

Ludwig-Maximilians-Universität München

Institut für Statistik

Seminar für Finanzökometrie

---



---

MESSUNG UND MODELLIERUNG VON  
KREDITAUSFALLRISIKEN

**Masterarbeit**

zur Erlangung des Grades  
Master of Science in Statistik

vorgelegt von  
Natalie Leneschmidt  
im November 2021

betreut von  
Jun.-Prof. Dr. Robert Czudaj

*Für meine Eltern.*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>1. Einleitung</b> . . . . .	<b>5</b>
1.1. Ziel der Arbeit . . . . .	5
1.2. Aufbau der Arbeit . . . . .	6
<b>2. Grundlagen</b> . . . . .	<b>8</b>
2.1. Definition des Kreditrisikos . . . . .	8
2.2. Charakterisierung des Kreditrisikos bei Kreditvergabe . . . . .	9
<b>3. Messung von Kreditrisiken</b> . . . . .	<b>12</b>
3.1. Kreditwürdigkeitsprüfung . . . . .	12
3.1.1. Kredit-Scoring . . . . .	13
3.1.2. Kredit-Rating . . . . .	17
3.1.3. Experten- und Fuzzy-Systeme . . . . .	22
3.2. Quantifizierung des Kreditrisikos . . . . .	24
3.2.1. Berechnung der Verluste bei Einzelkrediten . . . . .	24
3.2.1.1. Komponenten des Kreditrisikos . . . . .	25
3.2.1.2. Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit . . . . .	30
3.2.1.2.1. A posteriori-Ansatz . . . . .	30
3.2.1.2.2. Logistische Regression . . . . .	32
3.2.1.2.3. Historische Ausfallwahrscheinlichkeiten . . . . .	33
3.2.2. Berechnung der Verluste in Kreditportfolios . . . . .	35
3.2.2.1. Verlustverteilung . . . . .	35
3.2.2.2. Erwartete und unerwartete Portfolioverluste . . . . .	38
3.2.2.3. Bedingte Unabhängigkeit . . . . .	40
<b>4. Klassifizierung von Kreditrisikomodellen</b> . . . . .	<b>42</b>
4.1. Statistische Modellierung der Ausfallverteilung auf Portfolioebene . . . . .	42
4.1.1. Das Bernoulli-Modell . . . . .	42
4.1.2. Das Poisson-Modell . . . . .	45
4.1.3. Faktormodelle . . . . .	49
4.2. Unternehmenswertmodelle: Das Merton-Modell . . . . .	52
4.2.1. Das Grundmodell von Merton . . . . .	52

4.2.2. Merton-Einfaktormodell . . . . .	59
4.2.3. Multivariates Merton-Modell . . . . .	60
4.2.4. Kritische Würdigung und Erweiterungen des Merton-Modells . . . . .	60
4.3. Reduktionsmodelle I: Intensitätsmodelle . . . . .	62
4.3.1. Intensitätsmodell für ein Unternehmen . . . . .	63
4.3.2. Multivariate Intensitätsmodelle . . . . .	66
4.3.3. Kritische Würdigung und Erweiterungen der Intensitätsmodelle . . . . .	68
4.4. Reduktionsmodelle II: Ratingbasierte Modelle . . . . .	68
4.4.1. Kritische Würdigung der ratingbasierten Modelle . . . . .	70
<b>5. Industriemodelle . . . . .</b>	<b>72</b>
5.1. Modellierung von Einzelkreditrisiken . . . . .	72
5.1.1. Das KMV-Modell . . . . .	72
5.2. Modellierung von Portfoliokreditrisiken . . . . .	74
5.2.1. Analytische Modelle . . . . .	74
5.2.1.1. Credit Risk+ . . . . .	74
5.2.2. Simulationsbasierte Modelle . . . . .	75
5.2.2.1. Credit Metrics . . . . .	75
5.3. Modellvergleich . . . . .	76
<b>6. Fazit . . . . .</b>	<b>78</b>
6.1. Zusammenfassung . . . . .	78
6.2. Ausblick . . . . .	80
<b>Anhang . . . . .</b>	<b>82</b>
<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>Eidesstattliche Erklärung . . . . .</b>	<b>88</b>

# Abbildungsverzeichnis

1. Verteilungen der Scorewerte . . . . .	16
2. Fuzzy-Sets und eine S-förmige Zugehörigkeitsfunktion . . . . .	24
3. Typische Dichtefunktion eines Portfolioverlustes . . . . .	37
4. Ausfallprozess im KMV-Modell . . . . .	73

# Tabellenverzeichnis

1. Ratingklassen für Emittentenratings bei Moody's, S & P und Fitch . . . . .	20
2. Durchschnittliche einjährige Übergangsmatrix für 1981-2020 in % . . . . .	33
3. Durchschnittliche kumulierte Ausfallraten für 1981-2020 in % . . . . .	35
4. Vergleich von <i>KMV</i> , <i>Credit Risk+</i> und <i>Credit Metrics</i> . . . . .	77

# 1. Einleitung

Die Weltfinanzkrise hat mit dem Platzen der Immobilienpreisblase in den USA im Jahr 2007 zu einem globalen Wandel an den Finanzmärkten geführt. Die US-Regierung wollte zu dieser Zeit das Wohneigentum fördern. Durch Lockerungen des Kreditvergabestandards ab dem Jahr 2000 wurden mehr Verträge abgeschlossen. Durch die hohe Immobiliennachfrage stiegen die Marktpreise. Es wurden viele *Subprime-Hypotheken* (Hypotheken mit einem überdurchschnittlich hohem Risiko) an Bürger vergeben, deren Einkommen nicht ausreichend war, um die Hypothekenraten zu decken, da der Zinssatz nach zwei oder drei Jahren spürbar anstieg. Daraufhin kam es vermehrt zu Zwangsversteigerungen, wodurch viele Immobilien auf den Markt gelangten und dies schließlich zum Fall der Immobilienpreise führte. Viele in Not geratene Geldhäuser mussten durch Übernahmen oder Staatsinterventionen gerettet werden. Der regulatorische Risikorahmen, welchen die Finanzinstitute bei ihren Geschäftstätigkeiten einhalten müssen, wurde als Reaktion auf die Finanzkrise vom Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (*Basel III*) verschärft. Die Institutionen haben erkannt, dass mehr Ressourcen in diesem Bereich aufgewendet werden müssen. Die Krise hat außerdem verdeutlicht, wie wichtig ein effektives (Kredit-)Risikomanagement für die Finanzinstitute ist. Die Risikoidentifikation und -messung sind hierbei von größter Bedeutung. Für die Entscheidung über Kreditvergabe ist die Kenntnis risikoadäquater Berechnungsmethoden und Modellierungen unumgänglich. Aus diesem Anlass behandelt diese Arbeit die wichtigsten Verfahren zur Messung und Modellierung des Kreditausfallrisikos. (Vgl. Cremers und Walzner, 2009, S. 2, 9; Finanzierung.com, o.D.; Hull, 2011, S. 2, 400-402, 417; Martin et al., 2014, S. v, 5)

## 1.1. Ziel der Arbeit

Die Risiken, die ein Finanzinstitut eingeht, lassen sich in drei große Kategorien hinsichtlich ihrer Risikofaktoren einteilen. Das *Marktrisiko* beschreibt eine Klasse der Risiken, die auf Marktpreissänderungen, wie z.B. Aktienkurs-, Zins- oder Wechselkursänderungen, beruht. Das *operationelle Risiko*, wird vom Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (*Basel II*) aus dem Jahr 2004 beschrieben als das Risiko, das aus institutsinternen Fehlentscheidungen bzw. Handlungen von Mitarbeitern und Verfahren oder aus externen Einflüssen resultiert. Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der dritten Risikoart, dem *Kreditrisiko*. Dieses beschreibt die Gefahr, dass der Kreditnehmer seine vertraglich vereinbarten Zahlungen nicht leisten kann. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 887, 909; Basler Ausschuss für Bankenaufsicht, 2004, S. 127; Martin et al., 2014, S. 1, 5)

Seit den 90er Jahren und vor allem seit der Finanzkrise spielt das Messen, Steuern und

Bewerten von Kreditausfallrisiken eine zentrale Rolle, sowohl in der Praxis als auch in der Wissenschaft. Hierfür gibt es mehrere Gründe. Die Betrachtung der Finanzmärkte auf internationaler Ebene sowie ihre Liberalisierung führt zur steigenden Konkurrenz zwischen Kreditinstituten. Sie werden gezwungen neue Lösungen für das Management ihres Forderungsbestandes zu finden. Außerdem hat die Finanzkrise verdeutlicht, dass auch nach der Kreditvergabe das eingegangene Engagement überwacht und kontrolliert werden muss, um unvorhersehbare Entwicklungen des Schuldners rechtzeitig zu erkennen und handeln zu können. Durch strengere Regularien der Aufsichtsbehörden werden die Banken dazu bewegt ihr Kreditrisikomanagement stärker auszubauen. Im Baseler Konsultationspapier werden mehrere Komponenten des Kreditausfallrisikos – wie das Exposure at Default, der Loss Given Default oder die Ausfallwahrscheinlichkeit – beschrieben. Aus diesem Anlass besteht ein Ziel dieser Arbeit zunächst in der Analyse der wesentlichen Bestandteile des Kreditrisikos. Erst, wenn das grundlegende Verständnis hierfür vermittelt wurde, kann im zweiten Schritt auf die wichtigsten Techniken zur Erfassung des Kreditausfallrisikos und zur Messung der Ausfallwahrscheinlichkeiten eingegangen werden. Besonders wichtig ist die Modellierung von Ausfallwahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Kreditrisikomodellen, da die resultierende Verlustverteilung sehr sensitiv auf Änderungen dieser Determinante reagiert. Deshalb ist eine weitere Zielsetzung der vorliegenden Arbeit, die wichtigsten Klassen der Kreditrisikomodelle zu erläutern. In den gängigen Industriemodellen, wie z.B. Credit Risk+ oder Credit Metrics stellt die Ausfallwahrscheinlichkeit einen Input-Parameter dar. Dies betont zusätzlich, weshalb die Kenntnis der Techniken zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeiten wichtig ist. (Vgl. Grundke, 2002, S. v; Knapp, 2002, S. v; Läger, 2002, S. 1-2)

## 1.2. Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit besteht aus fünf Kapiteln. Nach einer kurzen Einführung in die Thematik (Kapitel 1) soll im zweiten Kapitel das grundlegende Verständnis zum Begriff und der Charakterisierung des Kreditrisikos vermittelt werden.

Im Fokus des dritten Kapitels steht die ausführliche Beschreibung der Messung von Kreditrisiken. Dabei wird zunächst im Abschnitt 3.1 das Verfahren der Kreditwürdigkeitsprüfung diskutiert und anschließend drei konkrete Methoden zur Messung der Bonität beschrieben. Der Abschnitt 3.2 befasst sich mit der Berechnung der möglichen, aus dem Kreditverhältnis entstehenden Verluste und geht insbesondere auf die einzelnen Komponenten des Kreditrisikos ein. Des Weiteren werden drei Methoden zur Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit der Einzelkreditnehmer erläutert sowie das Konzept der bedingten Unabhängigkeit in einem Portfolio eingeführt.

Das darauffolgende Kapitel 4 behandelt die wichtigsten Klassen der Kreditrisikomodelle. Im Abschnitt 4.1 werden drei Ansätze der statistischen Modellierung für die Ausfallverteilung in einem Kreditportfolio eingeführt. Im Anschluss wird die erste große Klasse der Kreditrisikomodellierung, das Unternehmenswertmodell von Merton (Abschnitt 4.2), vorgestellt. Hierbei wird der Ausfall auf einer ökonomischen Basis, abhängig vom Wert eines Unternehmens definiert. Der Abschnitt 4.3 geht auf die zweite Hauptklasse, die Intensitätsmodelle ein. Diese definieren den Ausfall rein formal. In beiden Modellklassen wird sowohl auf den Fall eines Unternehmens als auch auf den Mehr-Unternehmensfall eingegangen. Eine kritische Würdigung sowie Erweiterungen der beiden Klassen schließen den jeweiligen Abschnitt ab. Der letzte Abschnitt des vierten Kapitels beschäftigt sich mit der ratingbasierten Modellierung (Abschnitt 4.4), wodurch nicht nur die Ausfall-, sondern zusätzlich die Migrationswahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden.

Das letzte Kapitel gibt die Grundideen der in Praxis verwendeten Industriemodelle KMV, Credit Risk+ und Credit Metrics wieder. Dabei modelliert das KMV-Modell, das als das Praxismodell des Merton-Ansatzes angesehen wird, das Kreditrisiko eines einzelnen Kredits (Abschnitt 5.1). Dagegen beschreiben die beiden letztgenannten Modelle das Kreditrisiko in einem Portfolio (Abschnitt 5.2), wobei das Credit Risk+ ein analytisches und das Credit Metrics ein simulationsbasiertes Modell ist. Schließlich werden im Abschnitt 5.3 die genannten Modelle anhand ihrer Eigenschaften in einer Tabelle gegenübergestellt.

Aus Gründen der Einfachheit verwendet diese Arbeit das generische Maskulinum, dabei sind aber alle Geschlechter gleichermaßen gemeint.

## 2. Grundlagen

In diesem Kapitel soll ein grundlegendes Verständnis des Kreditrisikos vermittelt werden und als Fundament für die folgenden Kapitel der Arbeit dienen. Zunächst wird im Abschnitt 2.1 der Begriff des Kreditrisikos formal definiert und erklärt. Anschließend beschäftigt sich der Abschnitt 2.2 mit der Herkunft und der Klassifizierung der verschiedenen Kreditrisikoarten.

### 2.1. Definition des Kreditrisikos

Der Begriff **Kredit** kommt vom lateinischen Wort *credere* und bedeutet so viel wie *glauben* oder *(an)vertrauen*. Ein gewöhnlicher Kredit wird charakterisiert als ein Tausch von gegenwärtigen Gütern oder Leistungen gegen zukünftige Güter oder Leistungen. Hierbei „glaubt“ der Kreditgeber (*Gläubiger*; meist eine Bank), dass der Kreditnehmer (*Schuldner*; englisch *obligor*) die versprochenen Gegenleistung realisiert. (Vgl. Läger, 2002, S. 12; Martin et al., 2014, S. 21)

Der Terminus **Risiko** drückt eine Situation aus, in der verschiedene Zustände mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten in der Zukunft eintreten können. Es entsteht dabei die Möglichkeit, dass Verluste aufgrund der Entwicklung von nicht deterministischen, wertbeeinflussenden Größen (sogenannten *Risikofaktoren*) eintreten können. (Vgl. Läger, 2002, S. 12; Martin et al., 2014, S. 5)

Die Kombination der beiden Begriffe ergibt das **Kreditrisiko** und definiert „... *die in einem unzureichenden Informationsstand begründete Gefahr einer negativen Abweichung des tatsächlichen Ergebniswertes vom erwarteten Ergebniswert* ... “ (Knapp, 2002, S. 9). Unter einem *unzureichendem Informationsstand* wird sowohl die Unsicherheit über zukünftige Entwicklungen als auch der Zustand der fehlenden Informationen aus historischen und aktuellen Tatbeständen verstanden. Durch Zuordnung von Eintrittswahrscheinlichkeiten zu den Umweltzuständen lässt sich diese Risikolage modellieren. Die Bedeutung der *negativen Abweichung des tatsächlichen Ergebniswertes vom erwarteten Ergebniswert* lässt sich folgendermaßen erklären. Der tatsächliche Ergebniswert (auch als *ökonomischer Verlust* bezeichnet) ist die Differenz aus vertraglich vereinbarten und tatsächlich geleisteten Zahlungen. Der erwartete Ergebniswert ist der *erwartete Verlust* aus der zugrundeliegenden Forderung. Das Kreditrisiko bezieht sich also auf die Differenz aus dem ökonomischen und erwarteten Verlust. (Vgl. Knapp, 2002, S. 9)

Der Grund für die negative Abweichung der Ergebniswerte in der obigen Definition des Kreditrisikos ist die Verschlechterung der Kreditwürdigkeit des Kreditnehmers. Die Ergebniswerte, die durch die sinkende Kreditwürdigkeit beeinflusst werden und in Folge ebenfalls sinken, sind dem Kreditrisiko ausgesetzt. Die Verschlechterung der Bonität geht hin bis zu dem Zustand „nicht kreditwürdig“. Dies entspricht der Extremform der Kreditwürdigkeitsverschlechterung und es wird vom *Ausfall des Kreditnehmers* oder vom *Ausfallereignis* (englisch *Default Event*)

gesprächen. Dieses muss klar gesetzlich geregelt sein, wie es z.B. in der Solvabilitätsverordnung §125 vom 14.12.2006 der Fall ist: Zahlungsverzug von mehr als 90 Tagen oder die Insolvenz eines Unternehmens definieren einen Ausfall. (Vgl. Bundesgesetzblatt, 2006, S. 2981; Läger, 2002, S. 16-17; Martin et al., 2014, S. 4)

## 2.2. Charakterisierung des Kreditrisikos bei Kreditvergabe

Wird dem Vertragspartner ein Kredit gewährt, so hat er nicht nur den gesamten Kreditbetrag zurückzuzahlen, sondern auch Zinszahlungen als Gegenleistung für die zeitliche Geldüberlassung. Dabei ist der Kreditgeber dem Kreditrisiko ausgesetzt, das sich in *Bonitätsänderungsrisiko* und *Kreditausfallrisiko* unterteilen lässt. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 909; Läger, 2002, S. 19-20)

Das **Bonitätsänderungsrisiko** (auch *Migrations-, Positions- oder Spreadrisiko*) beinhaltet die Gefahr einer Verschlechterung (der Einschätzung) der Kreditwürdigkeit eines Schuldners und kann beispielsweise eine Ratingherabstufung (siehe Abschnitt 3.1.2) und somit eine Erhöhung der Ausfallwahrscheinlichkeit bewirken. Der Gläubiger muss deshalb eine Neubewertung seiner Forderungen vornehmen, wodurch für ihn ein Verlust entsteht. Infolgedessen ist häufig mit höheren Risikoaufschlägen, wie z.B. höheren Zinsen für Geldaufnahmen, zu rechnen. Grundsätzlich wird unter dem Bonitätsänderungsrisiko nicht nur die Verschlechterung, sondern auch die Verbesserung der Bonität verstanden, wobei diese einen demnach konträren Effekt auf den Kredit haben kann. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 909; Läger, 2002, S. 20; Martin et al., 2014, S. 5-6)

Das **Kreditausfallrisiko** (auch *Transaktions-, Forderungsausfall- oder Verlustrisiko*) beschreibt den Fall, dass der Kreditnehmer an den Fälligkeitszeitpunkten den Zins- und Tilgungszahlungen nur teilweise, verspätet oder gar nicht nachkommen kann oder will. Dadurch bleiben die Geldforderungen des Gläubigers aus und er erleidet einen Verlust. Das Kreditausfallrisiko lässt sich in drei Etappen einteilen.

1. Das **Terminrisiko** (auch *Liquiditätsrisiko*) beschreibt die Gefahr, dass zu einem festgelegten Termin die vertraglich vereinbarten Zahlungen nicht erbracht werden und somit ein Zahlungsverzug entsteht.
2. Das **Kreditnehmerausfallrisiko** (auch *Ausfall- oder Gläubigerrisiko*) entsteht, wenn die vereinbarten Zahlungen zum Fälligkeitszeitpunkt nicht vollständig geleistet werden und für

den Kreditgeber die Gefahr besteht, dass die restliche Summe eventuell auch zu anderen Terminen nicht beglichen werden kann. Der Kreditnehmer wird zahlungsunfähig und fällt somit aus. Das Kreditnehmersausfallrisiko lässt sich weiter nach der Art der ausfallenden Forderungen unterteilen. Werden die Zinsen nicht gezahlt, so wird vom *Verzinsungsrisiko* gesprochen, werden dagegen Tilgungszahlungen nicht erbracht, so ist vom *Rückführungsrisiko* die Rede.

3. Das **Besicherungsrisiko** (auch *Sicherheiten-* oder *Sicherungsrisiko*) entsteht, wenn bereits ein Schuldner ausgefallen ist und für den Gläubiger die Gefahr besteht, dass die aufgeführten Kreditsicherheiten (z.B. Immobilieneigentum) nicht ausreichen um die Restschuld komplett abzudecken.

(Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 909; Läger, 2002, S. 20-21; Martin et al., 2014, S. 5, 21)

Der Grund für das Kreditausfallrisiko lässt sich in zwei Kategorien unterteilen. Liegt dieser beim Kreditnehmer selbst, so wird vom *Bonitätsrisiko* gesprochen, liegt der Grund jedoch komplett außerhalb des Kreditnehmers (wie bei ausländischen Schuldner), so ist vom *Länderrisiko* die Rede.

Das **Bonitätsrisiko** wird weiter in *leistungswirtschaftliches Risiko* und *Verhaltensrisiko* untergliedert. Das **leistungswirtschaftliche Risiko** bezieht sich auf die Gefahr schwieriger wirtschaftlicher Zustände, die der Kreditnehmer nicht beeinflussen kann. Diese ungünstige Situation kann dazu führen, dass der Schuldner – selbst bei vorhandener Zahlungswilligkeit – bei der Ausführung seiner Kreditzahlungen gehindert wird. Zum Beispiel kann durch eine wirtschaftliche Rezession eine Situation entstehen, die zum Zahlungsverzug oder gar zur Insolvenz des Schuldners führen kann. Das **Verhaltensrisiko** geht dagegen direkt von dem Kreditnehmer aus und umfasst die Gefahr, dass der Schuldner sich (bewusst) anders als vertraglich vereinbart verhält und es dadurch zu Zahlungsverzögerungen kommen kann, obwohl eine Zahlungsfähigkeit bestehen würde.

Das **Länderrisiko** entsteht durch internationale Kreditgeschäfte indem grenzüberschreitende Zahlungen des Kreditnehmers nicht getätigt werden können. Der Grund hierfür sind Komplikationen im Transfervorgang, die auf die *politische* oder *wirtschaftliche* Lage dieses Landes zurückzuführen sind. Das **politische Länderrisiko** resultiert aus der Zahlungsunwilligkeit eines Staates aufgrund politischer Ansichten oder wirtschaftlichen Drucks. Das **wirtschaftliche Länderrisiko** entsteht durch die Zahlungsunfähigkeit eines Landes, die durch einen Devisenmangel verursacht wird. (Vgl. Läger, 2002, S. 22-24)

Der Unterschied zwischen dem Bonitätsänderungs- und dem Kreditausfallrisiko lässt sich nun wie folgt zusammenfassen. Während das Kreditausfallrisiko zu einem Zeitpunkt  $t$  in Bezug auf eine feste Zeitspanne  $[t, T]$  konstant bleibt, berücksichtigt das Bonitätsänderungsrisiko zusätzlich die Gefahr, dass sich das Kreditausfallrisiko während dieser Zeitspanne verändern kann.

(Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 909)

Auf Basis dieser zwei Risikoklassen können zwei Modellvarianten unterschieden werden, die *Default Mode-Modelle* (Kreditausfallrisiko) und die *Mark to Market-Modelle* (Bonitätsänderungsrisiko). Die Default Mode-Modelle kommen in klassischen Geldgeschäften der Banken zur Anwendung und haben die Quantifizierung von Ausfallrisiken der Kreditnehmer zum Ziel. Diese Kredite werden normalerweise nicht gehandelt. Aber auch bei der Bewertung von nicht börsengehandelten Anleihen kommen diese Modelle zum Einsatz. Die Mark to Market-Modelle werden zur Bewertung aller Arten von börsengehandelten Schuldtiteln wie Anleihen oder Kreditderivaten eingesetzt. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 909-910)

# 3. Messung von Kreditrisiken

Um mögliche Verluste aus einem potenziellen Kreditgeschäft adäquat abschätzen zu können, ist eine Untersuchung des Kreditnehmers bezüglich seiner Zahlungsfähigkeit unumgänglich. Der Abschnitt 3.1 geht zunächst näher auf die Notwendigkeit der Kreditwürdigkeitsprüfung ein und stellt dessen Vorgehensweise vor. Des Weiteren wird der Wandel dieses Prozesses inklusive der Vor- und Nachteile beschrieben. In den Unterabschnitten 3.1.1 - 3.1.3 werden drei Verfahren zur Messung der Bonität präsentiert: das Kredit-Scoring, das Kredit-Rating und die Fuzzy-Systeme. Auf die Methodik des maschinellen Lernens wird in dieser Arbeit nicht eingegangen, hierzu wird auf Läger, 2002, S. 81-91, verwiesen. Im Kapitel 3.2 geht es um die mathematische Berechnung des Ausfallrisikos, das auf der Prüfung der Kreditwürdigkeit aufbaut. Hier wird zwischen Krediten von Einzelpersonen (Abschnitt 3.2.1) und Kreditportfolios (Abschnitt 3.2.2) unterschieden.

## 3.1. Kreditwürdigkeitsprüfung

Die Kreditwürdigkeitsprüfung stellt die Analyse und Beurteilung der wirtschaftlichen und finanziellen Situation (*Bonität*) eines potenziellen Kreditnehmers dar. Ziel dieses Vorgangs ist die Prognose über zukünftige Zahlungsfähigkeit und -willigkeit des potenziellen Kreditnehmers, d.h. die Einschätzung darüber, inwieweit der Kreditnehmer in der Lage sein wird, die vertraglichen Forderungen termingerecht in voller Höhe zu begleichen. Oder anders ausgedrückt: mit diesem Prozess soll das mit einer Kreditvergabe verbundene Risiko, das der Kreditgeber eingeht, abgeschätzt werden. Anhand des Resultats dieser Kreditwürdigkeitsprüfung wird über die Vergabe (bzw. Nichtvergabe) des Kredits entschieden. (Vgl. Läger, 2002, S. 70; Unabhängiges Landeszentrum für Datenschutz Schleswig-Holstein, 2005, S. 11; Werner, 2018)

Eine gute Bonität des Kreditnehmers hat dabei Vorteile für beide Vertragspartner. Für den Kreditnehmer bedeutet bessere Bonität eine leichtere Verschaffung des Kredits und günstigere Kreditkonditionen. Für das Kreditinstitut bedeutet dies größere Sicherheiten bzw. geringeres Risiko eines Ausfalls. (Vgl. Werner, 2018)

In den vergangenen zwei Jahrzehnten hat es wesentliche Änderungen im Prozess der Kreditwürdigkeitsprüfung gegeben. Die Anforderungen an die Kreditinstitute sind seit den Regelungen des Baseler Ausschusses für Bankenaufsicht aus dem Jahr 2004 (*Basel II*) deutlich gewachsen. So gibt es nicht nur Richtlinien zur Eigenkapitalquote, sondern auch zur strengeren Bonitätsprüfung mit dem Ziel das Kreditausfallrisiko zu minimieren. (Vgl. Finanzierung.com, o.D.; Werner, 2018)

Die traditionelle Kreditwürdigkeitsprüfung erfolgte und erfolgt anhand der persönlichen und intuitiven Einschätzung der Bonität des Kunden. Hierbei ist für den Kreditsachbearbeiter das Auftreten und die subjektive Empfindung der Seriösität des potenziellen Kreditnehmers von Bedeutung. Falls ein Vertragsverhältnis bereits besteht oder in der Vergangenheit bestanden hat, können die vorhandenen Erfahrungswerte mit in die Bewertung der Vertrauenswürdigkeit einfließen. Das Kreditvergabeverfahren hängt stark von der Sachkenntnis, dem Gedächtnis, der Lebens- und Berufserfahrung, der logischen Kombinationsgabe, der Risikobereitschaft und dem aktuellen Gemütszustand des jeweiligen Sachbearbeiters sowie von der subjektiven Wahrnehmung des Antragstellers, z.B. Sympathie oder Mitleid, ab. Aus diesem Grund gibt es zum Teil voneinander abweichende Kreditentscheidungen innerhalb eines Kreditinstituts, obwohl einheitliche Regelungen zur Kreditvergabe existieren. (Vgl. Unabhängiges Landeszentrum für Datenschutz Schleswig-Holstein, 2005, S. 15)

Die moderne Kreditwürdigkeitsprüfung lässt sich üblicherweise in zwei Beurteilungskategorien unterteilen. Mit *quantitativen* oder auch finanzwirtschaftlichen Daten wird die Zahlungsfähigkeit des potenziellen Vertragspartners geprüft. Dagegen wird mit *qualitativen* (persönlichen) Daten die Zahlungswilligkeit und damit die Vertrauenswürdigkeit des Kreditnehmers eingeschätzt. (Vgl. Läger, 2002, S. 71; Werner, 2018)

Um den Prozess der Kreditvergabe nachvollziehbar, transparent, schnell, objektiv, einheitlich standardisiert und automatisiert zu gestalten, wurden viele Verfahren zur Einstufung der Bonität entwickelt. Im Folgenden werden drei Ansätze erläutert. (Vgl. Läger, 2002, S. 76; Unabhängiges Landeszentrum für Datenschutz Schleswig-Holstein, 2005, S. 15)

### 3.1.1. Kredit-Scoring

Der Terminus *Scoring* kommt aus dem Englischen und bedeutet so viel wie *zählen, einstufen* oder *Punkte machen*. Ein *Kredit-Scoring* bzw. ein *Scoring-System* beschreibt demnach ein Punktebewertungsverfahren, das vor einem Vertragsabschluss durchgeführt wird und als Ergebnis einen Punktwert und somit eine binäre Aussage über die Kreditwürdigkeit des Vertragspartners liefert. (Vgl. Läger, 2002, S. 71; Unabhängiges Landeszentrum für Datenschutz Schleswig-Holstein, 2005, S. 10)

Dabei werden im Vorfeld definierte kreditrelevante Merkmale, sogenannten *Bonitätsvariablen*  $X_1, \dots, X_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , vom Antragsteller erhoben. Den Merkmalsausprägungen  $x_1, \dots, x_k$  werden Werte  $s_1(x_1), \dots, s_k(x_k)$  mit entsprechenden Gewichtungen  $\omega_1, \dots, \omega_k$  zugeordnet. Dies kann

zu einem *Gesamtscore* bzw. *Bonitätsscore*  $s$  durch eine lineare Funktion

$$s = \sum_{i=1}^k \omega_i s_i(x_i)$$

bzw. durch die Transformation  $t$  dieser Funktion

$$s = t\left(\sum_{i=1}^k \omega_i x_i\right)$$

verknüpft werden. Liegt der *Score*  $s$  über einem festgelegten Schwellenwert (*Trennscore*), so ist der Vertragspartner kreditwürdig und der Vertrag kann abgeschlossen werden, anderenfalls kommt kein Geschäft zustande.

