

# Klausurtag 2 / 4

## Zusatzmaterial

### für Multiplikatorinnen und Multiplikatoren

#### Potentialanalyse – Pyramidennetze erstellen

Der Rahmen	
Inhalt	Pyramidennetze erstellen
Anwendungsbereich im Rahmen Fortbildung	<i>Klausurtag 2:</i> Potentiale digitaler Medien – Phänomene erkunden <i>Klausurtag 4:</i> Tiefe Verarbeitung anregen – Strategien diskutieren  <i>ICAP:</i> Konstruktiv (C), Interaktiv (I) <i>SAMR:</i> Verbesserung (A)
Verortung im Lehrplan	<i>MS: 9.3:</i> – Geometr. Figuren, Körper & Lagebeziehungen <i>MS M 9.4:</i> – Flächeninhalt – Vielecke <i>RS I: 9.5</i> – Raumgeometrie <i>RS II/III: 10.2</i> – Raumgeometrie <i>Gym: 10.2/5</i> – (Fortführung) Raumgeometrie
Voraussetzungen	Definition der Pyramide Oberflächenstruktur der Pyramide
Ziele	Die Schülerinnen und Schüler kennen verschiedene (ggf. alle) Netze einer quadratischen Pyramide. Die Schülerinnen und Schüler können verschiedene Lösungen für ein mathematisches Problem finden, für diese passende Ordnungsschemata angeben und damit prüfen, ob sie alle Lösungen gefunden haben.
Aufträge	<ul style="list-style-type: none"><li>- Es sollen Netze für quadratische Pyramiden erstellt werden.</li><li>- Ziel ist es möglichst viele oder alle dieser Netze zu finden.</li></ul>
Werkzeuge & Medien	<ul style="list-style-type: none"><li>- Zum Erstellen und Prüfen der Netze wird eine 3D-Visualisierungs-App für geometrische Körper eingesetzt.</li></ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Zum Systematisieren und Ordnen der Netze wäre beispielsweise ein Textverarbeitungsprogramm oder eine Präsentationssoftware geeignet.</li> </ul>
angestrebte Lernaktivitäten	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Die Lernenden generieren Netze und vertiefen dabei ihr Wissen über zentrale Eigenschaften von Netzen geometrischer Körper.</li> <li>- Die Lernenden wenden am Beispiel der Lernaktivität eine Ordnungsstrategie an, um gezielt neue Netze zu generieren bzw. deren Existenz auszuschließen.</li> <li>- Dabei untersuchen sie unterschiedliche Ordnungsmerkmale auf ihre Nutzbarkeit zum Lösen der Aufgabe.</li> </ul>
Einbettung in den Unterricht	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Die Aktivität ist zunächst geeignet, um Wissen über Netze und (quadratische) Pyramiden zu vertiefen.</li> <li>- Sie zielt jedoch in diesem Kontext besonders auf die Förderung von Problemlösekompetenzen ab.</li> <li>- Diese Strategien können später in anderen Kontexten (z. B. Klassifikation anderer geometrischer Objekte) genutzt werden.</li> </ul>
Prozessunterstützung	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Anregen einer relativ freien Exploration verschiedener Pyramidenetze zu Beginn der Aktivität.</li> <li>- Anregen zum zunehmenden Sortieren von zusammengehörigen Netzen und zum Beschreiben der Sortierung mit sich unterscheidenden Eigenschaften.</li> <li>- Fragen nach weiteren Netzen bzw. warum es solche nicht geben sollte.</li> <li>- Auffordern zum Abgleichen der bisher gefundenen Netze verschiedener Lerner/Lerngruppen.</li> </ul>
Lösungen beobachten	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Längere unsystematische Explorationsphasen fokussieren durch die Frage nach einer sinnvollen Ordnung.</li> <li>- Insbesondere unterschiedliche Klassifikationskriterien beobachten.</li> <li>- Ansätze (ggf. auch fehlerhafte) für das Ausschließen weiterer Netze besonders beachten. Fehlerhafte Ansätze können auf weitere Klassifikationskriterien hinweisen.</li> </ul>
Diskussion von Lösungen	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Die in der Klasse generierten Lösungen sammeln (müssen nicht zwingend alle sein).</li> <li>- Im Abgleich der Lösungen Unterscheidungskriterien sammeln.</li> <li>- Ordnungsansätze aus den Lösungen der Lernenden sammeln, gefundene Netze ordnen.</li> <li>- Argumentationsansätze auf ihre Tragfähigkeit hin diskutieren und ggf. schrittweise optimieren.</li> </ul>

