'après le théorème 1.4.2 et le lemme 3.3, les conditions (1) et (2) sont nécessaires. Réciproquement, sopposons que la famille $\mathcal{F}$ vérifie les conditions (1) et (2) mais n'admette pas de système de représentants distincts. D'après le théorème 1.4.2, tout ensemble de représentant distincts de $\mathcal{F}_1 = (A_i / i \varepsilon I \setminus \{i_0\})$ contient A_{i_0} . D'après le lemme 3.3, cela contredit la condition (2) .

Définition 3.4

Soit $\mathcal{F} = (A_i / i \varepsilon I)$ une famille de parties d'un ensemble A telle que $I = I_1 + I_2$, I_2 soit fini et A_i fini pour tout $i \varepsilon I_1$.

Soit B une partie de A telle que la famille $\mathcal{F}_1$ admette un système de représentants distincts ne rencontrant pas B (+). Une partie J de I_1 est B-*critique* (relativement à la famille $\mathcal{F}$) si elle est finie et si $|\mathcal{F}[J] \setminus B| = |J|$.

Le *domaine* B-*critique* $I_1^+(B)$ de la famille $\mathcal{F}$ est la réunion des parties B-critiques de I_1 .

Si B est une partie de A rencontrant tout système de représentants distincts de $\mathcal{F}$, on définit le domaine B-critique de comme étant $I_1^+(B) = \emptyset$.

Lemme 3.5

Si B *est une partie de* A , *alors* $\mathcal{F}[I_1^+(B)]$ *est l'intersection des ensembles de représentants distincts de* $\mathcal{F}_1$ *ne rencontrant pas* B .

Démonstration

Si $\mathcal{F}_1$ n'admet pas d'ensemble de représentants distincts disjoint de B , alors $\mathcal{F}[I_1^+(B)] = I_1^+(B) = \emptyset$. Sinon considérons la famille

(+) D'après le théorème 1.4.2, c'est équivalent à dire que $|\mathcal{F}[J] \setminus B| \geq |J|$ pour toute partie finie J de I_1.

$\mathcal{B} = (A_i \setminus B/i\varepsilon I_1)$. Une partie finie de I_1 est critique pour la famille $\mathcal{B}$ (au sens de la définition 3.1) si et seulement si c'est une partie B-critique de $\mathcal{F}$. Si I_1^+ est le domaine critique de $\mathcal{B}$, on a $I_1^+ = I_1^+(B)$ et le résultat découle du lemme 3.3.

S'inspirant de la condition (2) du théorème 3.2, on peut penser que $\mathcal{F}$ admet un système de représentants distincts si $\mathcal{F}_1$ en admet un et si $\mathcal{F}[K] \not\subset \mathcal{F}[I_1^+(\mathcal{F}[K])]$ pour toute partie non vide K de I_2 . Il n'en est rien comme le montre l'exemple suivant.

<u>Exemple 3.6</u>

Posons $I_1 = \mathbf{N}$, $I_2 = \{-2,-1\}$, $I = I_1 + I_2$ et $A = \mathbf{Z}$. Définissons la famille $\mathcal{F} = (A_i/i\varepsilon I)$ par :

$A_i = \{i\}$ si $i \varepsilon I_1$,

$A_{-1} = A_{-2} = \{-1\} \cup 2\mathbf{Z}$.

$\mathcal{F}$ n'admet pas de système de représentant distincts alors que $\mathcal{F}_1$ en admet un. De plus si $K = \{-1\}$, $\{-2\}$ ou $\{-1,-2\}$ alors $\mathcal{F}[K] = \{-1\} \cup 2\mathbf{Z}$ et $I_1^+(\mathcal{F}[K]) = \mathbf{Z} \setminus 2\mathbf{Z}$. On a donc

$\mathcal{F}[I_1^+(\mathcal{F}[K])] = \mathbf{Z} \setminus 2\mathbf{Z} \not\supset \mathcal{F}[K]$.

Plussieurs théorèmes donnent des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'un système de représentants distincts d'une famille n'ayant qu'un nombre fini de membres infinis. A l'exception de l'un d'entre eux, le théorème 3.7 dû à Folkman [14], leurs conditions sont clairement équivalentes à celle du théorème 3.8 de Brualdi et Scrimger.

La famille de parties d'un ensemble A , $\mathcal{F} = (A_i/i\varepsilon I)$, considérée dans les énoncés qui suivent est telle que $I = I_1 + I_2$, A_i est fini pour tout $i \varepsilon I_1$ et I_2 est fini.

<u>Théorème 3.7</u> (J. Folkman [14])

$\mathcal{F}$ *admet un système de représentants distincts si et seulement si*

(7) *Pour tout* $n \in N$, *pour tous ensembles* J *et* K *tels que* $K \subset J \subset I$, *tels que* $|\mathcal{F}[J] \setminus \mathcal{F}[K]|$ *soit fini et tels que* $|J \setminus K| \geqq n + |\mathcal{F}[J] \setminus \mathcal{F}[K]|$, *il existe un ensemble fini* $L \subset K$ *tel que pour tout ensemble fini* T *vérifiant* $L \subset T \subset K$ *on ait* $|\mathcal{F}[T]| \geqq n + |T|$.

<u>Théorème 3.8</u> (R.A. Brualdi & E.B. Scrimger [6], P.J. McCarthy [21])

$\mathcal{F}$ *admet un système de représentants distincts si et seulement si*

(1) $|\mathcal{F}_1[J]| \geqq |J|$ *pour toute partie finie* J *de* I_1 ,

(8) *Pour toute partie finie* B *de* A *telle que* $\mathcal{F}_1$ *admette un système de représentants distincts ne rencontrant pas* B , *et pour toute partie* K *de* I_2 *telle que* $|K| = |B| + 1$, *on a*

$\mathcal{F}[K] \not\subset B \cup \mathcal{F}[I_1^+(B)]$.

<u>Théorème 3.9</u> (R.A. Brualdi & E.B. Scrimger [6], D.R. Woodall [32])

$\mathcal{F}$ *admet un système de représentants distincts si et seulement si*

(1) $|\mathcal{F}_1[J]| \geqq |J|$ *pour toute partie finie* J *de* I_1 ,

(9) *Pour toute partie non vide* K *de* I_2 *de cardinal* k *et pour tout ensemble* B *de cardinal* $k - 1$

$B = \{a_1, \ldots, a_{k-1}\} \subset \mathcal{F}[K]$ - *avec* $B = \emptyset$ *si* $k = 1$ - *tel que pour tout* j *vérifiant* $1 \leqq j \leqq k - 1$, $a_j \notin \mathcal{F}[I_1^+(\{a_1, \ldots, a_{j-1}\})]$ *on a :*

$\mathcal{F}[K] \not\subset B \cup \mathcal{F}[I_1^+(B)]$.

<u>Théorème 3.10</u> (D.R. Woodall [32])

$\mathcal{F}$ admet un système de représentant distincts si et seulement si

(1) $|\mathcal{F}_1[J]| \geqq |J|$ *pour toute partie finie* J *de* I_1,

(10) *Pour toute partie non vide* K *de* I_2 *et pour toute partie* B *de* $\mathcal{F}[K]$ *telle que* $|B| < |K|$, *on a :*

$\mathcal{F}[K] \not\subset B \cup \mathcal{F}[I_1^+(B)]$.

<u>Théorème 3.11</u> (D.R. Woodall [32])

$\mathcal{F}$ admet un système de représentants distincts si et seulement si

(1) $|\mathcal{F}_1[J]| \geqq |J|$ *pour toute partie finie* J *de* I_1,

(11) *Pour toute partie non vide* K *de* I_2 *et pour toute partie* B *de* A *telle que* $|B| < |K|$, *on a :*

$|\mathcal{F}[K] \setminus \mathcal{F}[I_1^+(B)]| \geqq |K| - |B|$.

Les preuves des théorèmes 3.7 à 3.11 reposent sur le lemme simple suivant établi par Folkman [14] et Woodall [32].

<u>Lemme 3.12</u>

Soit B *une partie finie de* A *telle que la famille* $\mathcal{F}_1 = (A_i/i \in I_1)$ *ait un système de représentants distincts ne rencontrant pas* B .

Toute union et toute intersection finies de parties finies J *de* I_1 *telles que* $|\mathcal{F}[J] \setminus B| = |J|$ *vérifient aussi cette propriété.*

Il s'ensuit que toute partie finie T *de* $I_1^+(B)$ *est contenue dans une partie finie* L *de* $I_1^+(B)$ *telle que* $|\mathcal{F}[L] \setminus B| = |L|$.

<u>Démonstration</u>

Soient J_1 et J_2 deux parties finies de I_1 telles que $|\mathcal{F}[J_1]\setminus B| = |J_1|$ et $|\mathcal{F}[J_2]\setminus B| = |J_2|$. $\mathcal{F}_1$ admettant un système de représentants distincts ne rencontrant pas B, on a :

$$|\mathcal{F}[J_1\cup J_2]\setminus B| \geqq |J_1\cup J_2|$$

et $|\mathcal{F}[J_1\cap J_2]\setminus B| \geqq |J_1\cap J_2|$.

On a :

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{F}[J_1\cup J_2]\setminus B| - |J_1\cup J_2| + |\mathcal{F}[J_1\cap J_2]\setminus B| - |J_1\cap J_2| \\
&= |(\mathcal{F}[J_1]\setminus B)\cup(\mathcal{F}[J_2]\setminus B)| + |\mathcal{F}[J_1\cap J_2]\setminus B| - |J_1| - |J_2| \\
&\leqq |(\mathcal{F}[J_1]\setminus B)\cup(\mathcal{F}[J_2]\setminus B)| + |(\mathcal{F}[J_1]\setminus B)\cap(\mathcal{F}[J_2]\setminus B)| - |J_1| - |J_2| \\
&= |\mathcal{F}[J_1]\setminus B| - |J_1| + |\mathcal{F}[J_2]\setminus B| - |J_2| = 0
\end{aligned}$$

car $|\mathcal{F}[J_1]\setminus B| = |J_1|$ et $|\mathcal{F}[J_2]\setminus B| = |J_2|$.

On a donc :

$$|\mathcal{F}[J_1]\setminus B| - |J_1| = |\mathcal{F}[J_2]\setminus B| - |J_2| = 0 .$$

<u>Démonstration des théorèmes 3.7 à 3.11</u>

Schéma des démonstrations :

$$\begin{tikzcd}
(7) \arrow[rr, Rightarrow, "\mathrm{II}"] & & (1) \text{ et } (8) \arrow[rr, Rightarrow, "\mathrm{III}"] & & (1) \text{ et } (9) \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathcal{F} \text{ admet un système de représentants distincts} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow, "\mathrm{VI}"'] & & & & (1) \text{ et } (10) \arrow[llll, Rightarrow, "\mathrm{V}"'] \\
& & (1) \text{ et } (11) \arrow[urr, Rightarrow, "\mathrm{VII}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Preuve de I

Supposons que la famille $\mathcal{F}$ admette un système de représentants distincts $\mathcal{R} = (a_i / i \in I)$. Soit $n \in N$, J et K des parties de I telles que :

1. $K \subset J \subset I$

2. $|\mathcal{F}[J] \setminus \mathcal{F}[K]| < \aleph_0$

3. $|J \setminus K| \geqq n + |\mathcal{F}[J] \setminus \mathcal{F}[K]|$.

$\mathcal{R}$ étant un système de représentants distincts de $\mathcal{F}$, on a :

4. $|\mathcal{F}[J \setminus K]| = |J \setminus K|$.

D'autre part $\mathcal{R}[J \setminus K] \subset \mathcal{F}[J \setminus K] \subset \mathcal{F}[J]$, donc :

$$|\mathcal{R}[J \setminus K]| = |\mathcal{R}[J \setminus K] \cap \mathcal{F}[K]| + |\mathcal{R}[J \setminus K] \cap (\mathcal{F}[J] \setminus \mathcal{F}[K])|$$
$$\leqq |\mathcal{R}[J \setminus K] \cap \mathcal{F}[K]| + |\mathcal{F}[J] \setminus \mathcal{F}[K]| .$$

D'après 3 et 4 on a :

$$|\mathcal{R}[J \setminus K] \cap \mathcal{F}[K]| + |\mathcal{F}[J] \setminus \mathcal{F}[K]| \geqq n + |\mathcal{F}[J] \setminus \mathcal{F}[K]|$$

$\mathcal{F}[J] \setminus \mathcal{F}[K]$ étant fini, il vient $|\mathcal{R}[J \setminus K] \cap \mathcal{F}[K]| \geqq n$.

Soit donc B une partie de cardinal n de $\mathcal{R}[J \setminus K] \cap \mathcal{F}[K]$. Si $a \in B$, il existe $i(a) \in K$ tel que $a \in A_{i(a)}$. Posons $L = \{i(a) \in K / a \in B\}$. On a alors $|L| \leqq |B| = n$ et $B \subset \mathcal{F}[L]$.

Soit T une partie finie de K contenant L . Clairement $B \subset \mathcal{F}[T]$, et $B \cap \mathcal{R}[T] = \emptyset$ car $B \cap \mathcal{R}[T] \subset \mathcal{R}[J \setminus K] \cap \mathcal{F}[K]$ et $\mathcal{R}[J \setminus K] \cap \mathcal{R}[T] = \emptyset$. On a donc $B \subset \mathcal{F}[T] \setminus \mathcal{R}[T]$. Il s'ensuit que :

$$|\mathcal{F}[T]| = |\mathcal{F}[T] \setminus \mathcal{R}[T]| + |\mathcal{R}[T]|$$
$$\geqq |B| + |\mathcal{R}[T]| \geqq n + |T| .$$

Preuve de II [7]

Clairement (7) entraîne (1) (Considérer $n = 0$, $J = K = L$).
Montrons que (7) entraîne (8) .

Supposons qu'il existe $B \subset A$ et $K \subset I_2$ tels que $|K| = |B| + 1$, tels que $\mathcal{F}_1$ admette un système de représentants distincts ne rencontrant pas B et tels que $\mathcal{F}[K] \subset B \cup \mathcal{F}[I_1^+(B)]$.
Posons $K' = I_1^+(B)$ et $J = K \cup I_1^+(B)$. On a :

$$\mathcal{F}[J] \setminus \mathcal{F}[K'] = \mathcal{F}[K] \setminus \mathcal{F}[I_1^+(B)] \subset K \setminus \mathcal{F}[I_1^+(B)] \quad \text{et} \quad J \setminus K' = K$$

car $I_1^+(B) \subset I_1$ et $K \subset I_2$. Les hypothèses de (7) avec $n = |K| - |B \setminus \mathcal{F}[I_1^+(B)]|$ sont vérifiées. Il existe donc une partie finie L de K' telle que $|\mathcal{F}[T]| \geqq n + |T|$ pour tout ensemble fini T tel que $L \subset T \subset K'$.