Dieses Verfahren beruht auf den Erfahrungswerten aus der Vergangenheit, d.h. auf personenbezogenen Daten zu deren Zahlungsfähigkeit bereits Erkenntnisse gewonnen wurden. Somit soll eine Prognose über das zukünftige Verhalten von Kreditnehmern, die vergleichbare Merkmale aufweisen, gegeben werden. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 988; Läger, 2002, S. 71; Unabhängiges Landeszentrum für Datenschutz Schleswig-Holstein, 2005, S. 10-12)

Bei der Vergabe eines Kredites wird zwischen Privat- und Firmenkunden differenziert. Die abzufragenden Merkmale  $X_1, \dots, X_k$  weisen jedoch keinen großen Unterschied zwischen diesen beiden Kundengruppen auf. Bei Privatpersonen werden folgende **quantitative** Daten (üblicherweise aus den letzten Monaten) erhoben:

- Informationen zu Einkünften der letzten Jahre
- Verfügbares Einkommen
- Regelmäßige und bevorstehende Zahlungen

Bei Unternehmen beziehen sich diese Daten auf andere Quellen:

- Kennzahlen aus Jahresabschlüssen
- Analyse der Finanzkennzahlen im Zeitablauf
- Überprüfung der Finanzpläne und des Cashflows

Bei Privatkunden werden mit **qualitativen** Daten persönliche Informationen in die Beurteilung miteinbezogen. Diese sind:

- Beruf
- Dauer der beruflichen Tätigkeit

- Familiärer Status
- Sonstige Erfahrungen mit diesem Kreditnehmer
- Externe Informationen

Bei Firmenkunden sind hierbei folgende Attribute relevant:

- Bewertung der Produkte
- Entwicklung der Branche
- Qualität der Unternehmensführung
- Sonstige Erfahrungen mit diesem Kreditnehmer
- Externe Informationen

(Vgl. Läger, 2002, S. 71-72; Werner, 2018)

Die Einschätzung über die Zahlungsfähigkeit eines potenziellen Kunden ergibt sich durch die Bewertung aller einfließenden Komponenten. Dazu sind im nächsten Schritt die Wertzuordnungen  $s_1(x_1) \dots, s_k(x_k)$ , die entsprechenden Gewichtungen  $\omega_1, \dots, \omega_k$  und der Trennscore geeignet zu definieren. Hierfür gibt es zwei verschiedene Vorgehensweisen. (Vgl. Läger, 2002, S. 73; Werner, 2018)

Die erste Praktik erfolgt **präskriptiv** (lateinisch *raescriptivus* für *vorschreibend*), das bedeutet, dass die Wertzuordnungen, die Gewichtungen und der Trennscore aus den Gesprächen mit Spezialisten des Kreditrisikomanagements entstehen und somit eine wertende und subjektive Einschätzung darstellen. (Vgl. Läger, 2002, S. 73; Wiktionary, 2020)

Dagegen läuft die zweite Praktik **deskriptiv** (lateinisch *descriptivus* für *beschreibend*) ab. Das bedeutet, dass bereits bekannte Kreditentscheidungen mittels statistischer Methoden analysiert werden um daraus die benötigten Parameter abzuleiten. Hierzu wird eine Stichprobe aus  $m \in \mathbb{N}$  positiv entschiedenen Kreditverträgen in zwei disjunkte Gruppen eingeteilt. Die erste Gruppe enthält die vom Kreditinstitut bzgl. der Bonität richtig eingeschätzten Verträge, d.h. die solvent gebliebenen Kreditnehmer. Die zweite Gruppe enthält die falsch eingeschätzten Kreditverträge, also die insolvent gewordenen Kreditnehmer. Nun gilt es mit einem geeigneten Verfahren (z.B. multivariater linearer Diskriminanzanalyse) die Werte für die Gewichtungen  $\omega_1, \dots, \omega_m$  so zu bestimmen, dass die Streuung der Score-Werte innerhalb der Gruppen möglichst klein und zwischen den Gruppen möglichst groß wird. Die Qualität der durch die gewählten Gewichtungen spezifizierten Scoring-Funktion ist mit einer zweiten Stichprobe, der sogenannten *Validierungsstichprobe* zu überprüfen. Die zwischen den beiden Verteilungen der Scorewerte der beiden Gruppen entstandene Überlappung (bedingt durch Fehlklassifikation)

wird als Verlust oder Schaden bezeichnet. Dieser entspricht den als solvent klassifizierten aber insolvent gewordenen Kunden und den als nicht kreditwürdig eingeschätzten, jedoch solvent gebliebenen Kunden. Der Trennscore ist so zu wählen, sodass dieser erwartete Verlust minimal wird. Abbildung 1 veranschaulicht das beschriebene Konzept. Alternativ dazu können zwei

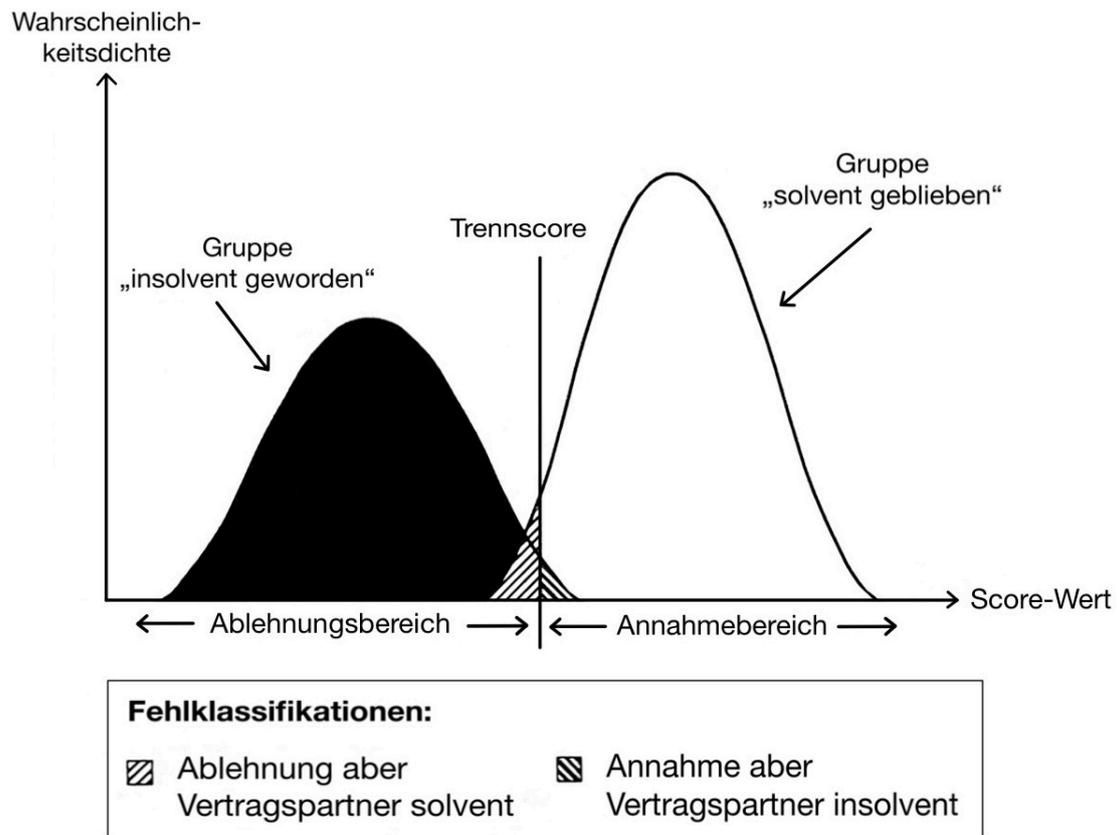


Abbildung 1: Verteilungen der Scorewerte  
 Quelle: In Anlehnung an Läger, 2002, S. 76

Trennscores verwendet werden, wobei die Kreditanfragen zwischen den beiden Schwellenwerten eine erneute (manuelle) Untersuchung erfordern. (Vgl. Duden, o.D.; Läger, 2002, S. 73-76)

Das Kredit-Scoring bringt einige Vor- sowie Nachteile mit sich. Zunächst soll durch das Kredit-Scoring das Ziel erreicht werden, die Resultate der Kreditentscheidungen objektiv, überprüfbar und somit nachvollziehbar zu gestalten. Einerseits soll durch die Objektivierung die Qualität der Entscheidung verbessert werden und zu einer geringeren Fehlklassifikation führen. Andererseits kann hier die Objektivierung in Frage gestellt werden, da es nicht gewährleistet ist, dass alle relevanten Attribute – wie z.B. besondere Motivation oder ernsthafte gute Vorsätze nach einem wirtschaftlichen Misserfolg – in die Bonitätsbeurteilung einfließen.

Des Weiteren kann die Anwendung solcher standardisierter und automatisierter Verfahren eine positive Auswirkung auf die Bearbeitungszeit eines Kreditantrags haben (und somit zu

geringeren Kosten führen), z.B. bei hohen Scorewerten, wenn die sonstigen individuellen Angaben und Sicherheiten nicht näher untersucht werden müssen. Dies ist vor allem für diejenigen Kreditnehmer von Vorteil, die etwa das Geld dringend benötigen. Ein wesentlicher Nachteil dieses Verfahrens ist jedoch, dass hierbei die Erfahrung und das Wissen der Sachbearbeiter aus dem Kreditrisiko ignoriert wird. Das Scoring kann die Bearbeitungszeit aber auch wesentlich verlängern, wenn beispielsweise der Scorewert zwischen den beiden Trennscores liegt und die Entscheidung zusätzlicher Untersuchungen bedarf. In diesem Fall würde die kreditgebende Institution vom Fachwissen der Mitarbeiter profitieren.

Wie oben beschrieben, beruht die Bestimmung der Formel für den Scorewert  $s$  auf personenbezogenen Daten aus bereits abgeschlossenen Kreditverträgen des Kreditinstituts. Somit fehlen hier Daten zu abgelehnten Verträgen und Informationen darüber, ob das Geschäft erfolgreich gewesen wäre. Das Vorhandensein und Einbeziehung dieser Daten würde zu einer Formel führen, die genauere Prognosen geben könnte.

Da die vorhandenen Kundendaten die Vergangenheit widerspiegeln, kann nicht garantiert werden, dass die Anwendung der darauf basierten Scoring-Formel auf neue Kreditverträge eine wahrheitsgemäße Aussage bzgl. der Bonität ergibt. Zumal es nicht davon ausgegangen werden kann, dass die Zusammenhänge zwischen den Merkmalsausprägungen und der Kreditwürdigkeit konstant bleiben. Aus diesem Grund ist eine ständige Kontrolle und Korrektur des Scoring-Systems essenziell.

Ein weiterer Kritikpunkt des Scorings ist, dass dadurch sogenannte Diskriminierungseffekte entstehen können. Menschen werden diskriminiert, weil sie beim Durchlaufen des Scoringmechanismus wegen ihrer Ähnlichkeit zu anderen Personen in eine Menschengruppe zumindest prognostisch eingeteilt und dadurch bzgl. ihres Krediturteils benachteiligt werden. Die wesentlichen Faktoren, wie individuelle Lebensereignisse, bleiben beim Scoring unberücksichtigt. Diskriminierung passiert vor allem bei niedrigen und evtl. auch bei mittleren Scorewerten.

Schließlich ist ein häufig angeführtes Argument, nicht nur für die Verwendung des Kredit-Scorings, sondern generell für Kreditauskunftsdienste, die Verhinderung von Überschuldung. Für das Scoring ist aber genau das Gegenteil der Fall. Wie am Anfang des Kapitels angedeutet, führt eine schlechte Bonität des Kunden, d.h. ein niedriger Scorewert, zu schlechteren Kreditkonditionen, d.h. höherem Zins und wirkt somit überschuldungsfördernd, da hierdurch evtl. eine bestehende Verschuldung erhöht wird. (Vgl. Läger, 2002, S. 76-78; Unabhängiges Landeszentrum für Datenschutz Schleswig-Holstein, 2005, S. 16-17)

### 3.1.2. Kredit-Rating

Als *Rating* wird im Allgemeinen die Einteilung von bestimmten Elementen auf einer Skala, die durch vorgegebene Merkmale definiert ist, verstanden. (Vgl. Knapp, 2002, S. 79)

Im Gegensatz zum Kredit-Scoring, bei dem einem potenziellen Kreditnehmer ein Punktwert zugewiesen wird, anhand dessen eine dichotome Bonitätsentscheidung erfolgt, ordnet das *Kredit-Rating* den Vertragspartner anhand seiner Bonität (Scorewert) in eine definierte *Rating-* oder *Bonitätsklasse* (*Notches*) zu. Das Rating-System ist dabei ordinal skaliert. Dieses Verfahren ermöglicht eine ausführlichere Aussage über die Kreditwürdigkeit des Schuldners bzw. über das Risiko, das dieser mit sich bringen würde, zu treffen. Dabei gilt: je höher die Bonität des Vertragspartners, desto niedriger ist das Kreditrisiko und andersherum. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 913; Läger, 2002, S. 91-92; Martin et al., 2014, S. 7)

Das Scoring-Verfahren liefert einen Punktwert, dessen Höhe für die Bonitätsentscheidung keine Rolle spielt, es wird lediglich überprüft, ob dieser Wert den festgelegten Schwellenwert über- oder unterschreitet. Diese Information wird nun beim Rating wie folgt ausgenutzt: Der Wertebereich der im vorigen Abschnitt bestimmten Scoring-Funktion wird in mehrere Intervalle unterteilt. Diese bilden die Ratingklassen. Der Antragsteller wird dann der Klasse zugeordnet, in deren Intervall sein Scorewert liegt. (Vgl. Läger, 2002, S. 92-93)

Das Rating-Verfahren wird vor allem für die Bonitätsbewertung von Firmenkunden verwendet, während das Scoring eher bei Privatkunden zum Einsatz kommt. (Vgl. Unabhängiges Landeszentrum für Datenschutz Schleswig-Holstein, 2005, S. 10)

Das Kredit-Rating lässt sich in zwei wesentliche Kategorien unterteilen. Wird es institutsintern erstellt, wird der Vorgang als *internes Rating* bezeichnet. Greift die kreditgebende Institution dagegen auf Ratings einer unabhängigen *Ratingagentur* zu, so wird vom *externen Rating* gesprochen. (Vgl. Läger, 2002, S. 93)

Ein **externes Kredit-Rating** stellt die Einschätzung einer durch die nationale Aufsichtsinstanz anerkannten Agentur über die Kreditwürdigkeit eines Schuldners in Bezug auf eine finanzielle Verpflichtung dar. Dieses Vorgehen wird als *Standardansatz* bezeichnet. Es können nicht nur Kreditnehmer, sondern auch Finanztitel bewertet werden. Beim Erstgenannten wird vom *Emittentenrating* (*Issuer Credit Rating*) gesprochen. Hierbei wird der Kreditnehmer bzgl. seiner generellen Zahlungsfähigkeit eingeschätzt. Im Bewertungsfall eines Finanztitels wird vom *Emissionsrating* (*Debt Rating*) gesprochen. Hier werden festverzinsliche Wertpapiere (z.B. Anleihen), die von Unternehmen an die Öffentlichkeit emittiert wurden bzgl. der termingerechten und vollständigen Zahlung von Zins und Tilgung beurteilt. Die Bonitätsklassen lassen sich hier in *Investment Grade* und *Speculative Grade* unterteilen. Investment Grade Firmen sind relativ stabile Emittenten mit mäßigem Ausfallrisiko, während Anleihen der Speculative Grade Kategorie, die oft als *Junk Bonds* (*Hochzinsanleihen*) bezeichnet werden, eine viel höhere Aus-

fallwahrscheinlichkeit aufweisen. (Vgl. de Servigny und Renault, 2004, S. 24-25; Läger, 2002, S. 94-95; Martin et al., 2014, S. 11; Reichling et al., 2007, S. 28; Wagner und Rief, o.D.)

Die bekanntesten Ratingagenturen sind Moody's Investors Service (Moody's), Standard & Poor's (S & P) und Fitch Ratings (Fitch). Die von ihnen definierten Ratingklassen werden durch Symbole (Buchstaben) oder Noten (Zahlen) charakterisiert. Es ist zu betonen, dass die Ratings verschiedener Agenturen nicht dieselben Informationen vermitteln. So sieht S & P seine Ratings in erster Linie als eine Meinung über die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Emittenten, während Moody's Ratings eher die Meinung der Agentur über den erwarteten Verlust widerspiegeln. Obwohl diese Ratings nicht direkt vergleichbar sind, ist es üblich sie gegenüberzustellen. Tabelle 1 gibt eine Übersicht über die Ratingklassen des Emittentenratings und die dazugehörigen Interpretationen der drei genannten Ratingagenturen. Finanztitel mit kürzeren Laufzeiten werden anhand anderer Skalen bewertet. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 913-914; de Servigny und Renault, 2004, S. 24-25; Läger, 2002, S. 94-95)

Obwohl ein Rating zukunftsorientiert sein soll, wird es nicht entwickelt, um eine genaue Ausfallwahrscheinlichkeit zu bestimmen, sondern, um auf einen breiten Risikobereich hinzuweisen. (Vgl. de Servigny und Renault, 2004, S. 28)

Ratingklassen drücken in der Regel einjährige implizite Ausfallwahrscheinlichkeiten aus, die auf Basis historischer Werte empirisch berechnet werden. Es ist einerseits zu beachten, dass die Ausfallwahrscheinlichkeiten nicht stationär sind und deshalb die gewählte Periode relevant ist. Andererseits versuchen die Ratingagenturen unabhängig von der Periode zu bewerten, um ein möglichst dauerhaftes Firmen-Rating zu entwickeln. Die Ratingagenturen möchten starke Ratingschwankungen vermeiden, da Firmen oft an Vorschriften bzgl. der Haltung ihrer Anleihen gebunden sind. Beispielsweise dürfen viele Anleihefonds nur Investment Grade Anleihen halten. So wäre eine häufige Ratingänderung mit riesigem Handelsaufwand und hohen Transaktionskosten verbunden, nur um die Vorschriften zu erfüllen. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 914; Hull, 2011, S. 346-347)

Ein Problem der externen Ratings ist, dass sie langfristige und konjunkturzyklusübergreifende Bonitätsbewertungen widerspiegeln, d.h. sie enthalten Szenarien über die Wirtschaft sowie geschäftliche und finanzielle Faktoren über einen Zeitraum von mehr als einem Jahr. Sie werden deshalb als *through-the-cycle Ratings* bezeichnet. Die Auswirkungen des aktuellen Konjunkturzykluses werden abgeschwächt, indem die Auswirkungen eines „durchschnittlichen Zykluses“ statt einzelner Zyklen in die Berechnungen einbezogen werden. Dies trägt dazu bei, dass das endgültige Rating weniger volatil und weniger empfindlich auf erwartete Veränderungen auf

Moody's	S & P	Fitch	Interpretation
<b>Investment Grade</b>			
Aaa	AAA	AAA	Höchste Qualität, minimales Ausfallrisiko
Aa1	AA+	AA+	Sehr hohe Qualität, sehr geringes Ausfallrisiko
Aa2	AA	AA	
Aa3	AA-	AA-	
A1	A+	A+	Hohe Qualität, geringes Ausfallrisiko, jedoch etwas anfälliger für ungünstige wirtschaftliche Bedingungen
A2	A	A	
A3	A-	A-	
Baa1	BBB+	BBB+	Angemessene Qualität, mäßiges Ausfallrisiko, noch anfälliger für ungünstige wirtschaftliche Bedingungen
Baa2	BBB	BBB	
Baa3	BBB-	BBB-	
<b>Speculative Grade</b>			
Ba1	BB+	BB+	Erhöhte Anfälligkeit für Ausfallrisiken, insbesondere bei ungünstigen wirtschaftlichen Bedingungen
Ba2	BB	BB	
Ba3	BB-	BB-	
B1	B+	B+	Hohes Ausfallrisiko, finanzielle Verpflichtungen werden aber noch erfüllt
B2	B	B	
B3	B-	B-	
Caa1	CCC+	CCC	Sehr hohes Ausfallrisiko, abhängig von günstigen geschäftlichen, finanziellen und wirtschaftlichen Bedingungen, reale Möglichkeit eines Ausfalls
Caa2	CCC		
Caa3	CCC-		
Ca	CC	CC	Ausfall steht kurz bevor, wobei eine gewisse Aussicht auf Rückzahlung von Kapital und Zinsen besteht
	C	C	Ausfallprozess hat begonnen, erwartete Rückzahlung ist geringer als bei höher bewerteten Verpflichtungen
		RD	Eingeschränkter Ausfall ( <i>Restricted Default</i> ): Zahlungsverzug bzw. Notlage des Emittenten, hat jedoch seine Geschäftstätigkeit nicht eingestellt
C	D	D	Ausfall ( <i>Default</i> ): Zahlungsverzug bei einer Verpflichtung, geringe Aussicht auf Rückzahlung von Kapital oder Zinsen

Tabelle 1: Ratingklassen für Emittentenratings bei Moody's, S & P und Fitch

Quelle: In Anlehnung an Albrecht und Maurer, 2008, S. 913-914; FitchRatings, o.D.; Läger, 2002, S. 95; Moody's, o.D.; S&P Global Ratings, o.D.

dem Markt reagiert, womit zusätzlich der Aspekt der zeitlichen Volatilität ignoriert wird. Als Folge der Ratingstabilität sind die so genannten *Fallen Angels* zu beobachten. Das sind Unternehmen, die trotz einer guten Bonität stark abgestuft wurden oder ganz ausgefallen sind. Ein Beispiel dafür ist die Pleite der Investmentbank *Lehman Brothers* im Jahr 2008. Aus diesem Grund bilden Ratings keine guten Schätzer für das kurzfristige Ausfallrisiko. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 915; de Servigny und Renault, 2004, S. 30-31, 41; Martin et al., 2014, S.8)

Meistens werden nur vergleichsweise große Unternehmen von unabhängigen Ratingagenturen bewertet und die entsprechenden Ratings veröffentlicht. Mittelständische Firmen, die keine öffentlich gehandelte Anleihen emittieren sowie Privatkunden werden von den Ratingagenturen nicht bewertet und deshalb mittels institutsinterner Einschätzung – dem **internen Kredit-Rating** – beurteilt. (Vgl. Hull, 2011, S. 347; Läger, 2002, S. 96)

Um ein stabiles und effizientes Bankensystem aufrechtzuerhalten, werden die Geschäfte der Kreditinstitute von der Bankenaufsicht überwacht. In Deutschland ist es die Bundesbank und die Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (BaFin), in Europa ist es der europäische Ausschuss für Systemrisiken (European Systemic Risk Board (ESRB)) sowie drei europäische Aufsichtsbehörden für Bank- und Versicherungsinstitute. (Vgl. Die Bundesregierung, 2015)

Die Organisationen der Aufsicht legen fest, wie hoch die Eigenkapitalreserven der Kreditinstitute sein müssen, um das Gesamtrisiko noch tragen zu können. Diese internationalen Vorschriften sind vom Baseler Ausschuss geregelt worden. Durch Basel II wird den kreditgebenden Instituten (nach Genehmigung) erlaubt interne Ratings (*Internal Ratings-Based Approach (IRBA)*) zur Bestimmung von Ausfallwahrscheinlichkeiten anzuwenden. Durch den Einsatz des *fortgeschrittenen IRB-Ansatzes* wird es den Banken außerdem ermöglicht die Verlustquote (*LGD*) und den ausfallbedrohten Betrag bei einem Ausfall (*EAD*) (siehe Kapitel 3.2.1) intern zu berechnen. (Vgl. Hull, 2011, S. 347; Martin et al., 2014, S. 11)

Ein Unterschied zwischen dem externen und dem internen Rating liegt in der Zeitspanne der Bewertung. Externe Ratings stellen, wie oben beschrieben, sogenannte *through-the-cycle Ratings* dar. Dabei werden üblicherweise mehrjährige Perioden betrachtet. Interne Ratings beurteilen die Bonität ihrer Kunden dagegen aufgrund ihrer aktuellen wirtschaftlichen und geschäftlichen Lage und werden deshalb als *point-in-time Ratings* bezeichnet. Hier werden für gewöhnlich einjährige Perioden betrachtet und auf ihrer Basis Ausfallwahrscheinlichkeiten durch das Rating prognostiziert. (Vgl. de Servigny und Renault, 2004, S. 41; Läger, 2002, S. 96-97)

Um das externe und interne Rating zu vergleichen wird in vielen Banken oftmals das sehr einfache *Mapping-Verfahren* angewendet. Hierbei werden für Großunternehmen die externen Ratings einer Agentur mit den internen Ratings für ein mittelständisches Unternehmen ver-

glichen und die Risikoniveaus so gut es geht einander zugeordnet. Da hier through-the-cycle Ratings mit point-in-time Ratings vermischt und auf die Bewertungsskala der Bank zurückgeführt werden, könnte sich diese Vorgehensweise als suboptimal erweisen und zu erheblichen Verzerrungen in Bezug auf die Kapitalallokation der Institution führen. Des Weiteren ist die Volatilität des point-in-time Ratings viel höher als die Volatilität des through-the-cycle Ratings, aber sie sind nicht über die gesamte Bewertungsskala hinweg vergleichbar. Während der Median des point-in-time Ratings tendenziell eine signifikante Volatilität aufweist, weisen hohe und niedrige point-in-time Ratings oft eine moderatere Volatilität auf, die eher mit der des through-the-cycle Ratings vergleichbar ist. Aus diesen Gründen sollten die beiden Ansätze nicht vermischt werden. (Vgl. de Servigny und Renault, 2004, S. 41-42; Läger, 2002 S. 98)

### 3.1.3. Experten- und Fuzzy-Systeme

**Expertensysteme** sind auf Basis des Fachwissens von Experten entwickelte Systeme, die vor allem für die Verarbeitung qualitativer Daten geeignet sind. Sie können durch Digitalisierung und Automatisierung komplett oder teilweise die Funktion von Experten übernehmen. Ein Experte ist dabei eine Person, die durch umfassendes Fachwissen und Erfahrung ein anerkanntes Niveau an repräsentativen Wissen auf einem anspruchsvollen Gebiet besitzt. (Vgl. Flach und Rommelfanger, o.D., S. 4; Läger, 2002, S. 79)

Ziel von Expertensystemen ist es, die Logik der Handlungsweise von Experten in Bezug auf Entscheidungen nachzuahmen und damit ein Entscheidungsmodell zu entwickeln. Zunächst wird hierfür das für die Bonitätsprüfung relevante Fach- und teilweise das Erfahrungswissen durch Befragung der Experten gesammelt und in die Systemstruktur aufgenommen. Nutzer dieses Systems werden auf Grundlage der erstellten Wissensbasis mit Hilfe von Wenn-dann-Regeln (*production rules*) durch die Baumstruktur geleitet. In der Regel werden hierzu Fragen an den Nutzer gestellt und abhängig von der Antwort wird die nächste Frage konzipiert, bis schließlich eine Empfehlung zur Kreditentscheidung ausgegeben wird. (Vgl. Flach und Rommelfanger, o.D., S. 4; Läger, 2002, S. 78)

Durch das erzeugte Expertensystem kann das seltene Wissen der Fachleute nicht nur geschützt und gespeichert, sondern auch vervielfacht und somit vielen Kunden gleichzeitig zugänglich gemacht werden. Des Weiteren ermöglicht der elektronische Prozess eine effizientere Nutzung des Wissens und führt folglich zur Steigerung der Produktivität und zur Senkung der Kosten. Zudem wird eine objektivere und konsistentere Beurteilung des potenziellen Kreditnehmers ermöglicht, insbesondere, wenn an der Entwicklung des Expertensystems mehrere Experten beteiligt sind. Die Ausarbeitung der Entscheidungsregeln wirkt sich außerdem auf die Selbstreflexion der Experten aus. Zu erwähnen ist ebenso, dass die hohe Transparenz und die

Einfachheit des Prozesses zum größeren Verständnis und somit zur größeren Akzeptanz beim Nutzer führt. Hierdurch wird es dem Anwender ermöglicht Veränderungen vorzunehmen, womit eine fortlaufende Verbesserung des Systems sichergestellt wird. (Vgl. Flach und Rommelfanger, o.D., S. 4-5)

Demgegenüber gibt es aber auch Probleme bei der Befragung und der Reproduktion des Expertenwissens, da sich intuitive, unpräzise und implizite Aussagen nur schwer erheben und in den Prozess aufnehmen lassen. Zusätzlich kann es Unterschiede bei der Konsistenz der Entscheidungsregeln geben, wenn diese durch verschiedene Fachleute erarbeitet werden. (Vgl. Läger, 2002, S. 79)

Um nun das menschliche Wissen verarbeiten und wiedergeben zu können, wird die **Fuzzy-Logik** verwendet. Diese erweitert die klassische Mengentheorie um die sogenannten *unscharfen Mengen* (*Fuzzy-Sets*), die statt einer eindeutigen Zuordnung zu einer Menge auch graduell abgestufte Zugehörigkeiten ermöglichen. Diese Methodik erscheint plausibel, denn in der Realität lassen sich oftmals Abstufungen der Zugehörigkeit statt scharfer Trennungen beobachten. Somit können z.B. die menschliche Sprache oder ihre Entscheidungen exakt analysiert werden. (Vgl. Läger, 2002, S. 79-80; Nissen, 2007, S. 4)

Das Verfahren der Fuzzy-Systeme besteht aus drei Schritten. Im ersten Schritt – der **Fuzzifizierung** – werden scharfe Werte in Fuzzy-Mengen umgeformt. Fuzzy-Sets werden dabei jeweils von einer linguistischen Variablen z.B. „niedrig“, „mittel“ und „hoch“ charakterisiert. Dabei wird der Grad der Zugehörigkeit eines scharfen Wertes zu einer unscharfen Menge durch eine Zugehörigkeitsfunktion  $\mu : X \rightarrow [0, 1]$  beschrieben, wobei  $X$  die Menge der scharfen Werte darstellt. Eine Fuzzy-Menge lässt sich somit darstellen als  $M = \{(x, \mu(x)) \mid x \in X\}$ . Die Intervalle mit klaren linguistischen Werten sind die Bereiche mit eindeutiger Zuordnung. Diese werden mit Hilfe monoton steigender bzw. fallender Zugehörigkeitsfunktionen miteinander verbunden. Die Abbildung 2 verdeutlicht dieses Konzept anhand eines Beispiels für die Variable „Rentabilität“ mit einer S-förmigen Zugehörigkeitsfunktion. Es ist erkennbar, dass eine Rentabilität von 11,6% sich nicht eindeutig zu einer Fuzzy-Menge zuordnen lässt. Daher wird diesem Wert ein Zugehörigkeitsgrad von 0,7 zum linguistischen Wert „mittel“ und ein Zugehörigkeitsgrad von 0,25 zum linguistischen Wert „hoch“ zugeordnet. Es können aber auch andere, z.B. trapezförmige Zugehörigkeitsfunktionen verwendet werden. Es hat sich allerdings nachweislich ergeben, dass die S-förmigen Funktionen die menschliche Beurteilungsweise am besten darstellen.

