

Klausurtag 3

Zusatzmaterial für Multiplikatorinnen und Multiplikatoren

Unterrichtsstunde:

Einführung direkt Proportionale Zusammenhänge

Anwendungsbereich im Rahmen der Fortbildung:

Klausurtag 3:

- > *Präsentation Leitfragen nutzen*: – Arbeitsauftrag für die Lerngemeinschaft
- > *Präsentation Verstehenselemente einbinden*: – Arbeitsauftrag für die Lerngemeinschaft

Ergänzende Materialien für die Lehrkräfte

- > Unterrichtsverlaufsskizze inklusive Hefteintrag und Materialien
https://epub.ub.uni-muenchen.de/94261/1/Beispiel_UE-Proportionalitaet.docx
- > Arbeitsauftrag für die Lerngemeinschaft im Themenblock Leitfragen nutzen
https://epub.ub.uni-muenchen.de/94319/1/3_Mo6_Leitfragen-nutzen_Aufg.odt
- > Arbeitsauftrag für die Lerngemeinschaft im Themenblock Verstehenselemente einbinden
https://epub.ub.uni-muenchen.de/94318/1/3_Mo7a_Verstehenselemente-einbinden_Aufg.odt

Der Rahmen	
Inhalt	> Einführung des Begriffs des direkt proportionalen Zusammenhangs
Verortung im Lehrplan	<ul style="list-style-type: none"> > MS: 8.8: – Funktionale Zusammenhänge > MS M 8.8: – Funktionale Zusammenhänge > RS I: 7.7 – Proportionalitäten > RS II/III: 7.5 – Proportionalitäten > Gym: 8.2 – Lineare Funktionen
Voraussetzungen	<ul style="list-style-type: none"> > Die Schülerinnen und Schüler kennen die Dreisatzstrategie zur Lösung einfacher Sachaufgaben und können diese anwenden. > Die Schülerinnen und Schüler Zuordnungsvorschriften mit Termen und Variablen darstellen und diese als Wertetabelle und (ggf. als einzelne Wertepaare) im Koordinatensystem darstellen.
Ziele	<p>Die Schülerinnen und Schüler ...</p> <ul style="list-style-type: none"> > ...definieren den Begriff „Proportionalität“. > ...nennen Eigenschaften proportionaler Zusammenhänge. > ...nennen Zusammenhänge, die proportional sind, und solche die nicht proportional sind. > ...begründen anhand von Eigenschaften proportionaler Zusammenhänge, warum bestimmte Zusammenhänge proportional sind bzw. nicht proportional sind.
Leitfrage	> Der Dreisatz liefert bei vielen Zusammenhängen richtige Ergebnisse, bei anderen Zusammenhängen aber nicht. Was unterscheidet Zusammenhänge, bei denen die Dreisatzstrategie zum richtigen Ergebnis führt von solchen, wo sie nicht zum richtigen Ergebnis führt?
Material & Medien	<ul style="list-style-type: none"> > Aufgabekärtchen (s. Seite 4 + 5) > Arbeitsblatt (s. Seite 7)

Überblick über die Stunde	
Hinführung	> Die Schülerinnen und Schüler erkennen anhand unterschiedlicher Aufgaben, dass die Dreisatzstrategie nur für bestimmte funktionale Zusammenhänge anwendbar ist.
Erarbeitung	> Die Schülerinnen und Schüler überprüfen anhand der Beispiele, bei denen der Dreisatz funktioniert, vorgegebene Aussagen und erarbeiten sich so charakterisierende Eigenschaften für direkt proportionale Zusammenhänge.
Sicherung	> Die Schülerinnen und Schüler sichern ihre Ergebnisse in einem Hefteintrag und illustrieren die Eigenschaften anhand einer Wertetabelle.
Vertiefung / Transfer	<ul style="list-style-type: none"> > Die Schülerinnen und Schüler überprüfen weitere Zusammenhänge anhand der gefundenen Eigenschaften auf direkte Proportionalität. > Sie begründen Ihre Entscheidung und illustrieren die dabei genutzten Eigenschaft anhand einer jeweils geeigneten Darstellungsform.

