

# Klausurtag 2 / 4

## Zusatzmaterial

### für Multiplikatorinnen und Multiplikatoren

#### Potentialanalyse – Steigungsdreiecke verwenden

Der Rahmen	
Inhalt	Steigungsdreiecke verwenden
Anwendungsbereich im Rahmen Fortbildung	<i>Klausurtag 2:</i> Potentiale digitaler Medien – Zusammenhänge visualisieren <i>Klausurtag 4:</i> Tiefe Verarbeitung anregen – Lösungswege vergleichen  <i>ICAP:</i> Konstruktiv (C) <i>SAMR:</i> Modifikation (M)
Verortung im Lehrplan	<i>MS: M-Zweig 9.8</i> – Funktionale Zusammenhänge <i>RS I: 8.6</i> – Funktionen <i>RS II/III: 8.5</i> – Funktionen <i>GYM: 8.2</i> – Lineare Funktionen
Voraussetzungen	Lineare Funktionen der Form $f(x) = m \cdot x + t$ mit deren Darstellung als Graph. Bedeutung des Parameters $m$ in Term und Graph und Interpretation mit Hilfe des Steigungsdreiecks. Ähnlichkeit und zentrische Streckung werden nicht zwingend vorausgesetzt.
Ziele	Die Schülerinnen und Schüler kennen Strategien zur Bestimmung der Steigung des Graphen einer linearen Funktion mit Hilfe eines Steigungsdreiecks und können diese auf ihre Eignung hin vergleichen. Die Schülerinnen und Schüler begründen, warum die Steigung unabhängig von der Wahl des Steigungsdreiecks ist.
Aufträge	- Zwei Strategien analysieren, die bei der Bestimmung der Steigung je nach Situation Vor- und Nachteile haben.

Medien & Werkzeuge	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Zwei spezifische, unterschiedliche Strategien zur Bestimmung von Steigungen anhand des Funktionsgraphen.</li> <li>- Dynamisches GeoGebra-Sheet, in dem beide Strategien am Graphen dargestellt werden können.</li> </ul>
Angestrebte Lernaktivitäten	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Analyse der Strategien nach fachlichen Kriterien anhand möglichst verschiedener Funktionsgraphen.</li> <li>- Herstellen oder Analyse eines geometrischen Zusammenhangs zwischen den beiden Steigungsdreiecken, und Nutzung zur Argumentation für die Gleichheit der beiden Steigungen.</li> <li>- Ggf. Wiederholung des erlernten Vorgehens zur Bestimmung der Steigung anhand der dynamischen Visualisierung von Funktionsgraph und Berechnung.</li> </ul>
Einbettung in den Unterricht	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ein mögliches Vorgehen ist bereits erarbeitet. Ziel der Aktivität ist eine tiefere Verarbeitung und Vernetzung dieses Vorgehens.</li> <li>- Die beiden Strategien (und ggf. weitere) können später beim Ablesen von Steigungen aus Funktionsgraphen erneut aufgegriffen und flexibel genutzt werden.</li> </ul>
Prozessunterstützung	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Schwierigkeiten in Bezug auf das Verfahren selbst anhand der einblendbaren (verknüpften) Darstellung der Berechnung bearbeiten.</li> <li>- Hinweise zum Herstellen von Zusammenhängen zwischen verschiedenen Steigungsdreiecken (s.u.).</li> <li>- Bei einseitiger Einschätzung der Strategien ggf. andere Perspektive einbringen.</li> <li>- Hinweise zur Exploration einer Bandbreite von Funktionstermen, um Vor- und Nachteile der Strategien erkennbar zu machen.</li> <li>- Ggf. Argumentation zunächst gezielt auf Spezialfälle einschränken (s.u.), um einen produktiven Einstieg zu ermöglichen.</li> <li>- Ggf. zunächst Teilargumentationen einfordern, später Teilargumentationen ergänzen lassen (s.u.).</li> </ul>
Lösungen beobachten	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Interessante Graphen zur Kontrastierung der Strategien für die Diskussion vormerken.</li> <li>- Teilargumentationen, die verschiedene Teile der Argumentation abdecken für die Diskussion vormerken.</li> <li>- Strukturell unterschiedliche Argumentationen (s.u.) vormerken.</li> </ul>
Diskussion von Lösungen	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Vor- und Nachteilliste zusammentragen und Vor- und Nachteile anhand von beispielhaften Graphen illustrieren.</li> <li>- Ggf. zunächst Teilargumentationen für die Begründung diskutieren und dann durch ergänzende Beiträge erweitern.</li> </ul>