Der zweite Schritt heißt **Fuzzy-Inferenz** und beinhaltet technische Analysen der im ersten Schritt gewonnenen Daten. Ziel dieses Vorgehens ist die Bewertung und Aggregation der Ergebnisse durch mathematische Rechenoperationen. Auf dieser Basis können gegebenenfalls

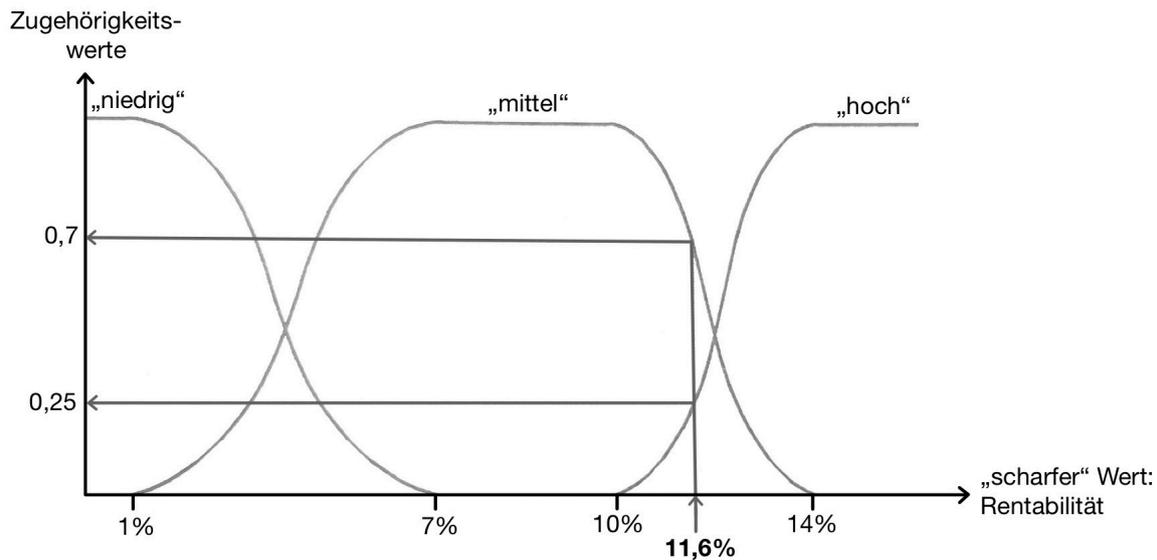


Abbildung 2: Fuzzy-Sets und eine S-förmige Zugehörigkeitsfunktion  
 Quelle: In Anlehnung an Läger, 2002, S. 80

auch potenzielle Risikoträger, die zu einer schlechten Kreditwürdigkeit führen, ermittelt werden. Somit lässt sich die Fuzzy-Inferenz auch als ein Frühwarn- oder Risikoindikationssystem nutzen.

Das Ergebnis des Urteils über die Kreditwürdigkeit liegt nun in Form einer unscharfen Größe vor. Dies hat einerseits den Vorteil, dass eine detaillierte Beurteilung der Analyse möglich ist, andererseits erschließt sich daraus keine klare Kreditentscheidung. Um zu einem eindeutigen Ergebnis zu gelangen, ist im dritten Schritt eine Rücktransformation – die **Defuzzifizierung** – in einen scharfen Wert vorzunehmen. Hierfür existieren verschiedene Verfahren, wie z.B. das Flächenhalbierungsverfahren, auf das nicht näher eingegangen wird. (Vgl. Flach und Rommelfanger, o.D., S. 9-12, 20-21; Läger, 2002, S. 80-81)

Mit Hilfe der beschriebenen Fuzzy-Logik lässt sich also das Wissen der Experten fuzzifizieren und somit leichter in die Wissensbank aufnehmen. Das Resultat ist somit entweder ein linguistischer oder ein defuzzifizierter Wert, also eine scharfe Größe, aus der eine klare Entscheidung über die Kreditvergabe folgt. (Vgl. Läger, 2002, S. 81)

## 3.2. Quantifizierung des Kreditrisikos

### 3.2.1. Berechnung der Verluste bei Einzelkrediten

Die Verluste können ex ante in *erwartete* und *unerwartete* Verluste eingeteilt werden. Der erwartete Verlust entspricht dem Betrag, der im Mittel bei vielen vergleichbaren Verträgen

verloren wird, er ist also der Erwartungswert des potenziellen zufälligen Verlusts aus einem Kreditengagement bzw. aus einem Kreditportfolio. Der erwartete Verlust wird deshalb auch als *langfristiger Durchschnitt* bezeichnet. Der unerwartete Verlust beschreibt die Schwankung um diesen Mittelwert und innerhalb der die Verluste liegen. (Vgl. Kakuk, 2019, S. 108-109; Läger, 2002, S. 99, 104)

### 3.2.1.1. Komponenten des Kreditrisikos

Der **ausfallbedrohte Betrag** *EAD* (*Exposure at Default*) der Forderung entspricht im klassischen Kreditgeschäft der Höhe der noch offenen Forderungen eines Kreditinstituts gegenüber einem Kreditnehmer zum Zeitpunkt des Ausfalls. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 910; Kakuk, 2019, S. 110; Läger, 2002, S. 101)

Die **Verlustquote** *LGD* (*Loss Given Default*) bei Eintritt eines Ausfalls ist der prozentuale Anteil der offenen Forderungen, der infolge des Ausfalls verloren ist. Es wird somit berücksichtigt, dass nicht zwingend der gesamte Forderungsbetrag ausfällt, sondern, dass oft noch ein Teil eingebracht werden kann. Alternativ zum *LGD* kann die **Wiedereinbringungsquote** *RR* (*Recovery Rate*) betrachtet werden, die den Teil der offenen Forderungen angibt, den der Kreditgeber nach einem Ausfall von dem Kreditnehmer erhält. Zum Beispiel kann der Schuldner selbst einen Teil aufbringen oder das Kreditinstitut verwertet die im Kreditvertrag hinterlegten Sicherheiten. Hierbei müssen noch die anfallenden Kosten abgezogen werden, da nur die Nettoerlöse für die Wiedereinbringungsquote relevant sind. Die zwei bedeutendsten Kostenquellen sind hierbei die Verluste durch verspätete Zinszahlungen und die Betriebskosten, die durch die Vertragsabwicklung (*workout*) entstehen. Die Wiedereinbringungsquote berechnet sich durch den Quotienten aus dem Nettoerlös bei Ausfall und der Höhe der noch offenen Forderung:

$$RR = \frac{\text{Nettoerlös bei Ausfall}}{EAD} . \quad (3.1)$$

(Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 910; Kakuk, 2019, S. 112-113; Läger, 2002, S. 101, 107)

Außerdem gilt die Beziehung  $RR = 1 - LGD$ , das bedeutet, dass der Verlust des Gläubigers umso geringer ist, je höher der Wert der Sicherheiten zum Zeitpunkt des Ausfalls. Zu unterscheiden ist zwischen dem Wert der Sicherheiten und dem Betrag, der nach Verwertung der Sicherheiten realisiert werden kann (*forced sale valuation*). Letzterer ist in der Regel niedriger und die Verlustquote somit höher als der eigentliche Wert der Sicherheit. Unter diesen Umständen ist anzumerken, dass der Zeitpunkt der Sicherheitenverwertung von großer Bedeutung für die Wiedereinbringungsquote ist, da im Zeitraum zwischen dem Ausfall und der Verwertung der Sicherheiten Risiken des Wertverlustes der Sicherheiten entstehen können. Daher ist eine

schnellstmögliche Verwertung der hinterlegten Sicherheiten zu empfehlen.

Es können noch weitere Faktoren Einfluss auf die Wiedereinbringungsquote haben. Diese lassen sich in vier Kategorien einteilen: vertragspartnerspezifische Faktoren (z.B. Rating/Bonität, Herkunftsland, (Unternehmens-)Größe, Branche), vertragsspezifische Faktoren (z.B. Seniorität/Rangordnung, Sicherheiten, solvente Bürgen/Garantiegeber), kreditinstitutspezifische Faktoren (z.B. Dauer und Qualität des Workout-Prozesses, Verfahren der Kreditsanierung) und exogene Faktoren (z.B. Konjunkturzyklus). (Vgl. Kakuk, 2019, S. 114-116; Läger, 2002, S. 101, 107-108)

Es lässt sich die folgende Beziehung zwischen den oben vorgestellten Größen bei einem Ausfall des Schuldners feststellen:

$$EAD = \underbrace{LGD \cdot EAD}_{\text{Gesamtverlust}} + \underbrace{RR \cdot EAD}_{\text{Nettoerlös}} .$$

(Vgl. Läger, 2002, S. 107)

Der **Verlust**  $l$  ist der Betrag, den der Gläubiger **bei einem Ausfall** des Schuldners verliert. Er ist ein Produkt aus der Höhe der Forderung und dem Anteil der Forderung, der ausfällt:

$$l = EAD \cdot LGD . \quad (3.2)$$

Die **Verlustvariable**  $L$  (*Loss*) aus einer ausfallrisikobehafteten Forderung stellt somit die Höhe des möglichen Ausfalls am Ende einer festen Periode dar. Es gilt

$$L = \begin{cases} l, & \text{falls Ausfall eintritt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um das Ereignis „Ausfall“ darzustellen, wird ein **Ausfallindikator**  $D$  (*Default Indicator, Default Variable*) eingeführt. Dieser ist eine bernoulliverteilte Zufallsvariable mit

$$D = \begin{cases} 1, & \text{falls Ausfall eintritt,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.3)$$

und der zugehörigen Dichtefunktion

$$f_{PD}(d) = PD^d (1 - PD)^{1-d} \quad \text{mit} \quad PD = \mathbb{P}(D = 1), \quad D = d = 0, 1 .$$

Für den Erwartungswert und die Varianz von  $D$  gilt

$$\mathbb{E}(D) = 1 \cdot PD + 0 \cdot (1 - PD) = PD, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(D) &= \mathbb{E}(D^2) - \mathbb{E}(D)^2 \\ &= 1^2 \cdot PD + 0^2 \cdot (1 - PD) - PD^2 \\ &= PD(1 - PD). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Mit Hilfe des Ausfallindikators lässt sich das folgende *Basismodell des Ausfallrisikos* definieren:

$$L = l \cdot D = EAD \cdot LGD \cdot D. \quad (3.6)$$

(Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 910-911; Läger, 2002, S. 99-100, McNeil et al., 2015, 436)

Die **Ausfallwahrscheinlichkeit**  $D$  (*Probability of Default*) ist eine Funktion, die einem Kreditnehmer die Wahrscheinlichkeit zuordnet, mit der er die vereinbarten Zins- und Tilgungszahlungen in einem festgelegten Zeitraum nicht leistet. Es gilt  $PD = \mathbb{P}(D = 1)$ .

Während  $EAD$  zusammen mit  $LGD$  die Quantitätsdimension, d.h. die Verlusthöhe bildet, bildet die Ausfallwahrscheinlichkeit  $PD$  die Intensitätsdimension des Kreditrisikos. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 911; Kakuk, 2019, S. 118-119; Läger, 2002, S. 101-102)

Es kann der **erwartete Verlust**  $EL$  (*Expected Loss*) auf Einzelkreditnehmerebene definiert werden. Es ist zu beachten, dass alle Faktoren in der Basisbeziehung (3.6) Zufallsvariablen sind. Unter der Annahme der stochastischen Unabhängigkeit dieser Zufallsgrößen folgt

$$\begin{aligned} EL &= \mathbb{E}(L) = \mathbb{E}(EAD) \cdot \mathbb{E}(LGD) \cdot \mathbb{E}(D) \\ &= \mathbb{E}(EAD) \cdot \mathbb{E}(LGD) \cdot PD. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Unabhängigkeitsannahme bei den Variablen  $LGD$  und  $PD$  ist historisch widerlegt worden. Einige Autoren gehen von einer positiven Korrelation zwischen den beiden Größen aus. Ein Beispiel hierfür könnte die negative Entwicklung der Bonität eines Schuldners und damit ein Anstieg der  $PD$  und gleichzeitig ein Wertverlust der hinterlegten Kreditsicherheiten und damit eine steigende  $LGD$ , in Zeiten eines konjunkturellen Abschwungs sein. Zur Vereinfachung wird nachfolgend die Unabhängigkeit der einzelnen Komponenten angenommen. Oftmals werden die Zufallsvariablen  $EAD$  und  $LGD$  als deterministische Größen angenommen, in diesem Fall

vereinfacht sich die Gleichung (3.7) zu

$$EL = EAD \cdot LGD \cdot PD = l \cdot PD. \quad (3.8)$$

(Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 911; Kakuk, 2019, S. 109-110; Läger, 2002, S. 101, 103)

Die Komponenten  $EAD$  und  $LGD$  sind vertragsspezifisch, d.h. unabhängig von der Bonität des Schuldners, während die Ausfallwahrscheinlichkeit  $PD$  hier die einzige vertragspartnerspezifische Komponente ist. (Vgl. Kakuk, 2019, S. 120)

Des Weiteren kann der **risikobehaftete Rückzahlungsbetrag  $R$**  bestimmt werden. Sei  $B$  der Betrag der fälligen Forderungen, der gerade dem  $EAD$  entspricht. Dann gilt

$$R = B - EAD \cdot LGD \cdot D = B - L$$

und

$$\mathbb{E}(R) = B - EAD \cdot \mathbb{E}(LGD) \cdot PD = B - EL. \quad (3.9)$$

Der erwartete Rückzahlungsbetrag einer risikobehafteten Forderung ist also der Wert der risikolosen Forderung abzüglich des mit der Ausfallwahrscheinlichkeit gewichteten Verlustbetrages. (Vgl. Läger, 2002, S. 99, 103-104)

Im Sinne von Mark to Market-Modellen müssen außerdem zusätzlich zu den in Formel (3.8) aufgeführten Faktoren auch die *Migrationswahrscheinlichkeiten*, also Wahrscheinlichkeiten, dass sich die Bonität eines Kreditnehmers ändert, berücksichtigt werden. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 911)

Der berechnete erwartete Verlust entspricht dem Ausfallrisiko, d.h. dem durchschnittlichen Verlustbetrag, den der Gläubiger erwarten kann. Die reale Höhe des Ausfalls wird allerdings um diesen Mittelwert schwanken. Der **unerwartete Verlust  $UL$**  (*Unexpected Loss*) beschreibt die geschätzte Volatilität des Verlustes  $L$  um den Erwartungswert  $EL$  und wird in der Regel durch die Standardabweichung  $\sigma(L) = \sqrt{\text{Var}(L)}$  gemessen. Unter der Annahme der Unabhängigkeit

der Zufallsvariablen  $EAD$ ,  $LGD$  und  $D$  und konstanten  $EAD$  gilt

$$\begin{aligned}
 UL &= \sigma(L) \\
 &= \sqrt{\text{Var}(EAD \cdot LGD \cdot D)} \\
 &= EAD \sqrt{\text{Var}(LGD \cdot D)} \\
 &= EAD \sqrt{\mathbb{E}(LGD)^2 \text{Var}(D) + \mathbb{E}(D)^2 \text{Var}(LGD) + \text{Var}(LGD) \text{Var}(D)}. \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Beziehungen (3.4) und (3.5) folgt aus (3.10)

$$\begin{aligned}
 UL &= EAD \sqrt{\mathbb{E}(LGD)^2 PD(1 - PD) + \text{Var}(LGD)(PD^2 + PD(1 - PD))} \\
 &= EAD \sqrt{(\mathbb{E}(LGD)^2(1 - PD) + \text{Var}(LGD)) PD}. \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Falls der  $LGD$  ebenfalls als konstant angenommen wird, vereinfacht sich die Gleichung (3.11) wegen  $\mathbb{E}(LGD) = LGD$  und  $\text{Var}(LGD) = 0$  zu

$$\begin{aligned}
 UL &= EAD \cdot LGD \sqrt{(1 - PD) PD} \\
 &= l \sqrt{(1 - PD) PD} \\
 &= l \sqrt{\text{Var}(D)}. \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

(Vgl. Läger, 2002, S. 104-105)

Die Wiedereinbringungsquote  $RR$  ist praktisch nur schwer zu bestimmen und wird deshalb häufig anhand historischer Daten geschätzt. Dies geschieht nicht für jeden Kreditnehmer einzeln, sondern für die jeweiligen Ratingklassen, wobei die  $RR$  innerhalb einer jeden Klasse als konstant angenommen wird. Hierbei kommt es auf die Definition eines Ausfallereignisses an. Wird unter einem Ausfall beispielsweise eine Insolvenz, eine Umschuldung oder ein Forderungsverzicht verstanden, so wird es zu Ausfallquoten größer Null kommen. Wird dagegen bereits ein Zahlungsverzug als ein Ausfall definiert, so dürften die Verluste kleiner und demnach die Wiedereinbringungsquoten größer ausfallen. Dies hat den Grund, dass der  $LGD$  laut Definition größer als Null ist, es aber durchaus noch zu einer vollständigen Rückzahlung kommen kann. Würden diese Fälle nicht berücksichtigt werden, so käme es zu einer schematischen Verzerrung durch kontinuierliche Überschätzung des  $LGD$ . (Vgl. Kakuk, 2019, S. 117)

Die Ermittlung der Verlust- bzw. der Wiedereinbringungsquote auf Grundlage historischer

Daten geht mit einigen Nachteilen einher. So werden bei der Berechnung zyklische Abhängigkeiten oder vertragsspezifische Besonderheiten komplett oder teilweise ignoriert, was zu einer bedingten Verzerrung führt und somit eine suboptimale Planung der Risikoprämie zur Folge hat. Wird der *LGD* zu niedrig eingeschätzt, so wird die Risikoprämie zu knapp eingeplant und reicht somit nicht aus, um den erwarteten Verlust zu decken woraufhin als Konsequenz ein schlechtes Jahresergebnis zu erwarten ist. Falls der *LGD* zu hoch eingeschätzt wird, so wird auch die Risikoprämie zu großzügig eingeplant. Dies kann zu relativ hohen Zinsen führen und schließlich sogar Wettbewerbsnachteile einbringen. (Vgl. Kakuk, 2019, S. 118)

### 3.2.1.2. Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit

Es werden drei Methoden zur Ermittlung der Ausfallwahrscheinlichkeit vorgestellt: der *a posteriori-Ansatz*, die *logistische Regression* sowie der Ansatz der *historischen Ausfallwahrscheinlichkeiten*. Alle drei Verfahren sind modellfrei, das bedeutet, dass der Ausfallprozess hierbei nicht modelliert werden muss. (Vgl. Läger, 2002, S. 110-111)

#### 3.2.1.2.1. A posteriori-Ansatz

Das Ziel des *a posteriori-Ansatzes* ist die Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit, mit der ein Kreditnehmer mit bestimmten Merkmalsausprägungen während der Vertragslaufzeit ausfällt. Das Verfahren beruht auf dem in Abschnitt 3.1.1 bestimmten Score-Wert  $s_i$  eines Vertragspartners  $i$ . Mit diesem Score lässt sich der potenzielle Schuldner als solvent oder insolvent klassifizieren oder zur genaueren Beurteilung in eine Ratingklasse zuordnen. Mit Hilfe des Ausfallindikators  $D$  aus (3.3) lässt sich die Ausfallwahrscheinlichkeit  $PD_i$  eines Vertragspartners  $i$  berechnen als die auf den Scorewert  $s_i$  bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Schuldner  $i$  ausfällt,  $\mathbb{P}(D = 1 | s_i) = PD_i$ . Diese Wahrscheinlichkeit wird als *a posteriori-Wahrscheinlichkeit* bezeichnet. Für die Gegenwahrscheinlichkeit – die *Überlebenswahrscheinlichkeit* – d.h. für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kreditnehmer  $i$  mit einem Score  $s_i$  während der Vertragslaufzeit nicht ausfällt, gilt

$$\mathbb{P}(D = 0 | s_i) = 1 - \mathbb{P}(D = 1 | s_i) = 1 - PD_i. \quad (3.13)$$

Mit der *a posteriori-Wahrscheinlichkeit* wird hier eine Bewertung der Ausfallgefahr gegeben. Dies geschieht durch die Berechnung der relativen Häufigkeiten der Ausfälle der Vertragspartner, die die gleichen oder ähnlichen Merkmalsausprägungen während einer festgelegten Laufzeit in der Vergangenheit aufwiesen. (Vgl. Läger, 2002, S. 111-112)

Die absoluten Häufigkeiten der Ausfälle sind durch das Produkt  $\mathbb{P}(s_i | D = 1) \cdot \mathbb{P}_i(D = 1)$  gegeben. Hierbei ist  $\mathbb{P}(s_i | D = 1)$  die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Person  $i$  den Score-Wert

$s_i$  annimmt, wenn sie insolvent ist, d.h. ausgefallen ist. Der Ausdruck  $\mathbb{P}_i(D = 1)$  ist die *a priori-Wahrscheinlichkeit*, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass die Person  $i$  insolvent ist, unabhängig von dem Score-Wert  $s_i$  bzw. von den erhobenen Merkmalen. Die relative Häufigkeit wird mit Hilfe des *Bayes-Theorems* bestimmt. Unter Verwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D = 1 | s_i) &= \frac{\mathbb{P}(s_i | D = 1) \cdot \mathbb{P}_i(D = 1)}{\mathbb{P}(s_i)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(s_i | D = 1) \cdot \mathbb{P}_i(D = 1)}{\mathbb{P}(s_i | D = 1) \cdot \mathbb{P}_i(D = 1) + \mathbb{P}(s_i | D = 0) \cdot \mathbb{P}_i(D = 0)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

mit  $\mathbb{P}(s_i | D = 0)$  und  $\mathbb{P}_i(D = 0)$  analog. Die a priori-Wahrscheinlichkeiten  $\mathbb{P}_i(D = d)$ ,  $d = 0, 1$ , sind gegeben, die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $\mathbb{P}(s_i | D = d)$ ,  $d = 0, 1$ , müssen dagegen berechnet werden. Wird angenommen, dass die Score-Werte  $s_i$  in beiden Klassen normalverteilt sind, so ist ihre bedingte Dichte gegeben durch

$$\mathbb{P}(s_i | D = d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_d^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(s_i - \bar{s}_d)^2}{\sigma_d^2}}, \quad d = 0, 1, \quad (3.15)$$

mit Klassenmittelwerten  $\bar{s}_d$  und Standardabweichungen  $\sigma_d$ ,  $d = 0, 1$ . Wird nun die bedingte Dichte (3.15) in das Bayes-Theorem (3.14) eingesetzt, so ergibt sich für die a posteriori-Ausfallwahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(D = 1 | s_i) = \frac{\sigma_1^{-1} e^{-\frac{1}{2} \frac{(s_i - \bar{s}_1)^2}{\sigma_1^2}} \cdot \mathbb{P}_i(D = 1)}{\sigma_1^{-1} e^{-\frac{1}{2} \frac{(s_i - \bar{s}_1)^2}{\sigma_1^2}} \cdot \mathbb{P}_i(D = 1) + \sigma_0^{-1} e^{-\frac{1}{2} \frac{(s_i - \bar{s}_0)^2}{\sigma_0^2}} \cdot \mathbb{P}_i(D = 0)}.$$

Mit der Umformung  $\sigma_d^{-1} = e^{\ln \sigma_d^{-1}} = e^{-\frac{1}{2} \ln \sigma_d^2}$ ,  $d = 0, 1$ , ergibt sich

$$\mathbb{P}(D = 1 | s_i) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \ln \sigma_1^2 + \frac{(s_i - \bar{s}_1)^2}{\sigma_1^2} \right)} \cdot \mathbb{P}_i(D = 1)}{e^{-\frac{1}{2} \left( \ln \sigma_1^2 + \frac{(s_i - \bar{s}_1)^2}{\sigma_1^2} \right)} \cdot \mathbb{P}_i(D = 1) + e^{-\frac{1}{2} \left( \ln \sigma_0^2 + \frac{(s_i - \bar{s}_0)^2}{\sigma_0^2} \right)} \cdot \mathbb{P}_i(D = 0)} = PD_i.$$

Im Falle eines Kredit-Ratings können den Ratingklassen die durchschnittlichen a posteriori-Ausfallwahrscheinlichkeiten zugeordnet werden. Der zu beurteilende Kreditnehmer bekommt demnach die Ausfallwahrscheinlichkeit zugeteilt, die der Ratingklasse zugeteilt wurde, in die er fällt. (Vgl. Läger, 2002, S. 112-114)

### 3.2.1.2.2. Logistische Regression

Das Ziel der *logistischen Regression* ist die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}_i(D = 1) = PD_i$ , mit der ein Kreditnehmer  $i$  der Gruppe der insolvent gewordenen Vertragspartner ( $D = 1$ ) zugeordnet werden kann. Für die Überlebenswahrscheinlichkeit gilt analog zu (3.13) der Zusammenhang  $\mathbb{P}_i(D = 0) = 1 - \mathbb{P}_i(D = 1) = 1 - PD_i$ . Eine Regression ermöglicht eine Untersuchung des Einflusses mehrerer unabhängiger Regressoren  $x_{i1}, \dots, x_{ik}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , auf eine abhängige *Responsevariable*  $y_i$  mittels

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i + \varepsilon_i, \quad (3.16)$$

mit dem (unbekannten) Parametervektor  $\boldsymbol{\beta}^T = (\beta_0, \dots, \beta_k)$ , dem Vektor der Merkmalsausprägungen  $\mathbf{x}_i = (1, x_{i1}, \dots, x_{ik})^T$  und dem *Residuum* (oder *Fehler-* bzw. *Störterm*)  $\varepsilon_i$ . Es ist nicht möglich die Ausfallwahrscheinlichkeit  $PD_i$  direkt über die Regression (3.16) zu bestimmen, da die Responsevariable beliebige Werte aus dem Intervall  $(-\infty, +\infty)$  annehmen kann, Wahrscheinlichkeiten dagegen im Intervall  $[0, 1]$  liegen müssen. Um zu einer dichotomen Größe zu gelangen, wird Folgendes angenommen:

$$D = \begin{cases} 1, & \text{falls } y_i \leq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Somit lässt sich die Responsevariable in zwei Klassen (solvent und insolvent) einteilen. Des Weiteren wird angenommen, dass die Residuen  $\varepsilon_i$  *logistisch* verteilt sind, d.h. für ihre Verteilungsfunktion gilt

$$F_\varepsilon(\eta) = \frac{e^\eta}{1 + e^\eta} = \frac{1}{1 + e^{-\eta}} \in (0, 1). \quad (3.18)$$

Unter Verwendung der Beziehungen (3.16) - (3.18) lässt sich über die *logistische Regression* die Ausfallwahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}_i(D = 1)$  herleiten:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(D = 1) &= \mathbb{P}_i(y_i \leq 0) \\ &= \mathbb{P}_i(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i + \varepsilon_i \leq 0) \\ &= F_\varepsilon(-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i) \\ &= \frac{1}{1 + e^{\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i}} = PD_i. \end{aligned} \quad (3.19)$$

(Vgl. Läger, 2002, S. 114-116)

Zuletzt sollen die unbekannt Parameter  $\beta_0, \dots, \beta_k$  mit dem Maximum-Likelihood-Verfahren

geschätzt werden. Da der Indikator  $D$  bernoulliverteilt ist, ist die Likelihood-Funktion gegeben durch

$$L(\beta_0, \dots, \beta_k) = \prod_{i=1}^n f_{PD_i}(d) = \prod_{i=1}^n PD_i^d (1 - PD_i)^{1-d}, \quad d = 0, 1.$$