Der Unterrichtsverlauf

Hinführung	Unterrichtssituation & Inhalt 1.) Wiederholung der Dreisatzrechnung anhand eines Beispiels. Didaktischer Kommentar: Dreisatzstrategie könnte auch in der Stunde zuvor ausführlich wiederholt werden.	Lehreraktivität 1.) Wiederholt Dreisatzstrategie anhand des Beispiels. 2.) <i>Untersucht, ob ihr den Dreisatz bei diesen Aufgaben anwenden könnt und ob die Rechnung zum richtigen Ergebnis führt.</i> 3.) <i>Bei welchen Aufgaben führt der Dreisatz zu einer richtigen Lösung?</i>
	2.) Jedes Schülerpaar erhält zwei Aufgabekärtchen mit beliebigem Kontext. <i>Kärtchen 1:</i> direkt proportionaler Zusammenhang <i>Kärtchen 2:</i> nicht direkt proportionaler Zusammenhang 3.) Zusammentragen der Ergebnisse.	Schüleraktivität 1.) Erklären ggf. das Vorgehen der Lehrkraft. 2.) Jedes Schülerpaar versucht mithilfe des Dreisatzes die Aufgabenstellungen zu lösen. 3.) Schildern Ihre Ergebnisse und Probleme bei der Lösungsbestimmung.
	Medien / Material Aufgabekärtchen für die Schülerpaare mit jeweils unterschiedlichen Aufgaben. Rechnung auf der Rückseite (<i>s. Materialien S. 5/6</i>).	



Leitfrage	Leitfrage formulieren: <i>Der Dreisatz liefert bei vielen Zusammenhängen richtige Ergebnisse, bei anderen Zusammenhängen aber nicht. Was unterscheidet Zusammenhänge, bei denen die Dreisatzstrategie zum richtigen führt von solchen, wo sie nicht zum richtigen Ergebnis führt?</i>
-----------	--



Erarbeitung	Unterrichtssituation & Inhalt Begriffsbestimmung „proportional“: Zusammenhänge, bei denen der Dreisatz gilt, werden als proportional bezeichnet. Anhand eines AB: Erarbeiten, welche Eigenschaften bei Zusammenhängen gelten müssen, bei denen der Dreisatz anwendbar ist.	Lehreraktivität <i>Prüft, ob die Aussagen auf eure Situationen zutreffen.</i>
	Didaktischer Kommentar: Es wird mit den Kontexten aus der Hinführung gearbeitet, die bereits als proportional/nicht-proportional identifiziert wurden. Es wurden bewusst nicht proportionale Beispiele ausgewählt, die sehr unterschiedliche Eigenschaften haben. Erst beim Vergleich aller Beispiele wird sichtbar, dass die Aussagen $2 + 4 + 5$ bei proportionalen Zusammenhängen immer zutreffen.	Schüleraktivität Bearbeiten das AB und überprüfen die Aussagen mithilfe der vorgegebenen Wertetabellen.
Medien / Material AB mit jeweils zwei Kontexten inklusive der Wertetabellen und den Aussagen (<i>s. Materialien S. 7</i>).		



Sicherung	<p>Unterrichtssituation & Inhalt Aussagen werden an der Tafel in zwei Kategorien gesammelt.</p> <ul style="list-style-type: none"> > Trifft nur für Beispiele zu, für die der Dreisatz gilt. (Aussage 2 + 4 + 5) > Trifft nicht nur für Beispiele zu, für die der Dreisatz gilt. (Aussage 1 + 3) <p>Hieraus wird gemeinsam abgeleitet welche Aussagen für Kontexte charakteristisch sind, für die der Dreisatz gilt.</p> <ul style="list-style-type: none"> > Aussagen 2 + 4 + 5 sind charakterisierende Bedingungen > Aussage 1 + 3 sind nicht charakterisierend. <p>Zusammenfassen der Ergebnisse im <i>Hefteintrag</i> (siehe S. 8)</p>	<p>Lehreraktivität <i>Beschreibt, was euch auffällt, wenn ihr eure Aussagen den zwei Kategorien zuordnet. Zusammentragen und Sortieren der Schülerantworten.</i></p> <p><i>Impuls zum Weiterdenken:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> > <i>Gelten Aussage 1 + 3 bei allen proportionalen Zusammenhängen? Findet unterschiedliche Beispiele.</i>
	<p>Schüleraktivität</p> <ul style="list-style-type: none"> > Präsentieren ihre Ergebnisse und sortieren die Aussagen an den entsprechenden Stellen an der Tafel. > Leiten aus den Aussagen, die nur für die proportionalen Beispiele zutreffen, eine Charakterisierung für proportionale Zusammenhänge ab. <p>Vervollständigen den Hefteintrag in Abhängigkeit ihrer Beispiele, indem sie Faktoren angeben und die Quotienten bestimmen.</p>	
<p>Medien / Material AB (s. <i>Materialien S. 7</i>) Die 5 Aussagen vom AB in groß zum Anheften an der Tafel.</p>		



