

# Klausurtag 4

## Zusatzmaterial

### für Multiplikatorinnen und Multiplikatoren

Lernprozesse unterstützen – Beispiel zur eigenen Anwendung

Proportionalität Kreisdurchmesser - Kreisumfang

Der Rahmen	
Inhalt	Erarbeitung: Proportionalität des Kreisumfangs zum Radius
Anwendungsbereich im Rahmen Fortbildung	<i>Klausurtag 4:</i> Lernprozesse unterstützen – Beispiel zur eigenen Anwendung
Verortung im Lehrplan	<i>MS 8.3</i> – Geometrische Figuren, Körper und Lagebeziehungen <i>RS 9.4</i> – Kreis <i>Gym 8.7</i> – Kreis und Zylinder
Voraussetzungen	Wesentliche Vorstellungen zur Proportionalität sind erarbeitet: <ul style="list-style-type: none"><li>• Graph ist eine Ursprungsgerade</li><li>• Quotientengleichheit</li><li>• Vervielfachungseigenschaft</li></ul> Die Begriffe Kreis, Umfang, Radius und Durchmesser sind bekannt sowie Techniken, um den Durchmesser von Kreisen zu messen.
Ziele	Die Lernenden erklären und begründen anhand von Daten, dass zwischen Kreisumfang und -durchmesser ein proportionaler Zusammenhang angenommen werden kann.

## Materialien

### Arbeitsaufträge

#### Analoge Lernaktivität

Messt Durchmesser und Umfang der verschiedenen mitgebrachten zylinderförmigen Gegenstände.  
Benutzt eine Schnur, um den Umfang zu messen.  
Sammelt Eure Ergebnisse übersichtlich in einem Schaubild oder einem Diagramm.

Findet heraus, wie Durchmesser und Umfang zusammenhängen!  
Wie könnt Ihr den Umfang berechnen, wenn Ihr von einem neuen zylinderförmigen Gegenstand den Durchmesser kennt?

#### Analyse der Lernaktivität

Worum geht es hier?  
Lernprozesse unterstützen (Arbeitsauftrag Klausurtag 4)

#### *Selbstreguliertes Arbeiten ermöglichen*

Der Arbeitsauftrag bietet Lerngelegenheiten auf unterschiedlichen Lernniveaus. Auf einem sehr basalen Niveau kann zunächst lediglich der Durchmesser und Umfang der Kreise (an zylinderförmigen Gegenständen) gemessen werden. Dabei können auch erste einfachere Zusammenhänge entdeckt werden (z. B. „Je größer der Durchmesser, desto größer der Umfang“).

Im nächsten Schritt bietet der Arbeitsauftrag Lerngelegenheiten für den Umgang mit Daten: Wie können Daten übersichtlich aufbereitet oder grafisch dargestellt werden, um einen Zusammenhang zwischen zwei Variablen zu untersuchen?

Letztlich bietet der Arbeitsauftrag verschiedene Möglichkeiten, um den mathematischen Kern, den Zusammenhang zwischen Durchmesser und Umfang, zu entdecken. Die Proportionalität der beiden Größen kann in unterschiedlichen Darstellungsformen (z. B. Graph, Tabelle) und über unterschiedliche Eigenschaften (z. B. Lage der Datenpunkte auf einer Ursprungsgeraden, Quotientengleichheit, Vervielfachungseigenschaft, Additivität) entdeckt werden. Dabei ist insbesondere auch ein Austausch über die verschiedenen Vorgehensweisen möglich und sinnvoll.

#### *Selbstreguliertes Arbeiten anregen und unterstützen*

Der Arbeitsauftrag ermöglicht eine Bandbreite unterschiedlicher Vorgehensweisen: Beim Messen, bei der Darstellung der Daten und bei der Analyse des Zusammenhangs. Diese Offenheit kann für Lernende durchaus anspruchsvoll sein. Natürlich kann der Arbeitsauftrag leicht angepasst werden, je nachdem was als realistisches Ausgangsniveau für die jeweilige Lerngruppe eingeschätzt wird. Mindestens genauso wichtig ist jedoch, dass dieses Niveau auch je nach Fortschritt der einzelnen Lernenden oder Gruppen während des Prozesses nachjustiert werden kann.