On a $n \geqq 1$ car $|K| = |B| + 1$, donc $|\mathcal{F}[L]| \geqq n + |L|$ entraîne que $L \neq \emptyset$. Comme $L \subset K' = I_1^+(B)$, on a $I_1^+(B) \neq \emptyset$. Comme $L \subset K' = I_1^+(B)$ et L est fini, d'après le lemme 3.12, il existe un ensemble fini M tel que $L \subset M \subset K'$ et tel que $|\mathcal{F}[M] \setminus B| = |M|$.
D'autre part $|\mathcal{F}[M]| \geqq |M| + n$ car $L \subset M$. On a donc :

$$\begin{aligned}
|K| + |M| &= |B \setminus \mathcal{F}[K']| + n + |M| \\
&\leqq |B \setminus \mathcal{F}[K']| + |\mathcal{F}[M]| \\
&\leqq |B \setminus \mathcal{F}[K']| + |\mathcal{F}[M] \cap B| + |\mathcal{F}[M] \setminus B| \\
&\leqq |B| + |M|
\end{aligned}$$

c- qui contredit l'hypothèse $|K| = |B| + 1$.

<u>Preuve de III</u>

Si $\mathcal{F}_1$ n'admet pas de système de représentants distincts ne rencontrant pas B alors $\mathcal{F}[I_1^+(B)] = I_1^+(B) = \emptyset$. $\mathcal{F}[K]$ est infini car K est une partie non vide de I_2 , donc $\mathcal{F}[K] \not\subset B$, car B est fini.

Si $\mathcal{F}_1$ admet un système de représentants distincts ne rencontrant pas B , on a $\mathcal{F}[K] \not\subset B \cup \mathcal{F}[I_1^+(B)]$ d'après (8) , car $|K| = |B| + 1$.

Preuve de IV

Soient K une partie non vide de I_2 et B une partie de $\mathcal{F}[K]$ telle que $|B| < |K|$. Si $\mathcal{F}_1$ n'admet pas de système de représentants distincts ne rencontrant pas B , on a clairement $\mathcal{F}[K] \not\subset B \cup \mathcal{F}_1[I_1^+(B)]$. Montrons que toute partie finie $B = \{a_1,\dots,a_{k-1}\}$ de A telle que $\mathcal{F}_1$ admette un système de représentants distincts ne rencontrant pas B vérifie pour tout j $(1 \leqq j \leqq k-1)$

$$a_j \notin \mathcal{F}_1[I_1^+(\{a_1,\dots,a_{j-1}\})] .$$

S'il existe j tel que $a_j \in \mathcal{F}_1[I_1^+(\{a_1,\dots,a_{j-1}\})]$ il existe une partie J de $\mathcal{F}_1$ qui soit $\{a_1,\dots,a_{j-1}\}$-critique et telle que $a_j \in \mathcal{F}[J]$. On a donc $|\mathcal{F}[J] \setminus \{a_1,\dots,a_j\}| = |J| - 1$ donc $|\mathcal{F}[J] \setminus B| \leqq |J| - 1$ d'où la contradiction. Donc si $|K| = |B| + 1$, d'après (9) on a :

$$\mathcal{F}[K] \not\subset B \cup \mathcal{F}_1[I_1^+(B)] .$$

Si $|K| \geqq |B| + 2$, pour tout $K' \subset K$ tel que $|K'| = |B| + 1$, on a :

$$\mathcal{F}[K'] \not\subset B \cup \mathcal{F}_1[I_1^+(B)]$$

et donc :

$$\mathcal{F}[K] \not\subset B \cup \mathcal{F}_1[I_1^+(B)] .$$

Preuve de V

Soit K une partie non vide de I_2 . Montrons par récurrence qu'il existe des parties $B_0, B_1, \dots, B_k$ de $\mathcal{F}[K]$ telles que :

1. $|B_i| = i$

2. $\mathcal{F}_1$ admet un système de représentants distincts ne rencontrant pas B_i .

D'après (1) , lapropriété est vérifiée pour $i = 0$. Supposons la propriété vérifiée au rang $i \leqq k-1$. D'après (10), on a :

$$\mathcal{F}[K] \not\subset B_i \cup \mathcal{F}_1[I_1^+(B_i)]$$

Soit donc $a_{i+1} \in \mathcal{F}[K] \setminus (B_i \setminus \mathcal{F}_1[I_1^+(B_i)])$. Comme $a_{i+1} \notin \mathcal{F}_1[I_1^+(B_i)]$, il existe un système de représentants distincts de $\mathcal{F}_1$ ne rencontrant pas B_i qui ne contient pas a_{i+1}, d'après le lemme 3.5 $\mathcal{F}_1$ a donc un système de représentants distincts qui ne rencontre pas $B_{i+1} = B_i \cup \{a_{i+1}\}$. Posons $B(K) = B_k$ et $B = \bigcup_{K \subset I_2} B(K)$. Soit $\mathcal{C} = (C_i / i \varepsilon I)$ la famille définie par :

$C_i = A_i$ si $i \varepsilon I_1$

$C_i = A_i \cap B$ si $i \varepsilon I_2$

Tout système de représentants distincts de $\mathcal{C}$ est un système de représentants distincts de $\mathcal{F}$. Montrons que $\mathcal{C}$ admet un système de représentants distincts .

Si J est une partie finie de I_1 et L une partie de I_2, $\mathcal{F}_1$ a un système $\mathcal{R}_1$ de représentants distincts qui ne rencontre pas $B(L)$. On a donc :

$$|\mathcal{C}[J \cup L]| \geqq |\mathcal{R}[J] \cup B(L)| = |J \cup L|$$

D'après le théorème 1.4.2, la famille $\mathcal{C}$ admet un système de représentants distincts.

<u>Preuve de VI</u>

(1) est clairement vérifiée. Montrons que la propriété (11) est vérifiée.

Soient K une partie non vide de I_2 et B une partie de A telle que $|B| < |K|$. S'il n'existe pas de système de représentants distincts ne rencontrant pas B, alors $\mathcal{F}[I_1^+(B)] = I_1^+(B) = \emptyset$ et K étant une partie non vide de I_2, on a :

$$|\mathcal{F}[K] \setminus \mathcal{F}[I_1^+(B)]| \geqq |K| - |B|$$

Supposons donc que $\mathcal{F}_1$ admette un système de représentants distincts $\mathcal{R}$ ne rencontrant pas B et que

$$|\mathcal{F}[K] \setminus \mathcal{F}[I_1^+(B)]| < |K| - |B|$$

Si $C = \mathcal{F}[I_1^+(B)] \cap \mathcal{R}[K]$ alors $|K| \geqq |C|$. Puisque $\mathcal{R}[K] \subset \mathcal{F}[K]$ et $|\mathcal{R}[K]| = |K|$, on a :

$$|\mathcal{R}[K] \setminus \mathcal{F}[I_1^+(B)]| < |\mathcal{R}[K]| - |B|$$

et donc :

$$|B| < |\mathcal{R}[K] \cap \mathcal{F}[I_1^+(B)]| = |C|$$

C étant une partie finie de $\mathcal{F}[I_1^+(B)]$, il existe une partie B-critique J de I_1 telle que $C \subset \mathcal{F}[J]$. On a :

$$|\mathcal{F}[J] \setminus (C \cup B)| < |J|$$

car J est B-critique. On a donc $|\mathcal{R}[J] \setminus C| < |J|$ d'où $|\mathcal{R}[J] \cap C| > 0$ ce qui est impossible car $C \subset \mathcal{R}[K]$ et $K \subset I_2$.

Preuve de VII

Soient K une partie non vide de I_2 et B une partie de $\mathcal{F}[K]$ telle que $|B| < |K|$.

Si $\mathcal{F}_1$ n'admet pas de système de représentant distincts ne rencontrant pas B , alors $\mathcal{F}[I_1^+(B)] = I_1^+(B) = \emptyset$ et on a clairement $\mathcal{F}[K] \not\subset B \cup \mathcal{F}[I_1^+(B)]$.

Supposons donc que $\mathcal{F}_1$ admette un système de représentants distincts ne rencontrant pas B . Posons $C = \mathcal{F}[I_1^+(B)] \cap B$. On a $C \subset \mathcal{F}[K] \cap \mathcal{F}[I_1]$. Comme $C \subset B$, toute partie B-critique de I_1 est C-critique et on a $I_1^+(B) \subset I_1^+(C)$. Il s'ensuit que $|\mathcal{F}[K] \setminus \mathcal{F}[I_1^+(B)]| \geqq |\mathcal{F}[K] \setminus \mathcal{F}[I_1^+(C)]| \geqq |K| - |C|$ d'après (11) .
D'autre part

$$|K| - |C| > |B| - |C| = |B| - |\mathcal{F}[I_1^+(B)] \cap B|$$
$$= |B \setminus \mathcal{F}[I_1^+(B)]|$$

On a donc :

$$\mathcal{F}[K] \setminus \mathcal{F}[I_1^+(B)] \not\subset B \setminus \mathcal{F}[I_1^+(B)]$$

d'où $\mathcal{F}[K] \not\subset B \cup \mathcal{F}[I_1^+(B)]$.

3. DECOMPOSITION DE EDMONDS ET GALLAI DES GRAPHES LOCALEMENT FINIS

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la structure du point de vue des couplages des graphes localement finis. Nous montrons que la décomposition de Edmonds et Gallai des graphes finis ([11] et [15]) s'étend aux graphes localement finis.

Au paragraphe 2, nous donnons quelques résultats préliminaires sur les graphes localement finis de défauts finis, avant de démontrer au paragraphe 3 le théorème de structure pour cette classe de graphes. La démonstration proposée ici de ce théorème repose sur une généralisation aux graphes localement finis d'un théorème de Berge [3] . Dans un dernier paragraphe, ce théorème est étendu aux graphes localement finis de défauts quelconque.

2. Graphes localement finis de défauts finis

Soient $G = (V,E)$ un graphe et A une partie finie de V .
Le nombre maximum $r(A)$ de sommets de A qui peuvent être couverts par un couplage de G est donné par un théorème de Brualdi ([5]

théorème 1, voir aussi [11] et [15] pour d'autres démonstrations de ce théorème) :

$$r(A) = \mathrm{Min}\ \{|A| + |S| - C_1(V \setminus S\ ;\ A)\ /\ S \subset V\ ,\ S \text{ fini}\}$$

D'après le lemme 1.3.1, on obtient une forme équivalente de ce théorème :

Théorème 2.1

Soit $G = (V\ ,\ E)$ *un graphe et* A une partie finie de V . *Alors*

$$r(A) = \mathrm{Min}\ \{|A| + |S| - C_{cr}(V \setminus S\ ;\ A)\ /\ S \subset V\ ,\ S \text{ fini}\}$$

Définition 2.2

Si $G = (V\ ,\ E)$ est un graphe et si F est un couplage de G le *défaut* $\delta(F)$ de F est le cardinal de $V \setminus \cup F$.

Si G a un couplage de défaut fini, un couplage F de G est maximum si pour tout couplage H de G , on a $\delta(F) \leqq \delta(H)$. Le *défaut* $\delta(G)$ de G est alors défini comme étant le défaut d'un couplage maximum de G .

Si $G = (V , E)$ est un graphe fini, Berge [3] a montré que $\delta(G) = \text{Max} \{C_1(V \setminus S) - |S| / S \subseteq V\}$. Ce résultat peut être démontré comme un corollaire du théorème 1.2.1 (théorème de factorisation) en remarquant que $\delta(G)$ est le nombre minimum de sommets adjacents à tout sommet de G à ajouter à G pour que le graphe obtenu ait un couplage parfait. Ce raisonnement ne peut s'appliquer aux graphes infinis, car le graphe auxiliaire que l'on considère n'est alors pas localement fini.

<u>Théorème 2.3</u> [10]

Soit $G = (V , E)$ *un graphe localement fini. Si* G *est de défaut fini, on a :*

$$\delta(G) = \text{Max} \{C_1(V \setminus S) - |S| \;/\; S \subseteq V,\ S \text{ fini}\}$$
$$= \text{Max} \{C_{cr}(V \setminus S) - |S| \;/\; S \subseteq V,\ S \text{ fini}\}$$

La démonstration la plus courte du théorème 2.3 repose sur le théorème de Brualdi. Les éléments d'une autre démonstration sont contenus dans la preuve du théorème 3.1 (voir Remarque 3.2).

<u>Démonstration</u>

Montrons tout d'abord que

$\delta(G) = \text{Max} \{|A| - r(A) \;/\; A \subseteq V,\ A \text{ fini}\}$.

Cette observation généralise le théorème 4 de [5] . La preuve en est semblable. Il est clair que $\delta(G) \geq \text{Max} \{|S| - r(A) \;/\; A \subseteq V,\ A \text{ fini}\}$. Par définition de $r(A)$, il existe pour toute partie finie de A de V un couplage F_A de G qui sature $r(A)$ sommets de A. A ce couplage F_A , associons une fonction de choix injective χ_A de la famille $(\Gamma_G(a) \cup \{a\} \;/\; a \in A)$ définie par $\chi_A(a) = a$ si $a \in A \setminus \cup F_A$ et

$\chi_A(a) = b$ si $a \in A$ et $\{a , b\} \in F_A$. G étant localement fini, d'après le principe de sélection de Rado (théorème 1.2.3) il existe une fonction de choix injective χ de la famille $(\Gamma_G(x) \cup \{x\} \;/\; x \in V)$ telle que pour toute partie finie A de V , il existe une partie finie B de V contenant A de sorte que $\chi_{|A} = \chi_{B|A}$. L'ensemble d'arêtes $F = \{\{x , y\} \in E \;/\; \chi(x) = y , x \neq y\}$ est un couplage de G . En effet si x_1 et x_2 sont deux sommets de V , alors en considérant $A = \{x_1 , x_2\}$, on voit que $\chi(x_1) \neq \chi(x_2)$ et que si $\chi(x_1) = x_2$, alors $\chi(x_2) = x_1$. Montrons que $\delta(F) = \mathrm{Max}\ \{|A| - r(A) \;/\; A \subseteq V , A \text{ fini}\}$. $\delta(G)$ étant par hypothèse fini, il existe une partie finie A_0 de V telle que $|A_0| - r(A_0) = \mathrm{Max}\ \{|A| - r(A) \;/\; A \subseteq V , A \text{ fini}\}$. Si B est une partie finie de V contenant A_0 , alors par définition de A_0 , $|B| - r(B) = |A_0| - r(A)$. D'autre part, F_B laisse $|B| - r(B)$ sommets de B insaturés. Comme F_B ne peut saturer plus de $r(A)$ sommets de $A \subseteq B$, les sommets insaturés par F_B sont dans A . Il s'en suit que les sommets de G insaturés par F sont dans A_0 et au nombre de $|A_0| - r(A_0)$. On a donc $\delta(F) = |A_0| - r(A_0)$. On a alors $\delta(G) = \mathrm{Max}\ \{|A| - r(A) \;/\; A \subseteq V , A \text{ fini}\}$ car $\delta(G) \leqq \delta(F)$.