Rückbezug zur Leitfrage	<p>Gilt für Zusammenhänge:</p> <ul style="list-style-type: none"> > Multipliziert man einen Wert mit einer Zahl und ergibt sich der andere Wert ebenfalls durch Multiplikation mit der gleichen Zahl, > Dividiert man Wertepaare miteinander und erhält immer das gleiche Ergebnis, > Stellen die Wertepaare eine Ursprungsgerade dar, so spricht man von einem proportionalen Zusammenhang.
--------------------------------	---



Vertiefung/ Transfer	<p>Unterrichtssituation & Inhalt Anwendung der erarbeiteten Eigenschaften:</p> <ul style="list-style-type: none"> > Untersuchen von Zusammenhängen auf Proportionalität. > Begründen anhand der erarbeiteten Eigenschaften. > Erklären der Eigenschaften anhand der Beispiele in unterschiedlichen Darstellungsformen (Wertetabelle, Kontext, Zuordnungsvorschrift, Term). 	<p>Lehreraktivität Unterstützt Schüleraktivität.</p>
	<p>Schüleraktivität Bestimmen und begründen bei Beispielen in unterschiedlichen Darstellungsformen, ob es sich um proportionale Zusammenhänge handelt.</p>	
<p>Medien / Material Übungsaufgaben (<i>nicht ausgearbeitet</i>)</p>		

Materialien – Hinführung (Vorderseite Aufgabenkärtchen)

Doppelseitig ausdrucken

Max bezahlt für drei Kugeln Eis 4,80€. Franz möchte bloß zwei Kugeln. Wie viel muss sie bezahlen?

Die Raumstation ISS braucht für zwei Umrundungen der Erde 3 Stunden. Wie oft umrundet sie die Erde an einem Tag?

Oma Anna kocht Marmelade ein. Für 500 g Obst werden 250 g Gelierzucker benötigt. Sie hat insgesamt 800g Obst gesammelt. Wie viel Gelierzucker braucht Oma Anna?

Papa Walter hat sich einen neuen schnelleren Drucker gekauft. Zum Test hat er 10 Seiten in 8 Sekunden gedruckt. Wie viele Seiten schafft der Drucker in einer Minute?

Elektroroller verlangen eine Entsperrgebühr von 1 € und haben dann eine Benutzungsgebühr von 20 ct pro Minute. Nach einer Dauer von 5 Minuten habe ich eine Rechnung von 2€ erhalten. Sebastian ist eine längere Strecke gefahren und war 8 Minuten unterwegs. Wie viel hat er bezahlt?

Eine quadratische Schokolade hat 9 Stückchen bei 3 Reihen. Die große Version hat 5 Reihen. Wie viele Schokoladenstückchen hat die große Version?

Der Zauberwürfel hat jeweils 3 Reihen pro Farbe und somit 54 farbige Flächen. Wie viele Flächen hat der größere Zauberwürfel mit 9 Reihen.

In der Baufirma Huber benötigen drei Bauarbeiter 7,5 Stunden, um eine Mauer hochzuziehen. Wie viel Zeit benötigen 5 Arbeiter für diese Tätigkeit?