## Materialien

Analoge Umsetzung: Arbeitsblatt mit Aktivität  
Geo-Clix (mindestens 4 Dreiecke und 1 Quadrat) für die Lernenden



Digitale Umsetzung: Arbeitsblatt mit Aktivität  
Shapes App (iPad)

[https://epub.ub.uni-muenchen.de/94232/1/Beispiel\\_Pyramidennetze-erstellen.html](https://epub.ub.uni-muenchen.de/94232/1/Beispiel_Pyramidennetze-erstellen.html)

## Arbeitsaufträge

### Analoge Lernaktivität

#### Netze einer quadratischen Pyramide

Versuche mit dem Material möglichst alle Netze einer quadratischen Pyramide mit quadratischer Grundfläche zu finden.

*[Anm.: Je nach Verfügbarkeit ist es hilfreich, wenn die Schülerinnen und Schüler mehr Geo-Clix-Material erhalten als für eine Pyramide notwendig ist.]*

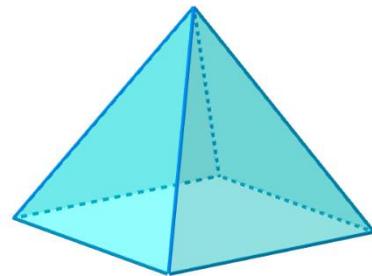
Zeichne jeweils eine Skizze der verschiedenen Netze in dein Heft.

Diskutiere mit deinem Partner:

Wie könnt ihr vorgehen, um alle verschiedenen Netze zu finden?

Wie könnt ihr euch sicher sein, dass es keine weiteren Netze geben kann?

**Tipp:** Sortiert und ordnet eure Netze nach Gemeinsamkeiten und Unterschieden!



### Digitale Lernaktivität

#### Netze einer quadratischen Pyramide

Versuche mithilfe der Shapes App möglichst alle Netze einer quadratischen Pyramide mit quadratischer Grundfläche zu finden.

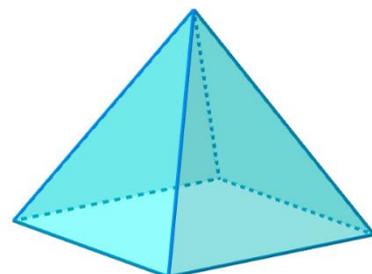
Speichere jeweils einen Screenshot der verschiedenen Netze.

Diskutiere mit deinem Partner:

Wie könnt ihr vorgehen, um alle verschiedenen Netze zu finden?

Wie könnt ihr euch sicher sein, dass es keine weiteren Netze geben kann?

**Tipp:** Sortiert und ordnet eure Netze nach Gemeinsamkeiten und Unterschieden!



## Analyse der Lernaktivität

Worum geht es hier?

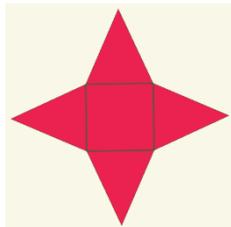
Potentiale digitaler Medien – Phänomene erkunden (Arbeitsauftrag Klausurtag 2)

Es können Kandidaten für Netze generiert und geprüft werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen anhand der konkret erstellten Netze (Phänomene) erlernen, inwiefern sich quadratischen Pyramiden durch unterschiedliche Netze darstellen lassen, und wie man diese Netze sortieren kann, um den Überblick zu behalten. Dabei haben die Lernenden zunächst eine hohe Gestaltungsfreiheit und werden zudem durch die App unterstützt, um technische Schwierigkeiten (genaue Positionierung der Dreiecke) zu vermeiden.

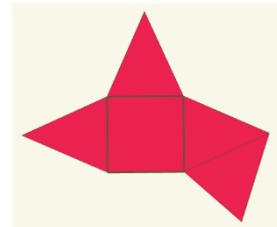
Eine gewisse Vorstrukturierung erfolgt, indem das Quadrat als Ausgangsfläche vorgegeben wird. Fehler werden dabei sofort ersichtlich, da die App unmittelbar Feedback zu korrekten Netzen gibt. Somit fokussiert die Interaktion mit der App mehr auf das Suchen und Ausschließen von Netzen, weniger auf das analytische Strukturieren von Pyramidennetzen.

