annals of discrete mathematics

General Editor

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY — AMSTERDAM • NEW YORK • OXFORD

NORTH-HOLLAND
MATHEMATICS STUDIES **75**

Annals of Discrete Mathematics (17)

General Editor: Peter L. Hammer

University of Waterloo, Ontario, Canada

COMBINATORIAL MATHEMATICS

Proceedings of the International Colloquium on Graph Theory and Combinatorics
Marseille–Luminy
June 1981

Edited by:

C. BERGE, C.N.R.S., Paris
D. BRESSON, E.H.E.S.S., Paris
P. CAMION, C.N.R.S.-I.N.R.I.A., Paris
J.F. MAURRAS, University of Paris XII, Paris
F. STERBOUL, University of Lille I, Paris

1983

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY — AMSTERDAM • NEW YORK • OXFORD

CONTENTS

Annals of Discrete Mathematics 17 (1983) 143–147

SUR LES COUPLAGES DANS LES GRAPHES LOCALEMENT FINIS*

François BRY

Université Pierre et Marie Curie, U.E.R. 48, Equipe de Recherche Combinatoire 4, place Jussieu, 75005 Paris, France

We present some results on matchings in locally finite graphs. First, we give an extension to locally finite graphs of a theorem of Edmonds and Gallai giving a decomposition of graphs according to matchings. Then we estimate the number of perfect matchings (1-factors) in locally finite graphs, depending on connexity. These results generalize some theorems of Kotzig, Lovász and Zaks.

1. Introduction

Edmonds et Gallai ont donné dans [4], [5] une décomposition des graphes finis relative aux couplages maximums. En collaboration avec Las Vergnas, nous avons étendu cette décomposition aux graphes localement finis. Ce théorème est énoncé au Section 3.

Kotzig a prouvé dans [7] que tout graphe fini contenant un et un seul couplage parfait a un isthme appartenant à ce couplage. Un graphe fini 2-arête-connexe contenant un couplage parfait en a donc au moins deux. Il existe par contre des graphes localement finis (infinis) 2-arête-connexes ne contenant qu'un seul couplage parfait. Au paragraphe 4 nous en donnons un exemple et nous montrons que *tout graphe localement fini contenant un et un seul couplage parfait est au plus* 2-*connexe.*

Le théorème de Kotzig est le premier résultat sur le nombre $f(G)$ de couplages parfaits d'un graphe fini G. Auparavent, dans le cas particulier des graphes bipartis finis, Hall [6] avait estimé ce nombre ($f(G) \geqslant n!$, si $G=(X, Y; U)$ est un graphe biparti fini tel que $|X|=|Y|$ et tel que tout sommet de X soit de degré supérieur ou égal à n). Beineke et Plummer ont ensuite prouvé que $f(G) \geqslant n$ si G est un graphe fini n-connexe contenant un couplage parfait [1]. Zaks a amélioré ce résultat en montrant dans [10] que $f(G) \geqslant n!!$ sous les mêmes hypothèses. (Si n est impair, cette borne est exacte en

* L'auteur bénéficie d'une allocation de recherche de la D.G.R.S.T. (Contrat n° 79317).

ce sens que le graphe complet K_{n+1} contient exactement $n!!$ couplages parfaits.) Dans le cas particulier des graphes finis non bicritiques (un graphe est bicritique s'il contient un couplage parfait et si le sous-graphe obtenu en supprimant deux sommets quelconques contient encore un couplage parfait) Lovász [8] a précisé cette borne inférieure: $f(G) \geq n!$ si G est un graphe fini non bicritique n-connexe. Finalement, Mader a donné dans [9] la borne inférieure exacte du nombre de couplages parfaits d'un graphe fini ne dépendant pas de la connexité mais du degré minimum du graphe: si G est un graphe fini 2-connexe de degré minimum n et si G contient au moins un couplage parfait, alors $f(G) \geq n!!$ si n est impair, et $f(G) \geq f(S_n)$ si n est pair, où S_n est K_{n+2} moins un couplage parfait.

Nous donnons au paragraphe 5 des exemples de graphes localement finis (infinis) n-connexes avec un nombre fini (non nul) de couplages parfaits, pour tout entier n. Des résultats analogues à ceux de Zaks et Lovász sont ensuites énoncés pour les graphes localement finis.

Les preuves seront publiées ultérieurement.

2. Terminologie et notations

Les graphes considérés sont des *graphes simples* [2].