Die Materialien – Hinführung (Rückseite Aufgabenkärtchen)

Doppelseitig ausdrucken

3 Kugeln	≙	4,80€
	≙	
2 Kugeln	≙	

Der Dreisatz ist sinnvoll / nicht sinnvoll, weil

3 h	≙	2 Umrundung
	≙	
24 h	≙	

Der Dreisatz ist sinnvoll / nicht sinnvoll, weil

500 g Obst	≙	250 g Zucker
	≙	
800 g Obst	≙	

Der Dreisatz ist sinnvoll / nicht sinnvoll, weil

8 Sek.	≙	10 Seiten
	≙	
60 Sek.	≙	

Der Dreisatz ist sinnvoll / nicht sinnvoll, weil

5 Minuten	≙	2€
	≙	
8 Minuten	≙	

Der Dreisatz ist sinnvoll / nicht sinnvoll, weil

3 Reihen	≙	9 Stücke
	≙	
5 Reihen	≙	

Der Dreisatz ist sinnvoll / nicht sinnvoll, weil

3 Reihen	≙	54 Flächen
	≙	
9 Reihen	≙	

Der Dreisatz ist sinnvoll / nicht sinnvoll, weil

3 Arbeiter	≙	7,5 h
	≙	
5 Arbeiter	≙	

Der Dreisatz ist sinnvoll / nicht sinnvoll, weil

Die Materialien – Erarbeitung (Arbeitsblatt)

Exemplarische Version. Arbeitsblatt für die anderen Beispiele auf analoge Weise anpassen.

Zusammenhänge auf Proportionalität überprüfen

Max bezahlt für drei Kugeln Eis 4,80€. Franz möchte bloß zwei Kugeln. Wie viel muss sie bezahlen?

Elektroroller verlangen eine Entsperrgebühr und haben dann eine Benutzungsgebühr pro Minute. Nach einer Dauer von 5 Minuten habe ich eine Rechnung von 2€ erhalten. Sebastian ist eine längere Strecke gefahren und war 8 Minuten unterwegs. Wie viel hat er bezahlt?

Kugeln	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preis in €	0	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	9,6	11,2	12,8	14,4	16,0

Dauer in Min.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preis in €	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0

Aufgabe:

Überprüft an den beiden Beispielen mithilfe der Wertetabellen, welche der Aussagen auf die beiden Kontexte zutreffen.

1. Wenn der eine Wert (Anzahl der Kugeln / Dauer in Min.) größer wird, dann steigt der andere Wert (Preis in € / Preis in €) ebenfalls an.
2. Multipliziere ich den einen Wert mit einer Zahl, dann wird der andere Wert ebenfalls mit der gleichen Zahl multipliziert.
3. Der Wert bei 0 ist ebenfalls 0.
4. Dividiere ich die Werte innerhalb einer Spalte, dann erhält man immer den gleichen Wert.
5. Wenn ich die Werte in ein Koordinatensystem eintrage und verbinde, entsteht eine Gerade, die durch den Ursprung geht.

Der Hefteintrag

Zusammenhänge untersuchen

Frage: Wann liefert der Dreisatz eine richtige Lösung?

Definition: Zusammenhänge, bei denen der Dreisatz gilt, werden als proportional bezeichnet.

[Anm.: Hier beispielhaft ausgewählt. Die SchülerInnen könnten z.B. ihre jeweiligen Beispiele einkleben.]

Oma Anna kocht Marmelade ein. Für 500 g Obst werden 250 g Gelierzucker benötigt. Sie hat insgesamt 800g Obst gesammelt. Wie viel Gelierzucker braucht Oma Anna?

Der Dreisatz ist anwendbar!

Eine quadratische Schokolade hat 9 Stückchen bei 3 Reihen. Die große Version hat 5 Reihen. Wie viele Schokoladenstückchen hat die große Version?

Der Dreisatz ist **nicht** anwendbar!

Merke:

Zusammenhänge sind proportional, wenn...

- > man die beide Zahlen eines Wertepaars mit einer beliebigen Zahl multiplizieren kann und damit immer ein „richtiges“ Wertepaar erhält.
- > man stets das gleiche Ergebnisse erhält, wenn man zusammengehörige Wertepaare durcheinander dividiert.
- > die Wertepaare als Punkte im Koordinatensystem eine Ursprungsgerade darstellen.

[Ist ein Zusammenhang proportional, dann ist der Wert bei 0 immer 0.]