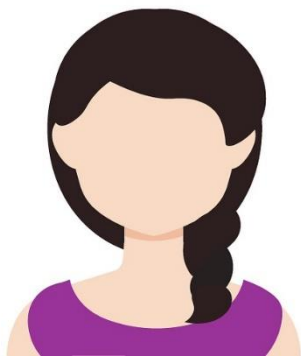
## Materialien

Analoge Umsetzung:	Arbeitsblatt mit Zeichnung einer linearen Funktion mit zwei eingezeichneten Steigungsdreiecken.
Digitale Umsetzung:	Arbeitsblatt mit Aufgabenstellung und Link zum GeoGebra-Sheet. GeoGebra-Sheet mit der Möglichkeit die Steigungsdreiecke individuell zu verändern und Einfluss auf den Graphen der linearen Funktion zu nehmen.  <a href="https://epub.ub.uni-muenchen.de/94236/1/Beispiel_Steigungsdreiecke_verwenden.html">https://epub.ub.uni-muenchen.de/94236/1/Beispiel_Steigungsdreiecke_verwenden.html</a>

## Arbeitsaufträge

### Digitale Umsetzung

Clara und Petra diskutieren, wie man die Steigung einer linearen Funktion bestimmen kann, wenn man ihren Graphen vorgegeben hat.



**Clara:** „Ich zeichne das Steigungsdreieck immer so, dass die horizontale Seite die Länge 1 hat. Das macht mir die Sache viel einfacher.“

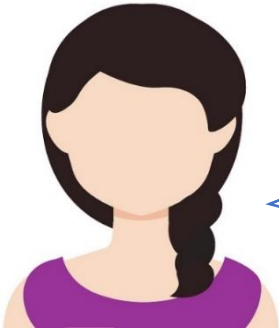
**Petra:** „Ich mache das Steigungsdreieck immer größer! Dann kann ich genauer messen.“



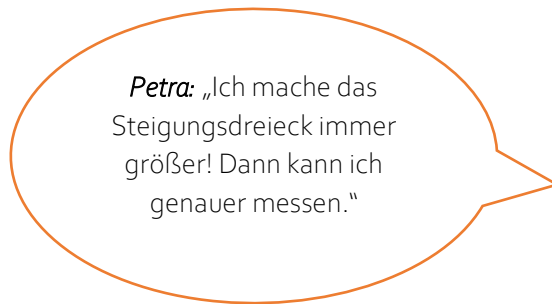
- Nutze das GeoGebra-Sheet und begründe, warum beide Wege immer zum selben Ergebnis führen.
- Erstelle eine Vorteil- / Nachteilliste für beide Wege.
- Beschreibe, wie man möglichst geschickt vorgehen kann, um die Steigung einer linearen Funktion zu bestimmen, wenn man den Graphen auf Papier vor sich hat?