D'après le théorème 2.1 de Brualdi, on a :
$|A| - r(A) = \mathrm{Max}\ \{C_1(V \setminus S ; A) \;/\; S \subseteq V , S \text{ fini}\}$ pour toute partie finie A de V. $C_1(V \setminus S)$ est fini, car S est fini et G localement fini. Si A est l'ensemble des composantes connexes impaires de $G[V \setminus S]$ alors $C_1(V \setminus S ; A) = C_1(V \setminus S)$. On a donc $\delta(G) = \mathrm{Max}\ \{C_1(V \setminus S) - |S| \;/\; S \subseteq V , S \text{ fini}\}$. La deuxième formule découle du lemme 1.3.1 (ou du théorème 1.3.2) .

<u>Remarque 2.4</u>

Si $G = (V , E)$ est un graphe localement fini *connexe* de défaut infini, alors on a :

$\delta(G) = \mathrm{Sup}\ \{|A| - r(A)\ /\ A \subset V\ ,\ A\ \text{fini}\} = |V| = \aleph_0$

Si G n'est pas connexe, l'égalité n'est plus nécessairement vérifiée.

3. Décomposition de Edmonds et Gallai des graphes localement finis de défauts finis

Théorème 3.1 [10]

Soit $G = (V, E)$ *un graphe localement fini de défaut fini. Soient* P *l'ensemble des sommets de* G *qui ne sont pas saturés par tout couplage maximum de* G , $Q = \Gamma_G(P) \setminus P$ *et* $R = V \setminus (P \cup Q)$. *Alors*

(1) P *est fini,*

(2) *Les composantes connexes de* $G[P]$ *sont couplage-critiques,*

(3) $C_{cr}(P) = |Q| + \delta(G)$,

(4) $G[R]$ *a un couplage parfait,*

(5) *Tout couplage maximum de* G *se décompose en un couplage parfait de* $G[R]$, *en un couplage de défaut* 1 *de chaque composante connexe de* $G[P]$ *et d'un couplage saturant* Q , *de* Q *dans* P.

Le théorème 3.1 étend aux graphes localement finis un théorème de Edmonds [11] et Gallai [15] dans le cas fini. La preuve donnée ci-dessous du théorème 3.1 n'utilise pas ce théorème de Edmonds et Gallai.

Démonstration

D'après le théorème 2.3 , il existe une partie finie T de V telle que $C_1(V \setminus T) = C_{cr}(V \setminus T) = |T| + \delta(G)$

Toute composante connexe paire ou infinie de $G[V \setminus T]$ a un couplage parfait. En effet, si C est une telle composante et si $G[C]$ n'a pas de couplage parfait, d'après le théorème 1.2.1 il existe une partie finie S de C telle que $C_1(C \setminus S) \geqq |S| + 1$. On a alors

$C_1(V \setminus (S \cup T)) = C_1(V \setminus T) + C_1(C \setminus S) \geqq |T \cup S| + \delta(G) + 1$

ce qui est impossible. Soient $C_1, \ldots, C_n$ les composantes connexes couplage-critiques de $G[V \setminus T]$.

1. Si F est un couplage maximum de G, tout sommet de T est couplé par F à un sommet de $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$. Au plus un sommet de chaque C_i $(1 \leqq i \leqq n)$ est couplé par F dans T.

Il suffit de prouver que le nombre k de composantes connexes couplage-critiques de $G[V \setminus T]$ saturées par F est égal à $|T|$.
On a clairement $k \leqq |T|$. Si α est le nombre de composantes connexes couplage-critiques de $G[V \setminus T]$ insaturées par F, on a $\alpha \leqq \delta(G)$, d'où $k = C_{cr}(V \setminus T) - \alpha = |T| + \delta(G) - \alpha \geqq |T|$.

2. Si F est un couplage maximum de G et si C_i est une composante connexe couplage-critique de $G[V \setminus T]$ insaturée par F, alors un sommet exactement de C_i est insaturé par F.

Il y a en effet exactement

$C_{cr}(V \setminus T) - |T| = \delta(G)$ telles composantes.

3. Toute composante connexe paire ou infinie de $G[V \setminus T]$ est saturée par tout couplage maximum de G.

D'après 1, aucun couplage maximum ne couple un sommet de T dans une composante connexe paire ou infinie de $G[V \setminus T]$. Les composantes paires ou infinies admettant des couplages parfaits, elles sont nécessairement saturées par tout couplage maximum de G.

Soit U une partie de T adjacente à exactement $|U|$ composantes couplage-critique de $G[V \setminus T]$. Une telle partie existe, par exemple $\emptyset$. Supposons U maximale pour l'inclusion à vérifier cette propriété. Posons $Q = T \setminus U$ et soit P la réunion des composantes connexes couplage-critiques de $G[V \setminus T]$ non adjacentes à U. Soit enfin R la réunion de U, des composantes connexes paires ou infinies de $G[V \setminus T]$ et des composantes connexes couplage-critiques de $G[V \setminus T]$ adjacentes à U. On a bien $R = V \setminus (P \cup Q)$. Soit F un couplage maximum de G.

D'après 1 et 3, $R \cup Q$ est saturé par F. D'après 1, tout sommet de Q est couplé par F dans P.

Montrons que pour tout $x \in P$, il existe un couplage maximum de G qui ne sature pas x. Soient $x \in P$ et C la composante connexe (couplage-critique) de $G[P]$ qui contient x. Par définition de P, C n'est pas adjacente à U, et par définition de U, pour toute partie W de $T \setminus U = Q$, au moins $|W| + 1$ composantes couplage-critiques de $G[V \setminus T]$ sont adjacentes à W et non-adjacentes à U. Toute partie W de Q est donc adjacente à au moins $|W|$ composantes couplage-critiques non-adjacentes à U et différentes de C. D'après le théorème 1.4.1 il existe donc un couplage N, qui sature Q, de Q dans l'ensemble des composantes connexes de $G[P]$ différentes de C. Les composantes connexes de $G[P]$ étant couplage-critiques et $G[R]$ ayant un couplage parfait, N s'étend en un couplage F de G qui ne sature pas x. F est maximum, car $\delta(F) = C_{cr}(V \setminus T) - |T| = \delta(G)$.

Pour achever cette démonstration, il nous faut montrer que P est égal à l'ensemble P' des sommets de G insaturés par au moins un couplage parfait de G. D'après ce qui précède, on a $P' \supset P$. Réciproquement, si $x \in P'$, alors $x \notin R \cup Q$, et nécessairement $x \in P$.

Remarque 3.2

Le théorème 2.3 peut être prouvé de manière analogue au théorème 3.1 .

Soit $G = (V , E)$ un graphe localement fini de défaut fini. Montrons tout d'abord que

$$\delta(F) \geqq \text{Max } \{C_1(V \setminus S) - |S| \;/\; S \quad V \text{ , } S \text{ fini}\}$$

pour tout couplage de F de G . Sinon, il existe une partie finie S de V telle que $C_1(V \setminus S) \geqq |S| + \delta(F) + 1$. S est donc non vide et au plus $|S|$ composantes connexes impaires de $G[V \setminus S]$ sont saturées par F . F laisse donc au moins $\delta(F) + 1$ sommets de G insaturés ce qui est impossible. G étant de défaut fini, $\text{Sup } \{C_1(V \setminus S) - |S| \;/\; S \quad V \text{ , } S \text{ fini}\}$.

D'après le lemme 1.3.1 , k étant fini, il existe une partie finie T de V telle que $C_1(V \setminus T) = C_{cr}(V \setminus T) = |T| + k$. On montre que les composantes paires ou infinies de $G[V \setminus T]$ ont toutes un couplage parfait, comme dans la démonstration du théorème 3.1 .

D'autre part, si S est une partie non vide de T , par définition de k on a

$$C_1(V \setminus [T \setminus S]) \leqq |T \setminus S| + k \text{ .}$$

S est donc adjacente à au moins

$C_1(V \setminus T) - C_1(V \setminus [T \setminus S]) \geqq |T| + k - |T| + |S| - k = |S|$ composantes impaires de $G[V \setminus T]$. D'après le théorème 1.4.1 il existe donc un couplage de T dans $|T|$ composantes impaires de $G[V \setminus T]$.

Ces composantes étant couplage-critiques, ce couplage s'étend en un couplage de G de défaut $C_1(V \quad T) - |T| = k$.

4. Décomposition de Edmonds et Gallai des graphes localement finis de défauts quelconques

Définition 4.1

Un couplage F d'un graphe G est *maximum* si pour tout couplage H de G tel que $\cup F \subseteq \cup H$, on a $\cup H = \cup F$.

Si G est un graphe de défaut fini (en particulier si G est fini) cette définition est clairement équivalente à celle donnée au paragraphe 2 (Définition 2.2).

Théorème 4.2

Tout graphe localement fini a au moins un couplage maximum.

Soit χ l'ensemble des parties des supports des couplages d'un graphe localement fini G. D'après le théorème 1.2.2. , χ est finitaire. D'après le lemme Tukey, tout élément de χ est contenu dans un élément maximal pour l'inclusion, c'est-à-dire dans le support d'un couplage maximum. En particulier, G a un couplage maximum.

Proposition 4.3

Un couplage F *d'un graphe* G *est maximum si et seulement si il n'existe pas de chaîne* F-*alternée reliant deux sommets insaturés par* F, *ni de chaîne infinie* F-*alternée issue d'un sommet insaturé par* F.

Cette proposition découle simplement du lemme 1.2.5.

Théorème 4.4 [10]

Soit $G = (V, E)$ *un graphe localement fini. Soient* P *l'ensemble des sommets de* G *insaturés par au moins un couplage maximum de* G *,* $Q = \Gamma_G(P) \setminus P$ *et* $R = V \setminus (P \cup Q)$ *. Alors :*

1. *Les composantes connexes de* $G[P]$ *sont couplage-critiques.*
2. *Soient* χ *l'ensemble des composantes connexes de* P *et* H *le graphe biparti* (Q, χ, E') *défini par* $(q, C) \in E'$ *si et seulement si il existe* $c \in C$ *tel que* $(q, c) \in E$ *.* H *a un couplage qui sature* Q *et qui laisse* $\delta(G)$ *éléments de* χ *insaturés. Tout couplage de* H *saturant* Q *laisse au moins* $\delta(G)$ *éléments de* χ *insaturés,*
3. $G[R]$ *a un couplage parfait,*
4. *Tout couplage maximum de* G *se décompose en un couplage parfait de* $G[R]$ *, en un couplage de défaut 1 de chaque composante connexe de* $G[P]$ *et en un couplage de* H *saturant* Q *.*

La preuve de ce théorème que nous donnons ci-dessous s'appuie sur le théorème 3.1. Rappelons que si $G = (V, E)$ est un graphe localement fini *connexe* de défaut infini, alors $|V| = |\delta(G)| = \aleph_0$.

Démonstration

Soit $G = (V, E)$ un graphe localement fini. D'après le théorème 3.1 , il suffit de démontrer le théorème 4.4 lorsque G est de défaut infini. Supposons de plus que G soit connexe, le cas général s'en déduisant trivialement. G étant connexe, $D = V \setminus \cup F$ est dénombrable.

Soit $(d_n \,/\, n \in N^+)$ une énumération de D.

Posons $G_0 = G[\cup F]$, et pour tout $n \in N^+$ $G_n = G[\cup F \cup \{d_1, \ldots, d_n\}]$.

Pour tout $n \in N$, G_n est un graphe localement fini de défaut n, car F étant un couplage maximum de G , F est un couplage maximum de G_n .

D'après la définition 2.2 , on a :

1. Un couplage de G_n est maximum dans G_n si et seulement si il est de défaut n.
2. Un couplage maximum de G_n est maximum dans G .

En effet soit M un couplage maximum de G_n . Si F n'est pas maximum dans G , alors d'après la proposition 4.3 , il existe une chaîne C_1 M - alternée finie entre deux sommets x et y de G insaturés par M , ou une chaîne C_2 M - alternée issue d'un sommet x de G insaturé par M . Il existe $m \geqq n$ tel que x et y - ou x dans le socond cas - soient des sommets de G_m . M étant un couplage maximum de G_n , M est de défaut n dans G_n et de défaut $n + (m - n) = m$ dans G_m . M est donc maximum dans G_m, d'où la contradiction.

Pour tout n , G_n étant de défaut fini, d'après le théorème 3.1, il existe une partition $P_n + Q_n + R_n$ des sommets de G_n telle que P_n soit l'ensemble des sommets de G_n insaturés par au moins un couplage maximum de G_n , $Q_n = \Gamma_{Gn}(P_n) \setminus P_n$ et telle que $R_n = \cup F \cup \{d_1 , \ldots , d_n\} \setminus (P_n \cup Q_n)$.

On a $P_0 = Q_0 = \emptyset$ et $R_0 = \cup F$.

3. Pour tout n , $P_n \subset P_{n+1}$

En effet, tout couplage maximum de G_n est maximum dans G_{n+1} , d'après 1.

4. Pour tout n , $Q_n \subset Q_{n+1}$.

Puisque $P_n \subseteq P_{n+1}$, on a $Q_n \supseteq P_{n+1} \cup Q_{n+1}$. Montrons que $Q_n \cap P_{n+1} = \emptyset$. Supposons qu'il existe $y \in Q_n \cap P_{n+1}$. Par définition de P_{n+1} , il existe un couplage N maximum dans G_{n+1} qui laisse y insaturé. D'après le théorème 3.1, F sature Q_n et donc y . D'après le lemme 1.2.5 il existe une chaîne issue de y dont les arêtes sont alternativement dans F et dans N . Cette chaîne est finie car N est maximum. Son autre extrémité z est donc insaturée par F , et F étant un couplage maximum de G_n , d'après le théorème 3.1 on a $z \in P_n \cup \{d_{n+1}\}$. Si $z \in P_n$, alors d_{n+1} n'appartient pas à cette chaîne car d_{n+1} n'est pas saturé par F . En échangeant les arêtes de F et N le long de cette chaîne, on forme un couplage F' de G_n de défaut $\delta(F) = n$, donc maximum qui ne sature pas $y \in Q_n$, une contradiction.
On a donc $z = d_{n+1}$.
d_{n+1} n'est pas adjacent à P_n , car sinon d'après le théorème 3.1 , il existerait un couplage M maximum de G_n qui pourrait se prolonger en un couplage saturant d_{n+1} . M ne serait donc pas un couplage maximum de G , ce qui contredirait 2.
N laisse donc au moins $C_{cr}(P) - (|Q_n| - 1) + 1 = n + 2$ sommets de G_{n+1} insaturé. N étant maximum et G_{n+1} de défaut $n + 1$, c'est une contradiction.

Posons $P_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ et $Q_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$.
Soient P l'ensemble des sommets de G insaturés par au moins un couplage maximum , et $Q = \Gamma_G(P) \setminus P$.

5. $P = P_\infty$. Les composantes connexes de $G[P]$ sont couplage-critiques.