Un couplage d'un graphe $G = (X, U)$ est un *couplage parfait* si tout sommet de G appartient à une arête du couplage. Un couplage F d'un graphe G est un *couplage maximum* si pour tout couplage H de G tel que $\cup H \supset \cup F$, on a $\cup H = \cup F$. D'après un theoreme de Brualdi ([3] Théorème 4), tout graphe localement fini à au moins un couplage maximum.

Si F est un couplage maximum d'un graphe G, le *défaut* de F, noté $\delta(F)$, est le cardinal de l'ensemble des sommets de G insaturés par F. Deux couplages maximums d'un même graphe ont même défaut. On appelle *défaut* d'un graphe G le défaut d'un couplage maximum de G, on le note $\delta(G)$.

Un graphe est *couplage-critique* s'il ne contient pas de couplage parfait et si le sous-graphe formé en enlevant un sommet quelconque a au moins un couplage parfait. On vérifie qu'un graphe couplage-critique est fini et d'ordre impair.

Si $G = (X, U)$ est un graphe et si S est une partie de X, on désigne par $C_0(S)$ le cardinal de l'ensemble des composantes connexes d'ordre pair du sous-graphe G_S induit par S. De même, $C_{cr}(S)$ désigne le cardinal de l'ensemble des composantes connexes couplage-critiques du sous-graphe G_S.

3. Décomposition relative aux couplages maximums d'un graphe localement fini

En collaboration avec Las Vergnas, nous avons établi le théorème suivant:

Théorème 3.1. *Soit $G = (X, U)$ un graphe localement fini. Soient P l'ensemble des sommets de G insaturés par au moins un couplage maximum de G, Q l'ensemble des sommets voisins de P ($Q = \Gamma_G(P) \setminus P$) et $R = X \setminus (P \cup Q)$. Alors:*

(1) *Les composantes connexes du sous-graphe G_P induit par P sont couplage-critiques.*

(2) *Soient $\mathscr{C}(P)$ l'ensemble des composantes connexes de G_P et $H = (Q, \mathscr{C}(P); E)$ le graphe biparti défini par $(q, C) \in E$ si et seulement si il existe $c \in C$ tel que $(q, c) \in U$. H a un couplage qui sature Q et laisse insaturée une partie de $\mathscr{C}(P)$ de cardinal $\delta(G)$. Tout couplage de H saturant Q laisse insaturée une partie de $\mathscr{C}(P)$ de cardinal supérieur ou égal à $\delta(G)$. En particulier si $\delta(G)$ est fini, Q et P sont finis et $|Q| = C_{cr}(P) + \delta(G)$.*

(3) *Le sous-graphe G_R induit par R a un couplage parfait.*

(4) *Tout couplage maximum de G se décompose en un couplage parfait de G_R, en un couplage de défaut 1 de chaque composante de G_P et en un couplage maximum de H.*

4. Graphes localement finis avec un et un seul couplage parfait

Kotzig a prouvé dans [7] que tout graphe fini contenant un et un seul couplage parfait a un isthme appartenant à ce couplage. Cela n'est plus vrai pour les graphes localement finis infinis, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4.1.

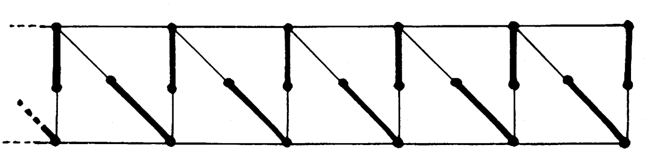

Fig. 1.

Le graphe de la Fig. 1 est 2-arête-connexe et n'a qu'un seul couplage parfait (représenté par les arêtes épaisses).

Un résultat semblable au théorème de Kotzig est le suivant.

Théorème 4.2. *Tout graphe localement fini contenant un et un seul couplage parfait est au plus 2-connexe.*

Nous ne sommes pas arrivés à caractériser les graphes localement finis (infinis) ne contenant qu'un seul couplage parfait, bien que nous ayons pu établir quelques unes de leurs propriétés. Nous faisons la conjecture suivante.