## Analoge Umsetzung

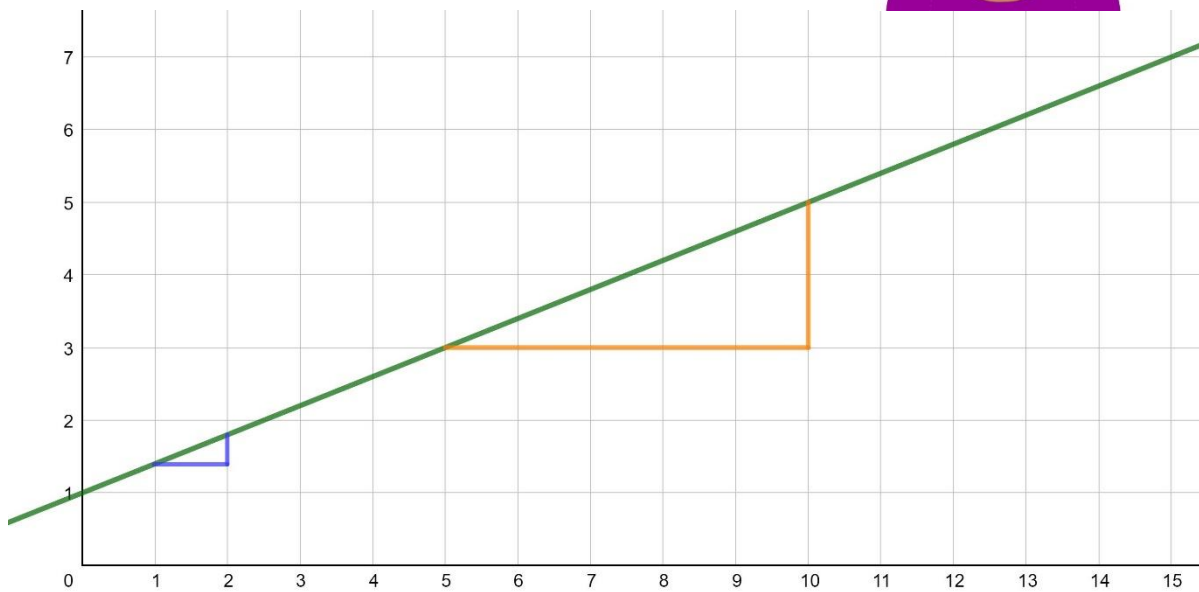
Clara und Petra diskutieren, wie man die Steigung einer linearen Funktion bestimmen kann, wenn man ihren Graphen auf Papier vorgegeben hat.



**Clara:** „Ich zeichne das Steigungsdreieck immer so, dass die horizontale Seite die Länge 1 hat. Das macht mir die Sache viel einfacher.“



**Petra:** „Ich mache das Steigungsdreieck immer größer! Dann kann ich genauer messen.“



- Begründe anhand der Grafik, warum beide Wege immer zum selben Ergebnis führen.
- Erstelle eine Vorteil- / Nachteilliste für beide Wege.
- Beschreibe, wie man möglichst geschickt vorgehen kann, um die Steigung einer linearen Funktion zu bestimmen, wenn man den Graphen auf Papier vor sich hat?

## Analyse der Lernaktivität

Worum geht es hier?

Potentiale digitaler Medien – Zusammenhänge visualisieren (Arbeitsauftrag Klausurtag 2)

Dass verschiedene Steigungsdreiecke denselben Wert für die Steigung ergeben, ist aus rein formaler Sicht völlig klar: Es handelt sich ja um einen bestimmten Wert aus dem Funktionsterm und dieser ist schon durch die Funktion selbst festgelegt. Andere Werte führen zu „steileren“ oder „flacheren“ Graphen, können also nicht zur gleichen Funktion gehören. Trotzdem ist es zunächst überraschend, und eine genauere Analyse kann zu einem besseren Verständnis führen, wie es dazu kommt.

Die Frage, *warum* das so ist, führt zu der Beobachtung, dass verschiedene Steigungsdreiecke nur durch Verschieben und zentrische Streckung (bzw. maßstäbliches Verkleinern und Vergrößern) auseinander hervorgehen. Das Verschieben ändert Breite und Höhe der Steigungsdreiecke nicht. Die zentrische Streckung bzw. maßstäbliche Vergrößerung/Verkleinerung ändert Breite und Höhe im gleichen Maße: Verdoppelung der Breite führt auch zur doppelten Höhe, analog für andere Längenverhältnisse. Hier wird informell erarbeitet, dass die Steigungsdreiecke alle ähnlich zueinander sind, ohne dass die Begriffe Ähnlichkeit oder zentrische Streckung bereits thematisiert wurden.