D'après 2. , on a $P_\infty \subseteq P$. Soit N un couplage maximum de G . Notons que $N \neq F$. Soit $z \in \cup F \setminus \cup N$. Il existe une chaîne C entre z et un sommet x de $\cup N \setminus \cup F$ dont les arêtes sont alternativement dans F et N . Comme $V \setminus \cup F = \{d_n / n \in \mathbb{N}\}$

$x = d_n$ pour un certain n . En échangeant les arêtes de F et N le long de la chaîne C , on forme un couplage F' maximum dans G_n tel que $\cup F' = (\cup F \cup \{d_n\}) \setminus \{z\}$. F' ne saturant pas z , on a $z \in P_n$, et donc $z \in P_\infty$. On a donc $P = P_\infty$, d'où $Q = Q_\infty$. Les composantes connexes de $G[P]$ sont donc couplage-critiques d'après 3 et 4 .

Soit N un couplage maximum de G .

6. Tout sommet de Q est couplé par N dans P .

Supposons qu'il existe une arête $\{x , y\} \in N$ telle que $x \in Q$ et $y \notin P$. Soit n tel que $x \in Q_n$. La composante connexe du graphe partiel $(V , F \cup N)$ est une chaîne dont les arêtes sont alternativement dans F et N . Si cette chaîne est sans extrémité, le couplage obtenu à partir de F en échangeant les arêtes le long de cette chaîne est maximum dans G_n et ne couple pas $x \in Q$ dans P , une contradiction d'après le théorème 3.2 . Si cette chaîne a au moins une extrémité, elle en a deux, l'une appartenant à $\cup F \setminus \cup N$, l'autre à $\cup N \setminus \cup F$. Il existe $m \geqq n$ tel que l'extrémité de la chaîne appartenant à $\cup N \setminus \cup F$ soit un sommet de G_n . Le couplage obtenu à partir de F en échangeant les arêtes le long de la chaîne est maximum dans G_m et ne couple pas $x \in Q_n \subseteq Q_m$ dans $P_m \subseteq P$, ce qui contredit le théorème 3.2 .

7. Pour toute composante connexe C de $G[P]$, au plus un sommet de C est couplé par N dans Q .

Supposons que deux sommets distincts x_1 et x_2 d'une composante connexe C de $G[P]$ soient couplés par N dans Q . Soient e_1 et e_2 les arêtes de N saturant x_1 et x_2 et C_1 , C_2 les composantes connexes du graphe partiel $(V , F \cup N)$ contenant e_1 et e_2 respectivement. Le couplage F' obtenu à partir de F en échangeant les arêtes le long de C_1 et C_2 est maximum dans G_n si $C \subset P_n$. F' couple deux sommets de C dans Q_n, ce qui contredit le théorème 3.2 et achève la preuve du théorème 4.4 .

Remarque 4.5

Soient $G = (V, E)$ un graphe localement fini et F un couplage maximum de G. Un couplage M de G est maximum si et seulement si il s'obtient à partir de F par transferts le long de chaînes F - alternées deux à deux disjointes (pour les sommets) et qui sont

- soit des cycles F - alternés élémentaires,

- soit des chaînes F - alternées élémentaires sans extrémité ,

- soit des chaînes F - alternées élémentaires finies issues d'un sommet insaturé par F .

Il suffit de montrer que tout couplage M obtenu à partir de F par transferts le long d'une chaîne F - alternée élémentaire finie issue d'un sommet x insaturé par F est maximum. Si G est de défaut fini (en particulier si G est fini) cela découle trivialement du lemme 1.2.5 car $\delta(F) = \delta(M)$. Dans le cas général, un autre raisonnement est nécessaire. D'après le théorème 1.2.2 l'ensemble χ des parties des supports des couplages de G forme une géométrie finitaire sur V . En effet :

1. Si $S \in \chi$ et si $S' \subset S$ alors $S' \in \chi$
2. Si $S \in \chi$ et si $T \in \chi$ tels que $|S| + 1 = |T| < \infty$ alors il existe $t \in T \setminus S$ tel que $S \cup \{t\} \in \chi$.
3. $S \in \chi$ si et seulement si toute partie finie de S appartient à χ .

Il suffit de montrer que $\cup M$ est une base de (V , χ) . M étant un couplage, $\cup M \in \chi$. Montrons donc que $\cup M$ est une partie maximale de χ . On sait qu'il existe une base B de (V , χ) telle que $\cup M \subseteq B \subseteq (\cup F) \cup (\cup M) = \cup F \cup \{x\}$ ([24] théorème 7.2.12). F étant maximum, $\cup F \cup \{x\} \notin \chi$, donc nécessairement $B = \cup M$, et M est un couplage maximum de G .

4. NOMBRE DE COUPLAGES PARFAITS D'UN GRAPHE LOCALEMENT FINI

1. Introduction

Kotzig a prouvé dans [19] que tout graphe fini contenant un et un seul couplage parfait a un isthme appartenant à ce couplage. Un graphe fini 2-arête-connexe contenant un couplage parfait en contient donc au moins deux. Il existe par contre des graphes localement finis (infinis) 2-arête-connexes ne contenant qu'un seul couplage parfait (cf. Exemple 2.2). Nous prouvons au paragraphe 2 que *tout graphe localement fini contenant un et un seul couplage parfait est au plus 2-connexe.*

Les graphes localement finis avec un et un seul couplage parfait sont étudiés au paragraphe 3.

Le théorème de Kotzig est le premier résultat sur le nombre $f(G)$ de couplages parfaits d'un graphe fini G. Auparavent, dans le cas particulier des graphes bipartis finis, M. Hall [16] avait estimé ce nombre ($f(G) \geqq n!$ si $G = (X,Y;E)$ est un graphe biparti fini contenant au moins un couplage parfait et si tout sommet de X est de degré supérieur ou égal à n). Beineke et Plummer [1] ont ensuite prouvé que $f(G) \geqq n$ si G est un graphe fini n-connexe contenant au moins un couplage parfait. Zaks [33] a amélioré ce résultat en démontrant que $f(G) \geqq n!!$ sous les mêmes hypothèses. Si n est impair cette borne inférieure est exacte en ce sens qu'il existe un graphe fini n-connexe (le graphe complet K_{n+1}) contenant exactement $n!!$ couplages parfaits.

Dans le cas particulier des graphes non bicritiques (un graphe est bicritique s'il a un couplage parfait et si le sous - graphe obtenu en enlevant deux quelconques de ses sommets a encore un couplage parfait) Lovász [20] a précisé cette borne inférieure : $f(G) \geqq n!$ si G est un graphe fini non bicritique et n-connexe.

Finalement, Mader [23] a donné une borne inférieure du nombre de couplages parfaits d'un graphe fini 2-connexe et contenant un couplage parfait qui ne dépend pas de la connexité mais du degré minimum : si G est un graphe fini 2-connexe de degré minimum n et si G contient au moins un couplage parfait, alors $f(G) \geqq n!!$ si n est impair, et $f(G) \geqq f(S_n)$ si n est pair, où S_n est le complémentaire d'un graphe formé de $n + 2$ arêtes deux à deux disjointes.

Dans un quatrième paragraphe, nous étudions le nombre de couplages parfaits d'un graphe localement fini en fonction de sa connexité. Nous montrons tout d'abord que *pour tout* n *, il existe des graphes localement finis (infinis)* n-*connexes qui ont un nombre fini non nul de couplages parfaits.* Des résultats semblables à ceux de Zaks et Lovász sont ensuite établis pour les graphes localement finis :

Un graphe localement fini n-*connexe avec un couplage parfait a au moins* $\frac{n!!}{2}$ *couplages parfaits si* n *est pair, et au moins* $\frac{2}{3}.n!!$ *couplages parfaits si* n *est impair.*

Un graphe localement fini non bicritique n-*connexe avec un couplage parfait a au moins* $(n - 1)!$ *couplages parfaits.*

Nous donnons également une nouvelle démonstration simple et courte du théorème de Zaks.

Une réponse négative est donnée en Annexe à une question inspirée de la célèbre conjecture de Van der Waerden [31] récemment démontrée par Egoritchev [12].

2. Graphes localement finis contenant un et un seul couplage parfait

Proposition 2.1 [9]

Soit $G = (V,E)$ *un graphe localement fini contenant un et un seul couplage parfait* F *. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *Il existe un sous - ensemble fini non vide* S *de* V *tel que* $C_1(V \setminus S) = |S|$,

(2) *Il existe un isthme de* G *appartenant à* F ,

(3) *Il existe un isthme* $\{x,y\}$ *de* G *appartenant à* F *tel que* $C_1(V \setminus \{x\}) = 1$ *ou* $C_1(V \setminus \{y\}) = 1$.

La propriété (1) est clairement vérifiée par tout graphe fini contenant un unique couplage parfait. La proposition 2.1 étend donc au graphes localement finis le théorème suivant de Kotzig [19] :

(A) *Tout graphe fini contenant un et un seul couplage parfait a un isthme appartenant à ce couplage.*

La démonstration de la proposition 2.1 utilise le théorème (A). Une preuve de ce théorème est donnée en remarque 2.4. Pour démontrer la proposition 2.1, nous utilisons aussi le théorème de factorisation (Théorème 1.2.4).

Démonstration

Clairement (3) $\Rightarrow$ (2) . Montrons que (1) $\Rightarrow$ (3) .

Soient S un sous - ensemble fini non vide de V tel que $C_1(V \setminus S) = |S|$ et $C_1, \ldots , C_p$ $(p = |S|)$ les composantes connexes impaires de $G[V \setminus S]$. Posons $C = \bigcup_{i=1}^{p} C_i$ et $G' = G[S \cup C]$. Les

C_i $(1 \leqq i \leqq p)$ étant impaires, tout sommet de S est nécessairement couplé par F dans C . G' a donc un et un seul couplage parfait F' et $F' \subset F$. De plus nous pouvons supposer que deux sommets quelconques de S sont adjacents dans G' sans créer d'autre couplage parfait de G' .

G' étant fini, d'après le théorème (A) une arête $\{x,y\}$ appartenant à F' est un isthme de G' et donc un isthme de G . Si $x \notin S$ et si $y \notin S$, x et y sont dans la même composante connexe de $G[C]$. Soit C_i cette composante. L'arête $\{x,y\}$ étant un isthme de G , il existe une partition $C_i = X + Y$ avec $x \in X$ et $y \in Y$, telle que un et un seul des deux ensembles X et Y soit adjacent à S . Si, par exemple, X est adjacent à S , alors

$$c_1(G'[S \cup C \setminus \{x\}]) = 1$$

et donc

$$c_1(G[V \setminus \{x\}]) = 1 .$$

Si $x \in S$, alors $y \in C$. L'arête $\{x,y\}$ étant un isthme de G , on a clairement

$$c_1(G[V \setminus \{x\}]) = 1 .$$

La propriété (3) est donc vérifiée.

Montrons que (2) $\Longrightarrow$ (1) .

Soit $e = \{x,y\}$ un isthme de G appartenant à F . Soient X et Y les composantes connexes du graphe partiel $G - e = (V, E \setminus \{e\})$ telles que $x \in X$ et $y \in Y$. Si la propriété (1) n'est pas vérifiée, on a

$$c_1(G[V \setminus (S \cup \{x\})]) \leqq |S|$$

pour tout sous - ensemble fini S de $V \setminus \{x\}$. D'après le théorème 1.2.4, $G[V \setminus \{x\}]$ a donc un couplage parfait. Soit L_x un couplage parfait de $G[V \setminus \{x\}]$. La composante connexe du graphe partiel

$(V, L_x \cup F)$ contenant x est nécessairement une chaîne alternée infinie C_x issue de x. Le seul sommet de X contenu dans C_x est clairement x. De même $G \setminus \{y\}$ a un couplage parfait L_y et la composante connexe du graphe partiel $(V, L_y \cup F)$ contenant y est une chaîne alternée infinie C_y issue de y. Le sommet y est le seul sommet de Y contenu dans C_y. $C_x \cup C_y$ est donc une chaîne alternée infinie sans extrémité. Une telle chaîne ne peut exister car G a un seul couplage parfait. La propriété (1) est donc vérifiée et la preuve de la proposition 2.1 est complète.

<u>Exemple 2.2</u>

Les graphes suivants sont 2-arête-connexes et ont un seul couplage parfait

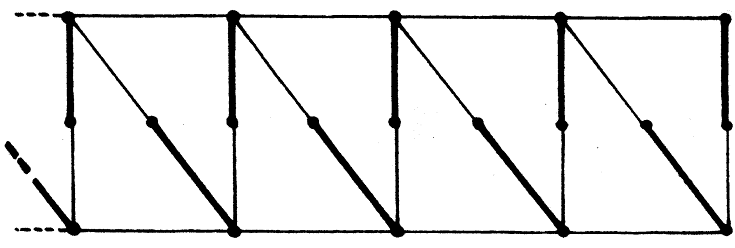

fig. 1

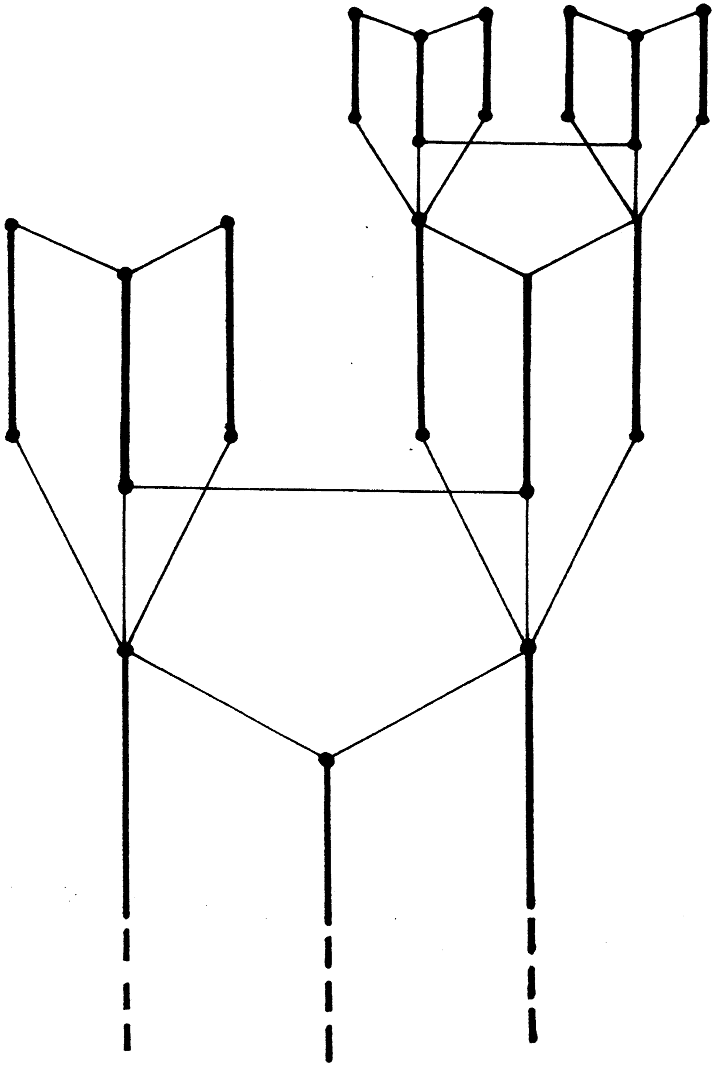

fig. 2

Théorème 2.3 [9]

Tout graphe localement fini contenant un et un seul couplage parfait est au plus 2-connexe.