Impulse auf der **Regulationsebene** bei **geringem Fortschritt** könnten beispielsweise sein:

- Wie könntest Du an diese Frage herangehen? Erinnert dich das an Probleme, die Du schonmal gelöst hast? (Planung des Vorgehens)
- Was hast Du bisher erreicht? Was davon kann Dir weiterhelfen? (Reflexion, Adaptation)
- Was wäre denn ein guter nächster Schritt um weiterzumachen? (Planung)

Impulse auf der **Strategieebene** bei **geringem Fortschritt** könnten beispielsweise sein:

- Wie kannst du Deine gemessenen Werte darstellen? (strategische Ausrichtung)
- Kannst Du es Dir mit dem Computer/Tablet einfacher machen? (strategische Entscheidung anregen)
- Welche Darstellungsformen für Messwerte kennst du bereit? (Vorwissen aktivieren)
- Welche Arten von Funktionalen Zusammenhängen kennst du bereits? (Vorwissen aktivieren)
- Versuche möglichst viele Aussagen über den Zusammenhang von Umfang und Durchmesser zu formulieren. Du kannst folgende Wörter dabei verwenden „Wenn..., dann...“, „Umfang“; „Durchmesser“, „steigt“, „fällt“, „verdoppelt“, „verdreifacht“.... (Fokus auf Beziehungen zwischen den Datenpunkten)
- Überlege, welche Art von Funktion hinter dem Zusammenhang (zwischen Umfang und Durchmesser) stecken könnte! Wie kannst Du anhand Deiner Daten prüfen, ob es wirklich diese Art von Zusammenhang ist? (Hypothesen generieren und prüfen)

Impulse auf der **Regulationsebene** bei **großem Fortschritt** könnten beispielsweise sein:

- Du bist schon recht weit gekommen. Was an Deinem Vorgehen hat sich bewährt? Was könnte man bei ähnlichen Aufgaben genauso machen? Was würdest Du beim nächsten Mal anders machen?
- Findest Du noch einen anderen Lösungsweg, der vielleicht sogar einfacher/genauer/schneller/schöner ist?
- Kannst Du eine Art „Anleitung“ schreiben, wie man an Probleme wie dieses hier am besten herangeht?

Impulse auf der **Strategieebene** bei **großem Fortschritt** könnten beispielsweise sein:

- Kannst Du für Deinen Zusammenhang auch einen Funktionsterm aufschreiben? (inhaltliche Ausrichtung)
- Findest du eine weitere Darstellung, in der man den Zusammenhang auch darstellen kann? Wodurch wird dieser in der Darstellung deutlich, dass es sich um einen proportionalen Zusammenhang handelt? Welche Darstellung ist Deiner Einschätzung nach besser geeignet und warum? (Multiple Lösungswege einfordern)
- Kannst Du das einfacher mit einer (bzw. einer anderen) Software auf dem Computer/Tablet umsetzen?
- Findest du eine weitere Möglichkeit zu begründen, dass hier ein proportionaler Zusammenhang vorliegt? (Multiple Lösungswege einfordern)
- Bisher hast Du ja anhand von Messungen begründet, dass Umfang und Durchmesser proportional zueinander sind. Kannst Du Dir überlegen, warum das auch bei anderen Kreisen immer so sein muss? (Begründung anhand von weiteren Konzepte einfordern, hier ggf. informelles Argument über Ähnlichkeit/maßstäbliche Vergrößerung/Verkleinerung von Kreisen).

- Weiterhin ist denkbar, die genutzten Materialien durch vorgefertigte Tabellenvorlagen und Koordinatensysteme auf Papier bzw. in einer geeigneten Software vorzustrukturieren.

Als inhaltliche Unterstützung könnten die Anforderungen ggf. weiter reduziert werden, indem zentrale Eigenschaften von Proportionalitäten in Form eines Steckbriefs (wie er z. B. bereits im Unterricht erarbeitet wurde) als Unterstützung zur Verfügung gestellt wird.