Worum geht es hier?

Tiefe Verarbeitung anregen – Lösungswege vergleichen (Arbeitsauftrag Klausurtag 4)

Wenn vorhandenes Wissen durch neue Erfahrungen oder andere Sichtweisen erweitert werden soll, ist es wichtig, Zusammenhänge zwischen Strukturen zu erkennen, zu verstehen und zu begründen.

*Was an der Aufgabe trägt dazu bei, tiefe Verarbeitung anzuregen?*

Von außen werden verschiedene Lösungen der beiden fiktiven Schülerinnen zu der zunächst wenig aktivierenden Fragestellung, die Steigung des Graphen einer linearen oder proportionalen Funktion zu bestimmen, eingebracht. Beide Wege haben Vor- und Nachteile. Während die Lösung von Clara ohne Rechnung auskommt, kann man bei der Lösung von Petra auch die Steigungen extrem flacher oder steiler Graphen genau bestimmen.

Die Analyse der beiden Wege, ihrer Unterschiede und Gemeinsamkeiten soll eine Reflexion des Verfahrens anregen, das über eine reine wiederholende Anwendung hinausgeht. Die Lernenden müssen jedoch die beiden Wege vergleichen und erkennen, dass und warum sie auf die gleiche Lösung führen. Die Frage nach Vor- und Nachteilen regt dazu an, beide Wege für verschiedene Graphen zu analysieren, um Möglichkeiten und Einschränkungen zu identifizieren.

Die Schülerinnen und Schüler nutzen ihr Wissen über ein konkretes Vorgehen (Steigung bestimmen) für eine genauere Analyse. Sie untersuchen, wie verschiedene Steigungsdreiecke in einen Zusammenhang gebracht werden können (z. B. verschieben, verkleinern) und begründen anhand von Wissen über geometrische Figuren, weshalb sich die Steigung dabei jeweils nicht verändert. Dies soll zu einer tieferen Verarbeitung und besseren Vernetzung des Wissens zum erlernten Verfahren beitragen.

*Worauf ist beim Einsatz der Aktivität zu achten, damit wirklich möglichst tiefe Verarbeitung stattfindet?*

Die Aktivität erfordert zunächst, **Unterschiede zwischen den Lösungswegen** zu untersuchen. Diese werden besonders gut erkennbar, wenn die Lösungswege für unterschiedliche (ggf. extreme) Graphen betrachtet werden. Hier ist das konkrete Vorgehen beim Bestimmen der Steigung genauer zu betrachten

und auf mögliche Schwierigkeiten (z. B. in Bezug auf die Genauigkeit bzw. die Schwierigkeit der durchzuführenden Rechnungen) hin zu analysieren.

Weiterhin wird angeregt **Beziehungen zwischen den beiden Lösungswegen herzustellen**. Dies sollte darüber hinausgehen, dass sich dieselbe Lösung ergibt. Es ist als wesentlich, dass Lernende dazu spezifisch angeregt werden die beiden Steigungsdreiecke in eine Beziehung zu bringen. Eine Möglichkeit wäre das Steigungsdreieck von Clara so zu verschieben, dass es einen Punkt gemeinsam mit dem Steigungsdreieck von Petra hat.

Die Aktivität fordert weiterhin eine **Argumentation** ein, die durchaus als mehrschrittig bezeichnet werden kann. Es kann auf unterschiedliche Weisen argumentiert werden (**multiple Lösungen**), z. B. indem durch Argumente der Ähnlichkeit / der zentrischen Streckung / der maßstäblichen Vergrößerung argumentiert wird, oder indem „Kopien“ des kleinen Steigungsdreiecks (im Kopf) entlang dem Graphen im „großen“ Steigungsdreieck eingefügt werden. Weiterhin kann einfacher (mit einem einfachen Kongruenzargument) begründet werden, warum Steigungsdreiecke mit derselben horizontalen Länge dieselbe Steigung ergeben – warum also eine Verschiebung des Steigungsdreiecks den Wert der Steigung nicht verändert.