Die Berechnung der Log-Likelihood-Funktion

$$\log(L(\beta_0, \dots, \beta_k)) = \sum_{i=1}^n d \log(PD_i) + (1 - d) \log(1 - PD_i), \quad d = 0, 1,$$

kann hilfreich sein. Maximierung der (Log-)Likelihood-Funktion führt zum Schätzwert für den Vektor  $\beta$ . Wird dieser Schätzer in die Gleichung (3.19) eingesetzt, so lässt sich für einen Kreditnehmer die Ausfallwahrscheinlichkeit bestimmen. Es lässt sich außerdem anhand der berechneten Ausfallwahrscheinlichkeiten eine Prognose der Insolvenz abgeben. Falls die Ausfallwahrscheinlichkeit über 50% liegt, so ist der entsprechende Vertragspartner als „insolvenzgefährdet“ zu klassifizieren, anderenfalls als „solvent“. (Vgl. Läger, 2002, S. 117)

### 3.2.1.2.3. Historische Ausfallwahrscheinlichkeiten

Ratingagenturen veröffentlichen Tabellen mit Informationen über Bonitätsänderungen in den einzelnen Ratingklassen. Diese Tabellen werden als *Übergangs-* oder *Migrationsmatrizen* (*migration matrices*) bezeichnet und beschreiben, welcher Anteil der Klassen über eine festgelegte Zeitperiode heraufgestuft (*rating upgrade*) oder herabgestuft (*rating downgrade*) wurde oder das Rating beibehalten hat. (Vgl. Läger, 2002, S. 122; Martin et al., 2014, S. 9)

Tabelle 2 zeigt ein Beispiel für eine durchschnittliche einjährige Übergangsmatrix der Ratingagentur S & P. Die erste Spalte stellt das Anfangsrating dar, die erste Zeile das Rating am Ende

von/nach	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D	NR
AAA	<b>87.06</b>	9.06	0.53	0.05	0.11	0.03	0.05	0.00	3.11
AA	0.48	<b>87.23</b>	7.77	0.47	0.05	0.06	0.02	0.02	3.89
A	0.03	1.60	<b>88.58</b>	5.00	0.26	0.11	0.02	0.05	4.35
BBB	0.00	0.09	3.25	<b>86.49</b>	3.56	0.43	0.10	0.16	5.92
BB	0.01	0.03	0.11	4.55	<b>77.82</b>	6.80	0.55	0.63	9.51
B	0.00	0.02	0.07	0.15	4.54	<b>74.60</b>	4.96	3.34	12.33
CCC/C	0.00	0.00	0.10	0.17	0.55	12.47	<b>43.11</b>	28.30	15.31
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	<b>100.00</b>	0.00

Tabelle 2: Durchschnittliche einjährige Übergangsmatrix für 1981-2020 in %

Quelle: In Anlehnung an S&P Global Ratings, 2021, Tab. 21

des Jahres. „NR“ steht dabei für „Not Rated“ und beinhaltet den Anteil der Unternehmen, denen das Rating entzogen wurde. Die Werte auf der Diagonalen haben das größte Gewicht,

was bedeutet, dass der Großteil der gerateten Namen nach einem Jahr das ursprüngliche Rating beibehält. Dieser Effekt ist umso stärker, je besser das Anfangsrating ist. Wie der Matrix zu entnehmen ist, gibt es mehr Herab- als Heraufstufungen und außerdem deutlich mehr Ausfälle bei schlecht gerateten Kategorien. (Vgl. Läger, 2002, S. 122; Martin et al., 2014, S. 9; S&P Global Ratings, 2021, S. 65)

Übergangsmatrizen können mathematisch wie folgt beschrieben werden: Sei  $R(t)$ ,  $t \in \mathbb{N}_0$ , der stochastische Ratingprozess, der zum Zeitpunkt  $t$  das Rating  $R(t) = 1, \dots, K$  darstellt. Dabei entspricht die letzte Ratingkategorie  $K$  der Ausfallklasse  $D$ . Dann repräsentiert die Übergangsmatrix  $Q(t) = (q_{i,j}(t))$ ,  $i, j = 1, \dots, K$  die Wahrscheinlichkeiten  $q_{i,j}(t) = \mathbb{P}(R(t+1) = j \mid R(t) = i)$ . Für die Matrix  $Q(t)$  gelten folgende Eigenschaften:

1. Die Einträge liegen im Intervall  $[0, 1]$ :  $q_{i,j}(t) \in [0, 1]$  für alle  $i, j = 1, \dots, K$
2. Die Zeilen summieren sich zu 1:  $\sum_{j=1}^K q_{i,j}(t) = 1$  für alle  $i = 1, \dots, K$
3.  $K=D$  ist ein *absorbierender* Zustand, d.h. ein einmal ausgefallener Kreditnehmer kann die Ausfallkategorie  $D$  niemals verlassen:  $q_{K,j}(t) = 0$  für alle  $j = 1, \dots, K - 1$

(Vgl. Martin et al., 2014, S. 9)

Werden nur die Übergänge in die Klasse  $D$  betrachtet, also der prozentuale Anteil der Ausfälle in jeder Klasse innerhalb einer Periode, so wird dieser als *Ausfallrate* (*Default Rate*, *DR*) bezeichnet. Ausfallraten sind relative Häufigkeiten der beobachteten historischen Ausfälle. Wenn angenommen wird, dass diese sich in der Zukunft ähnlich entwickeln werden, so können die Ausfallraten der Vergangenheit als Schätzer für die Ausfallwahrscheinlichkeiten in der Zukunft herangezogen werden. (Vgl. Läger, 2002, S. 118-119; Martin et al., 2014, S. 8)

In Tabelle 3 sind durchschnittliche kumulierte Ausfallraten der Ratingagentur S & P dargestellt. Zum Beispiel kann abgelesen werden, dass ein Unternehmen mit einem Anfangsrating „BB“ eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 0.63% bis zum Ende des ersten Jahres hat, 1.93% bis zum Ende des zweiten Jahres und so weiter. Aus diesen Daten lässt sich die Wahrscheinlichkeit berechnen, in einem bestimmten Jahr auszufallen. So fällt eine Firma mit einem Anfangsrating „BB“ mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1.93\% - 0.63\% = 1.30\%$  im zweiten Jahr aus, mit einer Wahrscheinlichkeit von  $3.46\% - 1.93\% = 1.53\%$  im dritten Jahr und so weiter. (Vgl. Hull, 2011, S. 348)

Es ist festzustellen, dass die Ausfallwahrscheinlichkeiten in einem Jahr für Investment Grade Ratings (AAA-BBB) eine tendenziell steigende Funktion der Zeit ist. So sind in der Tabelle 3 die Wahrscheinlichkeiten für einen Ausfall im ersten bis zum siebten Jahr eines „AA“ gerateten Unternehmens 0.02%, 0.04%, 0.05%, 0.10%, 0.09%, 0.11%, 0.08%. Die Zunahme hat den Grund,

	Laufzeit						
	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre	6 Jahre	7 Jahre
AAA	0.00	0.03	0.13	0.24	0.34	0.45	0.51
AA	0.02	0.06	0.11	0.21	0.30	0.41	0.49
A	0.05	0.13	0.22	0.33	0.46	0.60	0.76
BBB	0.16	0.43	0.75	1.14	1.54	1.94	2.27
BB	0.63	1.93	3.46	4.99	6.43	7.75	8.89
B	3.34	7.80	11.75	14.89	17.35	19.36	20.99
CCC/C	28.30	38.33	43.42	46.36	48.58	49.61	50.75

Tabelle 3: Durchschnittliche kumulierte Ausfallraten für 1981-2020 in %

Quelle: In Anlehnung an Hull, 2011, S. 349 und S&P Global Ratings, 2021, Tab. 24

dass für eine Firma mit einem guten Anfangsrating mit der Zeit die Wahrscheinlichkeit für negative finanzielle Veränderungen steigt. Dagegen sind die Wahrscheinlichkeiten eines Ausfalls in einem Jahr für Speculative Grade Ratings (BB-CCC/C) eine tendenziell fallende Funktion der Zeit. So sind die Wahrscheinlichkeiten für einen Ausfall im ersten bis zum siebten Jahr einer „CCC“ gerateten Firma 28.30%, 10.03%, 5.09%, 2.94%, 2.22%, 1.03%, 1.14%. Dies liegt daran, dass für ein Unternehmen, das als „nicht kreditwürdig“ eingeschätzt wurde, die nächsten ein paar Jahre schwierig sein könnten und falls das Unternehmen in dieser Zeit nicht ausfällt, so ist in Bezug auf seine finanzielle Situation möglicherweise eine Verbesserung festzustellen. (Vgl. Hull, 2011, S. 348-349)

### 3.2.2. Berechnung der Verluste in Kreditportfolios

Das Verständnis des letzten Kapitels wird auf ein Portfolio bestehend aus  $n$  Einzelkrediten ausgeweitet. In einem Portfolio müssen zusätzlich Korrelationen zwischen den Forderungen berücksichtigt werden. Diese Arbeit beschränkt sich hierbei auf paarweise Abhängigkeiten. Im Allgemeinen Fall, d.h. für Abhängigkeiten zwischen mehr als zwei Krediten werden weitere Maßzahlen benötigt. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 917; Läger, 2002, S. 127, 130-131)

#### 3.2.2.1. Verlustverteilung

Es wird der Verlust  $L$  aus dem Basismodell des Ausfallrisikos (3.6) betrachtet, wobei der Index  $i$  für kreditindividuelle Größen des jeweiligen Schuldners steht:

$$L_i = l_i \cdot D_i = EAD_i \cdot LGD_i \cdot D_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Der zufällige **Portfolioverlust**  $L_P$  berechnet sich additiv aus den Verlusten der Einzelkredite:

$$L_P = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n l_i \cdot D_i = \sum_{i=1}^n EAD_i \cdot LGD_i \cdot D_i. \quad (3.20)$$

Zur Vereinfachung der Berechnungen werden – wie im Abschnitt 3.2.1.1 – deterministische Größen  $EAD_i$  und  $LGD_i$  und damit auch deterministischer Betrag  $l_i = EAD_i \cdot LGD_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , angenommen. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 916; Läger, 2002, S. 129)

Als **Verlustverteilung** wird die Verteilung des Verlustes eines Einzelkredits oder eines Kreditportfolios bezeichnet. Diese kann in einfachen Fällen angegeben werden. Aus dem Abschnitt 3.2.1 ist bekannt, dass die Verlustindikatoren  $D_i$  bernoulliverteilt mit dem Parameter  $PD_i$  sind, also  $D_i \sim Ber(PD_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Für die Verlustverteilung eines Einzelkredites gilt daher

$$L_i \sim EAD_i \cdot LGD_i \cdot Ber(PD_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Es werden stochastische Unabhängigkeit der Ausfallereignisse im Portfolio, identische Verlustbeträge ( $EAD_i LGD_i = l$ ) und Homogenität der Ausfallwahrscheinlichkeiten ( $PD_i = PD$ ) für alle Kredite angenommen. Dann gilt für den Portfolioverlust:

$$L_P = l \sum_{i=1}^n D_i = l \cdot D, \quad (3.21)$$

wobei  $D = \sum_{i=1}^n D_i$  die Anzahl der Ausfälle im Portfolio angibt.  $D$  ist binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $PD$ , d.h. es gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass genau  $k$  Kreditnehmer in einem Portfolio ausfallen

$$\mathbb{P}(D = k) = \binom{n}{k} PD^k (1 - PD)^{n-k}.$$

Für die Verteilung von  $L_P$  gilt also

$$L_P \sim l \cdot Bin(n, PD). \quad (3.22)$$

(Vgl. Läger, 2002, S. 128; Martin et al., 2014, S. 141)

Die Binomialverteilung des Portfolioverlustes kann mit einer wachsenden Anzahl der Kredite  $n$  durch die Normalverteilung approximiert werden. Hierfür wird mit  $L_n = \sum_{i=1}^n l_i D_i$  der Verlust eines Portfolios bestehend aus  $n$  Krediten bezeichnet. Mit dem zentralen Grenzwertsatz gilt für

unabhängige Ausfallvariablen  $D_i$  und für  $n \rightarrow \infty$ , dass

$$P(L_n \leq x) \approx \mathcal{N}_x(\mathbb{E}(L_n), \text{Var}(L_n)).$$

Im Kapitel 3.2.2.2 wird erläutert, dass die Ausfallereignisse in echten Kreditportfolios nicht unabhängig sind, sondern, dass zwischen ihnen eine Korrelation besteht. Deshalb ist die Normalverteilungsapproximation eher nicht realistisch. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 918)

Grundsätzlich haben Kredite in einem Portfolio unterschiedliche Kredithöhen und somit unterschiedliche Verlustbeträge. Auch kann im allgemeinen Fall nicht die Annahme unabhängiger Kredite gemacht werden. Die Größen  $EAD$ ,  $LGD$  und  $PD$  sind gegebenenfalls zeitabhängig und stochastisch. Außerdem treten Ausfallereignisse selten ein. Die genannten Faktoren führen zu einer Asymetrie der Verlustverteilung des Portfolios. Falls die Verlustverteilung existiert, hat sie üblicherweise eine rechtsschiefe Form, wie in Abbildung 3 skizziert. Der Grafik ist zu entnehmen, dass extrem große Verluste in einem Portfolio eher unwahrscheinlich sind, während kleinere Verluste mit einer hohen Wahrscheinlichkeit eintreten. Es lässt sich interpretieren, dass

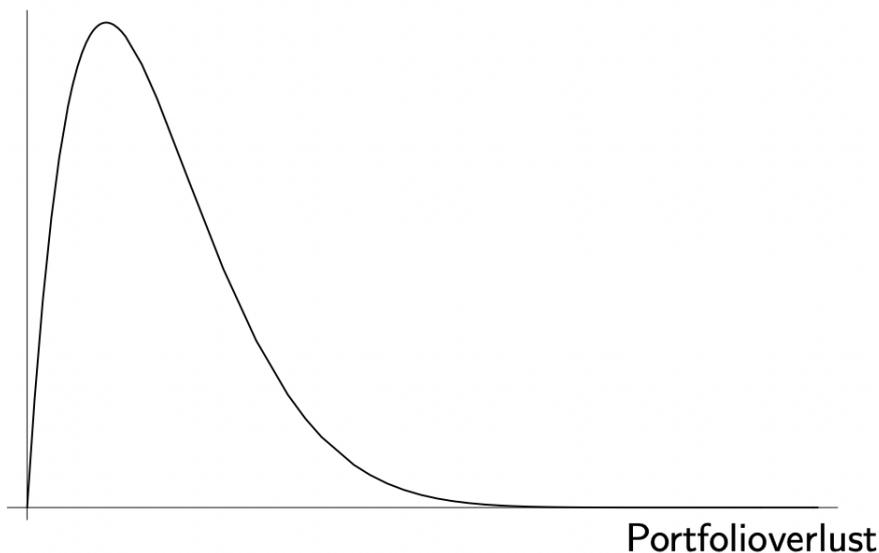


Abbildung 3: Typische Dichtefunktion eines Portfolioverlustes  
 Quelle: Martin et al., 2014, S. 142

die Wahrscheinlichkeit für einen sehr hohen Verlust in einem gewöhnlichen Portfolio mit einer großen Anzahl voneinander unabhängigen Krediten mit etwa gleichen Kredithöhen eher gering ist, weil hierzu viele Kredite innerhalb einer Zeitperiode ausfallen müssten. Dagegen weist ein Portfolio mit wenigen oder stark abhängigen Krediten oder mit unterschiedlichen Kredithöhen eine deutlich höhere Verlustwahrscheinlichkeit auf. (Vgl. Läger, 2002, S. 127; Martin et al., 2014, S. 142)

### 3.2.2.2. Erwartete und unerwartete Portfolioverluste

Gegeben seien die Ausfallwahrscheinlichkeiten  $PD_i = \mathbb{P}(D_i = 1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , der einzelnen Kredite. Die **gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit**  $PD_{ij}$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass zwei unterschiedliche Kreditnehmer  $i$  und  $j$  am Ende der betrachteten Zeitspanne ausfallen, ist definiert durch  $PD_{ij} = \mathbb{P}(D_i = 1, D_j = 1)$ ,  $i \neq j$ . Die Korrelation der Ausfallvariablen (*Ausfallkorrelation*)  $\rho_{ij}(D_i, D_j)$  kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \rho_{ij}(D_i, D_j) &= \frac{\text{Cov}(D_i, D_j)}{\sigma(D_i) \sigma(D_j)} & (3.23) \\ &= \frac{\mathbb{E}(D_i D_j) - \mathbb{E}(D_i) \mathbb{E}(D_j)}{\sigma(D_i) \sigma(D_j)} \\ &= \frac{PD_{ij} - PD_i PD_j}{\sigma(D_i) \sigma(D_j)}. \end{aligned}$$

(Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 916; Lager, 2002, S. 132)

Fur den **erwarteten Portfolioverlust**  $EL_P$  gilt

$$EL_P = \mathbb{E}(L_P) = \sum_{i=1}^n l_i PD_i = \sum_{i=1}^n EL_i, \quad (3.24)$$

d.h. der erwartete Portfolioverlust ist die Summe der erwarteten Verluste von Einzelkrediten. Analog zum Abschnitt 3.2.1.1, kann der **unerwartete Portfolioverlust**  $UL_P$  als die Schwankung um den erwarteten Verlust  $EL_P$  in verschiedenen Zeitperioden aufgefasst werden. Auf lange Sicht betrachtet wird aber der erwartete Verlust im Portfolio eintreten. Fur die Stan-

Standardabweichung des Portfolioverlustes gilt unter Verwendung der Formel (3.23) und (3.12)

$$\begin{aligned}
 UL_P &= \sigma(L_P) \\
 &= \sqrt{\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n l_i D_i\right)} \\
 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(l_i D_i, l_j D_j)} \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_i l_j \rho_{ij}(D_i, D_j) \sigma(D_i) \sigma(D_j)} \\
 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n l_i^2 \text{Var}(D_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n l_i l_j \rho_{ij}(D_i, D_j) \sigma(D_i) \sigma(D_j)} \\
 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n UL_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \rho_{ij}(D_i, D_j) UL_i UL_j}. \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass die Ausfallwahrscheinlichkeiten  $PD_i$  Einfluss auf den Erwartungswert und auch auf die Varianz des Portfolioverlustes  $L_P$  hat, weshalb diese beiden Größen sich nicht unabhängig voneinander bestimmen lassen. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 917; Läger, 2002, S. 131, 138)

Es lässt sich zeigen, dass der unerwartete Verlust eines Portfolios kleiner ist als die Summe der unerwarteten Verluste einzelner Forderungen:  $UL_P \leq \sum_{i=1}^n UL_i$  (siehe Anhang A). Der Grund dafür sind Korrelationen zwischen den Ausfallvariablen  $D_i$ . Sind die Kredite in einem Portfolio nicht vollständig korreliert, d.h.  $\rho_{ij}(D_i, D_j) \neq \pm 1, i \neq j$ , so finden *Diversifikationseffekte* statt, die zu einer kleineren Volatilität der Verluste in einem Portfolio führen. (Vgl. Glantz, 2003, S. 474; Läger, 2002, S. 138)

Bei einer perfekten positiven Korrelation der Ausfälle, d.h. bei  $\rho_{ij}(D_i, D_j) = 1, i, j = 1, \dots, n$ , in (3.26) gilt

$$UL_P = \sqrt{\sum_{i=1}^n UL_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n UL_i UL_j}.$$

Das bedeutet, dass die Kredite in diesem Portfolio in der gleichen Zeitperiode ausfallen (werden). Hier finden keine Diversifikationseffekte statt. Ein Portfolio bestehend aus einem einzigen Kredit ist dabei äquivalent zu einem Portfolio bestehend aus mehreren perfekt positiv

korrelierten Forderungen. In diesem Fall nimmt der unerwartete Verlust des Portfolios den größtmöglichen Wert an, was zu einer Überschätzung von  $UL_P$  führt.

Sind die Ausfälle im Portfolio dagegen unabhängig, so sind sie auch unkorreliert, d.h. es gilt  $\rho_{ij}(D_i, D_j) = 0$  für  $i \neq j$  in (3.26). Für den unerwarteten Portfolioverlust gilt dann

$$UL_P = \sqrt{\sum_{i=1}^n UL_i^2}. \quad (3.27)$$

In der Realität sind die Kreditausfälle in einem Portfolio allerdings nicht unabhängig, sondern positiv korreliert, daher stellt die Beziehung (3.27) eine Unterschätzung des unerwarteten Portfolioverlustes dar. Auf die Berechnung der korrelierten Ausfälle wird in dem Abschnitt 4.1 näher eingegangen. (Vgl. Glantz, 2003, S. 474; Läger, 2002, S. 132-133)

### 3.2.2.3. Bedingte Unabhängigkeit

Wie oben erwähnt, sind in der Regel positive Korrelationen zwischen den Krediten vorzufinden. Gemäß der Beziehung (3.26) wird ersichtlich, dass es  $n(n-1)/2$  Korrelationskoeffizienten zu bestimmen sind. Für eine sehr große Anzahl  $n$  an Forderungen in einem Portfolio kann sich diese Berechnung als aufwendig erweisen. Eine vereinfachte Alternative zur Berechnung der Ausfallkorrelationen stellt das Konzept der *bedingten Unabhängigkeit* dar. Dieser beruht auf sogenannten *Risiko-* bzw. *Einflussfaktoren* wie z.B. konjunkturellen oder ratingbasierten Einflüssen, die als ein Zufallsvektor  $Y = (Y_1, \dots, Y_r)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , geschrieben werden können. Eine Änderung in den Risikofaktoren führt zu einer gemeinsamen Änderung der Ausfallvariablen und dies wiederum führt zu einer Korrelation zwischen den Ausfällen. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 920; Läger, 2002, S. 135)

Sei  $y = (y_1, \dots, y_r)$  eine Realisation des Risikofaktors  $Y$ , z.B. ein Konjunkturstatus, ein konkretes Rating, ein Land oder eine Branche. Die auf  $Y$  **bedingte** Ausfallwahrscheinlichkeit des  $i$ -ten Schuldners ist gegeben durch

$$PD_i(y) = \mathbb{P}(D_i = 1 | Y = y) = \mathbb{E}(D_i | Y = y).$$

Somit gilt gemäß (3.24) für den **bedingten** erwarteten Portfolioverlust

$$EL_P(y) = \mathbb{E}(L_P | Y = y) = \sum_{i=1}^n l_i PD_i(y) = \sum_{i=1}^n EL_i(y)$$

sowie gemäß (3.25) für den **bedingten** unerwarteten Portfolioverlust

$$UL_P(y) = \sigma(L_P | Y = y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_i l_j \text{Cov}(D_i, D_j | Y = y)}.$$

Da die Bedingung auf eine bestimmte Ausprägung der Einflussfaktoren spezifisch auf die Einzelkredite wirkt, kann angenommen werden, dass diese unabhängig voneinander sind. Es wird dabei von **bedingter Unabhängigkeit** der Ausfälle gesprochen. Das bedeutet, dass  $D_i | Y = y$  und  $D_j | Y = y$  für  $i \neq j$  stochastisch unabhängig sind, was zu einer verschwindenden Kovarianz  $\text{Cov}(D_i, D_j | Y = y) = 0$  führt. Damit ergibt sich analog zu (3.27) ein vereinfachter Ausdruck für den bedingten unerwarteten Portfolioverlust:

$$UL_P(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n UL_i^2(y)}.$$

(Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 920-921; Läger, 2002, S. 135-136)

# 4. Klassifizierung von Kreditrisikomodellen

Das folgende Kapitel gibt einen Überblick über die wichtigsten Klassen der Kreditrisikomodelle. Zunächst werden in Abschnitt 4.1 statistische Verfahren zur Modellierung der Kreditausfallverteilung in einem Portfolio bestehend aus korrelierten Kreditnehmern vorgestellt. In Abschnitt 4.2 wird auf die große Klasse der Unternehmenswertmodelle von Merton eingegangen, dessen Hauptidee die stochastische Modellierung des Unternehmenswertes darstellt. Dieser Ansatz beruht auf der Optionspreistheorie und gibt eine ökonomische Interpretation des Ausfalls. Der sich anschließende Abschnitt 4.3 befasst sich mit der zweiten großen Modellklasse, den Intensitätsmodellen. Die Idee dieses Ansatzes ist, im Unterschied zu den Unternehmenswertmodellen, dass der Ausfallzeitpunkt rein formal durch einen Sprungprozess definiert wird. Im letzten Abschnitt 4.4 wird auf die ratingbasierten Modelle eingegangen. Diese berücksichtigen Bonitätsänderungen der Schuldner durch Übergangswahrscheinlichkeiten in eine andere Ratingklasse mittels Herauf- oder Herabstufungen.

## 4.1. Statistische Modellierung der Ausfallverteilung auf Portfolioebene

Analysen der Abhängigkeiten der historischen Ausfallereignisse zeigen, dass Gruppierungen von Kreditnehmern, z.B. nach ihren Branchen, gewisse Häufungen von Ausfällen aufweisen. Um also die Risikosteuerung eines Kreditportfolios vorzunehmen müssen Korrelationsstrukturen zwischen einzelnen Krediten berücksichtigt werden. Wie im Abschnitt 3.2.2.3 angedeutet, spielen bedingte Unabhängigkeiten verbunden mit gewissen Risikofaktoren eine zentrale Rolle bei der Konstruktion von Ausfallkorrelationen. Ferner wäre es möglich, die korrelierten Recovery Rates zu betrachten, hierauf wird in dieser Arbeit jedoch nicht eingegangen.

Die Modellierung der korrelierten Ausfälle wird im Unterabschnitt 4.1.1 durch das Bernoulli-Modell und in Unterabschnitt 4.1.2 durch das Poisson-Modell erklärt. Im letzten Unterabschnitt 4.1.3 wird auf die Faktormodelle eingegangen. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 921; Martin et al., 2014, S. 149; Rudolph et al., 2007, S. 126)

### 4.1.1. Das Bernoulli-Modell

Für das **Bernoulli-Modell** wird angenommen, dass die Ausfallwahrscheinlichkeiten aller Kreditnehmer im Portfolio homogen sind. Weiter sind die Ausfallvariablen  $D_i$  bedingt unabhängig. An dieser Stelle wird der Einflussfaktor nicht exakt spezifiziert, sondern als eine Zufallsvariable

$\Pi \in (0, 1)$  mit genau den Ausfallwahrscheinlichkeiten  $PD$  als Realisation aufgefasst. Die Idee dabei ist, dass alle Ausfallwahrscheinlichkeiten im Portfolio durch einen gemeinsamen systematischen Einflussfaktor festgelegt werden. Dieser wirkt individuell auf einzelne Kredite, sodass die bedingten Ausfallereignisse voneinander unabhängig sind. Es gilt also

$$D_i | \Pi = PD \text{ und } D_j | \Pi = PD \text{ sind unabhängig für } i \neq j, \quad (4.1)$$

$$D_i | \Pi = PD \sim \text{Ber}(PD), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Die unbedingten Ausfallvariablen sind bernoulliverteilt mit dem Parameter  $\mathbb{E}(\Pi)$ , d.h.

$$D_i \sim \text{Ber}(\mathbb{E}(\Pi)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Mit dem iterierten Erwartungswert  $\mathbb{E}(A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(A | B))$  für Zufallsvariablen  $A$  und  $B$  und unter Berücksichtigung der Beziehungen (4.1) und (4.2) gilt für den Erwartungswert, die Varianz und die Kovarianz der Ausfallvariablen

$$\mathbb{E}(D_i) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(D_i | \Pi)) = \mathbb{E}(\Pi), \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(D_i) &= \mathbb{E}(D_i^2) - \mathbb{E}(D_i)^2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}(D_i^2 | \Pi)) - \mathbb{E}(\Pi)^2 \\ &= \mathbb{E}(\Pi) - \mathbb{E}(\Pi)^2 = \mathbb{E}(\Pi) (1 - \mathbb{E}(\Pi)), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(D_i, D_j) &= \mathbb{E}(D_i D_j) - \mathbb{E}(D_i) \mathbb{E}(D_j) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(D_i D_j | \Pi)) - \mathbb{E}(\Pi)^2 \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(D_i | \Pi) \mathbb{E}(D_j | \Pi)) - \mathbb{E}(\Pi)^2 = \mathbb{E}(\Pi^2) - \mathbb{E}(\Pi)^2 \\ &= \text{Var}(\Pi). \end{aligned} \quad (4.5)$$

(Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 922; Bolder, 2018, S. 87; Martin et al., 2014, S. 149)

Nun wird der Korrelationskoeffizient der Ausfallindikatoren im unbedingten Fall betrachtet. Nach (3.23) gilt für  $i \neq j$ :

$$\rho_{ij}(D_i, D_j) = \frac{\text{Cov}(D_i, D_j)}{\sqrt{\text{Var}(D_i)} \sqrt{\text{Var}(D_j)}}.$$

Einsetzen der Formeln (4.3) - (4.5) liefert

$$\rho_{ij}(D_i, D_j) = \frac{\text{Var}(\Pi)}{\mathbb{E}(\Pi) (1 - \mathbb{E}(\Pi))} > 0. \quad (4.6)$$

Es ist also festzustellen, dass trotz der bedingten Unabhängigkeit eine positive unbedingte Korrelation zwischen jeweils zwei Einzelkrediten vorliegt. Mit dem beschriebenen Konzept lassen sich also solche Portfolios modellieren, in denen alle Kreditnehmer die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit sowie paarweise die gleiche Ausfallkorrelation besitzen.

In (4.6) gilt  $\rho_{ij}(D_i, D_j) = 0$  genau dann, wenn  $\text{Var}(\Pi) = 0$ , in diesem Fall ist  $\Pi = PD \in (0, 1)$  ein fester Wert. Wie in (3.22) schon gezeigt, ist die Anzahl der Ausfälle im Portfolio  $D$  dann binomialverteilt und für den Portfolioverlust gilt  $L_p \sim l \cdot \text{Bin}(n, PD)$ .

In (4.6) gilt  $\rho_{ij}(D_i, D_j) = 1$  genau dann, wenn  $\text{Var}(\Pi) = \mathbb{E}(\Pi)(1 - \mathbb{E}(\Pi))$ , dies entspricht der Varianz der Bernoulliverteilung, also gilt  $\Pi \sim \text{Ber}(\mathbb{E}(\Pi))$ . Das bedeutet, dass bei einer perfekten positiven Korrelation entweder alle Kreditnehmer mit Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{E}(\Pi)$  ausfallen oder es fällt kein einziger Kredit mit Wahrscheinlichkeit  $(1 - \mathbb{E}(\Pi))$  aus.