Démonstration

Soit $G = (V,E)$ un graphe localement fini infini 3-connexe. Supposons que G ne contienne qu'un seul couplage parfait F. Soit $e = \{x,y\}$ une arête de G appartenant au couplage parfait F. Posons $G' = (V, E \setminus \{e\})$. F étant l'unique couplage parfait de G et e appartenant à F, le graphe partiel G' n'a pas de couplage parfait. D'après le théorème 1.3.2, il existe donc une partie finie T de V telle que

$$c_{cr}(G'[V \setminus T]) \geqq |T| + 1 .$$

G étant 3-connexe et ayant un seul couplage parfait, d'après la proposition 2.1 on a

$$c_{cr}(G[V \setminus T]) \leqq c_1(G[V \setminus T]) \leqq |T| - 1 .$$

L'arête e connecte donc deux composantes couplage-critiques A et B de $G'[V \setminus T]$ et on a

$$c_{cr}(G'[V \setminus T]) = |T| + 1$$

et

$$c_{cr}(G[V \setminus T]) = |T| - 1 .$$

T sépare l'ensemble fini $A \cup B$ de l'ensemble $V \setminus (T \cup A \cup B)$. G étant 3-connexe, on a nécessairement $|T| \geqq 3$.

Soient $C_1, \ldots, C_p$ $(|T| = p + 1,\ p \geqq 2)$ les composantes connexes couplage-critiques de $G'[V \setminus T]$. Chaque C_i est couplée dans T par une et une seule arête de F. Sinon, les C_i étant impaires, l'une d'entre elles serait couplée dans T par au moins trois arêtes de F et $|T| + 1$ arêtes de F au moins seraient incidentes à T ce qui est impossible.

Pour tout $i = 1, \ldots, n$, soit t_i le sommet de T couplé par F dans C_i. Soit H le graphe biparti dont l'ensemble des sommets est $\{C_1,\ldots,C_p\} \cup \{t_1,\ldots,t_p\}$ avec une arête $\{C_i,t_j\}$ si et seulement si t_j est adjacent à C_i dans G. G étant 3-connexe, le degré dans H de chaque C_i est au moins 2. D'après le théorème 1.4.3, H a au moins deux couplages parfaits. Les C_i étant couplage-critiques, tout couplage parfait de H s'étend en un couplage parfait de $G[C_1 \cup \ldots \cup C_p \cup \{t_1,\ldots,t_p\}]$ et finalement en un couplage parfait de G. G a donc plus d'un couplage parfait, d'où la contradiction.

<u>Remarque 2.4</u>

En modifiant légèrement la preuve du théorème 2.3, il est possible de prouver le théorème (A) de Kotzig. Cette preuve est due à Mader [22].

Un graphe fini contenant un et un seul couplage parfait a un isthme appartenant à ce couplage.

Soit $G = (V,E)$ un graphe fini 2-connexe. Supposons que G ait un unique couplage parfait F. Soit e une arête de G appartenant à F et soit G' le graphe partiel $(V, E \setminus \{e\})$. G' n'a pas de couplage parfait, il existe donc $T \subseteq V$ tel que

$$C_{cr}(G'[V \setminus T]) \leqq |T| + 1 .$$

Comme G a un couplage parfait, on a

$$C_{cr}(G[V \setminus T]) \leqq |T| .$$

L'arête e relie donc deux composantes couplage-critiques de $G'[V \setminus T]$ et on a

$$C_{cr}(G'[V \setminus T]) = |T| + 1 .$$

$T \neq \emptyset$ car sinon e serait un isthme de G. G étant 2-connexe

$|T| \geq 2$ et toute composante connexe couplage-critique de $G[V \setminus T]$ est adjacente à au moins deux sommets de T. On achève cette preuve comme celle du théorème 2.3.

3. Propriétés des graphes localement finis 2-connexes contenant un et un seul couplage parfait

Proposition 3.1

Soit $G = (V,E)$ *un graphe localement fini 2-connexe contenant un et un seul couplage parfait* F. *Soit* $S = \{s_1,s_2\}$ *un ensemble de séparation de* G *de cardinal* 2 *tel que* $G[V \setminus S]$ *ait une composante connexe paire (non vide)* C.

1. *Si* F *induit un couplage parfait de* $G[C]$, *alors c'est le seul couplage parfait de* $G[C]$, $G[V \setminus C]$ *a un seul couplage parfait* N *et* $\{s_1,s_2\} \notin N$.

2. *Si* F *n'induit pas de couplage parfait de* $G[C]$ *alors* $\{s_1,s_2\} \notin E$. *Si* t_1 *et* t_2 *sont deux sommets de* C *tels que* $\{s_1,t_1\} \in F$ *et* $\{s_2,t_2\} \in F$ *alors* $G[C \setminus \{t_1,t_2\}]$ *a un seul couplage parfait et le graphe* G' *formé en ajoutant l'arête* $\{s_1,s_2\}$ *à* $G[V \setminus C]$ *a un seul couplage parfait. Ce couplage parfait contient l'arête* $\{s_1,s_2\}$.

Démonstration

1. L'unicité du couplage parfait de $G[C]$ est claire. Soit G' le graphe formé en ajoutant l'arête $\{s_1,s_2\}$ à $G[V \setminus C]$ si $G[V \setminus C]$ ne la contient pas, $G' = G[V \setminus C]$ sinon.
$F' = \{\{x,y\} \in F / x \notin C,\ y \notin C\}$ est un couplage parfait de G'.
Si G' a un second couplage parfait N_1, nécessairement $\{s_1,s_2\} \in N_1$, car sinon G aurait lui - même deux couplages parfaits. Soit G'' le graphe formé en ajoutant l'arête $\{s_1,s_2\}$

à $G[C \cup \{s_1,s_2\}]$. Ce graphe est fini et 2-connexe. Si $F'' = \{\{x,y\} \in F / x \in C, y \in C\}$, $F'' \cup \{s_1,s_2\}$ est un couplage parfait de G'' . D'après le théorème (A), G'' a un second couplage parfait N_2 . N_2 ne contient pas l'arête $\{s_1,s_2\}$ car sinon $G[C]$ aurait deux couplages parfaits, et donc G aurait également deux couplages parfaits . $N_2 \cup (N_1 \setminus \{s_1,s_2\})$ est donc un couplage parfait de G différent de F , d'où la contradiction.

2. Si $F'' = \{\{x,y\} \in F / x \in C, y \in C\}$ n'est pas un couplage parfait de $G[C]$, C étant paire il existe t_1 et t_2 dans C tels que $\{s_1,t_1\} \in F$ et $\{s_2,t_2\} \in F$. $G[C \setminus \{t_1,t_2\}]$ a un seul couplage parfait, car sinon G en aurait deux. De même, $G[V \setminus (C \cup S)]$ a un seul couplage parfait. De plus, $\{s_1,s_2\} \notin E$. Sinon, $G[C \cup S]$ serait 2-connexe et contiendrait donc au moins deux couplages parfaits. Chacun de ces couplages se prolongeant en des couplages de G d'après ce qui précède, G aurait deux couplages parfaits, d'où la contradiction. Soit G' le graphe obtenu en ajoutant l'arête $\{s_1,s_2\}$ à $G[V \setminus C]$. Si $F' = \{\{x,y\} \in F / x \notin C, y \notin C\}$, $F' \cup \{s_1,s_2\}$ est un couplage parfait de G' . Supposons que G' ait un second couplage parfait N_1 . Alors $\{s_1,s_2\} \notin N_1$, car sinon

$$(N_1 \setminus \{s_1,s_2\}) \cup \{\{x,y\} \in F / x \in C \cup S, y \in C \cup S\}$$

serait un couplage parfait de G différent de F , ce qui est impossible. Considérons le graphe fini G''' formé en ajoutant l'arête $\{s_1,s_2\}$ à $G[C \cup S]$. Ce graphe est 2-connexe et $\{\{x,y\} \in F / x \in C, y \in C\} \cup \{s_1,s_2\}$ est un couplage parfait de G''' . D'après le théorème (A), G''' a un second couplage parfait N_2 . $\{s_1,t_1\} \notin N_2$ et $\{s_2,t_2\} \notin N_2$, car sinon $G[C \setminus \{t_1,t_2\}]$

aurait deux couplages parfaits. On a donc $\{s_1,s_2\} \in N_2$.

$N_1 \cup (N_2 \setminus \{s_1,s_2\})$ est donc un couplage parfait de G différent de F , d'où la contradiction.

Proposition 3.2

Soit $G = (V,E)$ *un graphe infini localement fini 2-connexe contenant un seul couplage parfait* F . *Si* S *est un ensemble de séparation de* G *de cardinal* 2 , *alors* $G[V \setminus S]$ *a une seule composante connexe infinie.*

Démonstration

Soit $G = (V,E)$ un graphe infini localement fini 2-connexe contenant un seul couplage parfait F . Soit $S = \{s_1,s_2\}$ un ensemble de séparation de G .

Si x est un sommet de G , une chaîne alternée (pour F) infinie issue de x et commencant par l'arête de F qui sature x sera appelée une *F-chaîne issue de* x .

Supposons que $G[V \setminus S]$ ait plus d'une composante connexe infinie.

1er cas $\{s_1,s_2\} \in F$

Soient C_1 et C_2 deux composantes connexes infinies distinctes de $G[V \setminus S]$. $G_1 = G[C_1 \cup S]$ et $G_2 = G[C_2 \cup S]$ sont 2-connexes et ont chacun un seul couplage parfait

$F_1 = \{\{x,y\} \in F / x \in C_1 \cup S,\ y \in C_1 \cup S\}$

et $F_2 = \{\{x,y\} \in F / x \in C_2 \cup S,\ y \in C_2 \cup S\}$

respectivement. D'après la proposition 2.1, G_1 étant 2-connexe et ayant un seul couplage parfait, $c_1(G[C_1 \cup S \setminus T]) \leqq |T| - 1$ pour toute partie finie non vide T de $C_1 \cup S$. On a donc

$c_1(G_1[C_1 \cup S \setminus T \cup \{s_1\}]) \leqq |T|$ pour toute partie finie T de

$V \setminus \{s_1\}$. D'après le théorème 1.2.1, $G_1 - C_1 \cup S \setminus \{s_1\}$ a donc un couplage parfait. D'après le lemme 1.2.5 il existe une F-chaîne $_1$ issue de s_1 dans G_1 . De même, il existe une F-chaîne $_2$ issue de s_2 dans G_2 . $_1 \cup _2$ est donc une chaîne alternée sans extrémité dans G ce qui contredit l'unicité du couplage parfait F .

<u>2ème cas</u> $\{s_1, s_2\} \notin F$

Quatre cas peuvent se présenter :

1. $G[V \setminus S]$ a une composante connexe paire C dans laquelle s_1 et s_2 sont tout deux couplés par F ,

2. s_1 et s_2 sont couplés par F dans deux composantes connexes infinies distinctes de $G[V \setminus S]$, C_1 et C_2 respectivement,

3. s_1 et s_2 sont couplés par F dans la même composante connexe infinie C_1 de $G[V \setminus S]$. $G[V \setminus S]$ a alors une seconde composante connexe infinie,

4. s_1 est couplé par F dans une composante connexe infinie C_1 de $G[V \setminus S]$ et s_2 est couplé par F dans une composante connexe finie C_0 de $G[V \setminus S]$. C_0 est donc paire et il existe une composante connexe infinie C_2 de $G[V \setminus S]$ distincte de C_1 .

1. D'après la proposition 3.1, le graphe G' formé en ajoutant l'arête $\{s_1, s_2\}$ à $G[V \setminus C]$ a un seul couplage parfait et ce couplage contient l'arête $\{s_1, s_2\}$. On est donc ramené au premier cas.

2. D'après la proposition 2.1, G étant 2-connexe, $C_1(V \setminus T) \leqq |T| - 1$ pour toute partie non vide T de V . $G[V \setminus \{s_1\}]$ et $G[V \setminus \{s_2\}]$ ont donc chacun un couplage parfait. Il existe donc une F-chaîne $_1$ issue de s_1 et une F-chaîne $_2$ issue de s_2 . L'une au moins de ces deux chaînes ne rencontre

qu'une seule des deux composantes C_1 et C_2 , car sinon G contiendrait un cycle alterné. Supposons que $\mathcal{C}_2$ ne rencontre qu'une seule des deux composantes C_1 et C_2 . Le sommet s_2 étant par hypothèse couplé par F dans C_2 , la chaîne $\mathcal{C}_2$ rencontre C_2 . De même $\mathcal{C}_1$ rencontre C_1 . Supposons que $\mathcal{C}_1$ rencontre C_2 . Soit t_1 le sommet de C_1 tel que $\{s_1,t_1\} \in F$. Si $G[C_1 \setminus \{t_1\}]$ n'a pas d'isthme appartenant à $F_1 = \{\{x,y\} \in F / x \in C_1 \setminus \{t_1\},\ y \in C_1 \setminus \{t_1\}\}$, alors pour tout $x \in C_1 \setminus \{t_1\}$ il existe, d'après la proposition 2.1 et le lemme 1.2.5, une F-chaîne $\mathcal{C}_x$ issue de x dans $C_1 \setminus \{t_1\}$. Si $x \in \Gamma_G(s_2) \cap C_1$, $\mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_2$ est une chaîne alternée sans extrémité, ce qui contredit l'unicité du couplage parfait F . Si $G[C_1 \setminus \{t_1\}]$ a au moins un isthme appartenant à F , le sous - graphe partiel $G' = (C_1 \cup S, E')$ - où $E' = \{\{x,y\} \in F / x \in C_1 \cup S,\ y \in C_1 \cup S\} \cup \{s_1,s_2\}$ - n'a pas d'isthme car G est 2-connexe. s_1 et s_2 étant de degrés finis, $G[C_1 \setminus \{t_1\}]$ a au plus un nombre fini d'isthmes. Soit donc $e = \{x,y\}$ un isthme de $G[C_1 \setminus \{t_1\}]$ appartenant à F_1 tel qu'une composante connexe infinie C_3 de $G[C_1 \setminus \{t_1\}] - e$ n'ait pas d'isthme appartenant à F . G étant 2-connexe, il existe $z \in C_3$ tel que $z \in \Gamma_G(s_1) \cup \Gamma_G(s_2)$. $G[C_3]$ n'ayant pas d'isthme il existe, d'après la proposition 2.1 et le lemme 1.2.5, une F-chaîne $\mathcal{C}_z$ issue de z dans $G[C_3]$. Si $z \in \Gamma_G(s_i)$ $(i = 1,2)$ $\mathcal{C}_z \cup \mathcal{C}_i \cup \{z,s_i\}$ est une chaîne alternée sans extrémité qui contredit l'unicité de F .