Letztlich trägt die Aktivität dazu bei, **Beziehungen zwischen zwei Darstellungsformen** linearer Funktionen – Funktionsterm und Graph – genauer zu untersuchen: Wie zeigt sich die Steigung als Zahl im Funktionsterm auf unterschiedliche Art im Graphen linearer Funktionen?

Die Aktivität bietet die Möglichkeit den **auf unterschiedlichen Niveaus lernförderlich zu arbeiten**. So ist die Argumentation teilweise oder vollständig einfacher zu finden, wenn die beiden Steigungsdreiecke einen gemeinsamen Eckpunkt haben, oder wenn die horizontale Seitenlänge bei Petras Steigungsdreieck ganzzahlig (z. B. 2) ist. Auf diese Weise können Lernende auf unterschiedlichen Niveaus dennoch argumentativ tätig werden.

*Welche Möglichkeiten bieten sich für tiefe Verarbeitung bei der Diskussion der Arbeitsergebnisse?*

Bei der Diskussion sollten möglichst viele Lernende dazu angeregt werden die präsentierten Beiträge und Vorschläge zu durchdenken. Dafür ist es hilfreich ggf. erst einmal Teillösungen- und -argumentationen (s.o.) zu präsentieren und dann schrittweise mit weiteren Lösungen zu erweitern.

Auch die Bewertung der beiden Lösungswege lässt sich geschickt nutzen, um **unterschiedliche Perspektiven** in die Diskussion einzubringen und gegeneinander abzuwägen. Gerade hier kann es aktivierend sein, Beispiele in die Diskussion einbringen zu lassen oder selbst einzubringen, die bestimmte Vor- und Nachteile illustrieren.

Ist die Steigung nicht ganzzahlig, so ist es oft hilfreich den Bruch so zu erweitern, dass Zähler und Nenner ganzzahlig sind. Das Steigungsdreieck der Geraden und damit auch die Gerade selbst, können hierdurch leichter gezeichnet werden. Bei ganzzahligen Steigungen ist die Verwendung der horizontalen Länge 1 des Steigungsdreiecks eine geeignete Strategie.

Vor- und Nachteile zu identifizieren, erfordert aber weiterhin, genau zu beobachten welche Möglichkeiten die beiden Strategien geben und wo ihre Einschränkungen liegen. Gerade hierauf sollte bei der Diskussion der Arbeitsergebnisse ein besonderer Fokus gelegt werden.

#### Digitale Medien und tiefe Verarbeitung (Arbeitsauftrag Klausurtag 4)

*Wie könnten Sie digitale Medien nutzen, um Lernende zur tiefen Verarbeitung der Inhalte anzuregen?*

Das GeoGebra-Sheet zeigt eine mögliche digitale Gestaltung. Die dynamische Visualisierung bietet, erlaubt es den Schülerinnen und Schüler schnell und effizient sehr **unterschiedliche Funktionsgraphen zu untersuchen** (Potential „Phänomene erkunden“). Gerade bei besonders flachen oder besonders steilen

Graphen lohnt es sich die beiden Strategien zu vergleichen, um Vor- und Nachteile identifizieren zu können.

Die **dynamische Veränderung der Steigungsdreiecke** kann wesentliche Ideen für die Argumentation (siehe oben) liefern (Potential „Phänomene erkunden“). Für das Steigungsdreieck von Petra würden sich beispielsweise folgende Tipps anbieten: „Mach Petras Steigungsdreieck zunächst 2 (oder 3, 4, ...) Einheiten breit. Du kannst dann die beiden Wege vergleichen!“ Oder „Verschiebe Claras Steigungsdreieck doch einmal so, dass es einen Punkt mit dem von Petra gemeinsam hat!“.

Die Möglichkeit die **symbolische Darstellung** der Rechnungen **einzubinden** erlaubt es zudem den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Steigungsdreiecken und den dazugehörigen Rechnungen klar abzubilden, sowie Veränderungen der Steigungsdreiecke mit Veränderungen in den Rechnungen in Beziehung zu setzen (Potential „Zusammenhänge visualisieren“).