[Anm.: SchülerInnen vervollständigen die Tabelle in Abhängigkeit ihres eigenen Beispiels.]

		$\cdot 4$		$\cdot 3$	
Obst	0 g	200 g	800 g	1000 g	3000 g
Gelierzucker	0 g	100 g	400 g	500 g	1500 g
Quotient		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Aktivität 1: Leitfragen nutzen



- > Integrieren sie ein digitales Medium so an einer der folgenden Stellen der Unterrichtseinheit, dass es einen möglichst großen Mehrwert bringt:
- Hinführen auf die Leitfrage (Hinführung).
 - Prüfen der Vermutungen (Erarbeitung).
 - Rückbezug auf die Leitfrage (Sicherung).
 - Transferfrage (Vertiefung).

Potenzial/ Mehrwert

<p>Auf die Leitfrage hinführen</p>	<p>Nutzen eines GeoGebra-Sheets, dass für jeden Kontext die Berechnung der Lernenden prüft und insbesondere Feedback gibt, wenn nicht der Dreisatz angewendet, sondern die Aufgabe auf anderem Weg korrekt gelöst wurde. Außerdem können Scaffolds und Selbstkontrollmöglichkeiten eingebunden werden.</p> <p>https://epub.ub.uni-muenchen.de/94239/1/Beispiel_UE-Proportionalitaet_Hinfuehrung.html</p>	<p>Rückmeldung über Richtigkeit der Lösung und Hinweise zum Lösungsweg (Feedback geben).</p>
<p>Vermutungen prüfen</p>	<p><i>Alternative 1:</i> GeoGebra-Sheet mit Rückmeldefunktion über Richtigkeit der Aussagen. Ergebnisse können in einer Tabelle notiert werden, um ein Muster in hinreichenden, notwendigen oder nicht geltenden Aussagen zu entdecken.</p> <p>https://epub.ub.uni-muenchen.de/94238/1/Beispiel_UE-Proportionalitaet_Erarbeitung.html</p> <p><i>Alternative 2:</i> Nutzen eines Tabellenkalkulationsblatts, mit dem die Lernenden selbst gezielt Werte generieren können, um ihre Vermutungen zu prüfen (anstelle einer vorgefertigten Wertetabelle).</p>	<p>Rückmeldung über Richtigkeit der Lösung und visuelle Unterstützung, um Zusammenhänge in den Aussagen zu erkennen.</p> <p>Technische Tätigkeiten entlasten</p>
<p>auf die Leitfrage rückbeziehen</p>	<p>Dies kann bspw. durch Alternative 1 von „Vermutungen prüfen“ bearbeitet werden, indem die Einträge der unterschiedlichen Kontexte in der unteren Tabelle analysiert werden.</p>	

<p>Transferfrage beantworten</p>	<p>Einsetzen von (stummen) Animationen als Lösungsbeispiel, in der ein Funktionsterm, eine Zuordnungsvorschrift, eine Wertetabelle oder ein Kontext auf Proportionalität anhand von jeweils einer Eigenschaft geprüft wird.</p> <p>Einfordern von Erklärungen (z. B. durch Vertonen). PowerPoint-Vorlage mit jeweils einer Aufgabe pro Seite. SchülerInnen sollen die jeweiligen Seiten dann vertonen und begründen, warum Proportionalität vorliegt oder nicht.</p>	<p>Argumentation, Kommunikation und Kooperation anregen.</p>
--------------------------------------	--	--

Aktivität 2: Verstehenselemente einbinden



- > Verstehenselemente sinnvoll ausgewählt?
- > Verstehenselemente adäquat eingebunden?
- > Zentrale Verstehenselemente zusammengefasst?

Verstehenselemente sinnvoll ausgewählt?

Formulieren Sie die behandelten Verstehenselemente.

- > Proportionale Zusammenhänge sind die, bei denen der Dreisatz anwendbar ist.
- > Es gibt bestimmte Eigenschaften, anhand derer man proportionale Zusammenhänge erkennen kann (charakterisierende Eigenschaften, s. a. [Folie Nummer 10](#)):
 - o Vervielfachungseigenschaft,
 - o Quotientengleichheit,
 - o Graph in Form einer Ursprungsgerade.
- > Proportionale Zusammenhänge haben weitere Eigenschaften, die auch auf andere Funktionstypen zutreffen können.
 - o Der Wert an der Stelle 0 ist immer 0.
 - o Proportionale Zusammenhänge sind entweder durchgehend steigend, durchgehend fallend (oder konstant gleich 0).