Besonders für die Frage nach allen möglichen Netzen ist die Strukturierung der Netze nach bestimmten Ordnungskriterien relevant. Erst diese ermöglicht es auszuschließen, dass es weitere Netze gibt. Die Ordnungskriterien ergeben sich aus den gefundenen Netzen (z. B. an wie vielen Seiten des Quadrats hängen Dreiecke, wie viele Dreiecke hängen in einer Reihe,...).

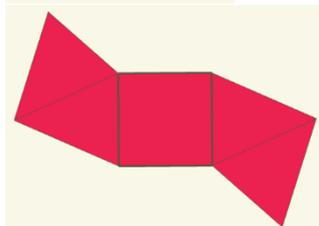
Typ: 1+1+1+1  
(1 Möglichkeit)



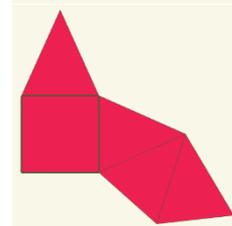
Typ: 1+1+2  
(1 Möglichkeit)



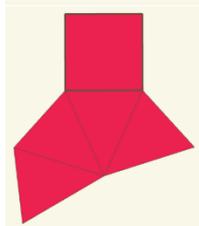
Typ: 2+2  
(2 Möglichkeiten)



Typ: 1+3  
(2 Möglichkeiten)



Typ: 4  
(2 Möglichkeiten)



Worum geht es hier?

Tiefe Verarbeitung anregen – Strategien diskutieren (Arbeitsauftrag Klausurtag 4)

Strategien spielen im Mathematikunterricht eine wichtige Rolle: systematisches Probieren, Rückwärtsarbeiten, Visualisieren, Umstrukturieren, Zerlegen, ... Häufig finden solche Strategien, gerade in Problemlöseprozessen, Anwendung. Dementsprechend müssen unterschiedliche Strategien immer wieder im Unterricht thematisiert werden, damit Schülerinnen und Schüler auf sie zurückgreifen können. Hier geht es konkret um eine **Strategie des systematischen Ordners** nach selbst gefundenen Kriterien.

Außerdem stellt die Aktivität eine gute Möglichkeit zur Schulung von räumlichem Vorstellungsvermögen dar.

*Was an der Aufgabe trägt dazu bei, tiefe Verarbeitung anzuregen?*

Die Aktivität regt die Lernenden zunächst zur **aktiven Exploration** an. Diese kann zunächst relativ unsystematisch erfolgen. Gerade die Diskussion darüber, wie man gezielt (korrekte) Netze erstellt, birgt Potential, um die Struktur und relevante Eigenschaften von Netzen, z. B. gleich lange Seiten, zu thematisieren. Gerade die Entstehung des Netzes gedanklich zu analysieren und unterschiedliche Netze miteinander zu vergleichen, sind für diese Frage hilfreich.

Je mehr Netze generiert wurden, desto genauer kann analysiert werden, ob diese sich systematisch unterscheiden, und ob dabei noch Netze fehlen. Ziel der Aufgabe ist es, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, strategisch an das gestellte Problem heranzugehen und über ein zufälliges Generieren unterschiedliche Lösungen hinauszugehen. Zentral ist dabei, dass zunächst untersucht wird, in welchen Eigenschaften sich die Anordnung der Flächen in den verschiedenen Netzen unterscheidet (s.o.). Eine Möglichkeit dies anzuregen ist, die verschiedenen unterschiedlichen Netze **sprachlich zu beschreiben**. Das **eigenständige mathematische Arbeiten** bei der Suche nach und der kritischen Untersuchung von Ordnungskriterien ist ein typisches Beispiel für vertiefte Verarbeitung.

Die Frage nach Eigenschaften und dem Zählen von Netzen führt auch auf die durchaus diskussionsbedürftige Frage, wann zwei Netze „gleich“ sind. Zählen zwei zueinander symmetrische Netze als zwei Netze, oder nur als eines? Dies regt eine **Reflexion** dessen an, was eigentlich ein Netz ausmacht.