Supposons que $\mathcal{C}_1$ ne rencontre pas C_2 . Soit G' le graphe graphe obtenu à partir de $G[C_1 \cup C_2 \cup S]$ en contractant C_1 en un point. Comme G , G' est 2-connexe. s_1 étant couplé par F dans C_1 et s_2 dans C_2 , F induit un couplage parfait F' de G' . G' a un seul couplage parfait, car sinon G en aurait plus d'un. Soit $t \in \Gamma_G(s_1) \cap C_2$. D'après la proposition 2.1 et le lemme 1.2.5, il existe une F-chaîne μ issue de t dans G' . On peut alors clairement former à partir de μ_1 et de μ une chaîne alternée sans extrémité, ce qui contredit l'unicité de F .

3\. s_1 et s_2 sont couplés par F dans la même composante connexe infinie C_1 de $G[V \setminus S]$. Soit C_2 une composante connexe infinie de $G[V \setminus S]$ distincte de C_1 . Soient t_1 et t_2 les deux sommets distincts de C_1 tels que $\{s_1,t_1\} \in F$ et $\{s_2,t_2\} \in F$.

3.1 Supposons qu'il n'existe pas de chaîne (élémentaire) alternée dans $G[C_1]$ entre t_1 et t_2 . G étant 2-connexe il existe, d'après la proposition 2.1 et le lemme 1.2.5, une F-chaîne μ_1 issue de s_1 et une F-chaîne μ_2 issue de s_2 . Comme il n'existe pas de chaîne alternée entre t_1 et t_2 , ni μ_1 ni μ_2 ne rencontre C_2 . $G[C_2]$ a clairement un couplage parfait F_2 induit par F . $G[C_2]$ n'a pas d'autre couplage parfait car F est l'unique couplage parfait de G . Si $G[C_2]$ n'a pas d'isthme appartenant à F_2 , d'après la proposition 2.1 et le lemme 1.2.5, il existe pour tout $x \in C_2$ une F_2-chaîne μ_x isssue de x dans $G[C_2]$. Si $x \in \Gamma_G(s_1) \cap C_2$, $\mu_1 \cup \mu_x$ est une chaîne (élémentaire) alternée sans extrémité qui contredit l'unicité de F . Si $G[C_2]$ contient au moins un isthme appartenant à F_2 , il en a au plus un nombre fini. Soit donc $e = \{x,y\}$ un isthme de $G[C_2]$ tel qu'aucune composante connexe infinie C_3 de $G[C_2] - e$ ne contienne un isthme appartenant à F_2. D'après la proposition 2.1 et le lemme 1.2.5, pour tout $z \in C_3$ il existe une F_2-chaîne μ_z issue de z dans $G[C_3]$. Si $z \in \Gamma_G(s_1) \cap C_3$ (ou si $z \in \Gamma_G(s_2) \cap C_3$) $\mu_1 \cup \mu_z$ (ou $\mu_2 \cup \mu_z$) est une chaîne élémentaire alternée sans extrémité qui contredit l'unicité de F .

3.2 Supposons qu'il existe une chaîne élémentaire alternée entre t_1 et t_2 dans $G[C_1]$. $G[C_2 \cup S \cup \mathcal{C}]$ est donc 2-connexe et contient un et un seul couplage parfait induit par F . D'après la proposition 2.1 et le lemme 1.2.5, il existe une F-chaîne $\mathcal{C}_1$ (respectivement $\mathcal{C}_2$) issue de s_1 (respectivement s_2) dans $G[C_2 \cup S \cup \mathcal{C}]$. Soit C_3 une composante connexe infinie de $G[C_1 \setminus \mathcal{C}]$. $G[C_1 \setminus \mathcal{C}]$ a clairement un unique couplage parfait induit par F , il en est donc de même pour $G[C_3]$. Si $G[C_3]$ ne contient pas d'isthme appartenant à F , d'après la proposition 2.1 et le lemme 1.2.5 il existe pour tout $x \in C_3$ une F-chaîne $\mathcal{C}_x$ issue de x dans $G[C_3]$. Si $x \in \Gamma_G(\mathcal{C}) \cap C_3$, on peut former à l'aide de $\mathcal{C}_x$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$ une chaîne élémentaire alternée sans extrémité, ce qui contredit l'unicité de F . Si $G[C_3]$ contient au moins un isthme appartenant à F , il en a au plus un nombre fini. Soit donc $e = \{x,y\}$ un tel isthme de $G[C_3]$ tel qu'une composante connexe infinie C_4 de $G[C_3] - e$ ne contienne pas d'isthme appartenant à F . D'après la proposition 2.1 et le lemme 1.2.5, il existe pour tout $z \in C_4$ une F-chaîne $\mathcal{C}_z$ issue de z dans $G[C_4]$. Si $z \in \Gamma_G(S \cup \mathcal{C}) \cap C_4$ on peut former à l'aide de $\mathcal{C}_z$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$ une chaîne élémentaire alternée sans extrémité, ce qui contredit l'unicité de F .

4. s_1 est couplé par F dans une composante connexe infinie C_1 de $G[V \setminus S]$ et s_2 dans une composante connexe impaire C_0 de $G[V \setminus S]$. Soit C_2 une composante connexe infinie de $G[V \setminus S]$ distincte de C_1 . Soient $t_1 \in C_1$ et $t_2 \in C_0$ tels que $\{s_1,t_1\} \in F$ et $\{s_2,t_2\} \in F$. D'après la proposition 2.1 et le lemme 1.2.5, G étant 2-connexe il existe une F-chaine $\mathcal{C}_2$ issue de s_2 . $\mathcal{C}_2$ contient nécessairement l'arête $\{s_1,t_1\}$ car S sépare C_0 du

reste du graphe. De même, il existe une F-chaîne ${}_1$ issue de s_1 . ${}_1$ et ${}_2$ ne rencontrent pas $G C_2$, car toute arête de F ayant une extrémité dans C_2 a l'autre extrémité également dans C_2 . F induit clairement un couplage parfait F_2 de $G C_2$. Si $G C_2$ n'a pas d'isthme appartenant à F_2 , d'après la proposition 2.1 et le lemme 1.2.5 de tout $x \in C_2$ est issue une F_2-chaîne ${}_x$ dans $G C_2$. Si $x \in \Gamma_G(s_2) \cap S_2$, alors ${}_x \cup {}_2$ est une chaîne élémentaire alternée sans extrémité qui contredit l'unicité de F . Si $G C_2$ contient au moins un isthme appartenant à F_2 , il en a au plus un nombre fini, car G est 2-connexe et localement fini. Soit donc $e = \{x,y\}$ un isthme de $G C_2$ appartenant à F_2 tel qu'une composante connexe infinie C_3 de $G C_2 - e$ ne contienne aucun isthme appartenant à F_2 . D'après la proposition 2.1 et le lemme 1.2.5, de tout $z \in C_3$ est issue une F_2-chaîne ${}_z$ dans $G C_3$. Si $z \in \Gamma_G(s_1) \cap C_3$ (ou $z \in \Gamma_G(s_2) \cap C_3$) ${}_1 \cup {}_z$ (ou ${}_2 \cup {}_z$) est une chaîne élémentaire alternée sans extrémité qui contredit l'unicité de F .

La preuve de la proposition 3.2 est complète.

La proposition 3.1 admet une "réciproque" en ce sens que si $G = (V,E)$ est un graphe localement fini 2-connexe contenant un et un seul couplage parfait, on peut augmenter G en un graphe vérifiant les mêmes propriétés.

Proposition 3.3

Soit $G = (V,E)$ *un graphe localement fini 2-connexe contenant un et un seul couplage parfait* F . *Si* H *est un graphe fini disjoint de* G *contenant un et un seul couplage parfait* L , *si* s_1 *et* s_2 *sont deux sommets de* G *tels que* $\{s_1,s_2\} \notin F$, *en joignant* s_1 *et* s_2 *a des sommets de* H *de sorte que le graphe* G' *obtenu soit*

2-connexe, G' *a un unique couplage parfait* $F \cup L$.

Si s_1 *et* s_2 *sont deux sommets de* G *tels que* $\{s_1,s_2\} \in L$ *,* *si* t_1 *et* t_2 *sont deux nouveaux sommets, en joignant* s_1 *à* t_1 *,* s_2 *à* t_2 *,* s_1 *,* t_1 *,* s_2 *,* t_2 *à des sommets de* H *de sorte que le graphe obtenu soit 2-connexe, on forme en supprimant l'arête* $\{s_1,s_2\}$ *un graphe avec un unique couplage parfait*

$L \cup (F \setminus \{s_1,s_2\}) \cup \{\{s_1,t_1\},\{s_2,t_2\}\}$.

La démonstration de cette proposition est immédiate.

Si tout graphe $G = (V,E)$ localement fini 2-connexe contenant un et un seul couplage parfait a un ensemble S de séparation de cardinal 2 tel que $C_0(V \setminus S) \geqq 1$, alors tout graphe localement fini 2-connexe contenant un et un seul couplage parfait pourra être construit par une suite (infinie) de constructions semblables à celles décrites dans la proposition 3.3.

Conjecture 3.4

Tout graphe $G = (V,E)$ *localement fini 2-connexe contenant un et un seul couplage parfait a un ensemble de séparation* S *de cardinal* 2 *tel que* $C_0(V \setminus S) \geqq 1$.

Nous avons prouvé cette propriété pour une classe particulière de graphes 2-connexes contenant un et un seul couplage parfait.

Proposition 3.5

Soit $G = (V,E)$ *un graphe localement fini 2-connexe contenant un et un seul couplage parfait* F *. Si* G *est minimal en ce sens que pour toute arête* $e \notin F$ *,* $G - e$ *n'est pas 2-connexe, alors* G *a un ensemble de séparation* S *de cardinal* 2 *tel que*

$C_0(V \setminus S) \geqq 1$.

Démonstration

Supposons que $C_0(V \setminus S) = 0$ pour toute partie S de cardinal 2 de V.

1. Toute arête $e = \{x,y\} \notin F$ a une extrémité de degré 2.

En effet d'après la propriété de minimalité de G, $G - e$ n'est pas 2-connexe. Soit a un sommet d'articulation de $G - e$. $G - e[V \setminus \{a\}]$ a une seule composante connexe infinie, car sinon $G[V \setminus \{a,x\}]$ en aurait plus d'une, ce qui est impossible d'après la proposition 3.2. Si C est une composante connexe finie de $G - e[V \setminus \{a\}]$ alors nécessairement $|C| = 1$ car sinon $G[V \setminus \{a,x\}]$ ou $G[V \setminus \{a,y\}]$ aurait une composante connexe paire. Une des extrémités de e est clairement dans C. Supposons donc que $C = \{y\}$. On a alors $d_G(y) = 2$.

2. Les deux extrémités d'une arête de G ne sont pas toutes deux de degré 2.

Supposons en effet que $e = \{x,y\}$ soit une arête de G telle que $d_G(x) = d_G(y) = 2$. Soit α le sommet de G différent de y adjacent à x et soit β le sommet de G différent de x et adjacent à y. $\{x,y\}$ est une composante connexe de $G[V \setminus \{\alpha,\beta\}]$ d'où la contradiction.

3. Soit $e = \{x,y\} \in E \setminus F$. Supposons que $d_G(x) = 2$ (et donc que $d_G(y) \geqq 3$, d'après 2). Il n'existe pas de chaîne impaire entre x et y autre que e.

Soit $\alpha \in V$ tel que $\{\alpha,y\} \in F$ (donc on a $\alpha \neq x$). Supposons qu'il existe une chaîne impaire C entre x et y qui n'emprunte pas l'arête $\{\alpha,y\}$. Soit y_1 le sommet de C adjacent à y. Comme $\{y_1,y\} \notin F$ et comme $d_G(y) \geqq 3$ on a nécessairement $d_G(y_1) = 2$ d'après 1. Si y_2 est le sommet de C adjacent à y_1 et différent de y, on a nécessairement $\{y_1,y_2\} \in F$ car $d_G(y_1) = 2$. En réitérant ce raisonnement, on prouve que C est alternée. Comme C est par hypothèse impaire, la dernière arête $\{y_n,x\}$ de C n'est pas dans F . D'autre part $d_G(x) = 2$ et $\{x,y\} \in F$. Donc nécessairement $\{y_n,x\} \in F$ d'où la contradiction.

Supposons qu'il existe une chaîne impaire entre x et y empruntant l'arête $\{y,\alpha\}$ de F . Soit x_1 le sommet de C adjacent à x . $\{x,x_1\} \in F$ car $d_G(x) = 2$. D'après 2 $d_G(x_1) \geqq 3$. Si x_2 est le sommet de C adjacent à x_1 et différent de x , $\{x_1,x_2\} \notin F$ et $d_G(x_2) = 2$ car $d_G(x_1) \geqq 3$. L'arête suivante $\{x_2,x_3\}$ de C est nécessairement dans F . En réitérant ce raisonnement, on prouve que C est une chaîne alternée entre x et y dont les deux arêtes terminales sont dans F . $C \cup e$ est donc un cycle alterné qui contredit l'unicité de F .

Montrons qu'il n'existe pas de chaîne paire entre x et y . Supposons qu'il existe une chaîne paire C entre x et y n'empruntant pas l'arête $\{y,\alpha\}$ de F . Soit $y_0 = y, y_1, \ldots, y_{2n} = x$ la suite des sommets de C . En raisonnant comme précédemment à partir de y , on montre que pour tout $k = 0, \ldots, n$ $d_G(y_{2k}) \geqq 3$ et donc que $d_G(x) \geqq 3$ d'où la contradiction.

Supposons finalement qu'il existe une chaîne paire C entre x et y empruntant l'arête $\{y,\alpha\}$ de F . Soit $x_0 = x, \ldots, x_{2n} = y$ la suite des sommets de C . Comme précédemment, on montre que pour tout $k = 0, \ldots, n$ on a $d_G(y_{2k}) = 2$. En particulier $d_G(y) = 2$, d'où la contradiction.

La seule chaîne entre x et y est donc l'arête e , ce qui contredit la 2-connexité de G et achève la démonstration de la proposition.