Conjecture 4.3. *Tout graphe $G = (X, U)$ localement fini (infini) 2-connexe contenant un et un seul couplage parfait a un ensemble de séparation S de cardinal 2 tel que $C_0(X \setminus S) \geq 1$.*

5. Nombre de couplages parfaits d'un graphe localement fini

Si G est un graphe localement fini, $F(G)$ désignera le nombre de couplages parfaits de G. Si n est un entier $F(n)$ désignera la plus petite valeur de $F(G)$ lorsque G parcourt la classe des graphes localement finis n-connexes et contenant au moins un couplage parfait. En ces termes, le Théorème 4.2 se traduit par $F(3) \geq 2$. Let exemples qui suivent montrent que $F(n)$ est fini pour tout entier n.

Exemples 5.1. Soit $n \geq 3$ un entier. Définissons un graphe localement fini infini T_n. Soit $(X_m \mid m \in N)$ une suite d'ensembles deux à deux disjoints, chacun d'entre eux de cardinal n. Posons $X_m = \{x_1^m, \ldots, x_n^m\}$. L'ensemble des sommets de T_n sera $\bigcup\{X_m \mid m \in N\}$. L'ensemble U des arêtes de T_n est défini par:
si m est impair ou si $m = 0$,

$$\{x_i^m, x_j^{m+1}\} \in U, \qquad i \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n;$$

si m est pair et si $m \neq 0$,

$$\{x_i^m, x_i^{m+1}\} \in U, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

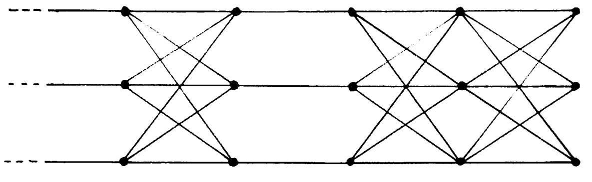

Fig. 2. Le graphe T_3.

On vérifie aisément que, pour tout n, le graphe T_n est n-connexe et contient exactement $n!$ couplages parfaits.

Si $G = (X, U)$ est un graphe localement fini n-connexe, posons $a(G) = \mathrm{Max}\{k \in N \mid \forall S \subset X,\ k + 1 \leq |S| < \infty,\ C_{cr}(X \setminus S) \leq |S| - k\}$. Si G n'est pas bicritique, on a $a(G) = 0$ ou $a(G) = 1$ (dans le cas des graphes finis, on a nécessairement $a(G) = 0$).

Théorème 5.2. *Soit G un graphe localement fini n-connexe non bicritique et contenant au moins un couplage parfait.*

Si $a(G)=0$, alors $F(G) \geqslant n!$; si $a(G)=1$, alors $F(G) \geqslant (n-1)!$.

Théorème 5.3. *Soit G un graphe localement fini n-connexe ($n \geqslant 4$) et bicritique.*

Si n est pair, alors $F(G) \geqslant n!!/2$; si n est impair, alors $F(G) \geqslant \frac{2}{3}n!!$

6. Problèmes ouverts

(1) Quelle est la borne inférieure exacte $F(n)$ du nombre de couplages parfaits des graphes localement finis infinis n-connexes contenant au moins un couplage parfait?

(2) Quelle est la borne inférieure exacte $FB(n)$ du nombre de couplages parfaits des graphes localement finis infinis n-connexes et bicritiques?

(3) Peut-on donner un résultat semblable à celui de Mader [9] pour les graphes localement finis infinis?

Bibliographie

[1] L.W. Beineke and M.D. Plummer, On the 1-factors of a non separable graph, J. Comb. Theory 2 (1967) 285–289.
[2] C. Berge, Graphes et Hypergraphes (Dunod, Paris, 2nde éd., 1973).
[3] R.A. Brualdi, Matchings in arbitrary graphs, Proc. Camb. Phil. Soc. 69 (1971) 401–407.
[4] J. Edmonds, Paths, trees and flowers, Canad. J. Math. 17 (1965) 449–467.
[5] T. Gallai, Maximale Systeme unbhängiger Kanten, Math. Kut. Int. Közl. 9 (1964) 373–395.
[6] M. Hall, Distinct representatives of subsets, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 922–926.
[7] A. Kotzig, Z teórie konečných grafov s lyneárnym factorom II, Mat. Fyz. Časopis 9 (1959) 136–159.
[8] L. Lovász, On the structure of factorizable graphs, Acta Math. Acad. Scient. Hung. 23 (1972) 179–185.
[9] W. Mader, Über die Anzahl der 1-Faktoren in 2-fach zusammen hängenden Graphen, Math. Nachr. 74 (1976) 217–232.
[10] J. Zaks, On the 1-factors of n-connected graphs, J. Comb. Theory 11 (1971) 169–180.