Werden die Netze nach diesen Eigenschaften geordnet, so können fehlende Netze identifiziert werden, weitere relevante Ordnungseigenschaften erkannt werden, oder letzten Endes sichergestellt werden, dass es keine weiteren Netze mehr geben kann. Dieses Analysieren und Ordnen geht deutlich über das einfache Prüfen und Konstruieren von Netzen hinaus, bietet in dieser Form aber sowohl eine **niedrige Einstiegsanforderung** als auch **substantielle Vertiefungsmöglichkeiten** auf verschiedenen Niveaus für alle Lernenden.

*Worauf ist beim Einsatz der Aktivität zu achten, damit wirklich möglichst tiefe Verarbeitung stattfindet?*

Sobald Schülerinnen und Schüler mehrere Netze gefunden haben steht die Frage im Raum, ob verschiedene Gruppen dieselben Netze gefunden haben, oder unterschiedliche. Um diesen Vergleich zu vereinfachen ist es sinnvoll die Netze nach **Eigenschaften zu ordnen**.

Haben die Schülerinnen und Schüler die sieben unterschiedlichen Netze gefunden, so ist eine wesentliche Frage, ob (bzw. warum) es keine weiteren Netze geben kann. Hier sind die Lernenden aufgefordert, **gezielt** nach möglichen weiteren Netzen innerhalb (und außerhalb) der gefundenen Ordnung zu **suchen**, bzw. zunehmend **durch Argumente auszuschließen**, dass es solche geben kann.

Letztlich geht es darum, die angewendeten **Strategien miteinander zu vergleichen und zu diskutieren**. Wie werden unterschiedliche Netze erzeugt? Wie wurde das so gemacht, dass möglichst wenige „doppelt“ vorkommen? Wie können diese sortiert und strukturiert werden? Welche Kriterien haben sich bewährt, was war weniger hilfreich? Wie wird sichergestellt, dass keine weitere Möglichkeit existiert?

*Welche Möglichkeiten bieten sich für tiefe Verarbeitung bei der Diskussion der Arbeitsergebnisse?*

Den Anfang der Diskussion wird das Sammeln der gefundenen Netze bilden – z. B. in Form von Screenshots in einer gemeinsamen Datei. Es bietet sich an die Präsentation der Schülerstrategien so zu gliedern, dass explorative Strategien mit zufälligem Generieren, mit strategischem Vorgehen verglichen werden und hierdurch möglichst konträre Strategien in der Lösungsfindung deutlich werden. Gerade doppelt gefundene Netze können auf sinnvolle Ordnungskriterien hinweisen. Beim strategischen Ordnen bietet sich

Lizenzhinweis: „Potentialanalyse – Pyramidennetze erstellen“, erstellt von [Timo Kosiol](#), [Matthias Mohr](#), [Christian Lindermayer](#) und [Stefan Ufer](#) im Projekt [DigitUS](#) und lizenziert als [CC-BY-SA4.0](#).

eine Ordnung nach der Anzahl zusammenhängender Dreiecke (z. B. Typ  $1+1+1+1$ ,  $1+1+2$ ,  $2+2$ ,  $1+3$ ,  $4$ ) an sowie innerhalb der Typen die Lage an benachbarten Seiten (z. B. Typ  $2+2$ : nebeneinander angebracht, gegenüber angebracht).

Begleitend können die eingangs gesammelten Netze zunehmend feiner geordnet werden. Wenn ausreichend vieler Klassifikationskriterien gesammelt wurden, ist es sinnvoll – bestenfalls anhand geeigneter Schülerlösungen – zur Frage überzugehen, ob alle Netze gefunden wurden.

#### Optimierungsmöglichkeiten für Material und Lernaktivität (Arbeitsauftrag Klausurtag 2 / 4)

- Die Shapes-App ist natürlich nicht gut anpassbar, aber eine Version, in der man die Netze direkt sammeln und ordnen könnte, wäre sicher hilfreich.
- Auch bereits konstruierte Netze weiterverwenden und anpassen zu können, würde die Arbeit erleichtern.
- Ohne die direkte Feedbackfunktion könnte ggf. ein eigenständigeres aktiveres Verarbeiten der Kriterien für korrekte Netze angeregt werden.