Siehe hierzu auch die Ausführungen unter: Einstufung SAMR

## Weitere Verwendungsmöglichkeiten in den Klausurtagen 2 bis 4

### Einstufung ICAP (als weiteres Beispiel für Klausurtag 2)

**Passives Arbeiten** ist bei dieser Aktivität denkbar, aber nicht systematisch zu erwarten.

Auf **aktives Arbeiten** beschränkte Lernaktivitäten wären beispielsweise ein zielloses Verschieben der Steigungsdreiecke und das willkürliche Verändern der Parameter der linearen Funktion. In einem solchen Fall könnten die Lernenden zunächst auf bestimmte Veränderungen fokussiert und zur systematischen Beobachtung der Veränderung angeregt werden.

Die freie Exploration erlaubt es den Schülerinnen und Schülern unterschiedliche Szenarien zu erproben und ihre Hypothesen zu überprüfen. Von ihnen wird verlangt, dass sie den Zusammenhang zwischen vertikaler und horizontaler Seite eines Steigungsdreiecks mit denen eines anderen Steigungsdreiecks herstellen. Dies stellt ebenso eine **konstruktive Eigenleistung** dar, wie das Finden eines möglichen Zusammenhangs zwischen den beiden Steigungsdreiecken (Verschieben, Vergrößern/Verkleinern). Darüber hinaus erarbeiten die Schülerinnen und Schüler sich die Vor- und Nachteile zweier unterschiedlicher Strategien. Diese Reflexion von Vorgehensweisen mit Bezug zu bestimmten Problemstellungen (unterschiedliche Graphen) stellt ebenfalls eine konstruktive Leistung dar.

**Interaktives Arbeiten** ist einerseits möglich, indem in Kleingruppen gemeinsam an dem Problem gearbeitet wird. Hier bietet sich ein Wechsel von Arbeiten in kleineren und größeren Gruppen an, um einerseits unterschiedliche Lösungsansätze zu generieren, andererseits auch den Austausch darüber zu ermöglichen. Um eine aktive Auseinandersetzung mit den Ideen anderer Lernender anzuregen, bietet sich auch ein Vergleich der Vor- und Nachteilslisten mit einer anderen Gruppe an, oder Lernende könnten Rollen als „Vertreter“ einer der beiden Strategien einnehmen. Auch ein Vergleich unterschiedlicher Argumentationsansätze aus verschiedenen Gruppen in einer gemeinsamen Diskussionsphase wäre denkbar.

### Einstufung SAMR (als weiteres Beispiel für Klausurtag 2)

Der Graph einer linearen Funktion inklusive unterschiedlicher Steigungsdreiecke kann durch händisches Zeichnen ebenfalls erhalten werden. Eine flexible Anpassung ist jedoch nicht möglich und ein Vergleich vieler verschiedener Steigungsdreiecke aufwändig. Die herkömmliche Arbeit mit Papier und Stift wird hierdurch funktional verbessert (**Augmentation**).

Durch die dynamische Unterstützung am GeoGebra-Sheet können die Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang frei explorieren und ihre Vermutungen an unterschiedlichen Beispielen evaluieren. Durch diesen veränderten Lernprozess stellt das GeoGebra-Sheet somit eine **Modifikation** gegenüber analogen Hilfsmitteln dar.

### Einordnung strukturorientierter Konzeptaufbau (als weiteres Beispiel für Klausurtag 3)

#### *Leitfragen nutzen*

Die Aktivität greift eine typische Frage in der Mathematik auf: Wieso ergeben zunächst unterschiedliche Vorgehensweisen dasselbe Ergebnis? Wo liegen Vor- und Nachteile verschiedener Vorgehensweisen, unter welchen Bedingungen ist die eine bzw. die andere zu bevorzugen?