Für die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit mehrerer Kreditnehmer im Portfolio gilt im allgemeinen Fall  $\Pi \in (0, 1)$  mit den Annahmen (4.1) und (4.2)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_1 = d_1, \dots, D_n = d_n \mid \Pi = PD) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(D_i = d_i \mid \Pi = PD) \\ &= \prod_{i=1}^n PD^{d_i} (1 - PD)^{1-d_i} \\ &= \prod_{i=1}^n PD^{\sum_{i=1}^n d_i} (1 - PD)^{n - \sum_{i=1}^n d_i}, \end{aligned}$$

für  $d_i = 0, 1$ . Für die unbedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten gilt

$$\mathbb{P}(D_1 = d_1, \dots, D_n = d_n) = \int_0^1 \mathbb{P}(D_1 = d_1, \dots, D_n = d_n \mid \Pi = PD) dU(PD),$$

wobei  $U$  die Verteilungsfunktion von  $\Pi$  ist. (Vgl. Martin et al., 2014, S. 149-151)

Die Annahme homogener Ausfallwahrscheinlichkeiten ist jedoch eine Schwachstelle des Bernoulli-Modells, welche mit dem im Folgenden beschriebenen **Bernoulli-Mischungsmodell** verbessert werden kann. Hierbei wird angenommen, dass die Kredite im Portfolio unterschiedliche Ausfallwahrscheinlichkeiten  $PD_i$  haben können, wobei diese wieder als Realisationen der Zufallsvariablen  $\Pi_i$  aufgefasst werden. Es gilt analog zu (4.1) und (4.2)

$$D_i \mid \Pi_i = PD_i \text{ und } D_j \mid \Pi_j = PD_j \text{ sind unabhängig für } i \neq j, \quad (4.7)$$

$$D_i \mid \Pi_i = PD_i \sim \text{Ber}(PD_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.8)$$

Für den Erwartungswert, die Varianz und die Kovarianz gilt analog zu (4.3) - (4.5) unter

Annahme von (4.7) und (4.8)

$$\mathbb{E}(D_i) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(D_i|\Pi_i)) = \mathbb{E}(\Pi_i),$$

$$\text{Var}(D_i) = \mathbb{E}(\Pi_i) (1 - \mathbb{E}(\Pi_i)), \quad (4.9)$$

$$\text{Cov}(D_i, D_j) = \mathbb{E}(\Pi_i \Pi_j) - \mathbb{E}(\Pi_i) \mathbb{E}(\Pi_j) = \text{Cov}(\Pi_i, \Pi_j). \quad (4.10)$$

Nach (3.23) gilt mit den Beziehungen (4.9) und (4.10) für den Korrelationskoeffizienten

$$\begin{aligned} \rho_{ij}(D_i, D_j) &= \frac{\text{Cov}(D_i, D_j)}{\sqrt{\text{Var}(D_i)} \sqrt{\text{Var}(D_j)}} \\ &= \frac{\text{Cov}(\Pi_i, \Pi_j)}{\sqrt{\mathbb{E}(\Pi_i) (1 - \mathbb{E}(\Pi_i))} \sqrt{\mathbb{E}(\Pi_j) (1 - \mathbb{E}(\Pi_j))}} \end{aligned}$$

für  $i \neq j$ . Die multivariate Verteilung von  $(\Pi_1, \dots, \Pi_n)$  legt somit die Struktur der Kovarianz der Ausfallvariablen  $D_1, \dots, D_n$  fest. Für die unbedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten gilt mit der Schreibweise  $\Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_n)$  und  $PD = (PD_1, \dots, PD_n)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_1 = d_1, \dots, D_n = d_n) &= \int_{(0,1)^n} \mathbb{P}(D_1 = d_1, \dots, D_n = d_n | \Pi = PD) dU(PD) \\ &= \int_{(0,1)^n} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(D_i = d_i | \Pi_i = PD_i) dU(PD) \\ &= \int_{(0,1)^n} \prod_{i=1}^n PD_i^{d_i} (1 - PD_i)^{1-d_i} dU(PD). \end{aligned}$$

Das Bernoulli-Mischungsmodell lässt die Modellierung eines für die Kreditinstitute wichtigen Falls zu: Werden die Kreditnehmer in Sektoren (z.B. Branchen, Länder oder Ratings) eingeteilt, so können mit Hilfe der individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten, die Ausfallwahrscheinlichkeiten der jeweiligen Segmente angegeben werden. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 922; Martin et al., 2014, S. 151-152)

### 4.1.2. Das Poisson-Modell

Wie im Abschnitt 3.2.2.1 wird hier die Anzahl der Ausfälle im Portfolio  $D = \sum_{i=1}^n D_i$  in einer bestimmten Zeitperiode – hier ein Jahr – betrachtet. Die Ausfallverteilung des Portfolios wird daher durch  $D$  bestimmt. Im **Poisson-Modell** wird angenommen, dass die Ausfallindikatoren  $D_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , Zufallsvariablen sind und somit auch  $D$  Zufallsvariable ist. Die Verteilung von

$D$  wird durch die Poissonverteilung mit dem Parameter  $\lambda > 0$  approximiert. Es gilt

$$\mathbb{P}(D = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m \in \mathbb{N}_0 \quad (4.11)$$

mit

$$\lambda = \mathbb{E}(D) = \sum_{i=1}^n P D_i,$$

also  $D \sim Poi(\lambda)$ . Die Beziehung (4.11) gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass von  $n$  Krediten im Portfolio genau  $m$  ausfallen,  $\lambda$  wird dabei als *Ausfallintensität* bezeichnet. Nach der Spezifikation der Poissonverteilung gilt  $\lambda = \mathbb{E}(D) = \text{Var}(D)$ , das bedeutet, dass die erwartete Anzahl der Ausfälle der Varianz der Ausfälle entspricht.

Führt zum gleichen Resultat

Zum gleichen Resultat gelangt man, wenn für jede einzelne Ausfallvariable  $D_i$  eine Poissonverteilung mit Ausfallintensität  $\lambda_i > 0$  angenommen wird, d.h.  $D_i \sim Poi(\lambda_i)$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Denn die Summe poissonverteilter Zufallsvariablen mit Parametern  $\lambda_i$  ist wieder poissonverteilt mit dem Parameter  $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ . Beide Verfahren implizieren, dass jeder Kreditnehmer mehrmals ausfallen kann, durch eine Anpassung von  $\lambda$  ist dies jedoch unproblematisch.

Der Kreditausfall eines Schuldners  $i$  tritt dann ein, wenn  $D_i \geq 1$  gilt. Es wird die Wahrscheinlichkeit betrachtet, dass der Schuldner  $i$  (innerhalb eines Jahres) ausfällt. Unter Benutzung der Exponentialreihe gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_i \geq 1) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^m}{m!} e^{-\lambda_i} \\ &= e^{-\lambda_i} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^m}{m!} - 1 \right) \\ &= e^{-\lambda_i} (e^{\lambda_i} - 1) \\ &= 1 - e^{-\lambda_i}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Für kleine Werte von  $\lambda_i$  gilt  $\mathbb{P}(D_i \geq 1) = 1 - e^{-\lambda_i} \approx \lambda_i$ . (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 927-928; Martin et al., 2014, S. 152-153)

Nun soll analog zum Bernoulli-Modell eine Korrelationsstruktur für ein Portfolio aus  $n$  jeweils poissonverteilten Krediten bestimmt werden. Die Ausfallintensität wird dabei als Zufallsgröße  $\Lambda \in (0, \infty)$  mit der Realisation  $\lambda > 0$  aufgefasst. Wiederum wird bedingte Unabhängigkeit und

Homogenität der Intensitätsvariablen für alle Kredite angenommen. Es gilt

$$D_i | \Lambda = \lambda \text{ und } D_j | \Lambda = \lambda \text{ sind unabhängig für } i \neq j, \quad (4.13)$$

$$D_i | \Lambda = \lambda \sim Poi(\lambda), \quad i = 1, \dots, n.$$

$D_i$  weist eine *gemischte Poissonverteilung* auf, somit gilt mittels (4.12) für die unbedingte Ausfallwahrscheinlichkeit des Schuldners  $i$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_i \geq 1) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(D_i \geq 1 | \Lambda = \lambda) dU(\lambda) \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda}) dU(\lambda), \end{aligned}$$

wobei  $U$  die Verteilungsfunktion von  $\Lambda$  ist. Für die Wahrscheinlichkeit, dass mehrere Kreditnehmer gleichzeitig ausfallen, gilt unter Verwendung der bedingten Unabhängigkeit (4.13)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_1 = m_1, \dots, D_n = m_n) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(D_1 = m_1, \dots, D_n = m_n | \Lambda = \lambda) dU(\lambda) \\ &= \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(D_i = m_i | \Lambda = \lambda) dU(\lambda) \\ &= \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{m_i}}{m_i!} e^{-\lambda} dU(\lambda). \end{aligned}$$

Unter Annahme der endlichen Varianz von  $\Lambda$ , gilt für den Erwartungswert und die Varianz der Ausfallvariablen

$$\mathbb{E}(D_i) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(D_i | \Lambda)) = \mathbb{E}(\Lambda), \quad (4.14)$$

$$\text{Var}(D_i) = \mathbb{E}(\text{Var}(D_i | \Lambda)) + \text{Var}(\mathbb{E}(D_i | \Lambda)) = \mathbb{E}(\Lambda) + \text{Var}(\Lambda) \quad (4.15)$$

sowie analog zu (4.5) für die Kovarianz

$$\text{Cov}(D_i, D_j) = \text{Var}(\Lambda). \quad (4.16)$$

Mittels der Beziehungen (4.15) und (4.16) ergibt sich wieder aus (3.23) der Korrelationskoeffi-

zient

$$\rho_{ij}(D_i, D_j) = \frac{\text{Cov}(D_i, D_j)}{\sqrt{\text{Var}(D_i)} \sqrt{\text{Var}(D_j)}} = \frac{\text{Var}(\Lambda)}{\mathbb{E}(\Lambda) + \text{Var}(\Lambda)}. \quad (4.17)$$

(Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 928.; Martin et al., 2014, S. 153-154)

Falls  $\Lambda$  ein fester Wert  $\lambda \in (0, \infty)$  ist, so verschwindet die Kovarianz der Ausfallvariablen und es gilt  $\rho_{ij}(D_i, D_j) = 0$  in (4.17). In diesem Fall gilt für die Anzahl der Ausfälle im Portfolio  $D$ , aufgrund von Homogenität und bedingter Unabhängigkeit, dass  $D | \Lambda = \lambda \sim \text{Poi}(n\lambda)$ . Für die Verlustverteilung  $L_p = l \cdot D$  aus (3.21) gilt somit  $L_p \sim l \cdot \text{Poi}(n\lambda)$ . Es wird nochmal das Bernoulli-Modell mit einem festen Wert  $\Pi = PD \in (0, 1)$  betrachtet. Wie in (3.22) gezeigt, ist die Verlustverteilung  $L_p$  hier binomialverteilt,  $L_p \sim l \cdot \text{Bin}(n, PD)$ . Die Binomialverteilung lässt sich für  $n \rightarrow \infty$  und kleine  $PD$ -Werte durch die Poissonverteilung approximieren, d.h. beide Verteilungen liefern im Grenzfall die gleiche Verlustverteilung für  $L_p$ . (Vgl. Läger, 2002, S. 128-129; Martin et al., 2014, S. 154)

Analog zum Bernoulli-Mischungsmodell wird die Konstruktion der gemischten Poissonverteilung auf ein Portfolio bestehend aus  $n$  Krediten angewendet. Es ergibt sich das **Poisson-Mischungsmodell**, in dem

$D_i | \Lambda_i = \lambda_i$  und  $D_j | \Lambda_j = \lambda_j$  sind unabhängig für  $i \neq j$ ,

$$D_i | \Lambda_i = \lambda_i \sim \text{Poi}(\lambda_i), \quad i = 1, \dots, n$$

gilt. Für den Erwartungswert und die Varianz gilt analog zu (4.14) und (4.15)

$$\mathbb{E}(D_i) = \mathbb{E}(\Lambda_i),$$

$$\text{Var}(D_i) = \mathbb{E}(\Lambda_i) + \text{Var}(\Lambda_i). \quad (4.18)$$

Für die Kovarianz gilt analog zu (4.10)

$$\text{Cov}(D_i, D_j) = \mathbb{E}(\Lambda_i \Lambda_j) - \mathbb{E}(\Lambda_i) \mathbb{E}(\Lambda_j) = \text{Cov}(\Lambda_i, \Lambda_j). \quad (4.19)$$

Nach (3.23) gilt mit den Beziehungen (4.18) und (4.19) für den Korrelationskoeffizienten

$$\begin{aligned}\rho_{ij}(D_i, D_j) &= \frac{\text{Cov}(D_i, D_j)}{\sqrt{\text{Var}(D_i)} \sqrt{\text{Var}(D_j)}} \\ &= \frac{\text{Cov}(\Lambda_i, \Lambda_j)}{\sqrt{\mathbb{E}(\Lambda_i) + \text{Var}(\Lambda_i)} \sqrt{\mathbb{E}(\Lambda_j) + \text{Var}(\Lambda_j)}}\end{aligned}$$

für  $i \neq j$ . Auch hier legt die multivariate Verteilung von  $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$  die Kovarianzstruktur der Ausfallvariablen  $D_1, \dots, D_n$  fest. Mit der Schreibweise  $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$  und  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  gilt für die unbedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_1 = d_1, \dots, D_n = d_n) &= \int_{[0, \infty)^n} \mathbb{P}(D_1 = d_1, \dots, D_n = d_n \mid \Lambda = \lambda) dU(\lambda) \\ &= \int_{[0, \infty)^n} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(D_i = d_i \mid \Lambda_i = \lambda_i) dU(\lambda) \\ &= \int_{[0, \infty)^n} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i^{d_i}}{d_i!} e^{-\lambda_i} dU(PD).\end{aligned}$$

Somit lassen sich hier ebenfalls die Ausfallwahrscheinlichkeiten bestimmter Segmente berechnen. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 929; Martin et al., 2014, S. 154-155)

### 4.1.3. Faktormodelle

Bei dem **Einfaktormodell** für Bonitätsindikatoren werden  $n$  Kredite in einem Portfolio betrachtet. Die zugehörigen Bonitätsindikatoren werden mit  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , bezeichnet. Jedes  $Y_i$  ist abhängig von einem gemeinsamen (*systematischen*) Marktfaktor  $U$  und von einer kreditspezifischen (*idiosynkratischen*) Komponente  $Z_i$ . Damit ist das (lineare) Einfaktormodell gegeben durch

$$Y_i = \sqrt{\rho_i} U + \sqrt{1 - \rho_i} Z_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.20)$$

Dabei wird die Zahl  $\rho_i \in [0, 1]$  als *Betafaktor* bezeichnet. Sie beschreibt wie stark die Bonitätsvariablen vom systematischen und idiosynkratischen Faktor abhängen. Je näher  $\rho_i$  bei 1 (0) ist, desto stärker (schwächer) ist der Einfluss des Marktfaktors  $U$  auf die Bonität des Kreditnehmers und desto schwächer (stärker) ist der Einfluss der kreditspezifischen Komponente  $Z_i$ . Der systematische Faktor  $U$  kann z.B. die gesamtwirtschaftliche Marktlage oder der Zustand eines Industriesektors oder einer Industrieregion sein. Die idiosynkratische Komponente  $Z_i$  beschreibt unternehmensspezifische Gegebenheiten. Der Term  $\sqrt{\rho_i} U$  ist dabei die Belastung des Unterneh-

mens durch den gemeinsamen Faktor, der Term  $\sqrt{1 - \rho_i} Z_i$  stellt das unternehmensspezifische Risiko dar. Es wird angenommen, dass  $U$  und  $Z_i$  – und somit auch  $Y_i$  – standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind, d.h.  $U, Z_i, Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Des Weiteren seien  $Z_i$  und  $Z_j$  für  $i \neq j$  sowie  $Z_i$  und  $U$  für  $i, j = 1, \dots, n$ , unabhängig.

Die Abhängigkeit zwischen  $Y_i$  und  $Y_j$  ergibt sich aufgrund des gemeinsamen Faktors  $U$ . Der Korrelationskoeffizient berechnet sich aus (3.23). Unter Berücksichtigung der Beziehung (4.20) und der Standardnormalverteilung der Zufallsvariablen gilt für  $i \neq j$

$$\begin{aligned}
 \rho_{ij} &= \frac{\text{Cov}(Y_i, Y_j)}{\underbrace{\sigma(Y_i)}_{=1} \underbrace{\sigma(Y_j)}_{=1}} \\
 &= \mathbb{E}(Y_i Y_j) - \underbrace{\mathbb{E}(Y_i)}_{=0} \underbrace{\mathbb{E}(Y_j)}_{=0} \\
 &= \mathbb{E}\left(\left(\sqrt{\rho_i} U + \sqrt{1 - \rho_i} Z_i\right)\left(\sqrt{\rho_j} U + \sqrt{1 - \rho_j} Z_j\right)\right) \\
 &= \sqrt{\rho_i \rho_j} \mathbb{E}(U^2) \\
 &= \sqrt{\rho_i \rho_j} \left( \underbrace{\mathbb{E}(U)^2}_{=0} + \underbrace{\text{Var}(U)}_{=1} \right) \\
 &= \sqrt{\rho_i \rho_j}. \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

Eine weitere Annahme in dem Modell ist, dass der Ausfall des  $i$ -ten Kreditnehmers ( $D_i = 1$ ) genau dann eintritt, wenn die Bonitätsvariable  $Y_i$  eine *Ausfallschranke*  $H_i$  unterschreitet, d.h.  $D_i = 1 \Leftrightarrow Y_i \leq H_i$ . Die Schranke  $H_i$  wird bei der Festlegung des Modellrahmens konkretisiert. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 923; Hull, 2011, S. 249; Martin et al., 2014, S. 155, 158-159; Rudolph et al., 2007, S. 126-127)

Um die Verlustverteilung in einem Portfolio mit  $n$  Krediten herzuleiten wird wieder der Fall gleicher Verluste  $l_i = l = EAD \cdot LGD$  und identischer Ausfallwahrscheinlichkeiten  $PD_i = PD$  für alle Verträge betrachtet. Es wird außerdem Homogenität der Betafaktoren  $\rho_i = \rho$  für alle Bonitätsvariablen angenommen. Dies führt in Beziehung (4.21) zu  $\rho_{ij} = \rho$ , d.h., dass die (Kredit-)Korrelationen zwischen allen Bonitätsvariablen identisch sind, womit die spezielle Wahl des Betafaktors erklärt wird. Der Portfolioverlust ist also gegeben durch  $L_P = l \sum_{i=1}^n D_i = l \cdot D$ , d.h., dass die Portfolioausfallverteilung durch die Anzahl der Ausfälle  $D$  im Portfolio bestimmt wird.

Zunächst ergibt sich für die Ausfallwahrscheinlichkeit  $PD = \mathbb{P}(D_i = 1) = \mathbb{P}(Y_i \leq H_i) = \Phi(H_i)$ , wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Äquivalent dazu gilt

$H_i = \Phi^{-1}(PD) = H$ , das bedeutet, dass es sich aufgrund der Homogenität der PD's homogene Ausfallsschranken für alle Bonitätsvariablen ergeben. Unter Beachtung dieser Information berechnet sich die auf eine Realisation  $U = x$  bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit  $PD(x)$  wie folgt:

$$\begin{aligned}
 PD(x) &= \mathbb{P}(D_i = 1 | U = x) \\
 &= \mathbb{P}(Y_i \leq H | U = x) \\
 &= \mathbb{P}(\sqrt{\rho} U + \sqrt{1-\rho} Z_i \leq H | U = x) \\
 &= \mathbb{P}\left(Z_i \leq \frac{H - \sqrt{\rho} U}{\sqrt{1-\rho}} \mid U = x\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{H - \sqrt{\rho} x}{\sqrt{1-\rho}}\right).
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass im Portfolio genau  $k$  Kreditnehmer ausfallen beträgt

$$\mathbb{P}(D = k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(D = k | U = x) \phi(x) dx, \tag{4.23}$$

wobei  $\phi$  die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung ist und  $k = 0, \dots, n$ . Aus dem Einfaktormodell (4.20) folgt, dass die Bonitätsvariablen bedingt auf eine Realisation  $U = x$  unabhängig sind. Daraus lässt sich die folgende bedingte Verteilung der Ausfallvariablen ableiten:

$$\mathbb{P}(D = k | U = x) = \binom{n}{k} PD(x)^k (1 - PD(x))^{n-k}. \tag{4.24}$$

Werden die Ausdrücke (4.22) und (4.24) in (4.23) eingesetzt, so ergibt sich

$$\mathbb{P}(D = k) = \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{H - \sqrt{\rho} x}{\sqrt{1-\rho}}\right)^k \left(1 - \Phi\left(\frac{H - \sqrt{\rho} x}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{n-k} \phi(x) dx.$$

Somit ist die Verlustverteilung für  $m \leq n$  gegeben durch

$$\mathbb{P}(D \leq m) = \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{H - \sqrt{\rho} x}{\sqrt{1-\rho}}\right)^k \left(1 - \Phi\left(\frac{H - \sqrt{\rho} x}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{n-k} \phi(x) dx.$$

Dieses fundamentale Resultat geht zurück auf Oldřich Alfons Vašíček aus dem Jahr 1987. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 923-924, 990-991; Martin et al., 2014, S. 159-160; Vasicek, 1987, S. 1-2)

Das Einfaktormodell lässt sich auf ein **Mehrfaktormodell** für Bonitätsindikatoren verallgemeinern, dies ist jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit. Hierzu wird auf Albrecht und Maurer, 2008, S. 925-927 und Hull, 2011, S. 249-250, verwiesen.

## 4.2. Unternehmenswertmodelle: Das Merton-Modell

Aus der Klasse der *Unternehmenswertmodelle* wird in diesem Kapitel auf das berühmte Modell von *Robert C. Merton* aus dem Jahr 1974 eingegangen. Der Schuldner ist dabei ein Unternehmen, das durch das Emittieren einer Anleihe ein Kredit aufnimmt und sich somit verschuldet. Der Fokus liegt dabei auf der Analyse der Wertentwicklung des Unternehmens im Vergleich zu der Höhe der Verschuldung, was zu einer *endogenen* Modellierung des Ausfalls führt. Der Zeitpunkt des Ausfalls hängt somit von der finanziellen Struktur des Unternehmens ab und ist daher vorhersehbar, d.h. es gibt keine „überraschenden“ Ausfälle. Aus diesem Grund wird diese Klasse von Modellen auch als *strukturelle Modelle* bezeichnet. Eine Grundannahme bei diesem Vorgehen ist, dass der Unternehmenswert sich beobachten lässt. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 929; Martin et al., 2014, S. 110-111)

### 4.2.1. Das Grundmodell von Merton

Die Grundlage des Modells von *Merton* bildet die *Black-Scholes-Formel* aus dem Jahr 1973, die zur Bewertung von Optionen dient und im Folgenden (ohne Herleitung) dargestellt werden soll.

Die Rahmenbedingung für das Konzept bildet die Annahme der korrekten Bepreisung der Optionen am Markt, die folgert, dass es nicht möglich sein sollte garantierte Profite durch Kauf- (*Long*) und Verkauf-Positionen (*Short*) auf Optionen und deren zugrundeliegenden Aktien zu sichern. Ein solcher Wertpapiermarkt wird als *arbitragefrei* bezeichnet. Durch den Erwerb einer *Option* hat man das Recht (aber nicht die Verpflichtung) einen Vermögenswert zu einem vorher vereinbarten Preis innerhalb der Laufzeit (*amerikanische Option*) oder zum Fälligkeitszeitpunkt (*europäische Option*) zu kaufen (*Call-Option*) oder zu verkaufen (*Put-Option*).

Bevor der Wert einer Option bestimmt wird, werden einige – eher unrealistische – Annahmen getroffen. Zunächst wird die Zinsrate zur Aufnahme bzw. Anlage von Geld als bekannt und konstant vorausgesetzt. Der Aktienpreis verläuft gemäß einer geometrischen Brownschen Bewegung, die logarithmierten Renditen der Aktie sind deshalb normalverteilt. Des Weiteren wird die Varianz der Aktienrendite als konstant angenommen. Es werden außerdem keine Dividenden oder andere Ausschüttungen gezahlt. Es wird eine europäische Option betrachtet. Aktien und Optionen werden kontinuierlich und in beliebigen Umfang gehandelt. Leerverkäufe sind erlaubt und es existieren keine Transaktionskosten.

Sei  $S_t$  der Aktienkurs zum Zeitpunkt  $t$ ,  $X$  der Ausübungspreis der Option (*Basispreis*),  $T$  der Fälligkeitszeitpunkt der Option,  $r$  der Zinssatz und  $\sigma^2$  die Varianz der Aktienrendite. Nach **Black und Scholes** gilt unter den obigen Annahmen für den Preis der Call- (*call*) und der Put-Option (*put*) zum Zeitpunkt  $t$ :

$$call_t = S_t \Phi(d_1) - X e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (4.25)$$

$$put_t = X e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1), \quad (4.26)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}, \quad (4.27)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}. \quad (4.28)$$

(Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 39, 929; Black und Scholes, 1973, S. 637, 640, 644; Hull, 2011, S. 549; Knapp, 2002, S. 90; Rudolph et al., 2007, S. 113)

Die Grundlage des **Merton-Modells** bildet die Entwicklung des *Unternehmenswertes* (*Aktiva*)  $V_t$  zum Zeitpunkt  $t$ . Dieser setzt sich additiv aus dem Wert des *Eigenkapitals*  $E_t$  und dem Wert des *Fremdkapitals* (*Passiva, Verpflichtungen*)  $F_t$  zum Zeitpunkt  $t$  zusammen:

$$V_t = E_t + F_t. \quad (4.29)$$

Unter den obigen Annahmen – wobei der Unternehmenswert durch den Aktienpreis approximiert wird – wird eine Firma betrachtet, die sich durch ihr Eigenkapital und eine nicht kündbare *Nullkuponanleihe* (*Zerobond*; Anleihe ohne Kupon-Zahlungen) mit Fälligkeit zum Zeitpunkt  $T$  finanziert. Der *Nennwert* des Zerobonds (Rückzahlungsbetrag) beträgt  $B$ . Es wird angenommen, dass keine weiteren Wertpapiere emittiert werden können. Unter der Annahme einer konstanten Zinsrate  $r$  beträgt der Wert der Verpflichtungen bzw. der Anleihe zum Zeitpunkt  $t$ :  $F_t = B e^{-r(T-t)}$ .

Das Unternehmen kann nur am Laufzeitende  $T$  ausfallen, d.h., die Situation zum Zeitpunkt  $T$  muss anhand des Firmenwertes  $V_T$  beurteilt werden. Ist der Wert des Unternehmens größer als der Rückzahlungsbetrag, d.h.  $V_T > B$ , so wird der Nennwert  $B$  zurückgezahlt und die Eigenkapitalgeber erhalten die Differenz  $V_T - B > 0$ . Ist jedoch  $V_T < B$ , so können die Schulden nicht komplett gedeckt werden, die Eigenkapitalgeber sind insolvent und die Fremdkapitalgeber erhalten das residuale Vermögen des Unternehmens. Der Wert des Eigenkapitals ist Null.

Somit lässt sich die **Position der Eigenkapitalgeber** zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  beschrei-

ben durch

$$E_T = \max(V_T - B, 0) , \quad (4.30)$$

was dem Wert einer europäischen Call-Option auf den Unternehmenswert  $V_T$  mit dem Ausübungspreis  $B$  entspricht und sich wie folgt interpretieren lässt: Beim Verkauf des Zerobonds haben die Eigenkapitalgeber sozusagen das Unternehmen an die Fremdkapitalgeber verkauft und gleichzeitig eine Kauf-Option auf den Unternehmenswert erworben, die ihnen das Recht einräumt, das Unternehmen zum Preis  $B$  zurückzukaufen. Übersteigt der Wert der Firma den Nennwert des Zerobonds, so werden die Manager des Unternehmens die Call-Option ausüben und das Unternehmen für den günstigeren Preis  $B$  zurückkaufen.

Für die **Position des risikobehafteten Fremdkapitals** zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  gilt

$$F_T = \min(V_T, B) = B - \max(B - V_T, 0) . \quad (4.31)$$

Dies entspricht der Kombination einer risikolosen Anlage mit einer Short-Position in einer europäischen Put-Option auf den Unternehmenswert  $V_T$  mit dem Ausübungspreis  $B$  und lässt sich folgendermaßen interpretieren: Beim Kauf des Zerobonds haben die Fremdkapitalgeber den Eigenkapitalgebern eine Verkaufs-Options auf den Unternehmenswert erteilt, d.h. falls der Firmenwert den Nennwert des Zerobonds unterschreitet, so werden die Manager der Firma die Put-Option ausüben und die Fremdkapitalgeber sind verpflichtet das Unternehmen für den höheren Preis  $B$  zu kaufen.

Der Unternehmenswert  $V_T$  aus (4.29) setzt sich somit zusammen aus dem Wert der Call-Option auf  $V_T$  und dem risikolosen Nennwert der Nullkuponanleihe abzüglich dem Wert der Put-Option auf  $V_T$ . (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 929-930; Hull, 2011, S. 588; Knapp, 2002, S. 90; Merton, 1974, S. 453-454; Rudolph et al., 2007, S. 114-115)

Da der Wert des Eigenkapitals nach (4.30) als eine Call-Option dargestellt werden kann, gilt nach Black und Scholes für den **Wert des Eigenkapitals** zum Zeitpunkt  $t$  gemäß (4.25) und unter Annahme der Beobachtbarkeit des Unternehmenswertes  $V_t$  und seiner Volatilität  $\sigma_V$

$$E_t = V_t \Phi(d_1) - B e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) , \quad (4.32)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{B}\right) + \left(r + \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}}, \quad (4.33)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{B}\right) + \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}}, \quad (4.34)$$

wobei der aktuelle Aktienkurs durch den Unternehmenswert und der Ausübungspreis durch den Rückzahlungsbetrag ersetzt wurde.