#### Digitale Medien und tiefe Verarbeitung (Arbeitsauftrag Klausurtag 4)

*Wie könnten Sie digitale Medien nutzen, um Lernende zur tiefen Verarbeitung der Inhalte anzuregen?*

Siehe dazu die Ausführungen unter: Einstufung SAMR

## Weitere Verwendungsmöglichkeiten in den Klausurtagen 2 bis 4

### Einstufung ICAP (als weiteres Beispiel für Klausurtag 2)

**Passives Arbeiten** ist bei dieser Aktivität denkbar, aber nicht systematisch zu erwarten.

Auf **aktives Arbeiten** beschränkte Lernaktivitäten wären beispielsweise das ziellose Ausprobieren von Konfigurationen, bis die App ein Netz aktiviert. Ein erster Schritt wäre hier ein Festhalten, und dann ein zunehmendes Ordnen der Netze. Leitfrage kann sein, ob es weitere Netze gibt (bzw. später: warum nicht).

Gerade die Frage nach dem gezielten Finden neuer Netze, dem gezielten Ordnen von Netzen bzw. warum es keine weiteren Netze geben kann, zielt auf **konstruktive Aktivitäten** ab. Schon eine teilweise tragfähige Ordnung der Netze wäre hier ein positiv herauszuhebendes Ergebnis. Hier können eigene Ordnungskriterien generiert und auf ihre Eignung erprobt werden.

**Interaktives Arbeiten** ist einerseits möglich, indem in Kleingruppen gemeinsam an dem Problem gearbeitet wird. Um eine aktive Auseinandersetzung mit den Ideen anderer Lernender zu ermöglichen, könnte ein Austausch zwischen je zwei Gruppen nach etwa der Hälfte der Bearbeitungszeit organisiert werden.

### Einstufung SAMR (als weiteres Beispiel für Klausurtag 2)

Im Wesentlichen wäre eine ähnliche Aktivität auch mit konkretem Material (z. B. Geo-Clix) möglich. Ein (kleiner) Vorteil der konkreten Umsetzung gegenüber der Shapes-App wäre sogar, dass die Auswahl des nötigen Materials (ein Quadrat, vier passende Dreiecke) ggf. den Lernenden überlassen werden könnte, um sie anzuregen, sich tiefer mit der Struktur des Netzes auseinanderzusetzen.

Vorteile der digitalen Umsetzung sind das direkte Feedback, die (hoffentlich) einfachere Handhabung, und die Möglichkeit, Netze ohne großen (Material-)Aufwand direkt zum Ordnen abzuspeichern.

Insofern bietet der Einsatz hier die Möglichkeit für eine Verbesserung des Lernens (**Augmentation**). Eine grundlegende Modifikation von Lernaufgaben und Lernaktivitäten liegt – im Vergleich zu Unterricht mit konkretem Material – nicht überzeugend vor. Auch die Lerninhalte und -ziele sind weitgehend unverändert.

Allenfalls bietet die Aktivität die Möglichkeit (aber auch die Herausforderung) allgemeine medienbezogene Kompetenzen der Lernenden (z. B. Einfügen und Ordnen der Netze in einem Textverarbeitungsprogramm) anzuwenden und ggf. zu vertiefen (Bezug zu **Redefinition**).

### Einordnung strukturorientierter Konzeptaufbau (als weiteres Beispiel für Klausurtag 3)

#### *Leitfragen nutzen*

Der Aktivität liegt eine typische mathematische Frage zu Grunde, die Klassifikation aller möglichen Lösungen für ein Problem.

#### *Verstehenselemente einbinden*

Lizenzhinweis: „Potentialanalyse – Pyramidennetze erstellen“, erstellt von [Timo Kosiol](#), [Matthias Mohr](#), [Christian Lindermayer](#) und [Stefan Ufer](#) im Projekt [DigitUS](#) und lizenziert als [CC-BY-SA4.0](#).

Eine wesentliche Rolle spielt in dieser Aktivität das zentrale Kriterium dafür, dass eine ebene Konfiguration ein Netz ist: Beim Zusammenfalten muss sich der entsprechende Körper (quadratische Pyramide) ergeben. Dieses Kriterium, sowie seine Folgerungen für Netze quadratischer Pyramiden (kongruente Teilflächen, deren Zahl und Lage, notwendigerweise gleich lange Strecken,...) sind in der Aktivität im Fokus.

Bezüglich der Wahl von Problemlösestrategien ist die Aufgabe geeignet eine bestimmte Strategie, das systematische Ordnen von Einzelfällen anhand von Eigenschaften, sehr klar zu illustrieren.