### *Arbeitsergebnisse fachlich fruchtbar machen*

Mögliche (erwartbare) Lösungswege (es sind auch Mischformen und Teillösungen möglich):

- Messen der Werte; Darstellung in einem Koordinatensystem; Datenpunkte liegen auf einer Ursprungsgeraden; Schluss auf Proportionalität; Umfang für neue Kreise durch Ablesen ermitteln; Proportionalitätsfaktor als Steigung ermitteln; ggf. Funktionsterm aufstellen.
- Messen der Werte; Darstellung in einer Tabelle; Berechnung der verschiedenen Quotienten; Schluss auf Proportionalität aufgrund von Quotientengleichheit; Umfang durch Multiplikation des Durchmesser mit dem Quotienten ermitteln; Quotient als Proportionalitätsfaktor identifizieren; ggf. Funktionsterm aufstellen
- Messen der Werte; Darstellung in einer Tabelle; Analyse von Beziehungen zwischen Datenpunkten (z. B., wenn der Durchmesser verdoppelt wird, dann verdoppelt sich immer auch der Umfang; nur bei geeignet gewählten Gegenständen möglich!); Schluss auf Proportionalität aufgrund der Vervielfachungseigenschaft; Umfang für neue Kreise mittels Dreisatz aus schon gemessenen Umfängen, Proportionalitätsfaktor als Umfang des Kreises mit Durchmesser 1; ggf. Funktionsterm aufstellen
- Messen der Werte; (ggf. Darstellung in einer Tabelle); Schluss auf Proportionalität aufgrund von Vervielfachungseigenschaft (bei geeigneten Gegenständen); neuer Umfang durch Vervielfachung aus bestehenden Messwerten

### Fehler und Fehlstrategien

- Wesentlich an diesem Auftrag ist, dass nicht nur zwei oder wenige Wertepaare (Datenpunkte) verwendet werden, sondern eine größere Anzahl genutzt wird, um möglichst umfassend zu prüfen, ob es sich – trotz Messfehlern – um einen proportionalen Zusammenhang handelt.
- Eine eher oberflächliche Fehlerquelle sind Ungenauigkeiten der Messung. Diese sind kaum zu vermeiden. Deshalb sollte der Fokus nicht allein auf einer „exakten Messung“ liegen, sondern darauf mit genäherter Werten sinnvoll umzugehen. Beispielsweise ist zu diskutieren, wie damit umzugehen ist, wenn die Quotienten aus Durchmesser und Umfang zwischen den Messwerten in geringem Maße schwanken, wenn die Datenpunkte nicht exakt, aber fast auf einer Ursprungsgeraden liegen, oder wenn die Vervielfachungseigenschaft näherungsweise, aber nicht exakt rechnerisch nachgeprüft werden kann. Durch eine geeignete Auswahl an Gegenständen (ausreichend großer Durchmesser, sodass Ungenauigkeiten weniger ins Gewicht fallen), kann zu großen Ungenauigkeiten zumindest etwas entgegengewirkt werden.
- Ein wesentliches Problem kann das Bestimmen des Durchmessers von Kreisen sein, wenn der Mittelpunkt unbekannt ist. Hier sollten entsprechende Strategien bekannt sein oder im Vorlauf thematisiert werden (z. B. Einklemmen der Gegenstände zwischen zwei parallelen geraden Gegenständen).
- Ähnliches gilt in weniger starkem Maß für das Messen des Umfangs mit einer Schnur.
- Hinweis: Eine exakte Bestimmung von  $\pi$  ist in diesem Kontext nicht möglich (aber auch nicht nötig)

## Interessante Lösungswege

- Die Lösungen der Lernenden können sehr unterschiedliche Argumente für die Proportionalität enthalten (Lage der Datenpunkte im Graphen, Quotientengleichheit, Vervielfachungseigenschaft, ...). Es bietet sich an eine gewisse Bandbreite von Strategie zu diskutieren.
- Die Lösungen der Lernenden können sich stark darin unterscheiden, wie übersichtlich die Daten in einer bestimmten Darstellungsform (Graph, Tabelle, ...) geordnet werden. Besonders gelungene Lösungen können herausgehoben und deren Vorteile diskutiert werden.
- Zentraler Bezugspunkt für die Diskussion dieser Lösungen ist das Wissen über proportionale Zusammenhänge. Dieses kann genutzt werden, um die Lösungswege in einen gemeinsamen Kontext zu stellen.
- Lösungswege, die geometrisch argumentieren (ggf. Ähnlichkeit, oder maßstäbliche Vergrößerung/Verkleinerung von Kreisen) eröffnen eine interessante ergänzende Perspektive. Wenn sie auftreten, bietet es sich an sie zu diskutieren. Ob sie zwingend z. B. von der Lehrkraft eingebracht werden müssen, ist eine andere Frage – der Lehrplan fordert dies an dieser Stelle i.d.R. nicht ein.