Der Wert des Fremdkapitals zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  wird gemäß (4.31) bestimmt. Die max-Funktion entspricht dabei einer Put-Option und misst das Ausfallrisiko, das das Fremdkapital mindert. Unter Berücksichtigung der Diskontierung zum Zeitpunkt  $t$  und der Beziehung (4.26) von Black und Scholes gilt für den **Wert des risikobehafteten Fremdkapitals**

$$\begin{aligned} F_t &= B e^{-r(T-t)} - put_t \\ &= B e^{-r(T-t)} - B e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) + V_t \Phi(-d_1) \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$= B e^{-r(T-t)} \left(1 - \Phi(-d_2) + \frac{V_t}{B e^{-r(T-t)}} \Phi(-d_1)\right) \quad (4.36)$$

$$= B e^{-r(T-t)} \left(\Phi(d_2) + \frac{V_t}{B e^{-r(T-t)}} \Phi(-d_1)\right) \quad (4.37)$$

mit  $d_1$  und  $d_2$  analog zu (4.27) und (4.28). Die Größe  $F_t$  entspricht hierbei dem Wert der Nullkuponanleihe bzw. dem aktuellen Kreditwert.

Der Ausdruck (4.35) ist analog zu dem in Abschnitt 3.2.1.1 eingeführten erwarteten Rückzahlungsbetrag einer risikobehafteten Forderung  $\mathbb{E}(R) = B - EAD \cdot \mathbb{E}(LGD) \cdot PD = B - EL$  aus (3.9). Wird dabei berücksichtigt, dass der Exposure bei Ausfall gerade dem Nennbetrag des Zerobonds  $B$  entspricht und die Diskontierung zum Zeitpunkt  $t$  beachtet, dann gilt

$$\begin{aligned} F_t &= B e^{-r(T-t)} - B e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}(LGD) \cdot PD \\ &= B e^{-r(T-t)} (1 - \mathbb{E}(LGD) \cdot PD) . \end{aligned} \quad (4.38)$$

Nun soll der erwartete Verlust aus (4.35) in die einzelnen Komponenten  $EAD$ ,  $LGD$  und  $PD$  zerlegt werden. Wird der Term (4.36) wie folgt umgeformt

$$F_t = B e^{-r(T-t)} \left(1 - \left(1 - \frac{V_t}{B e^{-r(T-t)}} \frac{\Phi(-d_1)}{\Phi(-d_2)}\right) \Phi(-d_2)\right)$$

und mit dem Ausdruck (4.38) verglichen, so gilt  $EAD = B$  wie bereits oben erwähnt. Weiter gilt nach (3.1)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(LGD) &= 1 - \mathbb{E}(RR) \\ &= 1 - \frac{\mathbb{E}(\text{Nettoerlös bei Ausfall})}{EAD} \\ &= 1 - \frac{V_t \Phi(-d_1)}{B e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2)},\end{aligned}$$

woraus

$$\mathbb{E}(\text{Nettoerlös bei Ausfall}) = \frac{V_t \Phi(-d_1)}{e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2)}$$

folgt. Wird das Periodenende  $T$  betrachtet, so gilt für die Größen entsprechend  $EAD = B$ ,  $LGD = (B - V_T)/B$  und  $RR = V_T/B$ , wobei  $B - V_T$  die Ausfallhöhe bezeichnet. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 930-931; Läger, 2002, S. 172-173; Reichling et al., 2007, S. 143; Rudolph et al., 2007, S. 118-119)

Für die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls, d.h. für die Wahrscheinlichkeit, dass der Unternehmenswert am Ende der Laufzeit des Kreditvertrages unter den Nennwert des Zerobonds fällt, gilt

$$\begin{aligned}PD^* &= \mathbb{P}^*(V_T < B) \\ &= \Phi(-d_2) \\ &= \Phi\left(-\frac{\ln\left(\frac{V_t}{B}\right) + \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}}\right),\end{aligned}\tag{4.39}$$

wobei  $\mathbb{P}^*$  das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß darstellt und  $r$  die risikolose Zinsrate. In diesem Zusammenhang wird der Ausdruck  $d_2$  als *Distance to Default (Zeit bis zum Ausfall)* bezeichnet. Er gibt die Entfernung des Wertes der Aktiva bis zur Ausfallschranke in Standardabweichungen an. Je größer der Distance to Default ist, desto kleiner ist die Ausfallwahrscheinlichkeit und vice versa. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 931-932, 935, 992; Hull, 2011, S. 368; Knapp, 2002, S. 92)

Die Ausfallwahrscheinlichkeiten, die aus Preisen von Finanzinstrumenten gewonnen werden (wie z.B. im Merton-Modell) heißen *risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeiten*, während Aus-

fallwahrscheinlichkeiten, die auf Grundlage historischer Daten beruhen (z.B. von Ratingagenturen) als *reale* oder *physische Ausfallwahrscheinlichkeiten* bezeichnet werden. Diese beiden Arten von Wahrscheinlichkeiten können sich – aufgrund von systematischen Risiko von Wertpapieren – stark unterscheiden, weshalb bei einem Finanzgeschäft eine Risikoprämie verlangt wird, die höher ist als die Kosten des erwarteten realen Ausfalls. Die Resultate aus dem Merton-Modell können mittels monotoner Transformation in gute Schätzer für die realen oder risikoneutralen Ausfallwahrscheinlichkeiten umgeformt werden. Zum Beispiel kann das KMV-Modell von Moody's die Ausfallwahrscheinlichkeiten aus dem Merton-Modell in reale Ausfallwahrscheinlichkeiten (*Expected Default Frequency, EDF*) transformieren, siehe Abschnitt 5.1.1. (Vgl. Hull, 2011, S. 369-370)

Die Ausfallwahrscheinlichkeit lässt sich aber auch auf dem analytischen Weg herleiten. Am Anfang dieses Abschnitts wurde angenommen, dass der Aktienkurs des Unternehmens, der im Merton-Modell dem Wert des Unternehmens entspricht, einer geometrischen Brownschen Bewegung folg. Wird mit  $W_t$  der Standard-Wiener-Prozess bezeichnet (d.h.  $W_t = \sqrt{t} Z_t$ ,  $Z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ), so lässt sich  $V_T$  darstellen als

$$V_T = V_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V(W_T - W_t)} \quad (4.40)$$

$$= V_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V \sqrt{T-t} Z}, \quad (4.41)$$

mit  $W_T - W_t \sim \mathcal{N}(0, T-t)$  und  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Die Kenngröße  $\mu \in \mathbb{R}$  wird dabei als *Drift* des stochastischen Prozesses und  $\sigma_V > 0$  als dessen Volatilität (*Diffusion*) bezeichnet. Logarithmieren der Gleichung (4.41) liefert

$$\ln(V_T) = \ln(V_t) + \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V \sqrt{T-t} Z \quad (4.42)$$

mit

$$\ln(V_T) \sim \mathcal{N}\left(\ln(V_t) + \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t), \sigma_V^2(T-t)\right).$$

Für die Ausfallwahrscheinlichkeit gegeben den Firmenwert zum Zeitpunkt  $t$  gilt

$$PD = \mathbb{P}(V_T < B \mid V_t) = \mathbb{P}(\ln(V_T) < \ln(B) \mid V_t). \quad (4.43)$$

Das Einsetzen der Beziehung (4.42) in (4.43) unter Berücksichtigung der Standardnormalver-

teilung von  $Z$  liefert

$$\begin{aligned}
 PD &= \mathbb{P}\left(\ln(V_t) + \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V \sqrt{T-t} Z < \ln(B)\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(Z < \frac{\ln\left(\frac{B}{V_t}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{B}{V_t}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}}\right). \tag{4.44}
 \end{aligned}$$

Durch den Vergleich der Formeln (4.39) und (4.44) kann festgestellt werden, dass diese sich nur in den Parametern  $r$  und  $\mu$  unterscheiden. Es kann gezeigt werden, dass eine geometrische Brownsche Bewegung mit Drift  $\mu$  und Volatilität  $\sigma_V$  unter einem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß wieder eine geometrische Brownsche Bewegung mit Drift  $r$  und Volatilität  $\sigma_V$  ist. Die Gleichung (4.44) lässt sich somit schreiben als  $PD = \Phi(-d_2)$  mit  $r = \mu$ . (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 175; Knapp, 2002, S. 92; McNeil et al., 2015, S. 381; Rudolph et al., 2007, S. 119-120)

Der *Credit Spread* (*Kreditzinsspanne*, *Bonitätsspread*) ist ein Zinssatz, den die Anleger zusätzlich verlangen, um sich gegen die aus dem Kreditrisiko entstandenen Kosten abzusichern. Der Credit Spread ist somit eine Risikoprämie für die Übernahme des Ausfallrisikos und wird berechnet als die Differenz aus der geforderten Rendite einer risikobehafteten Anleihe  $R$  und dem risikolosen Zinssatz  $r$ . Wird der Kreditwert  $F_t$  über die Laufzeit des Kredits  $T - t$  mit  $R$  aufgezinnt, so ergibt sich der geforderte Rückzahlungsbetrag  $B$  als

$$B = F_t e^{R(T-t)} \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{B}{F_t}\right).$$

Der Wert der risikolosen Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt  $t$  berechnet sich analog durch

$$F_t = B e^{-r(T-t)} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{B}{F_t}\right) = \frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{B}{B e^{-r(T-t)}}\right).$$

Für den Credit Spread gilt somit unter Berücksichtigung des Ausdrucks (4.37) für  $F_t$

$$\begin{aligned}
 R - r &= \frac{1}{T - t} \left( \ln\left(\frac{B}{F_t}\right) - \ln\left(\frac{B}{B e^{-r(T-t)}}\right) \right) \\
 &= -\frac{1}{T - t} \ln\left(\frac{F_t}{B e^{-r(T-t)}}\right) \\
 &= -\frac{1}{T - t} \ln\left(\Phi(d_2) + \frac{V_t}{B e^{-r(T-t)}} \Phi(-d_1)\right). \tag{4.45}
 \end{aligned}$$

Die Kreditzinsspanne hängt also im Allgemeinen von der Restlaufzeit des Kredits ab. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 932; Hull, 2011, S. 356; Läger, 2002, S. 174; Reichling et al., 2007, S. 144; Rudolph et al., 2007, S. 115)

### 4.2.2. Merton-Einfaktormodell

Im Abschnitt 4.1.3 wurde das allgemeine Einfaktormodell für die Bonitätsvariable  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , vorgestellt. In dem Fall des Merton-Grundmodells lässt sich die Bonitätsvariable konkretisieren. Aus (4.41) mit  $T = t$  und  $t = 0$  lässt sich der Wert  $V_{it}$  des Unternehmens  $i$  darstellen als

$$V_{it} = V_{i0} e^{\left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)t + \sigma_i \sqrt{t} W_{it}}. \tag{4.46}$$

Für die Ausfallwahrscheinlichkeit des  $i$ -ten Unternehmens gilt analog zu (4.44)

$$PD_i = \mathbb{P}(V_{iT} < B_i) = \mathbb{P}(W_{iT} < H_i) = \Phi(H_i) \tag{4.47}$$

mit

$$H_i = \frac{\ln\left(\frac{B_i}{V_{i0}}\right) - \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T}{\sigma_i \sqrt{T}}.$$

Wird nun angenommen, dass die Größe  $W_{iT}$  sich gemäß des Einfaktormodells aus (4.20) darstellen lässt, d.h.  $W_{iT} = \sqrt{\rho_i} U + \sqrt{1 - \rho_i} Z_i$ , dann gilt für die Bonitätsvariable  $Y_i = W_{iT}$  und aus (4.46) folgt

$$Y_i = W_{iT} = \frac{\ln\left(\frac{V_{iT}}{V_{i0}}\right) - \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T}{\sigma_i \sqrt{T}}.$$

Aus (4.47) ergibt sich die zugehörige Ausfallschranke  $H_i = \Phi^{-1}(PD_i)$ . (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 933-934)

### 4.2.3. Multivariates Merton-Modell

Das im Abschnitt 4.2.1 betrachtete Grundmodell von Merton, das ein einziges Unternehmen betrachtet, lässt sich auf ein Portfolio bestehend aus  $n$  Unternehmen ausweiten. Hierzu wird für jedes Unternehmen die Darstellung (4.40) für  $t = 0$  betrachtet:

$$V_{i,T} = V_{i,0} e^{\left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T + \sigma_i W_{i,T}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.48)$$

mit dem Standard-Wiener-Prozess  $W_{i,T} \sim \mathcal{N}(0, T)$ . Die Verallgemeinerung von (4.48) liefert eine  $n$ -dimensionale geometrische Brownsche Bewegung für den Prozess der Firmenwerte  $V_T = (V_{1,T}, \dots, V_{n,T})'$  mit dem Drift-Vektor  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$ , dem Volatilitätsvektor  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)'$  und dem  $n$ -dimensionalen Standard-Wiener-Prozess  $W_T = (W_{1,T}, \dots, W_{n,T})'$ . Die einzelnen Komponenten von  $W_T$  sind dabei korreliert. Für die Verteilung von  $W_T$  gilt  $W_T \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, PT)$ , wobei  $\mathcal{N}_n$  die  $n$ -dimensionale Normalverteilung,  $\mathbf{0}$  der  $n$ -dimensionale Nullvektor und  $P$  die Korrelationsmatrix ist.

In dem Fall, dass das Portfolio aus zwei Unternehmen mit den Firmenwerten  $V_{1,t}$  und  $V_{2,t}$  besteht, gilt für die Korrelation der zugehörigen Standard-Wiener-Prozesse  $\rho(W_{1,t}, W_{2,t}) = \rho t$ . Seien  $B_1$  und  $B_2$  die jeweiligen Rückzahlungsbeträge, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Ausfalls der beiden Firmen am Laufzeitende  $T$

$$\begin{aligned} PD_{1,2} &= \mathbb{P}(V_{1,T} < B_1, V_{2,T} < B_2) \\ &= \Phi_2 \left( \rho; \frac{\ln\left(\frac{B_1}{V_{1,0}}\right) - \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T}{\sigma_1 \sqrt{T}}, \frac{\ln\left(\frac{B_2}{V_{2,0}}\right) - \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)T}{\sigma_2 \sqrt{T}} \right), \end{aligned}$$

wobei  $\Phi_2$  die zweidimensionale Standardnormalverteilung mit Korrelation  $\rho$  ist. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 196-197, 936; McNeil et al., 2015, S. 430)

### 4.2.4. Kritische Würdigung und Erweiterungen des Merton-Modells

Um die in (4.44) angegebene Ausfallwahrscheinlichkeit berechnen zu können, wird der Wert des Unternehmens  $V_t$  sowie seine Volatilität  $\sigma_V$  benötigt. Im Allgemeinen kann nicht davon ausgegangen werden, dass diese Größen beobachtbar sind. Dies stellt den Hauptkritikpunkt im Merton-Modell dar. Falls das Unternehmen aber börsennotiert ist, lässt sich der Marktwert des Eigenkapitals  $E_t$  und dessen Volatilität  $\sigma_E$  beobachten, woraus sich der Unternehmenswert und dessen Volatilität ableiten lassen. Der Wert des Eigenkapitals berechnet sich als der Wert einer europäischen Call-Option wie in (4.32) angegeben. Weiter kann zwischen dem Eigenkapital und

dem Unternehmenswert die folgende Beziehung hergeleitet werden:

$$\sigma_E E_t = \sigma_V V_t \Phi(d_1). \quad (4.49)$$

Durch numerisches Lösen des Gleichungssystems bestehend aus den Gleichungen (4.32) und (4.49) können  $V_t$  und  $\sigma_V$  bestimmt und folglich die Ausfallwahrscheinlichkeit berechnet werden. Problematisch ist hierbei, dass die Eigenkapitalvolatilität  $\sigma_E$  nicht konstant ist. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 932-934, 992; Hull, 2011, S. 367-368; Rudolph et al., 2007, S. 120-121)

Die Volatilität  $\sigma_V$  des Unternehmenswertes lässt sich aber auch schätzen, was ebenfalls einige Schwierigkeiten aufweist. Zum Beispiel kann die historische Volatilität der Firmenwertänderung als Schätzer für die aktuelle Volatilität verwendet werden. Diese Schätzmethode ist allerdings nicht robust, da hierfür zu wenig Datenpunkte vorhanden sind. Als Alternative lässt sich die *implizite Volatilität*, also diejenige Volatilität, die zum Preis der Call-Option bzw. zum Wert des Eigenkapitals in (4.32) - (4.34) passt, als Volatilitätsschätzer verwenden. Jedoch würde sich in der Praxis jegliche Fehlspezifikation des Black-Scholes-Modells für die Eigenkapitalbewertung in der impliziten Volatilität widerspiegeln. Als dritte Möglichkeit würde es sich anbieten, diejenige Volatilität zu verwenden, die den quadratischen Fehler zwischen den beobachteten Preisen und den Modellpreisen in einer Zeitperiode minimiert. Diese Methode führt typischerweise zu realitätsfernen Volatilitäten. (Vgl. de Servigny und Renault, 2004, S. 325-326)

In den von Merton auf Basis von Black und Scholes getroffenen Annahmen zum Modellrahmen sind noch weitere Mängel aufzufinden. Es existieren viele verschiedene Erweiterungen des vorgestellten Merton-Grundmodells, die diese Probleme berücksichtigen und verbessern. Einige dieser Ideen werden nachfolgend genannt.

Das Merton-Modell macht die realitätsferne Annahme, dass ein Unternehmen nur am Laufzeitende  $T$  ausfallen kann. Dagegen definiert der Ansatz der *Erst-Passage-Zeit-Modelle* den Ausfallzeitpunkt, wenn der Unternehmenswert erstmalig unter den Fremdkapitalwert fällt ( $\tau = \inf\{t \geq 0 : V_t < B\}$ ), d.h. ein Ausfall kann auch intraperiodisch eintreten. Hierzu wird auf Albrecht und Maurer, 2008, S. 935, Läger, 2002, S. 181-196 und Zhou, 2001a, S. 555-576, verwiesen.

Die Annahme der Verschuldung des Unternehmens durch einen Zerobond mit einer konstanten und bekannten Zinsrate ist sehr restriktiv. Es ist möglich das Modell durch eine stochastische Zinsstruktur zu erweitern. Die Theorie dazu kann in Läger, 2002, S. 196-211 und Longstaff und Schwartz, 1995, S. 789-819, nachgelesen werden.

Das Modell lässt sich auch auf eine Kuponanleihe ausweiten, wobei das Fremdkapital als eine Option auf eine Option (*Compound Option*) angesehen wird. Hiermit hat sich Geske, 1977, S. 541-552, beschäftigt.

Einen wirtschaftlichen Ansatz stellt die Modellierung einer endogenen Ausfallschranke dar.

Dabei wird die Ausfallgrenze nicht im Vorhinein festgelegt, sondern endogen durch strategische Überlegungen der Aktionäre bestimmt. Eine Ausarbeitung dazu ist in Black und Cox, 1976, S. 351-367, zu finden.

Des Weiteren kann das Fremdkapital an die Änderungen des Unternehmenswertes angepasst werden, wie in Collin-Dufresne et al., 2001, S. 2177-2207, beschrieben.

Die Eigenkapitalgeber können außerdem einen strategischen Ausfall bewirken, um Nutzungsrechte von der Seite der Fremdkapitalgeber zu erhalten. Zu diesem Thema wird auf Anderson et al., 1996, S. 871-881, verwiesen.

Die Modellierung kann auch durch allgemeine Asset-Prozesse erfolgen, wie z.B. *Jump Diffusion-* oder *Levy-Prozesse*. Dies ist in Zhou, 2001b, S. 2015-2040 und Rachev et al., 2000, nachzulesen.

Ein weiterer Kritikpunkt des Grundmodells von Merton ist, dass der Credit Spread in (4.45) für  $t \rightarrow T$  verschwindet, in der Praxis bleibt dieser jedoch auch für kurze Perioden substantiell. Außerdem ist im Falle eines nicht börsennotierten Unternehmens die Anwendung dieses Modells nur unter weiteren einschränkenden Annahmen möglich. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 932, 934; Knapp, 2002, S. 94)

Das Merton-Modell hat aber auch Stärken vorzuweisen. So ist erstens die theoretische Fundierung dieser Methode im Vergleich zu anderen Ausfallwahrscheinlichkeits-Modellen hervorzuheben, denn die Beschreibung des Ausfallereignisses geschieht in einem ursachenbezogenen Rahmen, nämlich auf Basis der modernen Kapitalmarkttheorie. Außerdem ist der Zukunftsbezug dieser Methode zu unterstreichen. Die Marktpreise des Eigenkapitals stellen eine Beurteilung über die zukünftige Unternehmensentwicklung dar. Die Ausfallwahrscheinlichkeiten sind somit zeitabhängige Bewertungen des Kreditausfallrisikos. Damit die Markterwartungen die Entwicklung des Unternehmenswertes korrekt abbilden, müssen zwei wesentliche Voraussetzungen erfüllt sein: der Markt muss informationseffizient (d.h. alle verfügbaren Marktinformationen müssen sich zu jeder Zeit aus den Aktienpreisen entnehmen lassen) und liquide sein, wobei ersteres in der Praxis nicht realisierbar ist. (Vgl. Knapp, 2002, S. 94)

### 4.3. Reduktionsmodelle I: Intensitätsmodelle

Bei den strukturellen Modellen wurde das Ausfallrisiko aus dem Unternehmenswert mit Hilfe eines optionspreistheoretischen Ansatzes abgeleitet. Die Klasse der *Intensitätsmodelle* von Jarrow und Turnbull (1995) leitet das Kreditausfallrisiko aus den Preisen von am Markt gehandelten Unternehmensanleihen ab. Das Ausfallereignis wird dabei beschrieben, ohne die charakteristischen Daten des Unternehmens miteinzubeziehen. Aus diesem Grund werden diese Modelle auch als *Reduktionsmodelle* bezeichnet. Dabei wird der Ausfall als ein *exogen* induziertes Ereignis

nis modelliert. In der Regel geschieht dies durch einen *Sprungprozess*. Der Ausfall findet hier „unvorhersehbar“ statt und wird durch eine Zufallsvariable definiert. Eine ökonomische Interpretation ist aufgrund der stochastischen Modellierung nicht möglich. Es wird eher auf eine marktkonsistente Preisdarstellung von ausfallbedrohten Anleihen und den daraus resultierenden Ausfallwahrscheinlichkeiten abgezielt. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 937; de Servigny und Renault, 2004, S. 331; Hartmann-Wendels et al., 2019, S. 508; Martin et al., 2014, S. 110; Rudolph et al., 2007, S. 121; Starck und Trautmann, 2006, S. 474)

### 4.3.1. Intensitätsmodell für ein Unternehmen

Die Basis dieses Ansatzes bildet ein Sprung- bzw. Zählprozess  $N(t)$ ,  $t \geq 0$ , wobei  $N(t)$  die Anzahl der Ereignisse bis zum Zeitpunkt  $t$  angibt. Dieser beginnt bei  $N(0) = 0$  und springt beim Eintreten bestimmter Ereignisse um eine Einheit nach oben, d.h. er nimmt nur positive ganzzahlige Werte an ( $N(t) \in \mathbb{N}_0$ ) und ist somit monoton wachsend. Der erste Sprung dieses Prozesses definiert den *Ausfallzeitpunkt* (*Time of Default*)  $\tau$ :

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : N(t) > 0\}. \quad (4.50)$$

An dieser Definition ist noch einmal der Unterschied zu Unternehmenswertmodellen zu erkennen: der Ausfallzeitpunkt ist hier rein formal definiert, während es bei Unternehmenswertmodellen eine ökonomische Definition ist.

Der Ausfall kann in diesem Fall während einer Zeitperiode  $[0, t]$  stattfinden. Die Wahrscheinlichkeit  $PD(t)$  bis zum Ende der Zeitperiode auszufallen ist folglich

$$PD(t) = \mathbb{P}(N(t) > 0) = \mathbb{P}(\tau \leq t). \quad (4.51)$$

Entsprechend gilt für die *Überlebenswahrscheinlichkeit*  $PS$  (*Probability of Survival*), also die Wahrscheinlichkeit, dass eine Firma am Ende des Zeitintervalls  $[0, t]$  noch solvent ist

$$PS(t) = 1 - PD(t) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = \mathbb{P}(\tau > t). \quad (4.52)$$

Eine Verallgemeinerung auf das Zeitintervall  $[s, t]$  ist gegeben durch

$$PD(s, t) = \mathbb{P}(N(t) > 0 | N(s) = 0) = \mathbb{P}(\tau \leq t | \tau > s),$$

$$PS(s, t) = 1 - PD(s, t) = \mathbb{P}(N(t) = 0 | N(s) = 0) = \mathbb{P}(\tau > t | \tau > s),$$

wobei hier auf das „Überleben“ bis zu dem Zeitpunkt  $s$  bedingt wird. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 937-938; Cremers und Walzner, 2009, S. 48)

Es ist ein Prozess gesucht, der die Eigenschaften eines Ausfallereignisses möglichst gut beschreibt. Als Standardmodell für den Zählprozess wird ein *Poisson-Prozess* verwendet. Der **homogene Poissonprozess** (HPP)  $N(t)$ ,  $t \geq 0$ , wird für disjunkte Zeitintervalle wie folgt definiert:

- a)  $N(0) = 0$
- b)  $N(t)$  hat unabhängige Zuwächse  $N(t+h) - N(t)$  für  $h \geq 0$
- c)  $N(t)$  hat stationäre (identisch verteilte) Zuwächse, d.h.  $N(t+h) - N(t) \sim Poi(\lambda h)$  für  $h \geq 0$
- d) Die *Ausfallintensität*  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) > 0)$  ist konstant

Die Sprungzeiten des Prozesses sind definiert durch  $t_m = \inf\{t \geq 0 : N(t) = m\}$ . Die *Wartezeiten* zwischen zwei Sprüngen  $t_m - t_{m-1}$  sind unabhängig und identisch exponentialverteilt mit dem Parameter  $\lambda$ . Insbesondere gilt für den Ausfallzeitpunkt  $\tau = t_1 \sim Exp(\lambda)$  mit der Dichtefunktion  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  und der Verteilungsfunktion  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ . Somit lässt sich die Ausfallintensität genauer analysieren: es ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ausfallereignis in dem sehr kleinen Intervall  $[t, t+h]$  stattfindet, bedingt darauf, dass bis  $t$  kein Ausfall erfolgt ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) > 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(t < \tau < t+h | \tau > t) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{\mathbb{P}(t < \tau < t+h)}{\mathbb{P}(\tau > t)} \\ &= \frac{1}{1 - F(t)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \\ &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda. \end{aligned}$$

Die Ausfallintensität  $\lambda$  charakterisiert somit die mittlere Anzahl der ausgefallenen Firmen pro Zeiteinheit. Für den Erwartungswert des Ausfallzeitpunktes gilt  $\mathbb{E}(\tau) = 1/\lambda$ , d.h. die Ausfallzeit ist umgekehrt proportional zur Ausfallintensität.