Überlegen Sie, welche Verstehenselemente fehlen, welche überflüssig sind.

- > Wichtig wäre ggf. noch, wird jedoch in dieser Unterrichtseinheit zunächst nur untergeordnet behandelt:
Proportionale Zusammenhänge haben als Funktionsterm, Graph, Tabelle ganz bestimmte Erscheinungsformen.
- > An dieser Stelle (noch) nicht relevant: Proportionale Funktionen haben Funktionsterme der Form $f(x) = k \cdot x$, für eine feste Zahl k (Proportionalitätsfaktor).

Verstehenselemente adäquat eingebunden?

Überlegen Sie, *wie* sichergestellt wird, dass die Lernenden die Verstehenselemente durchdringen.

- > Die Dreisatzstrategie wird bei unterschiedlichen Zusammenhängen angewendet. Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass es Aufgaben gibt, bei denen diese Strategie nicht zum Erfolg führt. Dementsprechend werden Zusammenhänge, bei denen die Dreisatzstrategie anwendbar ist, als proportional definiert.
- > Die Aktivität in der Erarbeitungsphase zielt bewusst darauf ab die charakterisierenden Eigenschaften proportionaler Zusammenhänge herauszuarbeiten und von weiteren Eigenschaften abzugrenzen. Durch den Vergleich aller Beispiele wird erkennbar, dass es Bedingungen gibt, die ausschließlich für die Beispiele zutreffen, bei denen die Dreisatzstrategie anwendbar ist, also charakterisierende Eigenschaften sind. Ebenso gibt es aber auch Eigenschaften, die stets bei proportionalen Zusammenhängen gelten, aber nicht ausschließlich. Schließlich gibt es aber auch Aussagen, die im Allgemeinen nicht für proportionale Zusammenhänge zutreffen.

Überlegen Sie, anhand welcher Aktivitäten man den Lernenden die einzelnen Verstehenselemente zugänglich machen könnten.

- > In dieser Unterrichtsstunde wird vor allem auf Eigenschaften proportionaler Zusammenhänge eingegangen. Die unterschiedlichen Darstellungsformen haben eine untergeordnete Rolle. Diese werden lediglich in der Vertiefungsphase aufgegriffen, jedoch noch nicht systematisch herausgearbeitet, wie die einzelnen Eigenschaften in den verschiedenen Darstellungsformen sichtbar werden. Zusammenhänge zwischen den Darstellungsformen, als auch spezifische Eigenschaften sollten in einer der folgenden Unterrichtsstunden thematisiert werden.

Zentrale Verstehenselemente zusammengefasst?

Überlegen Sie, ob und wie eine Zusammenfassung, den Lernenden eine Orientierung zu ihrem eigenen Verständnis geben kann.

- > Die Schülerinnen und Schüler halten die Ergebnisse ihrer jeweiligen Untersuchungen fest. Die charakterisierenden Eigenschaften, die in der Erarbeitungsphase gesammelt werden, müssen durch die Schülerinnen und Schüler im Hefteintrag am eigenen Beispiel gesichert werden.
- > Diese Zusammenfassung gibt eine klare Antwort auf die Leitfrage der Unterrichtseinheit.

Überlegen Sie, welche Verstehenselemente man auswählen würde und wie man eine Zusammenfassung gestalten könnte.

- > Die Auswahl ist für diese Unterrichtseinheit auf charakterisierende und weitere Eigenschaften von Proportionalen Zusammenhängen gefallen. Dafür spricht, dass diese anhand bekannter Darstellungen und Beispiele zugänglich gemacht werden können.
- > Wie diese Eigenschaften proportionaler Zusammenhänge sich in den Darstellungsformen Graph, Wertetabelle, Term, sowohl darstellen, als auch erkennen lassen, sollte in einer der nächsten Unterrichtsstunden noch thematisiert werden.