## Digitale Medien und Lernprozesse unterstützen (Arbeitsauftrag Klausurtag 4)

### *Selbstreguliertes Arbeiten ermöglichen*

Der Arbeitsauftrag ist zunächst sehr offen in Bezug auf

- ...die zum Messen der Daten gewählten Strategien,
- ...die gewählten Darstellungsformen, Medien (Papier, Tabellenkalkulation, dynamische Geometrie-Software, ...) und
- ...die Eigenschaften von Proportionalitäten, die genutzt werden, um den Zusammenhang zu analysieren.

Dabei kann die Komplexität des Arbeitsauftrags (zunächst) reduziert werden, indem einzelne Aspekte festgelegt werden (z. B. Techniken des Messens vorher gezielt thematisieren und einüben, Beschränkung auf eine oder zwei Darstellungsformen oder ein Softwaresystem).

Die Komplexität des Arbeitsauftrags kann auch reduziert werden, indem die Lernenden aufgefordert werden ein geeignetes Softwaresystem zu nutzen, das ihnen z. B. aus dem Themenkomplex Proportionalitäten bereits bekannt ist (z. B. Tabellenkalkulationssoftware, dynamische Geometrie-Software). Dies reduziert die technisch-rechnerischen Anforderungen des Auftrags und fokussiert die Anforderungen auf die Analyse des Zusammenhangs.

Beispielsweise Tabellenkalkulationen stellen eine sinnvolle Möglichkeit dar, die Zusammenhänge zwischen Durchmesser und Umfang beim Kreis zu analysieren, da sie einfache Berechnungen entlasten und die verschiedenen Darstellungsformen genutzt und verknüpft werden können. Durch das Werkzeug können die Anforderungen des Auftrags auch für Lernende mit weniger sicherem Vorwissen angepasst und damit der Heterogenität der Lernenden Rechnung getragen werden. Jedoch setzt die Nutzung der Tabellenkalkulation ein notwendiges Maß an technischen Kompetenzen bei den Lernenden voraus (z. B. Tabellen selbst anlegen; Werte in einem Diagramm darstellen; Berechnungen mit einfache Bezügen), die den Lernenden aus vorherigen Einheiten bekannt sein müssen.

### *Selbstreguliertes Arbeiten anregen und unterstützen*

Offenheit ist eine wesentliche Voraussetzung, um selbstreguliertes Arbeiten zu ermöglichen, reicht alleine jedoch nicht aus. Zentral ist, dass die Lehrkraft den Fortschritt der Gruppen mindestens lose überwacht und die Anforderungen des Arbeitsauftrags ggf. nachreguliert. Anregungen dazu sind weiter oben in diesem Dokument aufgelistet. Zentraler Orientierungspunkt sollte dabei sein, dass der Kern der Sache – die Analyse des Zusammenhangs zwischen zwei Größen – von den Lernenden möglichst eigenständig (konstruktiv / interaktiv) bearbeitet wird.

Digitale Medien können einen Beitrag leisten die Arbeit der Lernenden etwas einfacher zu verfolgen, z. B. indem gemeinsam genutzte Tabellenkalkulationsblätter genutzt werden, die die Lehrkraft einfach einsehen kann, um sich einen ersten Eindruck vom Fortschritt der einzelnen Gruppen zu verschaffen und dann das direkte Gespräch mit bestimmten Gruppen zu suchen.

### *Arbeitsergebnisse fachlich fruchtbar machen*

Die oben genannten Lösungswege und möglichen Fehler bieten vielfältige Anhaltspunkte, um eine reichhaltige gemeinsame Besprechung des Auftrags zu ermöglichen. Digitale Arbeitsmaterialien wie z. B. kollaborativ nutzbare Tabellenblätter lassen sich hier niederschwellig in die Diskussion einbringen, sodass eine Bandbreite von Lösungen nach einer kurzen Präsentation der bearbeitenden Gruppe diskutiert werden kann.

Digitale Arbeitsmaterialien können auch genutzt werden, um vor einer gemeinsamen Diskussion eine Peer-Feedback-Aktivität (z. B. in einem Lernmanagementsystem wie mebis) zu integrieren, in der Lernende die Lösungen anderer Gruppen durcharbeiten, kommentieren und Fragen stellen.

Ebenso lassen sich wesentliche Ergebnisse der Diskussion alternativ zu analogen Medien (Tafel, Plakate) auch in einem kollaborativen Textdokument sammeln. Dasselbe gilt für die Ergebnisse der Gruppenarbeitsphasen, die ebenfalls recht leicht allen beteiligten Lernenden zugänglich gemacht werden können.