Du théorème (A) découle trivialement cette caractérisation des graphes finis contenant un et un seul couplage parfait [20] :

Un graphe fini contient un et un seul couplage parfait si et seulement si il peut être construit par itérations de la construction suivante :

Soient G_1 *et* G_2 *deux graphes disjoints contenant chacun un et un seul couplage parfait,* s_1 *et* s_2 *deux nouveaux sommets.* s_1 *est joint par une arête à* s_2 *,* s_1 *à au moins un sommet de* G_1 *et* s_2 *à au moins un sommet de* G_2 *.*

En appliquant cette construction à partir de deux graphes G_1 et G_2 réduits à une arête, en joignant s_1 à tout sommet de G_1 , s_2 à tout sommet de G_2 et en prenant à chaque étape pour G_1 et G_2 deux copies disjointes du graphe construit à l'étape précédente, on forme à la n-ième étape un graphe G_n de degré minimum n . De plus G_n a clairement un seul isthme e , et les deux composantes connexes de $G_n - e$ ont chacune plus de n sommets. On en déduit la proposition suivante :

<u>Proposition 3.6</u>

Pour tout entier n *, il existe des graphes localement finis 2-connexes contenant un et un seul couplage parfait dont le degré minimum soit supérieure ou égal à* n *.*

<u>Démonstration</u>

Soit $G = (V,E)$ un graphe localement fini 2-connexe contenant un et un seul couplage parfait. Soit n un entier. Pour tout sommet x de G de degré $k \leqq n - 1$, nous appliquons la construction suivante :

Soit y un sommet de G adjacent à x tel que $\{x,y\} \in F$. Considérons un graphe fini G_{n-k} disjoint de G défini plus haut. Soit e l'isthme de G_{n-k} et X, Y les deux composantes connexes de $G_{n-k} - e$. En joignant x à tout sommet de X et y à tout sommet de Y , on forme un graphe G' qui est localement fini, 2-connexe et a un couplage parfait. On a $d_{G'}(x) \geqq n$. G' a un seul couplage parfait d'après la proposition 3.3.

4. Nombre de couplages parfaits d'un graphe localement fini n-connexe

Si G est un graphe localement fini, $f(G)$ désignera le nombre de couplages parfaits de G, si G a un nombre fini de couplages parfaits, $f(G) = \infty$ sinon. Si n est un entier, $f(n)$ désignera la plus petite valeur de $f(G)$ lorsque G parcourt la classe des graphes localement finis n-connexes contenant au moins un couplage parfait. En ces termes, le théorème 2.4 devient $f(3) \geqq 2$. Les exemples qui suivent montrent que $f(n)$ est fini pour tout n.

Exemples 4.1

Soit $n \geqq 3$ un entier. Définissons un graphe localement fini T_n. Soit $(X_m/m\varepsilon N)$ une suite d'ensembles deux à deux disjoints, chacun d'entre eux de cardinal n. Posons $X_m = \{x_1^m, \ldots, x_n^m\}$. L'ensemble des sommets de T_n est $\bigcup_{m\varepsilon N} X_m$ et l'ensemble E des arêtes de T_n est défini par :

si m est impair ou si $m = 0$

$\{x_i^m, x_j^{m+1}\} \varepsilon E \quad 1 \leqq i \leqq n \, , \quad 1 \leqq j \leqq n$

si m est pair et si $m \neq 0$

$\{x_i^m, x_i^{m+1}\} \varepsilon E \quad 1 \leqq i \leqq n \, .$

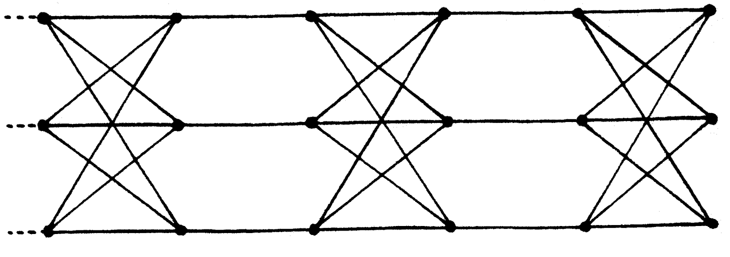

fig. 3 Le graphe T_3 .

Il est clair que T_n est n-connexe et contient au moins un couplage parfait. Montrons que T_n a exactement $n!$ couplages parfaits. Si F est un couplage parfait de T_n, tout sommet de X_0 est clairement couplé par F dans X_1. X_0 et X_1 ayant même cardinal, tout sommet de X_1 est couplé par F dans X_0. Tout couplage parfait de $T_n[X_0 \cup X_1]$ peut donc s'étendre en un couplage parfait de T_n. $T_n[X_0 \cup X_1]$ a exactement $n!$ couplages parfaits. Montrons que tous les couplages parfaits de T_n coïncident sur $T_n[\bigcup_{m \geq 2} X_m]$. Si F est un couplage parfait de T_n, X_1 étant couplé par F dans X_0, X_2 est nécessairement couplé par F dans X_3. Par définition de T_n, il n'y a qu'une manière de coupler X_2 dans X_3. De manière générale, pour tout entier k X_{2k} est couplé par F dans X_{2k+1} et il n'y a qu'une manière de réaliser ces couplages. Il s'ensuit que T_n a exactement $n!$ couplages parfaits. On a donc $f(n) \leqq n!$ pour tout entier n.

Rappelons qu'un graphe est bicritique s'il contient un couplage parfait, et si le graphe obtenu en supprimant deux sommets quelconques contient encore un couplage parfait.

<u>Proposition 4.2</u>

Soit $G = (V,E)$ *un graphe localement fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) G *est bicritique,*

(2) $C_1(V \setminus S) \leqq |S| - 2$ *pour toute partie finie* S *de* V *telle que* $|S| \geqq 2$,

(3) $C_{cr}(V \setminus S) \leqq |S| - 2$ *pour toute partie finie* S *de* V *telle que* $|S| \geqq 2$,

On démontre facilement que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) à l'aide des théorèmes 1.2.4 et 1.3.2.

Théorème 4.3 9

Un graphe localement fini n-*connexe non bicritique et contenant un couplage parfait a au moins* $(n - 1)!$ *couplages parfaits.*

Lovász a montré dans [20] qu'un graphe fini n-connexe non bicritique contenant un couplage parfait a au moins $n!$ couplages parfaits. La preuve que nous donnons du théorème 4.3 n'utilise pas ce théorème de Lovász. Une preuve du théorème de Lovász se déduit simplement de la démonstration du théorème 4.3 (cf. Remarque 4.4).

Démonstration

Soit $G = (V,E)$ un graphe localement fini n-connexe $(n \geqq 3)$ non bicritique et contenant au moins un couplage parfait. G n'étant pas bicritique, d'après la proposition 4.2 il existe une partie finie S de V telle que $|S| \geqq 2$ et $C_{cr}(V \setminus S) \geqq |S| - 1$.

1er cas

Il existe une partie finie non vide S de V telle que $C_{cr}(V \setminus S) = |S|$.

G étant n-connexe et S séparant G on a nécessairement $|S| \geqq n$. Soient $C_1, \ldots, C_p$ $(p = |S|)$ les composantes connexes couplage-critiques de $G[V \setminus S]$. Soit H le graphe biparti dont l'ensemble des sommets est $\{C_1, \ldots, C_p\} \cup S$, avec une arête $\{C_i, s\}$ $(s \in S)$ si et seulement si C_i est adjacent à s dans G. G étant n-connexe, chaque C_i est de degré au moins n dans H. D'après le théorème 1.4.3, H a au moins $n!$ couplages parfaits. Les C_i étant couplage-critiques, tout couplage parfait de H s'étend en un couplage parfait de $G[S \cup C_1 \cup \ldots \cup C_p]$ et enfin en un couplage parfait de G. G a donc au moins $n!$ couplages parfaits.

2ème cas

Il existe une partie finie non vide S de V telle que $C_{cr}(V \setminus S) = |S| - 1$.

Comme précedemment on a nécessairement $|S| \geqq n$. Soient $C_1, \ldots, C_p$ $(p = |S| - 1)$ les composantes connexes couplage-critiques de $G[V \setminus S]$. Si F est un couplage parfait de G , un élément s de S et un seul n'est pas couplé par F dans $C_1 \cup \ldots \cup C_p$. On montre comme précedemment que le graphe partiel $G[C_1 \cup \ldots \cup C_p \cup S \setminus \{s\}]$ a au moins $(n - 1)!$ couplages parfaits d'où le résultat.

Remarque 4.4

Une preuve du théorème suivant de Lovász [20] se déduit simplement de la démonstration du théorème 4.3.

Tout graphe fini n*-connexe non bicritique contenant un couplage parfait a au moins* $n!$ *couplages parfaits.*

Il suffit de remarquer que si $G = (V,E)$ est un graphe fini n-connexe $(n \geqq 3)$ non bicritique et contenant au moins un couplage parfait, alors il n'existe pas de partie finie non vide S de V telle que $C_{cr}(V \setminus S) = |S| - 1$.

En effet supposons qu'il existe une partie S de V telle que $C_{cr}(V \setminus S) = |S| - 1$ .D'après le lemme 1.3.1, il existe une partie finie T de V telle que $C_1(V \setminus T) = |T| - 1$, ce qui est impossible pour des raisons de parité.

Pour $n = 2$, la propriété découle du théorème (A) de Kotzig.

Remarque 4.5

Nous avons en fait prouvé que si $G = (V,E)$ est un graphe localement fini n-connexe contenant au moins un couplage parfait alors $f(G) \geqq n!$ s'il existe une partie finie non vide S de V

vérifiant $C_{cr}(V \setminus S) = |S|$, et $f(G) \geq (n-1)!$ s'il existe une partie finie S de V vérifiant $C_{cr}(V \setminus S) = |S| - 1$.

Le graphe T_n donné en Exemples 4.1 montre que cette borne est la meilleure possible dans le premier cas.

Théorème 4.6 9

Un graphe localement fini n-connexe $(n \geq 4)$ *bicritique a au moins* $\frac{n!!}{2}$ *couplages parfaits si* n *est pair, et au moins* $\frac{2.n!!}{3}$ *couplages parfaits si* n *est impair.*

D'après la proposition 4.2 le nombre de couplages parfaits d'un graphe localement fini bicritique est supérieur ou égal à son degré minimum. Si $f_b(n)$ désigne le minimum de $f(G)$ lorsque G parcourt la classe des graphes n-connexes bicritiques, on a :

$f_b(2) \geq 2$ et $f_b(3) \geq 3$.

En fait $f_b(2) \geq 3$ car un graphe infini régulier de degré 2 n'est pas 2-connexe.

Démonstration

Montrons que pour tout $n \geq 4$ on a $f_b(n) \geq n.f(n-2)$. Soit $G = (V,E)$ un graphe localement fini n-connexe et bicritique. D'après la proposition 4.2 toute arête de G appartient à au moins un couplage parfait de G . Soit $x \in V$. G étant n-connexe, $d_G(x) \geq n$. Soient donc $y_1, \ldots, y_n$ n sommets de G deux à deux distincts et adjacents à x . Pour tout $i = 1,\ldots,n$ soit F_i un couplage parfait de G contenant l'arête $\{x,y_i\}$. $G_i = G.V \setminus \{x,y_i\}$ est $(n-2)$-connexe et tout couplage parfait de G_i s'étend en un couplage parfait de G (contenant l'arête $\{x,y_i\}$). On a donc :

$f(G) \geq n.f(n-2)$

d'où le résultat.

Comme $f(2) = 1$ et $f(3) \geqq 2$ on a :

$f_b(n) \geqq n.(n-2)\ldots 4.1$ si n est pair,

et $f_b(n) \geqq n.(n-2)\ldots 5.2$ si n est impair.

Remarque 4.7

En s'inspirant des preuves des théorèmes 4.3 et 4.6 on peut donner une courte démonstration du théorème suivant de Zaks [33] :

Tout graphe fini n*-connexe contenant un couplage parfait a au moins* n!! *couplages parfaits.*

Soit $\overline{f}(n)$ le minimum de $f(G)$ lorsque G parcourt la classe des graphes finis n-connexes contenant au moins un couplage parfait. Clairement $\overline{f}(1) = 1$ et d'après le théorème (A), $\overline{f}(2) = 2$.

Soit $G = (V,E)$ un graphe fini n-connexe contenant au moins un couplage parfait.

1er cas

Il existe une partie non vide T de V telle que $C_1(V \setminus T) = |T|$

D'après le lemme 1.3.1, il existe une partie non vide S de V telle que $C_{cr}(V \setminus S) - |S| \geqq C_1(V \setminus S) - |T| = 0$. On a donc $C_{cr}(V \setminus S) = |S|$.

Si $|S| = 1$, posons $S = \{s\}$. $G[V \setminus \{s\}]$ est couplage-critique. Toute arête incidente à s appartient à un couplage parfait de G . G étant n-connexe, il y a au moins n arêtes incidentes à s . On achève la démonstration en raisonnant comme lors de la preuve du théorème 4.6.

Si $|S| \geqq 2$ alors S sépare G et on a nécessairement $|S| \geqq n$ car G est n-connexe. Par le même argument que celui utilisé dans la preuve du théorème 4.3, on peut montrer que le sous-graphe induit par S et les composantes connexes couplage-critiques de $G \setminus S$ a au moins $n!$ couplages parfaits. On a donc :

$f(G) \geqq n! \geqq n!!$.

2éme cas

Pour toute partie non vide S de V on a :

$c_1(V \setminus S) \leqq |S| - 2$. G est alors bicritique : voir la preuve du théorème 4.6.

Pour des raisons de parité, G étant fini, il ne peut exister de partie S de V telle que $c_1(V \setminus S) = |S| - 1$. La preuve est donc complête.

5. Problèmes ouverts

1. Des exemples 4.1 et du théorème 4.6 il s'ensuit que $\frac{n!!}{2} \leqq f(n) \leqq n!$ si n est pair, et $\frac{2.n!!}{3} \leqq f(n) \leqq n!$ si n est impair.

Quelle est la valeur exacte de $f(n)$?

2. Un graphe localement fini infini bicritique semble avoir une infinité de couplages parfaits. Nous ne sommes pas parvenus à prouver cette proposition, ni à l'infirmer.

Annexe

Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice carrée d'ordre n, le permanent per A de A est défini par :

$$\text{per } A = \sum_{s\in\mathfrak{S}_n}\left[\prod_{i=1}^{n} a_{i,s(i)}\right].$$

En 1926, Van der Waerden [31] a conjecturé que pour toute matrice bistochastique[+] A d'ordre n, on a $\text{per } A \geqq \text{per } J_n = \frac{n!}{n^n}$, où $J_n = (\frac{1}{n})$. Cette célèbre conjecture vient d'être prouvée par Egoritchev [12]. En termes de graphes, ce théorème de Egoritchev exprime qu'un graphe biparti k-régulier $G = (X,Y;E)$ tel que $|X| = |Y| = n$ a au moins $(\frac{k}{n})^n n!$ couplages parfaits.

Soit en effet $I = (a_{i,j})$ la matrice d'incidence des sommets du graphe biparti G. Pour tout (i,j) on a :

$a_{i,j} = 0$ ou $a_{i,j} = 1$,

$\sum_{1\leqq i\leqq n} a_{i,j} = k$ pour tout $j = 1, \ldots ,n$,

et $\sum_{1\leqq j\leqq n} a_{i,j} = k$ pour tout $i = 1, \ldots ,n$

$A = \frac{1}{k}.I$ est donc bistochastique. D'autre part le nombre de couplages parfaits de G est $f(G) = \text{per } I = k^n \text{ per } A$. On a donc

---

(+) Une matrice bistochastique d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n, $A = (a_{i,j})$ telle que $a_{i,j} \geqq 0$, $\sum_{1\leqq i\leqq n} a_{i,j} = 1$ por tout $j = 1, \ldots ,n$ et $\sum_{1\leqq j\leqq n} a_{i,j} = 1$ pour tout $j = 1, \ldots ,n$.