Der HPP ist poissonverteilt mit dem Parameter  $\lambda t$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess in der Periode  $[0, t]$  um  $m$  Einheiten nach oben springt, beträgt

$$\mathbb{P}(N(t) = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}. \tag{4.53}$$

Folglich gilt nach (4.52) für die Überlebenswahrscheinlichkeit bis zum Zeitpunkt  $t$

$$PS(t) = e^{-\lambda t} \quad (4.54)$$

und nach (4.51) für die kumulative Ausfallwahrscheinlichkeit bis zum Zeitpunkt  $t$

$$PD(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (4.55)$$

(Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 937-938; Cremers und Walzner, 2009, S. 49; Läger, 2002, S. 226; Martin et al., 2014, S. 350; Reichling et al., 2007, S. 160)

Der *inhomogene Poissonprozess* (IPP) besitzt ebenfalls die Eigenschaften a) und b) des homogenen Poissonprozesses. Der Unterschied hier ist, dass die Zuwächse nicht mehr stationär sind und dass die Intensität  $\lambda(t)$  zwar immer noch deterministisch ist, aber nun von der Zeit abhängt. Wird

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

definiert, so gilt für den Prozess  $N(t) \sim Poi(\Lambda(t))$  und es ergibt sich analog zu (4.53)

$$\mathbb{P}(N(t) = m) = \frac{(\Lambda(t))^m}{m!} e^{-\Lambda(t)}$$

und analog zu (4.54) und (4.55)

$$PS(t) = e^{-\Lambda(t)},$$

$$PD(t) = 1 - e^{-\Lambda(t)}.$$

(Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 938-939)

Es ist erwiesen, dass die Berechnung der Credit Spreads aus Modellen mit konstanten Intensitäten empirisch wenig Gültigkeit aufweisen. Die historisch beobachtbaren Credit Spreads enthalten eine stochastische Komponente, weshalb eine Verallgemeinerung auf stochastische Intensitäten sinnvoll ist. Der **Cox-Prozess** (*doppelt-stochastischer Poissonprozess*) erweitert den inhomogenen Poissonprozess auf eine stochastische Ausfallintensität  $\tilde{\lambda}(t)$ . Diese Zufälligkeit ist so zu verstehen, dass aus allen möglichen Pfaden von  $\tilde{\lambda}(t)$  ein Intensitätspfad  $\lambda(t)$  als Realisation des stochastischen Prozesses gezogen wird. Dieses  $\lambda(t)$  ist dann die Ausfallintensität des

Zählprozesses  $N(t)$ . Die Zählverteilung wird durch ein pfadweise gebildetes Integral definiert:

$$\tilde{\Lambda}(t) = \int_0^t \tilde{\lambda}(s) ds.$$

Der Zählprozess ist ein gemischter Poissonprozess, d.h.

$$\mathbb{P}(N(t) = m) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} U(d\lambda, t) \quad (4.56)$$

mit der mischenden Verteilungsfunktion  $U(\lambda, t) = \mathbb{P}(\tilde{\Lambda}(t) \leq \lambda t)$ . Es kann festgestellt werden, dass (4.56) äquivalent ist zu

$$\mathbb{P}(N(t) = m) = \mathbb{E} \left( \frac{(\tilde{\Lambda}(t))^m}{m!} e^{-\tilde{\Lambda}(t)} \right).$$

Dann ist die Ausfallwahrscheinlichkeit und die Überlebenswahrscheinlichkeit gegeben durch

$$\begin{aligned} PS(t) &= \mathbb{E} \left( e^{-\tilde{\Lambda}(t)} \right), \\ PD(t) &= 1 - \mathbb{E} \left( e^{-\tilde{\Lambda}(t)} \right). \end{aligned}$$

(Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 939, 1018-1019; Cremers und Walzner, 2009, S. 60; Läger, 2002, S. 228)

### 4.3.2. Multivariate Intensitätsmodelle

Das vorgestellte Intensitätsmodell wird nun auf  $n$  Unternehmen mit zugehörigen Ausfallzeiten  $\tau_1, \dots, \tau_n$  verallgemeinert. Die Ausfallintensitäten  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$  können dabei deterministisch oder stochastisch sein. Zur Illustration wird wieder ein Portfolio bestehend aus zwei Unternehmen betrachtet. Die Basis bilden drei homogene Poissonprozesse  $N_1, N_2$  und  $N$  mit den Intensitäten  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda$ . Die Ausfallintensitäten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind ideosynkratischer Natur, d.h. als unternehmensspezifisch zu interpretieren, während  $\lambda$  gesamtwirtschaftlich bzw. unternehmensübergreifend ist und somit beide Firmen gleichzeitig betrifft. Analog zu (4.50) wird der Ausfallzeitpunkt des Unternehmens  $i$  definiert durch

$$\tau_i = \inf\{t \geq 0 : N_i(t) + N(t) > 0\},$$

wobei  $\tau_i \sim \text{Exp}(\lambda_i + \lambda)$ . Die erwartete Ausfallzeit des  $i$ -ten Unternehmens ist  $\mathbb{E}(\tau_i) = 1/(\lambda_i + \lambda)$  und die Ausfallintensität ist  $\lambda_i + \lambda$ ,  $i = 1, 2$ . Eine Firma fällt demnach dann aus, wenn ein ideo-

synkratisches Ereignis oder ein makroökonomisches Ereignis oder beide erstmals stattfinden. Für die Überlebens- und Ausfallwahrscheinlichkeit des Unternehmens  $i$  gilt analog zu (4.54) und (4.55)

$$\begin{aligned} PS_i(t) &= \mathbb{P}(N_i(t) + N(t) = 0) = \mathbb{P}(\tau_i > t) = e^{-(\lambda_i + \lambda)t}, \\ PD_i(t) &= \mathbb{P}(N_i(t) + N(t) > 0) = \mathbb{P}(\tau_i \leq t) = 1 - e^{-(\lambda_i + \lambda)t}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Beziehung  $\max(t, s) = -\min(s - s - t, t - t - s) = t + s - \min(t, s)$  ergibt sich die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit der beiden Unternehmen als

$$\begin{aligned} PS(t, s) &= \mathbb{P}(\tau_1 > t, \tau_2 > s) \\ &= \mathbb{P}(N_1(t) = 0, N_2(s) = 0, N(\max(t, s)) = 0) \\ &= e^{-\lambda_1 t - \lambda_2 s - \lambda \max(t, s)} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda)t} e^{-(\lambda_2 + \lambda)s} e^{\lambda \min(t, s)} \\ &= PS_1(t) PS_2(s) \min(e^{\lambda t}, e^{\lambda s}). \end{aligned} \tag{4.57}$$

Für die Korrelationen zwischen den Ausfallzeiten der beiden Unternehmen gilt

$$\rho(\tau_1, \tau_2) = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1 + \lambda_2}.$$

Für die Korrelation zwischen den Ausfallvariablen  $D_1(t)$  und  $D_2(t)$  gemäß (3.3), die in diesem Fall den Ausfall bis zum Zeitpunkt  $t$  identifizieren, gilt

$$\rho(D_1(t), D_2(t)) = \frac{PS(t, t) - PS_1(t)PS_2(t)}{\sqrt{PS_1(t)(1 - PS_1(t))PS_2(t)(1 - PS_2(t))}}.$$

(Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 940-941; Giesecke, 2003, S. 3-4, 6)

Die Ausfallstruktur der  $n$  Unternehmen im Portfolio lässt sich auch mit einem alternativen Ansatz beschreiben. Hierbei wird angenommen, dass die Ausfallintensitäten  $\lambda_1(t)$  und  $\lambda_2(t)$  von einem gemeinsamen mehrdimensionalen Prozess  $X_t$  abhängen. Dieser kann z.B. konjunkturzyklusbedingte Ausfallkorrelationen beschreiben. Es resultiert ein multivariater Cox-Prozess und es gilt  $\lambda_i(t) = \lambda_i(X_t)$ ,  $i = 1, 2$ . Ist explizit eine Realisation  $X_t = x_t$  gegeben, so sind die Ausfallzeitpunkte  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , bedingt unabhängig. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 942)

### 4.3.3. Kritische Würdigung und Erweiterungen der Intensitätsmodelle

Eine mögliche Erweiterungsidee der Intensitätsmodelle besteht in dem Gedanken, dass gewisse Ereignisse nicht sofort zu einem Ausfall führen, sondern nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit. Im Fall  $n = 2$  wird angenommen, dass ein idiosynkratisches Ereignis mit Wahrscheinlichkeit  $q_i$  zu einem Ausfall des Unternehmens  $i = 1, 2$  führt. Ein unternehmensübergreifendes Ereignis führt mit Wahrscheinlichkeit  $q_{11}$  zu einem Ausfall beider Unternehmen, mit Wahrscheinlichkeit  $q_{10}$  zu einem Ausfall des Unternehmens 1 und mit Wahrscheinlichkeit  $q_{01}$  zu einem Ausfall des Unternehmens 2. Die Ausfallzeiten sind – wie im vorigen Abschnitt – exponentialverteilt und für die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit gilt

$$PS(t, s) = e^{-\gamma_1 t - \gamma_2 s - \gamma \max(t, s)},$$

mit  $\gamma_1 = \lambda_1 q_1 + \lambda q_{10}$ ,  $\gamma_2 = \lambda_2 q_2 + \lambda q_{01}$  und  $\gamma = \lambda q_{11}$ . Für  $q_1 = q_2 = q_{11} = 1$  ergibt sich das Modell (4.57). Im allgemeinen Fall ist die Anzahl der Parameter im Modell recht hoch, was zu einer schwierigen Modellkalibrierung führt. (Vgl. Giesecke, 2003, S. 10)

Die Ausfallwahrscheinlichkeiten werden hier als zeitabhängig betrachtet. Aber es kann auch nicht bei dieser Modellklasse von einem informationseffizienten Markt ausgegangen werden. Des Weiteren stellt sich die Frage über die Angemessenheit des unterstellten Intensitätsprozesses. Als größten Nachteil kann der fehlende ökonomische Ansatz bei den Intensitätsmodellen angesehen werden, wodurch die intuitive Nachvollziehbarkeit unterdrückt wird.

Auf der Anderen Seite gibt es auch Aspekte, die für diese Modellklasse sprechen. Da die Credit Spreads – wie bereits erwähnt – eine stochastische Komponente aufweisen, führt die Wahl einer stochastischen Intensitätsrate bei der Anwendung der Cox-Prozesse zu validen Ergebnissen. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass die unternehmensspezifischen Bilanzdaten nicht berücksichtigt werden müssen, da die relevanten Informationen in den Marktdaten enthalten sind. Intensitätsmodelle sind somit weniger aufwendig als die Unternehmenswertmodelle. Da sich die benötigten Parameter relativ gut am Markt ablesen lassen, lässt sich diese Modellklasse außerdem gut implementieren. (Vgl. Cremers und Walzner, 2009 S. 60-61; Knapp, 2002, S. 97)

## 4.4. Reduktionsmodelle II: Ratingbasierte Modelle

Die *ratingbasierten Modelle* bilden eine spezielle Form der Intensitätsmodelle, werden in der Literatur aber oft als eigene Modellklasse charakterisiert. Während die Intensitätsmodelle lediglich den Ausfallzeitpunkt modellieren, wird bei den ratingbasierten Modellen nicht nur der Übergang in den Ausfallzustand, sondern auch die Migrationen zwischen den einzelnen Boni-

tätsklassen identifiziert. Sie werden deshalb auch als *Credit-Migration-Modelle* bezeichnet. Der Ausfallprozess wird dabei durch einen Ratingprozess mit  $K \in \mathbb{N}$  Zuständen bzw. Ratingklassen  $1, \dots, K$  ersetzt, die in absteigender Folge zu verstehen sind. Die erste Klasse entspricht der höchsten Kreditwürdigkeit (Aaa/AAA), die letzte Klasse – wie in dem Abschnitt 3.2.1.2.3 zu historischen Ausfallwahrscheinlichkeiten bereits eingeführt – dem absorbierenden Defaultzustand ( $K=D$ ). Zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{N}_0$  gibt der stochastische Ratingprozess  $R(t)$  an, in welcher Ratingklasse sich das Unternehmen befindet, d.h.  $R(t) = 1, \dots, K$ . Das Anfangsrating  $R(0)$  wird als bekannt vorausgesetzt. Eine Grundannahme ist, dass der Prozess  $R(t)$  ein zeitdiskreter *Markovprozess* ist, das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt  $T$  den Ratingzustand  $j$  anzunehmen nur vom Zustand  $i$  des aktuellen Zeitpunktes  $t$  abhängt und alle vorherigen Zustände keine Informationen liefern. Für die *Übergangswahrscheinlichkeiten* gilt

$$q_{i,j}(t, T) = \mathbb{P}(R(T) = j \mid R(t) = i) ,$$

für  $i, j = 1, \dots, K$  und  $t, T \in \mathbb{N}_0$ . Diese lassen sich in einer *Übergangsmatrix*  $Q(t, T) = (q_{i,j}(t, T))$  zusammenfassen. Wird die Wahrscheinlichkeit, das Rating  $i$  zum Zeitpunkt  $t$  zu bekommen mit  $p_i(t) = \mathbb{P}(R(t) = i)$  bezeichnet, so ist  $p(t) = (p_1(t), \dots, p_K(t))$  der Vektor der Ratingklassen- bzw. Zustandswahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt  $t$ . Damit gilt

$$p(t) = p(0) Q(0, t) . \tag{4.58}$$

Falls die betrachtete Markovkette *homogen* ist, d.h. falls die Übergangsmatrix durch einperiodige zeitunabhängige Übergangswahrscheinlichkeiten  $Q = (p_{ij})$  gegeben ist, so gilt  $Q(t, T) = Q^{T-t}$  und (4.58) lässt sich schreiben als

$$p(t) = p(0) Q^t .$$

Die *kumulierte Ausfallwahrscheinlichkeit* ist die Wahrscheinlichkeit bis zum Zeitpunkt  $t$  auszufallen, wenn das Anfangsrating  $k = 1, \dots, K - 1$  ist. Sie wird definiert durch

$$PD_k(t) = \mathbb{P}(R(t) = K \mid R(0) = k) . \tag{4.59}$$

Die *kumulierte Überlebenswahrscheinlichkeit* ist die Gegenwahrscheinlichkeit von (4.59) und ist für  $k = 1, \dots, K - 1$  definiert durch

$$PS_k(t) = \mathbb{P}(R(t) \neq K \mid R(0) = k) = 1 - PD_k(t) . \tag{4.60}$$

Die *marginale Ausfallwahrscheinlichkeit* gibt die Wahrscheinlichkeit an, in der Zeitperiode  $[t - 1, t]$  auszufallen, gegeben nur das Anfangsrating  $k = 1, \dots, K - 1$ . Sie wird definiert durch

$$\begin{aligned} PM_k(t) &= \mathbb{P}(R(t) = K \mid R(t - 1) \neq K, R(0) = k) \\ &= \sum_{i=1}^{K-1} \mathbb{P}(R(t) = K \mid R(t - 1) = i, R(0) = k) . \end{aligned} \quad (4.61)$$

Die marginalen Wahrscheinlichkeiten werden von den Ratingagenturen veröffentlicht. Aus (4.61) lässt sich die *marginale Überlebenswahrscheinlichkeit* folgern als

$$1 - PM_k(t) = \mathbb{P}(R(t) \neq K \mid R(t - 1) \neq K, R(0) = k)$$

mit  $k = 1, \dots, K - 1$ . Damit kann die Beziehung (4.60) dargestellt werden als

$$PS_k(t) = \prod_{i=1}^t (1 - PM_k(i)) .$$

Die *aufgeschobene Ausfallwahrscheinlichkeit* gibt die Wahrscheinlichkeit an, in der Zeitperiode  $[t - 1, t]$  auszufallen, gegeben, das Anfangsrating  $k = 1, \dots, K - 1$  und dass kein Ausfall bis zum Zeitpunkt  $t - 1$  stattgefunden hat:

$$\begin{aligned} PD_k^*(t) &= \mathbb{P}(R(t) = K \mid R(t - 1) \neq K, \dots, R(1) \neq K, R(0) = k) \\ &= PS_k(t - 1) PM_k(t) . \end{aligned}$$

(Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 942-944; Reichling et al., 2007, S. 160, 163; Rudolph et al., 2007, S. 122-124)

#### 4.4.1. Kritische Würdigung der ratingbasierten Modelle

Die ratingbasierten Modelle unterscheiden sich von anderen Modellklassen durch die Berücksichtigung möglicher Bonitätsveränderungen. Dadurch können implizit mehrere Zeitperioden betrachtet werden. Dies ermöglicht nicht nur die Identifikation des Kreditausfallrisikos, sondern auch des Bonitätsänderungsrisikos. Es lassen sich außerdem sowohl unkorrelierte als auch korrelierte Ratingübergänge integrieren. Obwohl das grundsätzliche Ziel dieses Ansatzes die Bestimmung des erwarteten Verlustes ist, kann die ratingbasierte Modellierung mit weiteren Konzepten (wie z.B. *Value at Risk* oder *Expected Shortfall*) kombiniert werden, um zusätzlich die Bestimmung des unerwarteten Verlustes zu ermöglichen. Des Weiteren existiert bei den ratingbasierten Modellen die Möglichkeit der Risikoberechnung auch für nicht börsennotierte Unternehmen, da die Kreditausfall- bzw. Übergangswahrscheinlichkeiten – vorausgesetzt es sind genug Daten

vorhanden – empirisch geschätzt werden können. Dies stellt einen deutlichen Vorteil gegenüber den optionspreisbasierten Verfahren dar. (Vgl. Daldrup, 2006, S. 113)

Problematisch bei den ratingbasierten Verfahren ist die Tatsache, dass Ratingherabstufungen öfter zu beobachten sind als Ratingheraufstufungen. Das Phänomen, dass auf eine Herabstufung eher eine weitere Herabstufung folgt, anstatt in der Ratingklasse zu verbleiben, wird als *Rating Momentum* bezeichnet und kann von den historischen Übergangsmatrizen nicht adäquat dargestellt werden. Des Weiteren kann dieses Verfahren ein Problem bei der Anwendung auf Portfolios darstellen. Denn in großen Portfolios steigt mit wachsender Größe der Einzelkredite und einer großen Anzahl von Ratingklassen der Rechenaufwand erheblich. Diese Problematik kann durch eine Monte-Carlo-Simulation abgeschwächt werden. Das Hauptproblem dieses Ansatzes besteht jedoch in der Berücksichtigung ausschließlich historischer Daten, was für eine zukunftsorientierte Risikoanalyse als kritisch anzusehen ist. Dadurch wird nicht die aktuelle Lage des Marktes wiedergespiegelt, sondern die Informationen werden mit einer zeitlichen Verzögerung in einem externen Rating abgebildet. (Vgl. Daldrup, 2006, S. 110, 114; Martin et al., 2014, S. 228)

# 5. Industriemodelle

Dieses Kapitel befasst sich mit den Grundideen der drei anwendungsorientierten Modelle *KMV*, *Credit Metrics* und *Credit Risk+*. Dabei modelliert das KMV-Modell in Abschnitt 5.1.1 das Kreditausfallrisiko eines einzigen Unternehmens. Die beiden letztgenannten Modelle erfassen in Abschnitt 5.2 das Ausfallrisiko eines Portfolios, wobei diese sich in analytische (*Credit Risk+*) und simulationsbasierte (*Credit Metrics*) Modelle klassifizieren lassen.

## 5.1. Modellierung von Einzelkreditrisiken

### 5.1.1. Das KMV-Modell

Das *KMV-Modell* wurde von der gleichnamigen Firma – genannt nach den Initialen ihrer Gründer Kealhover, McQuown und Vašíček – entwickelt und 2002 von *Moody's* akquiriert. Das Modell zielt darauf ab, die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Unternehmens auf Basis des Grundmodells von **Merton** zu berechnen, wobei ein Ausfall als das Ereignis  $V_T < B$  definiert wird, mit  $V_T$  dem Marktwert der Aktiva des Unternehmens und  $B$  dem Marktwert der Verbindlichkeiten. Im KMV-Modell bezieht sich der Anteil der Fremdfinanzierung auf den Buchwert. Außerdem wird berücksichtigt, dass langfristige und kurzfristige Verbindlichkeiten eingegangen werden können. Unterschreitet der Unternehmenswert die Gesamtverpflichtungen, so muss nicht unbedingt ein Ausfall eintreten, da der Ausfallzeitpunkt hier zwischen den kurzfristigen und langfristigen Verbindlichkeiten festgesetzt wird. Die Ausfallsschranke bzw. die Verpflichtungen werden als *Default Point (DPT)* bezeichnet und es gilt

$$DPT = \text{kurzfristige Verbindlichkeiten} + \frac{1}{2} \text{langfristige Verbindlichkeiten}.$$

Dabei haben kurzfristige Verbindlichkeiten ein höheres Gewicht, da diese bis zum Zeithorizont  $T$  bedient werden müssen, langfristige Verbindlichkeiten bieten dagegen mehr Zeit zur Rückzahlung. Im Abschnitt 4.2.1 wurde die Distance to Default (*DD*) eingeführt. Falls die Verteilungsfunktion der Unternehmensaktiva bekannt ist, kann mit Hilfe der Distance to Default die Ausfallwahrscheinlichkeit berechnet werden. Gemäß (4.39) gilt  $PD = \Phi(-DD) = 1 - \Phi(DD)$ . Die Abbildung 4 fasst die wesentlichen Vorgehensschritte im KMV-Modell zusammen. Zuerst ist der Wert der Unternehmensaktiva (1) und deren Volatilität (2) zum Zeitpunkt  $t = 0$  durch Lösen des Gleichungssystems aus (4.32) und (4.49) zu bestimmen. Zudem muss die Verteilung der Unternehmensaktiva (3) am Zeithorizont  $T$  (4) sowie der Ausfallzeitpunkt (5) und die Wachstumsrate der Assets (6) bekannt sein. Die Ausfallwahrscheinlichkeit ist die graue Fläche in der Abbildung 4.

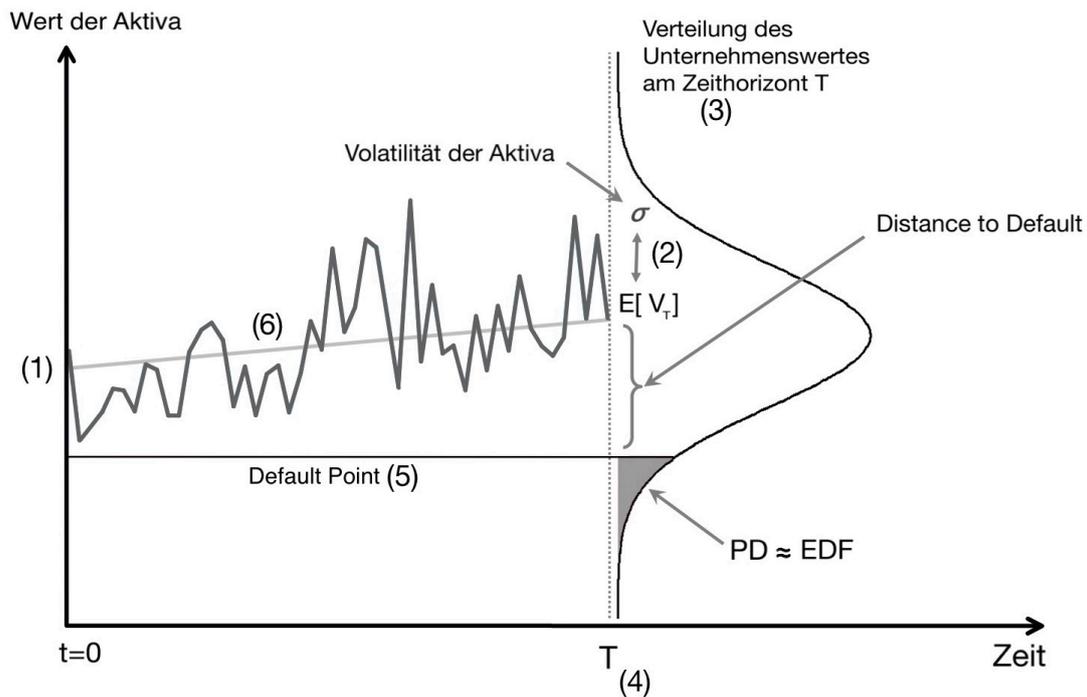


Abbildung 4: Ausfallprozess im KMV-Modell

Quelle: In Anlehnung an Moody's Analytics, o.D. und Rudolph et al., 2007, S. 130

Problematisch sind dabei Annahmen an die Verteilung der Unternehmensaktiva zum Zeitpunkt  $T$ . Mit diesem Problem wird im KMV-Modell wie folgt umgegangen: Aus den historischen Daten werden allen  $DD$ -Werten Ausfallwahrscheinlichkeiten in Form von relativen Ausfallhäufigkeiten (EDF) zugeordnet. Danach wird die aktuelle  $DD$  bestimmt und die zugehörige Ausfallwahrscheinlichkeit aus der entsprechenden  $DD$ -Klasse aus der Datenbasis abgelesen. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 948-949; Rudolph et al., 2007, S. 129-130)

Für eine detaillierte Beschreibung des KMV-Modells wird auf Martin et al., 2014, S. 176-180 verwiesen.

Das Modell *Credit Grades* beschreibt ebenfalls das Kreditausfallrisiko eines einzelnen Schuldners. In dem technischen Bericht von Finkelstein et al., 2002, ist eine Beschreibung des Modells zu finden.

## 5.2. Modellierung von Portfoliokreditrisiken

### 5.2.1. Analytische Modelle

Unter einigen vereinfachenden Annahmen liefern *analytische Modelle* exakte Lösungen für die Verlustverteilung eines Kreditportfolios. Hierzu werden zunächst homogene Teilportfolios gebildet, daraus die Verlustverteilungen einzelner Verträge abgeleitet und schließlich der Verlust des Gesamtportfolios additiv berechnet. Der Hauptvorteil analytischer Modelle besteht darin, dass Ergebnisse ziemlich schnell erzielt werden können. Jedoch sind die getroffenen Annahmen oft sehr restriktiv. (Vgl. de Servigny und Renault, 2004, S. 215-216)

#### 5.2.1.1. Credit Risk+

Das Modell *Credit Risk+* ist ein seltenes Beispiel eines analytischen Modells. Es wurde 1997 von Credit Suisse Financial Products entwickelt und ist den **Intensitätsmodellen** zuzuordnen. Außerdem ist es ein Default Mode-Modell, d.h. es werden nur die Zustände Ausfall und Nichtausfall berücksichtigt. Preisänderungen, Spreads und Migrationen werden hierbei ignoriert. Das Ziel ist die Modellierung der Wertentwicklung bzw. die daraus abzuleitende Ausfallverteilung eines Kreditportfolios, woraus sich das ökonomische Kapital, d.h. die Differenz zwischen dem erwarteten und dem unerwarteten Verlust, bestimmen lässt. Dabei wird von einem großen Portfolio ausgegangen und die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Einzelkredite als niedrig und zeithomogen angenommen. Damit die reale Wertentwicklung des Portfolios modelliert werden kann, müssen die Ausfallwahrscheinlichkeiten mit den jeweiligen Exposures gewichtet werden. Hierzu werden die Netto-Exposures, d.h. um die Recovery Rates bereinigte Exposures verwendet. Diese werden in sogenannte *Exposurebänder* nach ihrem Volumen eingeteilt, d.h. es werden homogene Bänder mit identischen *LGD's* gebildet. Jedes Band wird als eigenständiges Portfolio interpretiert. Die Portfolios werden als unabhängig angenommen. In jedem Band wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfälle in einem Zeitintervall mit Hilfe der Poissonverteilung approximiert. Zu jedem Portfolio wird der erwartete Verlust berechnet und folglich die Verlustverteilung des gesamten Portfolios durch Addition ermittelt. Durch dieses Vorgehen soll der Rechenaufwand verringert werden. Die spezifischen Ausfallraten der verschiedenen Sektoren werden als stochastische Größen angenommen. Je nachdem, aus welchem Sektor die Einzelkredite stammen, können mit diesen Informationen Korrelationen innerhalb des Portfolios bestimmt werden. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S.946-948; de Servigny und Renault, 2004, S. 232-233; Rudolph et al., 2007, S. 133-134)

Zu den Stärken des Modells zählt die Darstellung des Ergebnisses in einer analytisch geschlossenen Form und die geringe Anzahl der benötigten Input-Parameter. Eine Schwäche ist die feststellbare Abweichung zwischen der empirischen Ausfallverteilung und der aus dem Modell

resultierenden Verteilung. Ein Grund hierfür kann die Approximation durch die Poissonverteilung darstellen. Des Weiteren ist die Annahme der Unabhängigkeit zwischen den Kreditrisiken der einzelnen Exposurebänder nicht realistisch und die deterministischen Recovery Rates sind eher problematisch. Ein weiteres Problem stellt die implizit angenommene zeitliche Homogenität der Ausfallwahrscheinlichkeiten bzw. der Ausfallintensitäten dar, da diese die Betrachtung kurzer Zeitperioden und eine permanente Überarbeitung der Input-Daten erfordert. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S.947-948; Rudolph et al., 2007, S. 133-134)

Für eine genaue Ausführung von Credit Risk+ wird auf Albrecht und Maurer, 2008, S. 946-948 sowie Martin et al., 2014, S. 180-185 verwiesen. Aufgrund der genannten Probleme von Credit Risk+ wurden einige Erweiterungen des Modells vorgenommen, zwei davon werden in Albrecht und Maurer, 2008, S.993-995, aufgegriffen.

## 5.2.2. Simulationsbasierte Modelle

Da die analytische Methodik sich für große Portfolios als sehr aufwendig gestalten kann, wird zu der Klasse der *simulationsbasierten Modelle* übergegangen. Diese liefern zwar keine genauen Ergebnisse für die Verlustverteilung des Portfolios aber durch eine Simulation (z.B. *Monte-Carlo-Simulation*) der Szenarien für die Vermögenswerte wird eine gute Annäherung an die tatsächliche Verteilung ermöglicht. Der Vorteil dieser Modellierung ist ein hohes Maß an Flexibilität. Der größte Nachteil dieses Ansatzes besteht in der langen Rechenzeit. (Vgl. de Servigny und Renault, 2004, S. 216; Runge, 2004, S. 99)

### 5.2.2.1. Credit Metrics

*Credit Metrics* ist ein Kreditrisikomodell, das 1997 von J.P. Morgan entwickelt wurde. Es gehört der Klasse der **Unternehmenswertmodelle** an und ermittelt die zukünftige Wertentwicklung eines Portfolios und die zugehörige Verteilung. Als Ursache für die Wertveränderungen einzelner Kredite werden sowohl Ratingänderungen, als auch Ausfälle innerhalb eines Zeitintervalls berücksichtigt. Das Vorgehen zur Ermittlung der Wertentwicklung des gesamten Portfolios lässt sich in drei wesentliche Schritte einteilen.

Zunächst wird das Exposure, also die Höhe der noch offenen Forderungen, für jeden einzelnen Kredit im Portfolio bestimmt. In Credit Metrics können aber auch Finanzinstrumente mit variablen Exposures betrachtet werden.

Im zweiten Schritt wird die mögliche Wertentwicklung für jeden Kredit wie folgt bestimmt. Es wird mit einem internen oder externen Ratingsystem begonnen. Es werden die Übergangswahrscheinlichkeiten in jeder Ratingklasse auf Grundlage historischer Daten ermittelt. Danach werden auf Basis der Ratingänderungen die Wertänderungen einzelner Positionen bestimmt.

Falls eine Änderung des Ratings einen Ausfall darstellt, so werden historische Recovery Rates benutzt, bei einer Ratingänderung ohne Ausfall folgt eine Neubewertung des Titels. Anschließend werden die beiden Teilschritte zusammengeführt, indem für jeden Kredit der erwartete Wert am Zeithorizont  $T$  sowie seine Standardabweichung bestimmt wird.