### *Verstehenselemente einbinden*

Um die Steigung einer linearen Funktion anhand ihres Graphen zu ermitteln, nutzen Schülerinnen und Schüler häufig ein eher algorithmisches Vorgehen. Die vorliegende Lernaktivität fokussiert jedoch stärker auf die mathematische Bedeutung der Steigung, in dem sie bewusst Begründungen für den Zusammenhang unterschiedlicher Steigungsdreiecke einfordert. Dabei werden zentrale Verstehenselemente, wie die Definition der Steigung als Quotient sowie die Unabhängigkeit des Steigungsdreiecks von der Wahl der Steigung explizit aufgegriffen und vertieft thematisiert.

### *Darstellungen verknüpfen*

Die Lernaktivität zielt auf Strategien für den Darstellungswechsel zwischen Graph und Funktionsterm für eine beliebig gewählte Steigung ab. Dabei geht es nicht allein um die Berechnung der Steigung, sondern insbesondere darum, wie die Steigung möglichst effizient am Graphen abgelesen werden kann. Anhand des GeoGebra-Sheets kann der Darstellungswechsel von ausgewählten Funktionsterm, über Graph zu Wert der Steigung nachvollzogen werden. Darüber hinaus unterstützt die Lernaktivität die Flexibilisierung des Darstellungswechsels, indem die verschiedenen Strategien miteinander verglichen werden.

Das Verfahren selbst (Quotienten der beiden Kathetenlängen im Steigungsdreieck bilden) wird anhand des GeoGebra-Sheets dynamisch mit dem Steigungsdreieck verändert, sodass beobachtet werden kann, was sich an diesem Vorgehen verändert, aber auch was gleich bleibt, wenn das Steigungsdreieck (oder ggf. auch der Funktionsterm) verändert wird.

### *Phänomene und Konzepte verbinden*

„Phänomene und Konzepte zu verbinden“ wird in dieser Aktivität nicht gezielt angesprochen.

Einordnung kognitive Aktivierung (als weiteres Beispiel für Klausurtag 4)

### *Tiefe Verarbeitung anregen*

Siehe dazu die obigen Ausführungen: Worum geht es hier? – Tiefe Verarbeitung anregen.

### *Anforderungen fokussieren*

Zusammenhänge von verschiedenen Steigungsdreiecken können durch das GeoGebra-Sheet exploriert werden. Gerade die Möglichkeit sich beliebig viele unterschiedliche Dreiecke zu erzeugen und direkt die Auswirkungen auf das rechnerische Verfahren analysieren zu können, entlastet technische Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler. Das eigenständige Einzeichnen und Berechnen von Steigungen wäre an dieser Stelle wenig lernförderlich und ist nicht mehr notwendig. Der Fokus wird bewusst auf die Argumentation anhand des Zusammenhangs zwischen den Steigungsdreiecken und die Unterschiede zwischen den Verfahren gelegt.

### *Fehler nutzen*

„Fehler zu nutzen“ wird in dieser Aktivität nicht gezielt angesprochen.

### *Lernprozess unterstützen*

Die Aufgabe bietet wenig Öffnung bezüglich unterschiedlichen Bearbeitungsniveaus. Das Anspruchsniveau müsste durch die Lehrkraft durch gezielte Impulse individuell auf die Voraussetzungen und bisherigen Ideen der jeweiligen Schülerinnen und Schüler angepasst werden. Die verschiedenen möglichen Lösungswege bieten die Möglichkeit um anfängliche Ideen der Lernenden aufzugreifen und ihnen Hinweise

für eine weitere produktive Arbeit zu geben. Die unterschiedlichen Standpunkte sowie die unterschiedlichen möglichen Argumentationsstrategien können gezielt genutzt werden, um einzelne Lernende während der Arbeit an der Aufgabe, oder auch die Gesamtgruppe in einer gemeinsamen Abschlussdiskussion immer neu zur aktiven Auseinandersetzung mit der Leitfrage anzuregen.

Details finden sich oben im Abschnitt *„Worauf ist beim Einsatz der Aktivität zu achten, damit wirklich möglichst tiefe Verarbeitung stattfindet?“*.