Andere relevante Aspekte des Wissens über Pyramidennetze (z. B. die Rolle der Höhe der Pyramide) werden nicht thematisiert und müssten ggf. nachgeliefert werden: Bei anderen Pyramidenhöhen sehen die Netze anders aus (nicht geometrisch ähnlich/nicht nur vergrößert und verkleinert), haben jedoch dieselbe Struktur.

### *Darstellungen verknüpfen*

Darstellungsverknüpfung hat in dieser Aktivität eine untergeordnete Bedeutung. Sie beschränkt sich im Wesentlichen auf die Beziehung zwischen der zweidimensionalen Darstellung des Netzes, und seiner dreidimensionalen Gestalt als gefaltete Pyramide (s. räumliches Vorstellungsvermögen oben).

### *Phänomene und Konzepte verbinden*

Die Aktivität zeichnet sich zunächst dadurch aus, dass die Lernenden mit einer bestimmten mathematischen Struktur (hier potentielle Netze quadratischer Pyramiden) interagieren können, und direktes Feedback erhalten. Sie können das zentrale Phänomen – zu einer quadratischen Pyramide gibt es verschiedene Netze – eigenständig explorieren und daran vor allem auch zentrale Eigenschaften von Netzen bzw. Kriterien erarbeiten bzw. vertiefen.

Einordnung kognitive Aktivierung (als weiteres Beispiel für Klausurtag 4)

### *Tiefe Verarbeitung anregen*

Siehe dazu die obigen Ausführungen: Worum geht es hier? – Tiefe Verarbeitung anregen.

### *Anforderungen fokussieren*

Dank des Einsatzes der digitalen App lassen sich irrelevanten Anforderungen für diese Aktivität weitgehend reduzieren (z. B. mentales oder konkretes Zusammensetzen der Netze, Ausschneiden, Aneinanderheften von Seiten, Auswahl der richtigen Figuren).

Insgesamt bietet die Aktivität einen niederschweligen Einstieg (Generieren einfacher Netze), jedoch vielfältige Möglichkeiten für problemlösendes, vertiefendes Arbeiten mit Pyramidennetzen. Sofern die Lehrkraft das entsprechend anregt, können Lernende auf unterschiedlichen und für sie jeweils individuell aktivierenden Niveaus an derselben Aufgabe arbeiten (sog. „natürliche Differenzierung“).

### *Fehler nutzen*

Falsch zusammengefügte Netze werden von der App mit einem Ausrufezeichen markiert. Die App bietet die Möglichkeit stufenlos (auch die fehlerhaften) Netze zu einem vermeintlichen Körper zusammenfügen. Dabei können fehlerhafte Teile analysiert und neue Ideen für weitere korrekte Netze generiert werden. So können insbesondere Fehlvorstellung zu Pyramidennetzen direkt in der Aktivität bearbeitet werden.

Ungünstige strategische Entscheidungen (ungünstige Vorgehensweisen oder Klassifikationskriterien) können weniger als traditionelle Fehler, aber doch als Lern- und Diskussionsanlässe betrachtet werden.

Gerade die Diskussion über hilfreiche bzw. weniger hilfreiche Vorgehensweisen bietet Lernpotential in Bezug auf das eigenständige problemlösende Arbeiten der Lernenden.

### *Lernprozess unterstützen*

Das unmittelbare Feedback kann, zumindest beim Generieren von Netzen, dazu beitragen die aktive Verarbeitung aufrecht zu erhalten. Dennoch können gerade das Ordnen der Netze sowie das Generieren der Argumentation durchaus motivationale Unterstützung durch gezielte, aktivierende Impulse der Lehrkraft erfordern.

Die Nutzung einer Ordnungsstrategie wird ja schon in der Aufgabenstellung angeregt. Dennoch kann es hilfreich sein, Lernende hier durch gezielte Impulse („Welche Netze passen denn gut zusammen?“, „Gibt es noch eines von diesen hier?“, ...) dazu anzuregen, eine solche Strategie zunächst anhand von wenigen Beispielen zu erproben und später zu erweitern und ggf. zu verfeinern.

Notwendig ist hierzu ggf. eine anfänglich mehr oder weniger lange Phase in der zunächst ohne Systematik Netze generiert werden. Sollte eine solche explorative Tätigkeit für die Lernenden ungewohnt erscheinen, kann auch hier eine gezielte Anregung der Lehrkraft zu Beginn der Arbeit hilfreich sein.