$f(G) \geqq \left(\frac{k}{n}\right)^n n!$ d'après le théorème de Egoritchev. $f(G)$ tend donc vers l'infini avec l'ordre de G.

On peut penser que le nombre de couplages parfaits d'un graphe biparti $G = (X,Y;E)$ de degré minimum k et tel que $|X| = |Y| = n$ tend aussi vers l'infini avec n.

En s'inspirant des Exemples 4.1, on montre que ce n'est pas le cas.

Soit $(X_m / 0 \leqq m \leqq 2p + 1)$ une suite finie d'ensembles deux à deux disjoints tels que $|X_m| = k$ pour tout $m = 0, \dots, 2p + 1$. Posons $X_m = \{x_1^m, \dots, x_k^m\}$. Définissons un graphe fini $T_{k,p} = (X,E)$ tel que $X = \{\cup X_m / 0 \leqq m \leqq 2p + 1\}$ et tel que E soit défini par :

si $m = 0$, $m = 2p$ ou si m est impair

$\{x_i^m, x_j^{m+1}\} \in E \quad 1 \leqq i \leqq k \ , \ 1 \leqq j \leqq k$

si m est pair, si $m \neq 0$ et si $m \neq 2p$

$\{x_i^m, x_i^{m+1}\} \in E \quad 1 \leqq i \leqq k$.

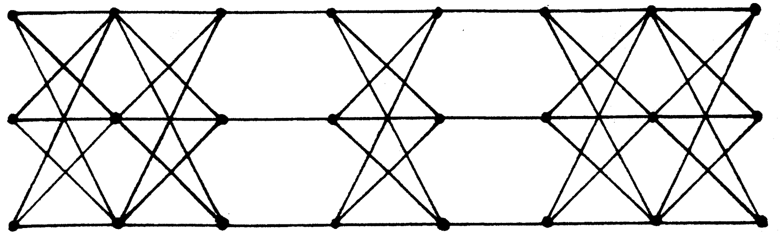

fig. Le graphe $T_{3,3}$.

$T_{k,p}$ est biparti, de degré minimum k et pour tout p on a :
$f(T_{k,p}) = (k!)^2$.

5. EXISTENCE DE COUPLAGES PARFAITS DANS LES GRAPHES AVEC UN SEUL SOMMET DE DEGRE INFINI

1. Introduction

Le théorème 1.2.4 donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe localement fini ait un couplage parfait. Cette condition n'est malheureusement pas suffisante dans le cas des graphes ayant au moins un sommet de degré infini.

Nous donnons dans ce chapitre des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'un couplage parfait dans un graphe avec un seul sommet de degré infini. Dans le cas particulier des graphes bipartis, ces conditions découlent du théorème 2.2.2 de Jung et Rado.

2. Enoncé des résultats

Théorème 2.1 [8]

Un graphe $G = (V,E)$ *avec un seul sommet* x_0 *de degré infini a un couplage parfait si et seulement si*

(1) $c_1(V \setminus S) \leqq |S|$ *pour toute partie finie* S *de* V ,

(2) $\Gamma_G(x_0) \not\subset \cup\{S \subset V \setminus \{x_0\} / S \text{ fini, } c_1(V \setminus [S \cup \{x_0\}]) = |S|\}$

Corollaire 2.2 [8]

Un graphe $G = (V,E)$ *avec un seul sommet* x_0 *de degré infini a un couplage parfait si et seulement si*

(1') $c_{cr}(V \setminus S) \leqq |S|$ *pour toute partie finie* S *de* V ,

(2') $\Gamma_G(x_0) \not\subset \cup\{S \subset V \setminus \{x_0\} / S \text{ fini, } c_{cr}(V \setminus [S \cup \{x_0\}]) = |S|\}$

3. Démonstration

Soit $G = (V,E)$ un graphe avec un seul sommet x_0 de degré infini.

(3.1) *Si* G *vérifie la condition* (1) *et si* G *n'a pas de couplage parfait, alors* $G[V \setminus \{x_0\}]$ *a un couplage parfait.*

$G[V \setminus \{x_0\}]$ étant localement fini, d'après le théorème 1.2.4 il suffit de montrer que $C_1(V \setminus [S \cup \{x_0\}]) \leqq |S|$ pour toute partie finie S de $V \setminus \{x_0\}$. Supposons qu'il existe une partie S de $V \setminus \{x_0\}$ telle que $C_1(V \setminus [S \cup \{x_0\}]) \geqq |S| + 1$. G vérifiant la condition (1) par hypothèse, on a :

$$C_1(V \setminus [S \cup \{x_0\}]) = |S| + 1$$

D'après le lemme 1.3.1, il existe une partie finie T de V telle que $S \cup \{x_0\} \subset T$ et $C_{cr}(V \setminus T) \geqq |T|$. G vérifiant la condition (1) par hypothèse, on a :

$$C_1(V \setminus T) = C_{cr}(V \setminus T) = |T| .$$

Montrons que toute composante connexe paire ou infinie de $G[V \setminus T]$ a un couplage parfait. Soit C une telle composante connexe. $G[C]$ est localement fini car $x_0 \in T$. Si $G[C]$ n'a pas de couplage parfait, d'après le théorème 1.2.4 il existe une partie finie U de C telle que $C_1(C \setminus U) \geqq |U| + 1$. On a alors :

$$C_1(V \setminus [T \cup U]) = C_1(V \setminus T) + C_1(C \setminus U) \geqq |S \cup T| + 1$$

ce qui contredit la propriété (1) .

Les composantes connexes impaires de $G[V \setminus T]$ étant toutes couplage-critiques, le sous - graphe de G induit par T et les composantes connexes impaires de $G[V \setminus T]$ a un couplage parfait. Ce couplage s'étend en un couplage parfait de G car les composantes paires ou infinies de $G[V \setminus T]$ ont toutes un couplage parfait, d'où la contradiction.

(3.2) *Si* G *vérifie la propriété* (1) *et n'a pas de couplage parfait, alors* G *ne vérifie pas la propriété* (2) .

Soit $y \in \Gamma_G(x_0)$. Posons $G' = G[V \setminus \{x_0,y\}]$. G n'ayant pas de couplage parfait, G' n'en a pas non plus. G' étant localement fini, d'après le théorème 1.2.4 il existe une partie finie S de $V \setminus \{x_0,y\}$ telle que $c_1(V \setminus [S \cup \{x_0,y\}]) \geq |S| + 1$. D'après (3.1) le sous - graphe $G[V \setminus \{x_0\}]$ a un couplage parfait, et on a donc :

$c_1(V \setminus [S \cup \{x_0,y\}]) = |S| + 1$

c'est à dire

$y \in \bigcup\{S \subset V \setminus \{x_0\}/S \text{ fini}, c_1(V \setminus [S \cup \{x_0\}]) = |S|\}$.

(3.3) *Si* G *vérifie la propriété* (1) *, alors*

$\bigcup\{S \subset V \setminus \{x_0\}/S \text{ fini}, c_1(V \setminus [S \cup \{x_0\}]) = |S|\}$

$\subset \bigcup\{S \subset V \setminus \{x_0\}/S \text{ fini}, c_{cr}(V \setminus [S \cup \{x_0\}]) = |S|\}$

Celà découle clairement du lemme 1.3.1.

(3.4) *Si* G *vérifie la propriété* (1') *mais ne vérifie pas la propriété* (2') *, alors* G *n'a pas de couplage parfait.*

Supposons que G ait un couplage parfait F . Il existe alors $y \in V$ tel que $\{x_0,y\} \in F$. G ne vérifiant pas la propriété (2'), il existe une partie finie S de $V \setminus \{x_0\}$ contenant y telle que $c_{cr}(V \setminus [S \cup \{x_0\}]) = |S|$. Le sous - graphe $G[V \setminus \{x_0,y\}]$ ne vérifie donc pas la condition (1') et n'a pas de couplage parfait d'après le théorème 1.3.2. Par ailleurs, $F' = F \setminus \{x_0,y\}$ est un couplage parfait de G contenant l'arête $\{x_0,y\}$, d'où la contradiction.

(3.5) *Si* G *a un couplage parfait, alors* G *vérifie la propriété* (1) .

Si G a un couplage parfait F et si S est une partie de V , toute composante connexe impaire de $G[V \setminus S]$ est nécessairement couplée par F dans S . G vérifie donc la propriété (1) .

La démonstration du théorème 2.1 - et du corollaire 2.2 - est maintenant achevée. En effet, si G a un couplage parfait, alors G vérifie les propriétés (1) et (2') d'après (3.4) et (3.5) . D'après (3.3) , G vérifie la propriété (2) . La propriété (1') est vérifiée d'après le lemme 1.3.1.

D'après (3.2), (3.3) et (3.4) les conditions (1) et (2), de même que les conditions (1') et (2') , sont suffisantes à l'existence d'un couplage parfait de G .

4. Remarque

Il est naturel de chercher des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'un couplage parfait dans un graphe avec un nombre fini de sommets de degrés infinis qui soient semblables à celles du théorème 2.1. Nos efforts ont été infructueux.

Si $G = (V,E)$ est un graphe avec exactement deux sommets x_1 et x_2 de degrés infinis, les conditions :

$$\Gamma_G(x_1) \not\subset \cup\{S \subset V \setminus \{x_1\} / S \text{ fini}, C_1(V \setminus [S \cup \{x_1\}]) = |S|\}$$

$$\Gamma_G(x_2) \not\subset \cup\{S \subset V \setminus \{x_2\} / S \text{ fini}, C_1(V \setminus [S \cup \{x_2\}]) = |S|\}$$

ne sont pas nécessaires à l'existence d'un couplage parfait, comme le montre l'exemple de la figure 5.

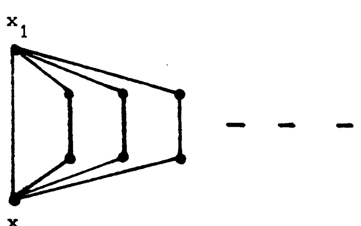

fig. 5

BIBLIOGRAPHIE

[1] L.W. Beineke and M.D. Plummer, On the 1-factors of a non-separable graph, J. Comb. Th., 2(1967), pp. 285-289.

[2] C. Berge, Graphes et hypergraphes, Dunod, 2nde éd., Paris 1973

[3] C. Berge, Sur le couplage maximum d'un graphe, C.R. Acad. Sciences, 247 (1958), pp. 258-259.

[4] N. Bourbaki, Eléments de mathématique : Livre I. Théorie des ensembles, Hermann, Paris 1954-1956.

[5] R.A. Brualdi, Matchings in arbitrary graphs, Proc. Camb. Phil. Soc., 69 (1971), pp. 401-407.

[6] R.A. Brualdi and E.B. Scrimger, Exchange systems, matchings and transversals, J. Comb. Th., 5 (1968) pp. 244-257.

[7] F. Bry, Note on a theorem of J. Folkman on transversals of infinite families with finitely many infinite members, J. Comb. Th. ser.B, 30 (1981), pp. 100-102.

[8] F. Bry, Note on the factorization of graphs with exactly one vertex of infinite degree, à paraître.

[9] F. Bry, On the number of 1-factors of locally finite graphs, à paraître.

[10] F. Bry and M. Las Vergnas, Matchings in locally finite graphs and Edmonds - Gallai decomposition, à paraître.

[11] J. Edmonds, Paths, trees and flowers, Canad. J. Math., 17 (1965), pp. 449-467.

[12] G.P. Egoritchev, Résolution d'un problème de van der Waerden, prépublication de l'Institut de Physique de l'Université de Krasnoïarsk, 1980. (en russe)

[13] C.J. Everett and G. Whaples, Representation of sequences of sets, Amer. J. Math., 71 (1949), pp. 287-293.

[14] J. Folkman, Transversals of infinite families with finitely many infinite members, J. Comb. Th., 9 (1970), pp. 200-220.

[15] T. Gallai, Maximale Systeme unabhängiger Kanten, Math. Kut. Int. Közl., 9 (1964), pp. 373-395.

[16] M. Hall, Distinct representatives of subsets, Bull. Amer. Math.Soc., 54 (1948), pp. 922-926.

[17] P. Hall, On representatives of subsets, J. London Math. Soc., 10 (1935), pp. 26-30.

[18] D. König, Graphok és matrixok, Mat. Fiz. Lapok.,38 (1931), pp.116-119 (en hongrois, avec un résumé en allemand)

[19] A. Kotzig, Z teórie konečných grafov s lyneárnym faktorom II, Mat. Fyz. Časopis, 9 (1959), pp. 136-159. (en slovaque, avec un résumé en allemand)

[20] L. Lovász, On the structure of factorizable graphs, Acta Math. Acad. Scient. Hung., 23 (1972), pp. 179-185.

[21] P.J. McCarthy, Transversal of infinite families, J. Comb. Th., Ser.B,, 15 (1973), pp. 178-183.

[22] W. Mader, Über die Anzahl der von den 1-Faktoren eines Graphen überdeckten Ecken, Math. Nachr., 56 (1973) pp. 195-200.

[23] W. Mader, Über die Anzahl der 1-Faktoren in 2-fach zusammenhängenden Graphen, Math. Nachr., 74 (1976), pp. 217-232.

[24] L. Mirsky, Transversal theory, Academic Press, New-York 1971.

[25] R. Rado, Axiomatic treatment of rank in infinite sets, Canad. J. Math., 1 (1949), pp. 337-343.

[26] R. Rado, Factorization of even graphs, Quat. J. Math. (Oxford), 20 (1949), pp. 95-104.

[27] R. Rado, Note on the transfinite case of Hall's theorem on representatives, J. London Math. Soc., 42 (1967), pp. 321-324.

[28] W.T. Tutte, The factorization of linear graphs, J. London Math. Soc., 22 (1947), pp. 107-111.

[29] W.T. Tutte, The factorization of locally finite graphs, Canad. J. Math., 2 (1950), pp. 44-49.

[30] W.T. Tutte, The factors of graphs, Canad. J. Math., 4 (1952), pp. 314-328.

[31] B.L. Van der Waerden, Antgabe 45, Ib, Deutsch Math. Verein., 35 (1926), p.117

[32] D.R. Woodall, Two results on infinite transversal, in Combinatorics, Proc. 1972 Oxford Comb. Conf., D.J.A. Welsh and D.R. Woodall eds., Southend-on-sea, 1972, pp. 341-350.

[33] J. Zaks, On the 1-factors of n-connected graphs, J. Comb. Th., 11 (1971), pp. 169-180.

INDEX TERMINOLOGIQUE

INDEX DES SYMBOLES