Damit die Wertentwicklung des Gesamtportfolios ermittelt werden kann, werden im letzten Schritt Korrelationen zwischen Einzelkrediten mittels eines Mehrfaktormodells berücksichtigt. Branchen- und Länderzugehörigkeit werden dabei als systematische Marktfaktoren miteinbezogen. Die Unternehmenswerte der Einzeltitel lassen sich nicht direkt aus den Marktinformationen ablesen, deshalb werden Aktienkurse als Approximation für die Unternehmensaktiva herangezogen. Damit lässt sich die Wertentwicklung des gesamten Portfolios simulieren und darauffolgend die Verteilung der Wertentwicklung ableiten. Es ergibt sich die für Kreditausfallrisiken charakteristische rechtsschiefe Verteilung. (Vgl. Rudolph et al., 2007, S. 132-133)

Eine Schwäche von Credit Metrics ist, dass Ausfälle und Kreditmigrationen auf historischen Daten beruhen. Es wird angenommen, dass aktuelle Ausfallraten den historischen Ausfallraten entsprechen. Zudem wird allen Unternehmen in der gleichen Ratingklasse die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit zugeordnet (Kredithomogenität).

Als Stärken des Modells ist zum einen die Flexibilität, die durch Simulation einer großen Anzahl von Szenarien erzeugt wird, zu betonen. Zum anderen fließen mehrere Faktoren in die Berechnungen ein (Mehrfaktormodell) und es können komplexe Verteilungen für die Risikofaktoren berücksichtigt werden. (Vgl. de Servigny und Renault, 2004, S. 216; Molitor, o.D., S. 17)

Eine genaue Darstellung von Credit Metrics wird in Albrecht und Maurer, 2008, S. 949-959, de Servigny und Renault, 2004, S. 217-224 sowie Martin et al., 2014, S. 172-176, gegeben.

Es existieren noch weitere bekannte Modelle, die auf Simulationen beruhen. Für eine Einführung in das Modell *Portfolio Manager* wird auf Kealhofer und Bohn, 1993, verwiesen. Die Methodik des Modells *Portfolio Risk Tracker* wird in de Servigny et al., 2003, beschrieben. Das *Credit Portfolio View*-Modell wird in den drei Werken von Wilson, 1997a, 1997b, 1997c vorgestellt. (Vgl. de Servigny und Renault, 2004, S. 225-229)

### 5.3. Modellvergleich

Tabelle 4 gibt abschließend einen Überblick über die Unterschiede der beschriebenen Industriemodelle.

	<i>KMV</i>	<i>Credit Risk+</i>	<i>Credit Metrics</i>
Risikodefinition	DD	Ausfallverlust	Marktwertänderung
Risikotreiber	Volatilität des Vermögenswertprozesses	Ausfallintensität	Volatilität des Vermögenswertprozesses
Ratingveränderungen	EDF-Konzept, hohe Migrationswahrscheinlichkeiten	ignoriert	historische Ratingänderungen
Risikoskala	DD auf stetiger Skala	Ausfall	Herauf-, Herabstufungen und Ausfall
Korrelationen	Vermögenswert-Faktormodell	implizit durch Sektoren	Aktienwert-Faktormodell

Tabelle 4: Vergleich von *KMV*, *Credit Risk+* und *Credit Metrics*  
 Quelle: In Anlehnung an Albrecht und Maurer, 2008, S. 945

# 6. Fazit

## 6.1. Zusammenfassung

Wie eingangs erläutert, ist die Kenntnis über verschiedene Methodiken zur Quantifizierung, Messung und Modellierung von Kreditausfallrisiken von größter Bedeutung, damit auch in Krisensituationen ein adäquates Kreditrisikomanagement gewährleistet werden kann. Die vorliegende Arbeit beschäftigte sich mit den bekanntesten Verfahren auf diesem Gebiet.

Hierzu wurde in Kapitel 2 zunächst die Grundlage der Arbeit erstellt, indem das Kreditrisiko allgemein, als die Differenz aus dem ökonomischen und erwarteten Verlust definiert wurde. Das Kreditrisiko lässt sich in zwei Kategorien aufteilen. Während das Kreditausfallrisiko lediglich die fehlenden Zahlungen des Schuldners zu einem Zeitpunkt (konstantes Ausfallrisiko) berücksichtigt, beachtet das Bonitätsänderungsrisiko eine mögliche Änderung (Verbesserung oder Verschlechterung) der Kreditwürdigkeit des Vertragspartners über eine Zeitperiode (variables Ausfallrisiko).

Das dritte Kapitel begann mit der Erarbeitung des Prozesses der Kreditwürdigkeitsprüfung. Dieser ist notwendig, um die Zahlungsfähigkeit bzw. -willigkeit eines potenziellen Kreditnehmers abschätzen und eine Entscheidung über die Kreditvergabe treffen zu können. Die traditionelle Bonitätsprüfung beruht auf persönlichen und subjektiven Einschätzungen des Kunden. Seit den Regelungen von Basel II gelten jedoch strengere Richtlinien, sodass die moderne Kreditwürdigkeitsprüfung in qualitative und quantitative Prüfungskategorien eingeteilt wurde. Hierzu wurden drei Verfahren vorgestellt. Durchläuft ein potenzieller Kreditnehmer das Kredit-Scoring, so wird ein Score-Wert ausgegeben, der zu einer dichotomen Aussage über die Kreditwürdigkeit führt. Das Kredit-Rating baut auf dem Scoring auf und ordnet die ermittelten Score-Werte einer Ratingklasse zu. Dabei können die Institutionen entweder auf externe Ratings von Ratingagenturen zugreifen oder – wenn sie eine Genehmigung dazu besitzen – die Ratings intern bestimmen. Das Scoring kommt eher bei Privat-, das Rating eher bei Firmenkunden zum Einsatz. Die Experten- und Fuzzy-Systeme bilden ein Verfahren, das besonders für die Auswertung qualitativer Daten geeignet ist. Hierbei werden Handlungs- und Entscheidungsregeln von Fachleuten in das Verfahren mittels Fuzzy-Logik integriert und verarbeitet. Als Ergebnis wird ein klar zuordenbarer Wert geliefert.

Der zweite Teil des dritten Kapitels beschäftigte sich mit der konkreten Berechnung des Kreditrisikos. Es wurden grundlegende Termini wie *EAD*, *LGD* und *RR* auf Basis eines Einzelkredits definiert und erläutert und anschließend drei Möglichkeiten zur Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit vorgestellt. Der a posteriori-Ansatz berechnet die Ausfallwahrschein-

lichkeit bedingt auf den Score-Wert des Kreditnehmers. Bei der logistischen Regression kann der Einfluss der Merkmalsausprägungen berücksichtigt werden. Schließlich lassen sich die Ausfallraten aus historischen Daten der Ratingagenturen ablesen und als Schätzer für die zukünftigen Ausfallwahrscheinlichkeiten heranziehen. Des Weiteren wurde gezeigt, dass der Verlust in einem Portfolio – unter bestimmten Annahmen – einer Binomialverteilung folgt. Außerdem wurde der erwartete und unerwartete Portfolioverlust als Erwartungswert und Varianz des zufälligen Verlustes ermittelt sowie die Ausfallkorrelation definiert. Um die Berechnung der Ausfallkorrelationen zu vereinfachen, wurde schließlich auf das Konzept der bedingten Unabhängigkeit eingegangen.

Kapitel 4 behandelte vier wichtige Klassen von Kreditrisikomodellen. Den Anfang machte die statistische Modellierung der Ausfallverteilung eines Portfolios. Hier wurde zunächst das homogene Bernoulli-Modell mit bedingt unabhängigen Ausfällen vorgestellt. Dabei wurden die Ausfallwahrscheinlichkeiten durch einen gemeinsamen Einflussfaktor als Zufallsvariable festgelegt, wobei dieser unterschiedlich auf die Einzelkredite wirkt. Das Bernoulli-Mischungsmodell lockerte die Homogenitätsannahme. Danach wurde das homogene Poisson-Modell – ebenfalls unter der Annahme bedingter Unabhängigkeit – diskutiert. Analog berücksichtigt das Poisson-Mischungsmodell heterogene Ausfallwahrscheinlichkeiten. Als dritten statistischen Ansatz wurde das Faktormodell von Vašíček präsentiert. Hierbei wurden Bonitätsvariablen in Abhängigkeit von einem systematischen und einem kreditspezifischen Faktor spezifiziert. Ein Ausfall findet statt, wenn die Bonitätsvariable eine Ausfallschranke unterschreitet. Berechnung der Verlustverteilung findet wieder unter der Homogenitätsannahme statt.

Eine große Klasse der Kreditrisikomodelle stellt das Unternehmenswertmodell von Merton dar. Diese gehört den strukturellen Modellen an. Auf einer optionspreistheoretischen Grundlage wurde die Entwicklung des Unternehmenswertes analysiert. Ein Ausfallereignis findet demnach statt, wenn der Wert des Unternehmens zum Periodenende unter einen festgelegten Rückzahlungsbetrag fällt. Der Ausfall wird also endogen modelliert und findet nicht überraschend statt, wodurch eine ökonomische Interpretation ermöglicht wird. Im Fall von Merton konnte das Einfaktormodell spezifiziert werden. Außerdem wurde in diesem Zusammenhang kurz auf das multivariate Modell sowie auf unterschiedliche Erweiterungen des Merton-Modells eingegangen.

Eine weitere bekannte Klasse bilden die zu der Klasse der Reduktionsmodelle angehörende Intensitätsmodelle. Hierbei wurde der Ausfall rein formal durch einen Sprungprozess definiert. Der Ausfallzeitpunkt wird demnach zufällig modelliert und tritt überraschend ein. Der Ausfall stellt also ein exogen induziertes Ereignis dar. Auch hier wurde auf die multivariate Version des Modells eingegangen. Als eine mögliche Erweiterung des Modells wurde die Idee vorgestellt, dass bestimmte Ereignisse nicht unmittelbar zu einem Ausfall führen, sondern nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit.

Die letzte vorgestellte Modellklasse bilden die ratingbasierten Modelle. Diese berücksichtigen nicht nur das Ausfallereignis, sondern auch die Möglichkeit der Bonitätsänderung, was zur Folge eine Ratingherauf- oder -herabstufung haben kann. Der Ratingprozess wurde dabei als ein diskreter Markovprozess definiert. Die Übergangswahrscheinlichkeiten wurden in einer Migrationsmatrix dargestellt.

Im letzten Kapitel wurden die Grundideen der drei gängigen Industriemodelle präsentiert. Das KMV-Modell modelliert das Kreditrisiko eines einzigen Kredits auf Basis der Theorie des Unternehmenswertmodells von Merton. Mit Hilfe der Distance to Default kann die Ausfallwahrscheinlichkeit berechnet werden.

Das Modell Credit Risk+ modelliert – unter einigen restriktiven Annahmen – Portfoliokreditrisiken mittels eines analytischen Ansatzes. Es gehört der Klasse der intensitätsbasierten Default Mode-Modelle an. Bei diesem Ansatz werden zunächst homogene Teilportfolios – geordnet nach dem Volumen der Exposures – gebildet und als unabhängig angenommen. Danach wird die Ausfallverteilung in jedem Teilportfolio bestimmt und schließlich die Ausfallverteilung des Gesamtportfolios. Dieses Verfahren liefert genaue Lösungen für die Portfolioverlustverteilung.

Credit Metrics hat das Ziel, die zukünftige Wertentwicklung eines Portfolios, auf Basis des Unternehmenswertmodells mit Hilfe einer Simulation zu modellieren. Damit wird die Betrachtung sehr großer Portfolios ermöglicht. Die simulationsbasierte Modellierung liefert keine genauen Lösungen, dafür aber sehr gute Approximationen an die reale Verlustverteilung. Bei diesem Modell werden sowohl Ratingänderungen als auch Ausfälle einbezogen. Es wird das Exposure und die mögliche Wertentwicklung für jeden Einzelkredit im Portfolio bestimmt. Um die Wertentwicklung des gesamten Portfolios zu ermitteln, müssen Korrelationen mit Hilfe eines Mehrfaktormodells berücksichtigt werden.

Schließlich wurden die wichtigsten Eigenschaften der drei beschriebenen Modelle in einer Tabelle gegenübergestellt.

## 6.2. Ausblick

Diese Arbeit hat einen Überblick über die bekanntesten Methoden im Bereich Kreditausfallrisiko gegeben. Die zwei großen Modellklassen bilden die berühmten Unternehmenswert- und Intensitätsmodelle. Es existieren aber auch weitere Modellklassen, wie z.B. *Hybridmodelle*, die die nützlichen Eigenschaften beider dieser Klassen vereinen. Hierzu wird auf Thabe, 2007, S. 26-35, verwiesen.

Einige Situationen aus der Praxis haben dazu geführt, dass die bekannten Modelle erweitert

wurden. Eine Fragestellung zum Beispiel wäre, wie sich übermäßig viele gemeinsame Ausfälle im Portfolio mit Hilfe eines Modells besser erfassen lassen, als mit beschriebenen Modellen. Damit haben sich Frey und McNeil, 2003, S. 59-92, beschäftigt. (Vgl. Albrecht und Maurer, 2008, S. 944)

Aber auch das Gegenteil bildet in Praxis eine aktuelle Problematik. Sogenannte *Low Default-Portfolios* sind Portfolios, in denen nur selten Ausfälle eintreten. Hier stellt sich ebenfalls die Frage nach einem geeigneten Modellierungsansatz, der die wenigen relevanten Informationen aus historischen Daten besser verarbeitet, als die bereits bekannten Modelle. Mit dieser Fragestellung hat sich unter anderem Kiefer, 2008, befasst.

# Anhang

## Anhang A

Unter Verwendung der Formeln (3.20) und (3.24) gilt

$$\begin{aligned} UL_P &= \sqrt{\text{Var}(L_P)} \\ &= \sqrt{\mathbb{E}((L_P - EL_P)^2)} \\ &= \sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n L_i - \sum_{i=1}^n EL_i\right)^2\right)} \\ &= \sqrt{\mathbb{E}\left(\left(L_1 + \sum_{i=2}^n L_i - EL_1 - \sum_{i=2}^n EL_i\right)^2\right)}. \end{aligned}$$

Anwendung der Minkowski-Ungleichung

$$\mathbb{E}(|X + Y|^k)^{1/k} \leq \mathbb{E}(|X|^k)^{1/k} + \mathbb{E}(|Y|^k)^{1/k}, \quad k \in [1, \infty)$$

mit  $X = L_1 - EL_1$  und  $Y = \sum_{i=2}^n L_i - \sum_{i=2}^n EL_i$  führt zu

$$\begin{aligned} UL_P &\leq \sqrt{\mathbb{E}((L_1 - EL_1)^2)} + \sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=2}^n L_i - \sum_{i=2}^n EL_i\right)^2\right)} \\ &= \underbrace{\sigma(L_1)}_{UL_1} + \sqrt{\text{Var}\left(\sum_{i=2}^n L_i - \sum_{i=2}^n EL_i\right)}. \end{aligned}$$

Wiederholte Anwendung der Minkowski-Ungleichung auf den zweiten Summanden resultiert in

$$UL_P \leq UL_1 + \dots + UL_n = \sum_{i=1}^n UL_i.$$

(Vgl. Lager, 2002, S. 385)

# Literaturverzeichnis

- Albrecht, P. und Maurer, R. (2008). *Investment- und Risikomanagement, Modelle, Methoden, Anwendungen*. 3. Auflage. Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart.
- Anderson, R. W., Sundaresan, S., und Tychon, P. (1996). Strategic analysis of contingent claims. *European Economic Review*, vol. 40, issue 3-5, S. 871-881.
- Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004). Internationale Konvergenz der Eigenkapitalmessung und der Eigenkapitalanforderungen. Technischer Bericht, Bank für Internationalen Zahlungsausgleich, Basel, Schweiz. <https://www.bis.org/publ/bcbs107ger.pdf>.
- Black, F. und Cox, J. C. (1976). Valuing Corporate Securities: Some Effects Of Bond Indenture Provisions. *The Journal of Finance*, vol. 31, No. 2, S. 351-367. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1540-6261.1976.tb01891.x>.
- Black, F. und Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, vol. 81, No. 3, S. 637-654. [https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall09/cos323/papers/black\\_scholes73.pdf](https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall09/cos323/papers/black_scholes73.pdf).
- Bolder, D. J. (2018). *Credit-Risk Modelling. Theoretical Foundations, Diagnostic Tools, Practical Examples, and Numerical Recipes in Python*. Springer International Publishing AG, Switzerland, eBook.
- Bundesgesetzblatt (2006). Verordnung über die angemessene Eigenmittelausstattung von Instituten, Institutgruppen und Finanzholding-Gruppen (Solvabilitätsverordnung - SolvV). Jahrgang 2006, Teil I, Nr. 61, Bundesministerium der Finanzen. [https://www.bgbl.de/xaver/bgbl/start.xav?start=//%5B@attr\\_id=%27bgbl106061.pdf%27%5D#\\_\\_bgbl\\_\\_%2F%2F%5B%40attr\\_id%3D%27bgbl106061.pdf%27%5D\\_\\_1636288672326](https://www.bgbl.de/xaver/bgbl/start.xav?start=//%5B@attr_id=%27bgbl106061.pdf%27%5D#__bgbl__%2F%2F%5B%40attr_id%3D%27bgbl106061.pdf%27%5D__1636288672326).
- Collin-Dufresne, P., Goldstein, R. S., und Martin, J. S. (2001). The Determinants of Credit Spread Changes. *The Journal of Finance*, vol. 56, issue 6, S. 2177-2207.
- Cremers, H. und Walzner, J. (2009). Modellierung des Kreditrisikos im Einwertpapierfall. Technischer Bericht, No. 126, Frankfurt School of Finance and Management, Frankfurt an Main. <https://www.econstor.eu/bitstream/10419/27932/1/608554480.PDF>.
- Daldrup, A. (2006). Rating, Ratingsysteme und ratingbasierte Kreditrisikoquantifizierung. Arbeitsbericht Nr. 17/2006, Institut für Wirtschaftsinformatik, Georg-August-Universität Göttingen. [http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/serien/lm/arbeitsberichte\\_wi2/2006\\_17.pdf](http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/serien/lm/arbeitsberichte_wi2/2006_17.pdf).

- de Servigny, A., Peretyatkin, V., Perraudin, W., und Renault, O. (2003). Portfolio Risk Tracker: Description of the Methodology. Technischer Bericht, Standard & Poor's Risk Solutions.
- de Servigny, A. und Renault, O. (2004). *Measuring and managing credit risk*. McGraw-Hill, USA.
- Die Bundesregierung (2015). Einheitliche europäische Bankenaufsicht. <https://www.bundesregierung.de/breg-de/themen/euro/finanzmarktregulierung/einheitliche-europaeische-bankenaufsicht> (abgerufen am 22. Juli 2021).
- Duden (o.D.). deskriptiv. <https://www.duden.de/rechtschreibung/deskriptiv> (abgerufen am 26. Oktober 2021).
- Finanzierung.com (o.D.). Basel I, Basel II, Basel III und Basel IV. <https://finanzierung.com/glossar/basel-i-basel-ii-basel-iii/> (abgerufen am 11. Oktober 2021).
- Finkelstein, V., Pan, G., Lardy, J.-P., Ta, T., und Tierney, J. (2002). CreditGrades. Technical Document, RiskMetrics Group. <https://www.msci.com/documents/10199/dd31bcce-6fe3-47b7-9fb7-10c4c8f750ba>.
- FitchRatings (o.D.). Rating Definitions, 02 Rating Scales. <https://www.fitchratings.com/products/rating-definitions> (abgerufen am 11. Juli 2021).
- Flach, J. und Rommelfanger, H. (o.D.). *Fuzzy Logic basiertes Bonitätsrating*. <https://docplayer.org/13141081-Fuzzy-logic-basiertes-bonitaetsrating-von-jochen-flach-heinrich-rommelfanger.html> (abgerufen am 17. Juli 2021).
- Frey, R. und McNeil, A. J. (2003). Dependent Defaults in Models of Portfolio Credit Risk. *Journal of Risk*, vol. 6, No. 1, S. 59-92.
- Geske, R. (1977). The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 12, issue 4, S. 541-552.
- Giesecke, K. (2003). A simple exponential model for dependent defaults. Technischer Bericht, Cornell University. <https://edfurman.info.yorku.ca/files/2020/10/Giesecke.pdf?x18676>.
- Glantz, M. (2003). *Managing Bank Risk: An introduction to Broad-Base Credit Engineering*. Academic Press, San Diego, USA.
- Grundke, P. (2002). *Modellierung und Bewertung von Kreditrisiken*. Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden, eBook Auszug. <https://link.springer.com/content/pdf/bfm%3A978-3-322-97847-9%2F1.pdf>.

- Hartmann-Wendels, T., Pfingsten, A., und Weber, M. (2019). *Bankbetriebslehre*. Springer Verlag, eBook Auszug. [https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-662-58290-9\\_8.pdf](https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-662-58290-9_8.pdf).
- Hull, J. (2011). *Risikomanagement, Banken, Versicherungen und andere Finanzinstitutionen*. 2. Auflage. Pearson Studium, München.
- Kakuk, C. (2019). *Die Abbildung des Kreditrisikos im Jahresabschluss der Kreditinstitute nach HGB und IFRS*. Nomos Verlag, eBook Vorschau. <https://books.google.de/books?id=7aS5DwAAQBAJ&pg=PA117&lpg=PA117&dq=wiedereinbringungsquote+definition&source=bl&ots=QgxLEBIEkl&sig=ACfU3U0kUnLBmY6V4jGKGBvtpWc7zHH5-g&hl=en&sa=X&ved=2ahUKEwiH7fKVgKvxAhVYt6QKHcSKAtcQ6AEwB3oEACQAw#v=twopage&q&f=true>.
- Kealhofer, S. und Bohn, J. R. (1993). Portfolio Management of Default Risk. Technischer Bericht, überarbeitet am 31.05.2001, KMV, San Francisco, California, USA. [https://mx.nthu.edu.tw/~jtyang/Teaching/Risk\\_management/Papers/Models/Portfolio%20Management%20of%20Default%20Risk.pdf](https://mx.nthu.edu.tw/~jtyang/Teaching/Risk_management/Papers/Models/Portfolio%20Management%20of%20Default%20Risk.pdf).
- Kiefer, N. M. (2008). Default Estimation for Low-Default Portfolios. Technischer Bericht, Cornell University. [https://kiefer.economics.cornell.edu/SmallPFinal3\\_08.pdf](https://kiefer.economics.cornell.edu/SmallPFinal3_08.pdf).
- Knapp, M. (2002). *Zeitabhängige Kreditportfoliomodelle*. Dissertation, 2001, Universität Regensburg. Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden.
- Longstaff, F. A. und Schwartz, E. S. (1995). A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt. *The Journal of Finance*, vol. 50, No. 3, S. 789-819.
- Läger, V. (2002). *Bewertung von Kreditrisiken und Kreditderivaten*. Dissertation, Universität Bamberg. Uhlenbruch Verlag, Bad Soden/Ts.
- Martin, M. R., Reitz, S., und Wehn, C. S. (2014). *Kreditderivate und Kreditrisikomodelle, eine mathematische Einführung*. 2. Auflage. Springer Spektrum, Wiesbaden.
- McNeil, A. J., Frey, R., und Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, New Jersey.
- Merton, R. C. (1974). On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *The Journal of Finance*, vol. 29, issue 2, S. 449-470. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1540-6261.1974.tb03058.x>.
- Molitor, M. (o.D.). Vergleich der Portfoliomodelle I. Seminar Portfoliokreditrisiko. [http://mammen.vwl.uni-mannheim.de/fileadmin/user\\_upload/mammen/Finanzstatistik/Materialien/Vergleich1\\_Molitor.pdf](http://mammen.vwl.uni-mannheim.de/fileadmin/user_upload/mammen/Finanzstatistik/Materialien/Vergleich1_Molitor.pdf).

- Moody's (o.D.). Rating Symbols and Definitions. <https://www.moody's.com/Pages/amr002002.aspx> (abgerufen am 11. Juli 2021).
- Moody's Analytics (o.D.). EDF Overview. Technischer Bericht. <https://www.moody'sanalytics.com/-/media/products/EDF-Expected-Default-Frequency-Overview.pdf>.
- Nissen, V. (2007). Ausgewählte Grundlagen der Fuzzy Set Theorie. Arbeitsbericht Nr. 2007-03, Technische Universität Ilmenau. [https://www.db-thueringen.de/servlets/MCRFileNodeServlet/dbt\\_derivate\\_00011797/IBzWI\\_2007-03.pdf](https://www.db-thueringen.de/servlets/MCRFileNodeServlet/dbt_derivate_00011797/IBzWI_2007-03.pdf).
- Rachev, S., Schwartz, E., und Khindanova, I. (2000). Stable Modeling of Credit Risk. Technischer Bericht, University of Karlsruhe, University of California, Los Angeles and University of California, Santa Barbara. <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.34.3236&rep=rep1&type=pdf>.
- Reichling, P., Bietke, D., und Henne, A. (2007). *Praxishandbuch Risikomanagement und Rating*. Gabler Verlag, Magdeburg, eBook, 2. Auflage.
- Rudolph, B., Hofmann, B., Schaber, A., und Schäfer, K. (2007). *Kreditrisikotransfer, Moderne Instrumente und Methoden*. Springer Verlag, Bayreuth, München, Zürich.
- Runge, M. (2004). *Kreditrisikomanagement in Banken unter besonderer Berücksichtigung ausgewählter Kreditrisikomodelle*. Dissertation, Technische Universität Ilmenau, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften. [https://www.db-thueringen.de/servlets/MCRFileNodeServlet/dbt\\_derivate\\_00007406/ilm1-2004000235.pdf](https://www.db-thueringen.de/servlets/MCRFileNodeServlet/dbt_derivate_00007406/ilm1-2004000235.pdf).
- S&P Global Ratings (2021). Default, Transition, and Recovery: 2020 Annual Global Corporate Default And Rating Transition Study. Technischer Bericht. <https://www.maalot.co.il/Publications/TS20210408160139.PDF>.
- S&P Global Ratings (o.D.). Intro to Credit Ratings. <https://www.spglobal.com/ratings/en/about/intro-to-credit-ratings> (abgerufen am 11. Juli 2021).
- Starck, M. O. und Trautmann, S. (2006). Reduktionsmodelle zur Kreditderivatebewertung. In *Kapitalmarkt, Unternehmensfinanzierung und rationale Entscheidungen*, S. 473-492. Springer Verlag, Mainz. [https://www.finance.uni-mainz.de/files/2020/08/starck\\_trautmann\\_2006\\_Reduktionsmodelle\\_Kreditderivatebewertung.pdf](https://www.finance.uni-mainz.de/files/2020/08/starck_trautmann_2006_Reduktionsmodelle_Kreditderivatebewertung.pdf).
- Thabe, T. (2007). *Bewertung von Kreditrisiko bei unvollständiger Information. Zahlungsfähigkeit, optimale Kapitalstruktur und Agencykosten*. Dissertation, Universität Mannheim. Deutscher Universitäts-Verlag, eBook.

- Unabhängiges Landeszentrum für Datenschutz Schleswig-Holstein (2005). *Scoringsysteme zur Beurteilung der Kreditwürdigkeit - Chancen und Risiken für Verbraucher*. Studie im Auftrag des Bundesministeriums für Verbraucherschutz, Ernährung und Landwirtschaft. <https://www.datenschutzzentrum.de/uploads/projekte/scoring/2005-studie-scoringsysteme-uld-bmvel.pdf>.
- Vasicek, O. A. (1987). Probability of Loss on Loan Portfolio. Technischer bericht, KMV Corporation, San Francisco, California, USA.
- Wagner, F. und Rief, W. (o.D.). Emissionsrating. <https://www.versicherungsmagazin.de/lexikon/emissionsrating-1945086.html> (abgerufen am 6. Juni 2021).
- Werner, A. (2018). Kreditwürdigkeitsprüfung. <https://www.controllingportal.de/Fachinfo/Rating/Kreditwuerdigkeitspruefung.html> (abgerufen am 2. Juni 2021).
- Wiktionary (2020). präskripriv. <https://de.wiktionary.org/wiki/praeskriptiv> (abgerufen am 26. Oktober 2021).
- Wilson, T. C. (1997a). Measuring and managing credit portfolio risk. Technischer Bericht, McKinsey and Company.
- Wilson, T. C. (1997b). Portfolio credit risk (I). *Risk Magazine*, vol. 10, No. 9, S. 111-117. <https://wolfccb.com/wp-content/uploads/2019/02/Wilson-T.-C.-1997.-Portfolio-Credit-Risk-Part-I-Risk-Magazine-Vol-10-No.-9.pdf>.
- Wilson, T. C. (1997c). Portfolio credit risk (II). *Risk Magazine*, vol. 10, No. 10, S. 56-62. <https://wolfccb.com/wp-content/uploads/2019/02/Wilson-T.-C.-1997.-Portfolio-Credit-Risk-Part-II-Risk-Magazine-Vol-10-No.-10.pdf>.
- Zhou, C. (2001a). An Analysis of Default Correlations and Multiple Defaults. *The Review of Financial Studies*, vol. 14, issue 2, S. 555-576. [http://www.planchet.net/EXT/ISFA/1226.nsf/9c8e3fd4d8874d60c1257052003eced6/630841a5a97c0753c12575ef0040ab77/\\$FILE/zhou\\_analysis%20of%20default%20correlations.pdf](http://www.planchet.net/EXT/ISFA/1226.nsf/9c8e3fd4d8874d60c1257052003eced6/630841a5a97c0753c12575ef0040ab77/$FILE/zhou_analysis%20of%20default%20correlations.pdf).
- Zhou, C. (2001b). The term structure of credit spreads with jump risk. *Journal of Banking and Finance*, vol. 25, S. 2015-2040. <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.139.5802&rep=rep1&type=pdf>.

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Masterarbeit selbstständig und unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben. Sowohl inhaltlich als auch wörtlich entnommene Inhalte wurden als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in dieser oder vergleichbarer Form noch keinem anderem Prüfungsgremium vorgelegen.

München, 27.11.2021  
Ort, Datum

Leneschmidt  
Unterschrift